Examen de Matemáticas 4º de ESO

Diciembre 2003

Problema 1 *(1 puntos)* Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
$2\,;\quad -3\,;\quad \frac{3}{4}\,;\quad 3,7728122812\ldots\,;\quad 5,1133111333\ldots\,;\quad \sqrt{3}\,;\quad \pi;\ 3,230173017\ldots;$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 0

Solución:

- 2 es un número natural $2 \in N$.
- -3 es un número entero $-3 \in Z$.
- $\frac{3}{4}$ es un número racional $\frac{3}{4} \in Q$.
- $3,7728122812\ldots$ es un número racional $3,772\widehat{812} \in Q$.
- $5,1133111333\ldots\ldots$ es un número irracional.
- $\sqrt{3}$ es un número irracional.
- π es un número irracional.
- $3,230173017\ldots$ es un número racional $3,23\widehat{017} \in Q$
- $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ es un número irracional.
- 0 es un número natural $0 \in N$.

Problema 2 *(3 puntos)* Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2+x-6}{x+1} \le 0$
2. $\frac{x^2+4x-5}{x-2} \ge 0$
3. $\frac{2x+1}{2} - x < \left(\frac{x-2}{6}\right) x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2+x-6}{x+1} = \frac{(x+3)(x-2)}{x+1} \leq 0$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+3)(x-2)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-3] \cup (-1,2]$$

2.

$$\frac{x^2+4x-5}{x-2} = \frac{(x+5)(x-1)}{x-2} \geq 0$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2+4x-5}{x-2}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-5,1] \cup (2,+\infty)$$

3.

$$\frac{2x+1}{2} - x < \left(\frac{x-2}{6}\right)x \Longrightarrow 6x+3-6x < x^2-2x$$

$$3 < x^2-2x \Longrightarrow -x^2+2x+3 < 0 \Longrightarrow x^2-2x-3 > 0$$

$$x^2-2x-3 > 0 \Longrightarrow (x+1)(x-3) > 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-1) \cup (3,\infty)$$

Problema 3 *(4 puntos)* Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x-1)-\log(x+1)=1-\log x$
2. $\log x+1=\log x^2$
3. $3^{2x-1}+3^{x+1}-2=0$
4. $3^{x+1}+3^{x-1}-1=0$

Solución:

1.

$$\log(x-1)-\log(x+1)=1-\log x \Longrightarrow \log\frac{x-1}{x+1}=\log\frac{10}{x}$$

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{10}{x}\Longrightarrow x^2-11x-10=0\Longrightarrow$$
$$x=11,84428877,\quad x=-0,8442887702$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x=11,84428877$

2.

$$\log x+1=\log x^2\Longrightarrow \log 10x=\log x^2\Longrightarrow 10x=x^2\Longrightarrow x=0,\quad x=10$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos del cero, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x=10$

3.

$$3^{2x-1}+3^{x+1}-2=0\Longrightarrow\frac{3^{2x}}{3}+3\cdot 3^x-2=0\Longrightarrow 3^{2x}+9\cdot 3^x-6=0$$

Haciendo el cambio de variables $u=2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2+9u-6=0\Longrightarrow u=0,6234753829,\quad u=-9,623475382$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u=0,6234753829=3^x\Longrightarrow \log 0,6234753829=\log 3^x\Longrightarrow$$

$$x\log 3=\log 0,6234753829\Longrightarrow$$
$$x=\frac{\log 0,6234753829}{\log 3}=-0,4300388787$$

En el otro caso, $u=-9,623475382=3^x$ no es posible obtener solución.

4.

$$3^{x+1}+3^{x-1}-1=0 \Longrightarrow 3\cdot 3^x+\frac{3^x}{3}-1=0 \Longrightarrow 10\cdot 3^x-3=0 \Longrightarrow$$

$$3^x=0,3 \Longrightarrow \log 3^x=\log 0,3 \Longrightarrow x\log 3=\log 0,3 \Longrightarrow$$

$$x=\frac{\log 0,3}{\log 3}=-1,095903274$$

Problema 4 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\log\frac{x}{y^2} & = & 1\\ \log(x^2y) & = & 2\end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\log\frac{x}{y^2} & = & 1\\ \log(x^2y) & = & 2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl}\log x- & 2\log y = & 1\\ 2\log x+ & \log y = & 2\end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x=u$ y $\log y=v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl}u- & 2v = & 1\\ 2u+ & v = & 2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}u=1\\ v=0\end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l}\log x=u=1\\ \log y=v=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=10\\ y=1\end{array}\right.$$