Examen de Matemáticas 4º de ESO

1ªEvaluación (Final Junio 2004)

Problema 1 *(1 puntos)* Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
$3\,;\ \ -2\,;\ \ \frac{1}{4}\,;\ \ 2,7728122812\ldots\,;\ \ 6,1133111333\ldots\,;\ \ \sqrt{5}\,;\ \ \pi;\ 4,230273027\ldots;$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 0
Solución:

- 3 es un número natural $3 \in N$.
- -2 es un número entero $-2 \in Z$.
- $\frac{1}{4}$ es un número racional $\frac{1}{4} \in Q$.
- $2,7728122812\ldots$ es un número racional $2,772\widehat{812} \in Q$.
- $6,1133111333\ldots\ldots$ es un número irracional.
- $\sqrt{5}$ es un número irracional.
- π es un número irracional.
- $4,230273027\ldots$ es un número racional $4,23\widehat{027} \in Q$
- $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ es un número irracional.
- 0 es un número natural $0 \in N$.

Problema 2 *(3 puntos)* Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\dfrac{x^2-6x-7}{x-3} \leq 0$
2. $\dfrac{x^2+x-6}{x+1} \geq 0$
3. $\dfrac{2x}{3} - 2x < \left(\dfrac{x-2}{6}\right)x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2-6x-7}{x-3}=\frac{(x+1)(x-7)}{x-3}\leq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,7)$	$(7,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+1)(x-7)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-1]\cup(3,7]$$

2.

$$\frac{x^2+x-6}{x+1}=\frac{(x+3)(x-2)}{x+1}\geq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2+x-6}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-3,-1)\cup[2,+\infty)$$

3.

$$\frac{2x}{3}-2x<\left(\frac{x-2}{6}\right)x\Longrightarrow -8x<x^2-2x$$

$$0<x^2+6x\Longrightarrow x(x+6)>0$$

	$(-\infty,-6)$	$(-6,0)$	$(0,+\infty)$
$x+6$	$-$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$
$x(x+6)$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-6)\cup(0,\infty)$$

Problema 3 *(2 puntos)*Resolver las siguientes ecuaciones

1. $\log(x^2-2)+1=\log(x+1)+\log(x-1)$

2. $3^{2x-1}+3^{x+1}-1=0$

Solución:

1.

$$\log(x^2-2)+1=\log(x+1)+\log(x-1)$$

$$\log(x^2-2)+\log 10=\log(x+1)+\log(x-1)$$

$$\log 10(x^2-2)=\log(x^2-1)\Longrightarrow 10x^2-20=x^2-1\Longrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{19}}{9}$$

La solución negativa no es válida, ya que no existen logaritmos de números negativos y, por tanto, $x=\dfrac{\sqrt{19}}{9}$.

2.

$$3^{2x-1}+3^{x+1}-1=0\Longrightarrow \frac{(3^x)^2}{3}+3\cdot 3^x-1=0$$

Si hacemos $t=3^x$ nos queda

$$\frac{t^2}{3}+3t-1=0\Longrightarrow t^2+9t-3=0\Longrightarrow t=0,321825;\;\; t=-9,321825$$

Deshaciendo el cambio de variable tendremos:

$$\left\{\begin{array}{ll} 3^x & =0,321825\Longrightarrow \log 3^x=\log 0,321825\Longrightarrow x\log 3=\log 0,321825\Longrightarrow \\ & \Longrightarrow x=\dfrac{\log 0,321825}{\log 3}=-1,03198 \\ & \\ 3^x & =-9,321825 \text{ no tiene solución} \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-x$, $Q(x)=2x^4+x^3-3x^2-x+1$
2. $P(x)=x^5-3x^3+2x^2$, $Q(x)=2x^5-3x^4+x^3$

Solución:

1. $P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-x$, $Q(x)=2x^4+x^3-3x^2-x+1$

$P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-x=x(x-1)^2(2x-1)$
$Q(x)=2x^4+x^3-3x^2-x+1=(x-1)(x+1)^2(2x-1)$

$\mathrm{MCD}(P(x),Q(x))=(x-1)(2x-1)$

$\mathrm{mcm}(P(x),Q(x))=x(x-1)^2(x+1)^2(2x-1)$

2. $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2$, $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3$

   $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x+2)(x-1)^2$
   $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 = x^3(x-1)(2x-1)$

   $\mathrm{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2(x-1)$

   $\mathrm{mcm}(P(x), Q(x)) = x^3(x-1)^2(x+2)(2x-1)$

Problema 5 *(2 puntos)*Efectuar:

1. $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{3x}{x^2-1} + \dfrac{1}{x+1}$
2. $\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{x}\right) : \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1}\right)$
3. $\dfrac{3x}{x-1} \cdot \dfrac{5}{x}$

Solución:

1. $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{3x}{x^2-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x^2-x-1}{x^2-1}$
2. $\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{x}\right) : \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1}\right) = \dfrac{x^3+1}{3x^2-x}$
3. $\dfrac{3x}{x-1} \cdot \dfrac{5}{x} = \dfrac{15}{x-1}$