

Problemas de Matemáticas 4º de ESO

Marzo 2003

1 Termino general:

1. Calcular el término primero y noveno de las siguientes sucesiones:

(a) $a_n = 2n^2 + 3$

Solución:

$$a_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 = 5, \quad a_9 = 2 \cdot 9^2 + 3 = 167$$

(b) $b_n = \frac{2n + 5}{n + 1}$

Solución:

$$b_1 = \frac{2 \cdot 1 + 5}{1 + 1} = \frac{7}{2} \quad b_9 = \frac{2 \cdot 9 + 5}{9 + 1} = \frac{23}{10}$$

(c) $c_n = (-1)^n \cdot 2^n$

Solución:

$$c_1 = (-1)^1 \cdot 2^1 = -2 \quad c_9 = (-1)^9 \cdot 2^9 = -512 \quad c_{12} = (-1)^{12} \cdot 2^{12} = 4096$$

2. Ahora calcular los términos segundo y séptimo de las siguientes sucesiones:

(a) $a_n = n^3 - 1$

Solución

$$a_2 = 2^3 - 1 = 7 \quad a_7 = 7^3 - 1 = 342$$

(b) $b_n = \frac{2n^2 - 1}{2n - 1}$

Solución:

$$b_2 = \frac{2 \cdot 2^2 - 1}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{7}{3} \quad b_7 = \frac{2 \cdot 7^2 - 1}{2 \cdot 7 - 1} = \frac{97}{13}$$

(c) $c_n = (-1)^n \cdot n^n$

Solución

$$c_2 = (-1)^2 \cdot 2^2 = 4 \quad c_7 = (-1)^7 \cdot 2^7 = -7^7 = -823543$$

3. Comprobar si los números 1, 6, 5, $\frac{9}{4}$, $\frac{18}{5}$, 4 y $\frac{7}{2}$ son términos de la sucesión $a_n = \frac{3n+6}{n}$

Solución

- $\frac{3n+6}{n} = 1 \implies n = -3$ luego el 1 no pertenece a la sucesión.
- $\frac{3n+6}{n} = 6 \implies n = 2$ luego el 6 es el segundo término de la sucesión.
- $\frac{3n+6}{n} = 5 \implies n = 3$ luego el 5 es el tercer término de la sucesión.
- $\frac{3n+6}{n} = \frac{9}{4} \implies n = -8$ luego $\frac{9}{4}$ no es término de la sucesión.
- $\frac{3n+6}{n} = \frac{18}{5} \implies n = 10$ luego el $\frac{18}{5}$ es el décimo término de la sucesión.
- $\frac{3n+6}{n} = 4 \implies n = 6$ luego el 4 es el sexto término de la sucesión.
- $\frac{3n+6}{n} = \frac{7}{2} \implies n = 12$ luego el $\frac{7}{2}$ es término duodécimo de la sucesión.

4. Hallar el término general de las siguientes sucesiones:

(a) 4, 9, 14, 19, 24,...

Solución:

$$a_n = 5n - 1$$

(b) 5, 11, 17, 23, 29,...

Solución:

$$a_n = 6n - 1$$

(c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$

Solución:

Fijándonos un poco nos damos cuenta que el denominador lo forman los números pares, $2n$, mientras que el numerador es el denominador menos uno $2n - 1$, luego el término general buscado sería $a_n = \frac{2n - 1}{2n}$

(d) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$

Solución:

$$a_n = \frac{n - 1}{2}$$

(e) $3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, \dots$

Solución:

$$a_n = n^2 + 2$$

(f) $-3, 9, -27, 81, -243, \dots$

Solución:

$$a_n = (-1)^n \cdot 3^n$$

2 Sucesiones crecientes y acotadas:

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son monótonas crecientes o decrecientes y cuyos términos generales son:

(a) $a_n = \frac{2n + 1}{n}$

Solución

Obtenemos los siguientes términos $3, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{13}{6}, \dots$, que cumplen

$$3 > \frac{5}{3} > \frac{7}{3} > \frac{9}{4} > \frac{13}{6} > \dots, \text{ luego la sucesión es decreciente.}$$

(b) $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$

Solución

Obtenemos los siguientes términos $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$, luego la sucesión no es creciente ni decreciente.

(c) $c_n = \frac{2n-1}{n+1}$

Solución

Obtenemos los siguientes términos Obtenemos los siguientes términos $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{9}{6}, \dots$, que cumplen $\frac{1}{2} < 1 < \frac{5}{4} < \frac{7}{5} < \frac{9}{6} < \dots$, luego la sucesión es creciente.

