

Problemas de Matemáticas 4º de ESO

Marzo 2003

1 Termino general:

1. Calcular el término primero y noveno de las siguientes sucesiones:

(a) $a_n = 2n^2 + 3$

(b) $b_n = \frac{2n + 5}{n + 1}$

(c) $c_n = (-1)^n \cdot 2^n$

2. Ahora calcular los términos segundo y séptimo de las siguientes sucesiones:

(a) $a_n = n^3 - 1$

(b) $b_n = \frac{2n^2 - 1}{2n - 1}$

(c) $c_n = (-1)^n \cdot n^n$

3. Comprobar si los números 1, 6, 5, $\frac{9}{4}$, $\frac{18}{5}$, 4 y $\frac{7}{2}$ son términos de la sucesión $a_n = \frac{3n + 6}{n}$

4. Hallar el término general de las siguientes sucesiones:

(a) 4, 9, 14, 19, 24,...

(b) 5, 11, 17, 23, 29,...

(c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$

(d) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$

(e) $3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, \dots$

2 Sucesiones crecientes y acotadas:

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son monótonas crecientes o decrecientes y cuyos términos generales son:

(a) $a_n = \frac{2n+1}{n}$

(b) $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$

(c) $c_n = \frac{2n-1}{n+1}$

(d) $d_n = 7$

(e) $e_n = n - 3^n$

2. Indicar si están acotadas las siguientes sucesiones, que tienen por término general:

(a) $a_n = 3n - 2$

(b) $b_n = \frac{3n-1}{n+1}$

(c) $c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3n}$

(d) $d_n = (-1)^{n+1}(n + 3)$

3 Progresiones aritméticas

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son aritméticas

(a) $1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$

(b) $1, 4, 8, 13, 19, 26, \dots$

(c) $-2, -5, -8, -11, -14, \dots$

(d) $1, -2, 3, -4, 5, \dots$

(e) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots$

2. Escribir los cuatro primeros términos de las sucesiones siguientes, y calcular en cada una de ellas el término que ocupa el lugar 10 y el término general.

(a) El primero es -2 y la diferencia es $d = \frac{1}{5}$

(b) El segundo vale -4 y la diferencia es $d = 3$.

(c) El primero vale 16 y el segundo 12.

3. En las siguientes progresiones aritméticas, hallar el primer término, la diferencia, el término general y el término a_{12}

(a) El tercer término es -5 y el cuarto -9

(b) El cuarto término es $\sqrt{2}$ y el noveno $3 + \sqrt{2}$.

4. Calcular el término a_{13} de las siguientes progresiones aritméticas:

(a) La diferencia es igual al cuarto término, y el noveno vale 8.

Solución:

$$a_9 = a_4 + (9 - 4)d \implies 8 = d + 5d \implies d = \frac{4}{3}$$

$$a_n = a_9 + (n - 9)\frac{4}{3} = \frac{4n - 12}{3}$$

$$a_{13} = a_9 + (13 - 9)\frac{4}{3} = \frac{40}{3}$$

(b) El quinto término es $-\frac{1}{2}$ y el décimo es 5.

5. Calcular el término a_{15} de las siguientes progresiones aritméticas.

(a) La diferencia es igual al segundo término y el término octavo vale -6.

(b) El tercer término es $-\frac{1}{3}$ y el noveno es 9.

6. Las edades de cinco hermanos están en progresión aritmética y suman 40 años. Si la edad del mayor es cinco veces la del pequeño, ¿cuál es la edad de cada uno de ellos?.

7. Hallar la suma de los 30 primeros términos de la progresión aritmética 2, 8, 14, 20, ...
8. Calcular la suma de los 50 primeros números pares.
9. En una progresión aritmética en la que $a_4 = 12$ y $d = \frac{1}{2}$. Calcular la suma de los primeros 20 primeros números.
10. En una progresión aritmética sea $a_4 = \frac{3}{8}$ y $a_7 = 6$. Calcular la suma de los 20 primeros términos.
11. ¿Cuántos términos hay que sumar a la progresión 38, 35, 32, 29, ... para obtener como resultado 245.

4 Progresiones geométricas

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son geométricas
 - (a) 1, 4, 7, 11, 16, 22, ...
 - (b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ...
 - (c) 4^{-3} , 4^{-2} , 4^{-1} , 1, 4, 4^2 , ...
 - (d) $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, ...
 - (e) $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{5}$, 1, 5, 5^2 , 5^3 , ...

2. En una progresión geométrica con $a_2 = \frac{1}{3}$ y $r = \frac{2}{3}$, calcular a_1 , a_n y a_{10} .
3. Escribe los cinco primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = \sqrt{2}$. Halla el término general y el lugar que ocupa el término que vale 64.
4. Calcular el término a_1 y la razón de una progresión geométrica si $a_5 = -\frac{4}{3}$ y $a_8 = \frac{32}{3}$
5. Calcular el término a_{12} de una progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros terminos es 16 y la razón vale 3.
6. Calcular el término a_9 de una progresión geométrica creciente sabiendo que la suma de los tres primeros términos es 42 y que el segundo vale 12.
7. ¿Cuánto valen los ángulos interiores de un cuadrilátero si están en progresión geométrica y el ángulo mayor es ocho veces el ángulo menor?.
8. En una progresión geométrica el primer término es 5 y la razón vale -3. Calcular la suma de los diez primeros términos de ella.
9. En una progresión geométrica de razón $-\frac{1}{2}$ el primer término es 8. Calcular el producto de los cinco primeros términos.
10. El cuarto término de una progresión geométrica es 4 y el noveno es 128. Calcular:

- (a) La razón y el término general.
- (b) La suma y el producto de los seis primeros términos.
11. El primer día entrenamos 7 minutos y cada día siguiente entrenamos el doble que el día anterior. ¿Cuánto tiempo hemos entrenado después de una semana?.
12. Hallar la suma de los términos de las siguientes progresiones geométricas ilimitadas.
- (a) $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \dots$
- (b) $0,4; 0,04; 0,004; 0,0004; \dots$
13. Si los términos de una progresión geométrica decreciente suman 12 y el primer término es 2, ¿cuál es la razón?. Escribir seis términos de esta progresión.