Examen de Matemáticas 4º de ESO

Noviembre 2003

Problema 1 *(2 puntos)* Resolver las ecuaciones:

1. $3^{2x-1} - 2 \cdot 9^x + 5 = 0$
2. $2^{2x+1} - 2^{x-1} - 3 = 0$

Solución:

1.

$$3^{2x-1} - 2 \cdot 9^x + 5 = 0$$
$$\frac{3^{2x}}{3} - 2 \cdot 9^x + 5 = 0 \Longrightarrow \frac{9^x}{3} - 2 \cdot 9^x + 5 = 0$$
$$9^x - 6 \cdot 9^x + 15 = 0 \Longrightarrow -5 \cdot 9^x = -15 \Longrightarrow 9^x = 3$$
$$3^{2x} = 3 \Longrightarrow 2x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

2.

$$2^{2x+1} - 2^{x-1} - 3 = 0$$
$$2 \cdot 2^{2x} - \frac{2^x}{2} - 3 = 0, \quad t = 2^x$$
$$2t^2 - \frac{t}{2} - 3 = 0 \Longrightarrow 4t^2 - t - 6 = 0$$
$$t = 1,356107225, \quad t = -1,106107225$$

Deshaciendo el cambio de variable nos queda:

$$t = 1,356107225 = 2^x \Longrightarrow x \log 2 = \log 1,356107225$$
$$x = \frac{\log 1,356107225}{\log 2} = 0,4394712545$$

Cuando $t = -1,106107225$ la ecuación $2^x = -1,106107225$ no tiene solución.

Problema 2 *(2 puntos)* Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x-1) - 2 = \log(x+1) - \log x$
2. $2 \log x - \log(x-1) = 1$

Solución:

1.

$$\log(x-1)-2=\log(x+1)-\log x$$

$$\log\frac{x-1}{100}=\log\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{x-1}{100}=\frac{x+1}{x}$$

$$x^2-x=100x+100 \Longrightarrow x^2-101x-100=0$$

$$x=-0.9805788623,\quad x=101.9805788$$

La solución $x=-0.9805788623$ no es válida, ya que al sustituirla en la primera ecuación tendríamos $\log(-1,98)-2=\log(0,02)-\log(-0,98)$, y no existen logaritmos de números negativos.

2.

$$2\log x-\log(x-1)=1$$

$$\log\frac{x^2}{x-1}=\log 10$$

$$\frac{x^2}{x-1}=10 \Longrightarrow x^2=10x-10 \Longrightarrow x^2-10x-10=0$$

$$x=1.127016653,\quad x=8.872983346$$

Problema 3 *(3 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 3^{x-1}+ & 2^y = & 2\\ 3^{x+1}- & 2^{y+2} = & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 3^{x-1}+ & 2^y = & 2\\ 3^{x+1}- & 2^{y+2} = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} \dfrac{3^x}{3}+ & 2^y = & 2\\ \\ 3\cdot 3^x- & 4\cdot 2^y = & 5 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $3^x=u$ y $2^y=v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} \dfrac{u}{3}+ & v = & 2\\ \\ 3u- & 4v = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=3\\ v=1 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} 3^x=u=3\\ 2^y=v=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=0 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(3 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{ll} \log(x^3\cdot y) & = 2 \\ \log\dfrac{x}{y^2} & = 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{ll} \log(x^3\cdot y) & = 2 \\ \log\dfrac{x}{y^2} & = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 3\log x+ & \log y = & 2 \\ \log x- & 2\log y = & 1 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3u+ & v = & 2 \\ u- & 2v = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \dfrac{5}{7} \\ \\ v = -\dfrac{1}{7} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = \dfrac{5}{7} \\ \\ \log y = -\dfrac{1}{7} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^{\frac{5}{7}} \Longrightarrow x = 5,179474679 \\ \\ y = 10^{-\frac{1}{7}} = 0,7196856730 \end{array}\right.$$