(d) $d_n = 7$

Solución:

Obtenemos los siguientes términos $7, 7, 7, 7, 7, 7, \dots$, luego la sucesión es creciente y decreciente.

(e) $e_n = n - 3^n$

Solución:

Obtenemos los siguientes términos $-2, -7, -24, -77, \dots$, luego la sucesión cumple $-2 > -7 > -24 > -77 > \dots$ y por tanto es decreciente.

2. Indicar si están acotadas las siguientes sucesiones, que tienen por término general:

(a) $a_n = 3n - 2$

Solución:

$\{a_n\} = \{1, 4, 7, 10, \dots\} \implies 1 < 4, 1 < 7, 1 < 10, \dots \implies$ la sucesión está acotada inferiormente por 1, pero no lo está superiormente.

(b) $b_n = \frac{3n-1}{n+1}$

Solución:

$$\{b_n\} = \left\{1, \frac{5}{3}, 2, \frac{11}{5}, \dots\right\}$$

Tenemos $1 \leq 1, 1 \leq \frac{5}{3}, 1 \leq 2, 1 \leq \frac{11}{5}, \dots$, luego la sucesión está acotada inferiormente por 1.

Tenemos $3 \geq 1, 3 \geq \frac{5}{3}, 3 \geq 2, 3 \geq \frac{11}{5}, \dots$, luego la sucesión

está acotada superiormente 3.

En conclusión, la sucesión está acotada.

(c) $c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3n}$

Solución:

$$\{c_n\} = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \dots\right\}$$

Tenemos $-\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \leq \frac{1}{6}, -\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{9}, -\frac{1}{3} \leq \frac{1}{12}, \dots$, luego $-\frac{1}{3}$ es una cota inferior.

$\frac{1}{6} \geq -\frac{1}{3}, \frac{1}{6} \geq \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \geq -\frac{1}{9}, \frac{1}{6} \geq \frac{1}{12}, \dots$, luego $\frac{1}{6}$ es una cota superior.

En conclusión, la sucesión está acotada.

(d) $d_n = (-1)^{n+1}(n+3)$

Solución:

$\{d_n\} = \{4, -5, 6, -7, 8, -9, \dots\}$ no tiene ni cota superior ni cota inferior; no está acotada.

3 Progresiones aritméticas

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son aritméticas

(a) $1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$

Solución:

La diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es siempre la misma $d = 4$ por tanto, se trata de una progresión aritmética de razón $d = 4$, cuyo primer término es $a_1 = 1$ y cuyo término general será $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)4 = 4n - 3$.

(b) $1, 4, 8, 13, 19, 26, \dots$

Solución:

La diferencia entre términos consecutivos no es siempre la misma, y por tanto, no es una progresión aritmética.

(c) $-2, -5, -8, -11, -14, \dots$

Solución:

La diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es siempre la misma $d = -3$ por tanto, se trata de una progresión aritmética de razón $d = -3$, cuyo primer término es $a_1 = -2$ y cuyo término general será $a_n = a_1 + (n-1)d = -2 + (n-1)(-3) = 1 - 3n$.

(d) $1, -2, 3, -4, 5, \dots$

Solución:

La diferencia entre términos consecutivos no es siempre la misma, y por tanto, no es una progresión aritmética.

(e) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots$

Solución:

La diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es siempre la misma $d = \frac{1}{2}$ por tanto, se trata de una progresión aritmética de razón $d = \frac{1}{2}$, cuyo primer término es $a_1 = 1$ y cuyo término general será $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

2. Escribir los cuatro primeros términos de las sucesiones siguientes, y calcular en cada una de ellas el término que ocupa el lugar 10 y el término general.

(a) El primero es -2 y la diferencia es $d = \frac{1}{5}$

Solución:

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = -2 + \frac{1}{5} = -\frac{9}{5}$$

$$a_3 = -2 + 2 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{8}{5}$$

$$a_4 = -2 + 3 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{7}{5}$$

$$a_{10} = -2 + 9 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -2 + (n-1)\frac{1}{5} = \frac{n-11}{5}$$

(b) El segundo vale -4 y la diferencia es $d = 3$.

Solución:

$$a_2 = a_1 + d \implies -4 = a_1 + 3 \implies a_1 = -7$$

$$a_1 = -7$$

$$a_2 = -4$$

$$a_3 = -7 + 2 \cdot 3 = -1$$

$$a_4 = -7 + 3 \cdot 3 = 2$$

$$a_{10} = -7 + 9 \cdot 3 = 20$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -7 + (n-1)3 = 3n - 10$$

(c) El primero vale 16 y el segundo 12.

