Problemas de Matemáticas 4º de ESO

Funciones

1 Derivadas

1.1 Tasa de variación

1. Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo $[1, 6]$.

   (a) $f(x) = 3x^2 + 1$

   Solución:

   $$t_m = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{3 \cdot 6^2 + 1 - (3 \cdot 1^2 + 1)}{5} = 21$$

   (b) $f(x) = x^2 + 4x$

   Solución:

   $$t_m = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{6^2 + 4 \cdot 6 - (1^2 + 4 \cdot 1)}{5} = 11$$

2. Calcula la tasa de variación media de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^4$ en los intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $[3, 4]$. Observar la variación de estas funciones en estos intervalos, y compararlas.

   Solución:

   En el intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$:

   $$t_m(f) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(0)}{\frac{1}{3} - 0} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 0}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

   $$t_m(g) = \frac{g\left(\frac{1}{3}\right) - g(0)}{\frac{1}{3} - 0} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 - 0}{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

   En el intervalo $[3, 4]$:

   $$t_m(f) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{4^2 - 3^2}{1} = 7$$

$$t_m(g) = \frac{g(4) - g(3)}{4 - 3} = \frac{4^4 - 3^4}{1} = 175$$

En el intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ la función $f(x) = x^2$ crece más rapida que la función $g(x) = x^4$

En el intervalo $[3, 4]$ la función $g(x) = x^4$ crece más rapida que la función $f(x) = x^2$

3. Calcular la tasa de variación media de la función $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1, 1+h]$. Calcular también la tasa de variación instantánea de esta función en el punto $x = 3$.

   Solución:

$$t_m = \frac{f(1+h) - f(1)}{1 + h - 1} = \frac{3(1+h)^2 - 2(1+h) - (3-2)}{h} =$$

$$= \frac{3h^2 + 4h}{h} = 3h + 4$$

$$t_i = \lim_{h \longrightarrow 0} t_m = \lim_{h \longrightarrow 0} 3h + 4 = 4$$

1.2 Concepto de derivada

1. Hallar la derivada de las siguientes funciones en el punto $x = 2$.

   (a) $f(x) = 2 - 3x$

   Solución:

$$f'(2) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{2 - 3(2+h) - (2 - 3 \cdot 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

   (b) $f(x) = 3x^2 - 1$

   Solución:

$$f'(2) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 - 1 - (3 \cdot 2^2 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{3h(h+4)}{h} = 12$$

(c) $f(x) = x^2 - 2x$

Solución:

$$f'(2) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) - (2^2 - 2 \cdot 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = 2$$

2. Calcular aplicando la definición de derivada, la derivada de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 3x - 1$

Solución:

$$f'(x) = \mathrm{D}(3x - 1) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{3(x+h) - 1 - (3x - 1)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

(b) $f(x) = 3x^2$

Solución:

$$f'(x) = \mathrm{D}(3x^2) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \frac{3h(2x+h)}{h} = 6x$$

(c) $f(x) = x^2 - 2x$

Solución:

$$f'(x) = \mathrm{D}(x^2 - 2x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 2(x+h) - (x^2 - 2x)}{h} =$$

$$= \frac{2hx + h^2 - 2h}{h} = 2x - 2$$

1.3 Recta tangente

Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas siguientes en los puntos que se indican.

1. $f(x) = 3x - 2$ en el punto $P(0, -2)$.

   Solución:

   La ecuación de la recta tangente es $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$, y tenemos

   $f(0) = -2$ y

   $$f'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{3(0+h) - 2 - (-2)}{h} =$$

   $$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

   Luego la recta pedida será $y + 2 = 3x \Longrightarrow y = 3x - 2$

2. $f(x) = x^2 - 2x$ en el punto $P(1, -1)$.

   Solución:

   La ecuación de la recta tangente es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$, y tenemos

   $f(1) = -1$ y

   $$f'(1) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) - (-1)}{h} =$$

   $$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

   Luego la recta pedida será $y + 1 = 0(x - 1) \Longrightarrow y = -1$

3. $f(x) = 1 - x^3$ en el punto $P(1, 0)$.

