Examen de Matemáticas 4º de ESO

Junio 2004

Problema 1 *(2 puntos)* Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 15}}{x - 7}$$

Solución:

Como no existen raices cuadradas de números negativos, calculamos los intervalos en los que $x^2 + 2x - 15 = (x - 5)(x + 3) \geq 0$:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 5)$	$(5, +\infty)$
$x + 3$	$-$	$+$	$+$
$x - 5$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 2x - 15$	$+$	$-$	$+$

Si ahora quitamos el punto que anula el denominador nos queda:

$$Dom\, f(x) = (-\infty, -3] \cup [5, 7) \cup (7, +\infty)$$

Problema 2 *(1 puntos)* Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^3}$
2. $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1}$
3. $h(x) = \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^4 - 1}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 + (-x)^2 - 1}{(-x)^3} = -f(x) \Longrightarrow$ impar
2. $g(-x) = \dfrac{(-x)^2 + (-x) - 1}{(-x)^3 - 1} = -\dfrac{x^2 - x - 1}{x^3 + 1} \Longrightarrow$ ni par ni impar
3. $h(-x) = \dfrac{(-x)^4 + (-x)^2 - 1}{(-x)^4 - 1} = h(x) \Longrightarrow$ par

Problema 3 *(1 puntos)* Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (5x^2 - 3x - 3)$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (-x^4 + 3x - 2)$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{3x^3 - 3x + 1}{5x^3 + 3x - 1}$

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{-2x^4 - 2x + 3}{5x^2 - 2x - 4}$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^5 - x}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (5x^2 - 3x - 3) = \infty$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (-x^4 + 3x - 2) = -\infty$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{3x^3 - 3x + 1}{5x^3 + 3x - 1} = \dfrac{3}{5}$

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{-2x^4 - 2x + 3}{5x^2 - 2x - 4} = -\infty$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^5 - x} = 0$

Problema 4 *(3 punto)*Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1} \right)^{2x^2}$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{3x^4 + x^2 - 1}{x^4 + x + 1} \right)^{2x^3 - 1}$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x^6 + x^3 - 1}{3x^6 - x^3 - 1} \right)^{2x+1}$

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^3 - x + 1}{x^3 + 2} \right)^{x^2 - 1}$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{5x^4 + x^3 - x^2 + 1}{3x^4 - x^2 + 1} \right)^{7x - 1}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1} \right)^{2x^2} = e^{-2}$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{3x^4 + x^2 - 1}{x^4 + x + 1} \right)^{2x^3 - 1} = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x^6 + x^3 - 1}{3x^6 - x^3 - 1} \right)^{2x + 1} = 0$

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^3 - x + 1}{x^3 + 2} \right)^{x^2 - 1} = e^{-1}$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{5x^4 + x^3 - x^2 + 1}{3x^4 - x^2 + 1} \right)^{7x - 1} = +\infty$

Problema 5 *(2 punto)*Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 10x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{4 - \sqrt{x + 14}}{x - 2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 10x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} = -3$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{4 - \sqrt{x + 14}}{x - 2} = -\dfrac{1}{8}$

Problema 6 *(1 punto)*Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ x + 1 & \text{si} \quad 3 < x \end{cases}$$

1. Dibujar la gráfica de la función.

2. Estudiar la continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

1. Se dan valores y a continuación se dibuja.

2. En $x = 1$ hay una discontinuidad evitable, mientras que en $x = 3$ la discontinuidad es inevitable, hay un salto.