Solución:

$$a_1 = 16$$

$$a_2 = 12 \implies 12 = 16 + d \implies d = -4$$

$$a_3 = 16 + 2 \cdot (-4) = 8$$

$$a_4 = 16 + 3 \cdot (-4) = 4$$

$$a_{10} = 16 + 9 \cdot (-4) = -20$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 16 + (n-1)(-4) = 20 - 4n$$

3. En las siguientes progresiones aritméticas, hallar el primer término, la diferencia, el término general y el término a_{12}

- (a) El tercer término es -5 y el cuarto -9

Solución:

$$\begin{aligned}d &= -9 - (-5) = -4 \\a_3 &= a_1 + 2(-4) \implies a_1 = -5 + 8 = 3 \\a_n &= a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)(-4) = 7 - 4n \\a_{12} &= 3 + 11(-4) = -41\end{aligned}$$

- (b) El cuarto término es $\sqrt{2}$ y el noveno $3 + \sqrt{2}$.

Solución:

$$\begin{aligned}a_9 &= a_4 + (9-4)d \implies 3 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 5d \implies d = \frac{3}{5} \\a_4 &= a_1 + 3d \implies \sqrt{2} = a_1 + \frac{9}{5} \implies a_1 = \sqrt{2} - \frac{9}{5} \\a_n &= a_1 + (n-1)d = \sqrt{2} - \frac{9}{5} + (n-1)\frac{3}{5} = \frac{5\sqrt{2} - 11 + 3n}{5} \\a_{12} &= \frac{5\sqrt{2} - 11 + 3 \cdot 12}{5} = 5 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

4. Calcular el término a_{13} de las siguientes progresiones aritméticas:

- (a) La diferencia es igual al cuarto término, y el noveno vale 8.

Solución:

$$\begin{aligned}a_9 &= a_4 + (9-4)d \implies 8 = d + 5d \implies d = \frac{4}{3} \\a_n &= a_9 + (n-9)\frac{4}{3} = \frac{4n-12}{3} \\a_{13} &= a_9 + (13-9)\frac{4}{3} = \frac{40}{3}\end{aligned}$$

- (b) El quinto término es $-\frac{1}{2}$ y el décimo es 5.

Solución:

$$\begin{aligned}a_{10} &= a_5 + (10-5)d \implies 5 = -\frac{1}{2} + 5d \implies d = \frac{11}{10} \\a_{13} &= a_{10} + 3d = 5 + 3 \cdot \frac{11}{10} = \frac{83}{10}\end{aligned}$$

5. Calcular el término a_{15} de las siguientes progresiones aritméticas.

- (a) La diferencia es igual al segundo término y el término octavo vale -6.

Solución:

$$\begin{aligned}a_8 &= a_2 + (8 - 2)d \implies -6 = d + 6d \implies d = -\frac{6}{7} \\a_{15} &= a_8 + (15 - 8)d = -6 + 7\left(-\frac{6}{7}\right) = -12\end{aligned}$$

- (b) El tercer término es $-\frac{1}{3}$ y el noveno es 9.

Solución:

$$\begin{aligned}a_9 &= a_3 + (9 - 3)d \implies 9 = -\frac{1}{3} + 6d \implies d = \frac{14}{9} \\a_{15} &= a_9 + (15 - 9)d = 9 + 6 \cdot \frac{14}{9} = \frac{55}{3}\end{aligned}$$

6. Las edades de cinco hermanos están en progresión aritmética y suman 40 años. Si la edad del mayor es cinco veces la del pequeño, ¿cuál es la edad de cada uno de ellos?.

Solución:

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = 40 \implies a_1 + a_5 = 16$$

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 16 \\ a_5 = 5a_1 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_5 = 10 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \implies 10 = 2 + 4d \implies d = 2$$

Luego $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$ y $a_5 = 10$.

7. Hallar la suma de los 30 primeros términos de la progresión aritmética 2, 8, 14, 20, ...

Solución:

Tenemos $a_1 = 2$ y $d = 6$, luego $a_{30} = 2 + (30 - 1) \cdot 6 = 176$

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{2 + 176}{2} \cdot 30 = 2670$$

8. Calcular la suma de los 50 primeros números pares.

Solución:

Tenemos $a_1 = 2$, $d = 2 \implies a_{50} = 2 + 49 \cdot 2 = 100$

$$S_{100} = \frac{2 + 100}{2} \cdot 50 = 2550$$

9. En una progresión aritmética en la que $a_4 = 12$ y $d = \frac{1}{2}$. Calcular la suma de los primeros 20 primeros números.

