Examen de Matemáticas 4º de ESO

Octubre 2003

Problema 1 *(1 puntos)* Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

-3 ; $0,56$; 0 ; π ; $1,1122111222\ldots$; $-\frac{3}{4}$; 2; $7,161616\ldots$; $3,21213214215\ldots$; $8,666\ldots$

Solución:

-3 es un número entero $-3 \in Z$.
$0,56$ es un número racional $0,56 \in Q$.
0 es un número natural $0 \in N$.
π es un número irracional.
$1,1122111222\ldots$ es un número irrracional.
$-\frac{3}{4}$ es un número racional $-\frac{3}{4} \in Q$.
2 es un número natural $2 \in N$.
$7,161616\ldots$ es un número racional $7,\widehat{16} \in Q$.
$3,21213214215\ldots$ es un número irracional.
$8,666\ldots$ es un número racional $8,\widehat{6} \in Q$

Problema 2 *(2 puntos)* Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1. $\{x \in R : -3 \leq x < 7\}$
2. $\{x \in R : 4 < x < 8\}$
3. $\{x \in R : x \geq 3\}$
4. $\{x \in R : x < -1\}$
5. $\{x \in R : |x - 3| \leq 5\}$
6. $\{x \in R : |x + 1| < 2\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$.

Solución:

1. $\{x \in R : -3 \leq x < 7\} = [-3, 7)$
2. $\{x \in R : 4 < x < 8\} = (4, 8)$
3. $\{x \in R : x \geq 3\} = [3, +\infty)$
4. $\{x \in R : x < -1\} = (-\infty, -1)$
5. $\{x \in R : |x - 3| \leq 5\} = [3 - 5, 3 + 5] = [-2, 8]$
6. $\{x \in R : |x + 1| < 2\} = (-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$

Problema 3 *(2 puntos)* Resolver las ecuaciones:

1. $\log \dfrac{10}{x} = 2 - 2\log x$
2. $3\log x - 2 = 2\log x$

Solución:

1.
$$\log 10 - \log x = 2 - 2\log x$$
$$1 - \log x = 2 - 2\log x$$
$$2\log x - \log x = 2 - 1$$
$$\log x = 1 \Longrightarrow x = 10$$

2.
$$3\log x - 2 = 2\log x$$
$$3\log x - 2\log x = 2$$
$$\log x = 2 \Longrightarrow x = 10^2 = 100$$

Problema 4 *(2 puntos)*Racionalizar las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{2}{\sqrt{5}};\ \dfrac{3}{\sqrt{3}}$
2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{5}};\ \dfrac{2}{5-\sqrt{5}}$

Solución:

1. $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

   $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{(1-(\sqrt{5})^2)} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{1-5} = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

   $\dfrac{2}{5-\sqrt{5}} = \dfrac{2(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} = \dfrac{2(5+\sqrt{5})}{(5^2-(\sqrt{5})^2)} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$

Problema 5 *(3 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{ll} \log(x\cdot y) & = 3 \\ \log\dfrac{x}{y} & = 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{ll} \log(x\cdot y) & = 3 \\ \log\dfrac{x}{y} & = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \log x+ & \log y = & 3 \\ \log x- & \log y = & 1 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{lll} u+ & v = & 3 \\ u- & v = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 2 \\ v = 1 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = 2 \\ \log y = v = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^2 = 100 \\ y = 10 \end{array}\right.$$