   Solución:

   La ecuación de la recta tangente es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$, y tenemos

   $f(1) = 0$ y

   $$f'(1) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1 - (1+h)^3 - (0)}{h} =$$

   $$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{-h^3 - 3h^2 - 3h}{h} = -3$$

   Luego la recta pedida será $y - 0 = -3(x - 1) \Longrightarrow y = -3x + 3$

4. $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto $P(2, -2)$.

   Solución:

   La ecuación de la recta tangente es $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$, y tenemos

   $f(2) = -2$ y

   $$f'(2) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) - (-2)}{h} =$$

   $$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = 1$$

   Luego la recta pedida será $y + 2 = 1(x - 2) \Longrightarrow y = x - 4$

1.4 Cálculo de derivadas

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones potenciales.

   (a) $f(x) = x^{12}$.

   Solución:

   $f'(x) = 12x^{11}$

   (b) $f(x) = \dfrac{4}{x^5}$

   Solución:

   $f'(x) = -\dfrac{20}{x^4}$

   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

   Solución:

   $f'(x) = \dfrac{2}{3} x^{2/3-1} = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones polinómicas.

   (a) $f(x) = 3x^3 - 2x + 1$

   Solución:

   $f'(x) = 3x^2 - 2$

(b) $f(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 1$

Solución:

$f'(x) = 15x^4 - 6x^2 + 2x$

(c) $f(x) = \frac{3}{5} \cdot (3x^3 - 2x - 1)$

Solución:

$f'(x) = \frac{3}{5} \cdot (9x^2 - 2)$

3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones logarítmicas.

(a) $f(x) = 2 \cdot \ln x$

Solución:

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

(b) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{6}\right)$

Solución:

$f'(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = x^2 - \ln x^3$

Solución:

$f'(x) = 2x - \frac{3x^2}{x^3} = 2x - \frac{3}{x}$

4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones exponenciales.

(a) $f(x) = e^{5x}$

Solución:

$f'(x) = 5e^{5x}$

(b) $f(x) = 3^{4x}$

Solución:

$f'(x) = 3^{4x} \cdot \ln 3^4$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{3^x}$

Solución:

$f'(x) = \dfrac{1}{3^x} \cdot \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

5. Calcular las derivadas de las siguientes funciones logarítmicas.

(a) $f(x) = 4\cos x$

Solución:

$f'(x) = -4\sin x$

(b) $f(x) = 2\sin x - 3\cos x$

Solución:

$f'(x) = 2\cos x + 3\sin x$

(c) $f(x) = 3 + \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Solución:

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

6. Calcular las derivadas de los siguientes productos de funciones.

(a) $f(x) = (2x^2 - 1) \cdot (2x - 1)$

Solución:

$f'(x) = 4x(2x - 1) + (2x^2 - 1)2x = 4x^3 + 8x^2 - 6x$

(b) $f(x) = x^{-3} \cdot \sin x$

Solución:

$f'(x) = -3x^{-2} \sin x + x^{-3} \cos x$

(c) $f(x) = e^{2x} \cdot \ln x$

Solución:

$f'(x) = 2e^{2x} \cdot \ln x + e^{2x} \cdot \dfrac{1}{x}$

(d) $f(x) = \sin x \cdot (5x - \ln x)$

Solución:

$f'(x) = \cos x \cdot (5x - \ln x) + \sin x \cdot \left(5 - \dfrac{1}{x}\right)$

(e) $f(x) = 2x \cdot (e^{2x} - 2x + 1)$

Solución:

$f'(x) = 2 \cdot (e^{2x} - 2x + 1) + (2x)(2e^{2x} - 2)$

7. Calcular las derivadas de los siguientes cocientes de funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3-1}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{2x(x^3-1) - (x^2+2)(3x)}{(x^3-1)^2} = \frac{x(2x^3 - 3x^2 - 8)}{(x^3-1)^2}$$

(c) $f(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{-e^x(1+e^x) - e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2} = -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$

(d) $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{\cos x}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{(1-1/x)\cos x - (x - \ln x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

(e) $f(x) = \dfrac{1 - e^x}{e^x}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{-e^x \cdot e^x - (1-e^x) \cdot e^x}{e^2 x} = -e^{-x}$$

(f) $f(x) = \dfrac{e^x - x}{e^x + x}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)\cdot(e^x + x) - (e^x - x)\cdot(e^x + 1)}{(e^x + x)^2} = \frac{2e^x(x-1)}{(e^x+x)^2}$$