Solución:

$$a_4 = a_1 + 3d \implies 12 = a_1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \implies a_1 = \frac{21}{2}$$

$$a_{20} = a_4 + 19d = 12 + 19 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{\frac{21}{2} + 20}{2} \cdot 20 = 305$$

10. En una progresión aritmética sea $a_4 = \frac{3}{8}$ y $a_7 = 6$. Calcular la suma de los 20 primeros términos.

Solución:

$$a_7 = a_4 + 3d \implies 6 = \frac{3}{8} + 3d \implies d = \frac{15}{8}$$

$$a_7 = a_1 + 6d \implies 6 = a_1 + 6 \cdot \frac{15}{8} \implies a_1 = -\frac{11}{4}$$

$$a_{20} = a_7 + 13d = 6 + 13 \cdot \frac{15}{8} = \frac{243}{8}$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{-\frac{11}{4} + \frac{243}{8}}{2} \cdot 20 = \frac{1105}{4}$$

11. ¿Cuántos términos hay que sumar a la progresión 38, 35, 32, 29, ... para obtener como resultado 245.

Solución:

$$d = -3, \quad a_1 = 38, \quad a_n = a_1 + (n-1)d = 38 + (n-1)(-3) = 41 - 3n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \implies 245 = \frac{38 + a_n}{2} \cdot n = \frac{38 + 41 - 3n}{2} \cdot n \implies$$

$$490 = 79n - 3n^2 \implies 3n^2 - 79n + 490 = 0 \implies \begin{cases} n = 10 \\ n = \frac{49}{3} \end{cases}$$

Luego la solución válida es $n = 10$.

4 Progresiones geométricas

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son geométricas

(a) 1, 4, 7, 11, 16, 22, ...

Solución:

$\frac{4}{1}$, es distinto de $\frac{16}{11}$, por ejemplo, esto quiere decir que el cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión no es constante y por tanto no es una progresión geométrica.

(b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ...

Solución:

$\frac{0,1}{1} = \frac{0,01}{0,1} = \frac{0,001}{0,01} = \dots = 0,1$, luego el cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión es siempre el mismo y por tanto es una progresión geométrica de razón $r = 0,1$ cuyo primer término es $a_1 = 1$ y su término general será $a_n = 0,1^{n-1}$.

(c) $4^{-3}, 4^{-2}, 4^{-1}, 1, 4, 4^2, \dots$

Solución:

$$\frac{4^{-2}}{4^{-3}} = \frac{4^{-1}}{4^{-2}} = \frac{1}{4^{-1}} = \frac{4}{1} = \dots = 4$$

Luego es una progresión geométrica de razón $r = 4$, cuyo primer término es $a_1 = 4^{-3}$ y su término general es $a_n = 4^{-3} \cdot 4^{n-1} = 4^{n-4}$

(d) $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \dots$

Solución:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \neq \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \text{ luego no es una progresión geométrica.}$$

(e) $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, 5^2, 5^3, \dots$

Solución:

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{25}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{1} = \dots = 5 \text{ luego se trata de una progresión geométrica de razón } r = 5 \text{ cuyo primer término es } a_1 = \frac{1}{25} \text{ y su término general es } a_n = \frac{1}{25} \cdot 5^{n-1} = 5^{n-3}$$

2. En una progresión geométrica con $a_2 = \frac{1}{3}$ y $r = \frac{2}{3}$, calcular a_1 , a_n y a_{10} .

Solución:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r \implies a_1 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \\ a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} \\ a_{10} &= \frac{2^{10-2}}{3^{10-1}} = \frac{2^8}{3^9} = \frac{256}{19683} \end{aligned}$$

3. Escribe los cinco primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = \sqrt{2}$. Halla el término general y el lugar que ocupa el término que vale 64.

Solución:

$$a_n = 2 \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = 2^{\frac{n+1}{2}}$$

$$a_1 = 2, a_2 = 2\sqrt{2}, a_3 = 4, a_4 = 4\sqrt{2}, a_5 = 8$$

$$2^{\frac{n+1}{2}} = 64 = 2^6 \implies \frac{n+1}{2} = 6 \implies n = 11$$

4. Calcular el término a_1 y la razón de una progresión geométrica si $a_5 = -\frac{4}{3}$ y $a_8 = \frac{32}{3}$

Solución:

$$a_8 = a_5 \cdot r^{8-5} \implies \frac{32}{3} = -\frac{4}{3} \cdot r^3 \implies r = \sqrt[3]{-\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$a_5 = a_1 \cdot (-2)^{5-1} \implies a_1 = \frac{-\frac{4}{3}}{(-2)^{5-1}} = -\frac{1}{12}$$

5. Calcular el término a_{12} de una progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros terminos es 16 y la razón vale 3.

Solución:

$$a_1 + a_2 = 16 \implies a_1 + a_1 \cdot r = a_1(1 + r) = 16 \implies a_1(1 + 3) = 16 \implies a_1 = \frac{16}{4} = 4$$

$$a_{12} = a_1 \cdot r^{12-1} = 4 \cdot 3^{11} = 708588$$

6. Calcular el término a_9 de una progresión geométrica creciente sabiendo que la suma de los tres primeros términos es 42 y que el segundo vale 12.

Solución:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 42 \implies \frac{a_2}{r} + a_2 + a_2 \cdot r = 42 \implies \frac{12}{r} + 12 + 12r = 42 \implies 12 + 12r + 12r^2 = 42r \implies 12r^2 - 30r + 12 = 0 \implies \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ r = 2 \end{cases}$$

Cuando $r = \frac{1}{2}$ la progresión es decreciente, luego la razón válida será $r = 2$.

$$a_9 = a_2 \cdot r^{9-2} = 12 \cdot 2^7 = 1536$$

7. ¿Cuánto valen los ángulos interiores de un cuadrilátero si están en progresión geométrica y el ángulo mayor es ocho veces el ángulo menor?.

Solución:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 360^\circ \implies a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 = 360^\circ$$

$$a_4 = 8a_1 \implies 8a_1 = a_1 \cdot r^3 \implies r = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$a_1 + 2a_1 + 4a_1 + 8a_1 = 360^\circ \implies a_1 = 24^\circ$$

Los ángulos son: 24° , 48° , 96° y 192° .

8. En una progresión geométrica el primer término es 5 y la razón vale -3. Calcular la suma de los diez primeros términos de ella.

Solución:

$$a_{10} = 5 \cdot (-3)^9 = -98415$$

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{-98415 \cdot (-3) - 5}{-3 - 1} = -73810$$

9. En una progresión geométrica de razón $-\frac{1}{2}$ el primer término es 8. Calcular el producto de los cinco primeros términos.

Solución:

$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}$$

$$P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{\left(8 \cdot \frac{1}{2}\right)^5} = 32$$

10. El cuarto término de una progresión geométrica es 4 y el noveno es 128. Calcular:

(a) La razón y el término general.

Solución:

$$a_9 = a_4 \cdot r^5 \implies r = \sqrt[5]{\frac{128}{4}} = 2$$

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-4} = 2^{n-2}$$

(b) La suma y el producto de los seis primeros términos.

Solución:

$$a_6 = a_4 \cdot 2^2 = 16; \quad a_4 = a_1 \cdot 2^3 \implies a_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$S_6 = \frac{16 \cdot 2 - \frac{1}{2}}{2 - 1} = \frac{667}{2}$$

$$P_6 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 16\right)^6} = 512$$

11. El primer día entrenamos 7 minutos y cada día siguiente entrenamos el doble que el día anterior. ¿Cuánto tiempo hemos entrenado después de una semana?

Solución:

$$a_1 = 7, \quad r = 2 \implies a_n = 7 \cdot 2^{n-1} \implies a_7 = 7 \cdot 2^6 = 448$$

$$S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{448 \cdot 2 - 7}{2 - 1} = 889 \text{ minutos, es decir, 14 horas 49 minutos.}$$

12. Hallar la suma de los términos de las siguientes progresiones geométricas ilimitadas.

(a) 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$, ...

Solución:

$$a_1 = 16, \quad r = \frac{1}{4} \implies S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{16}{1-\frac{1}{4}} = \frac{64}{3}$$

(b) 0,4; 0,04; 0,004; 0,0004;...

Solución:

$$a_1 = 0,4, \quad r = \frac{1}{10} \implies S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0,4}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{9}$$

13. Si los términos de una progresión geométrica decreciente suman 12 y el primer término es 2, ¿cuál es la razón?. Escribir seis términos de esta progresión.

Solución:

$$12 = \frac{2}{1-r} \implies r = \frac{2}{3}$$

$$a_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{8}{9}$$

$$a_4 = \frac{16}{27}, \quad a_5 = \frac{32}{81}, \quad a_6 = \frac{64}{243}$$