Problemas de Matemáticas 4º de ESO

Límites

1 Límites de sucesiones

1.1 Idea intuitiva

1. Utiliza la calculadora para comprobar que los términos de la sucesión $(a_n) = \left(\dfrac{3n^2+3}{n^2}\right)$ se aproximan a 3. Calcular para ello los valores de a_1, a_4, a_{10}, a_{40}, a_{100} y a_{1000}

   Solución:

   $a_1 = 6$
   $a_4 = 3.1875$
   $a_{10} = 3.03$
   $a_{40} = 3.001875$
   $a_{100} = 3.0003$
   $a_{1000} = 3.000003$
   El límite será 3.

2. Utilizar la calculadora para calcular a que valor se aproximan las siguientes sucesiones. Calcular para ello los valores de a_1, a_4, a_{10}, a_{40}, a_{100} y a_{1000}

   (a) $(a_n) = \left(\dfrac{n+3}{n^2+1}\right)$

   Solución:

   $a_1 = 2$
   $a_4 = 0.4117647058$
   $a_{10} = 0.1287128712$
   $a_{40} = 0.02685821361$
   $a_{100} = 0.01029897010$
   $a_{1000} = 0.001002998997$
   El límite será 0,001.

   (b) $(a_n) = \left(\dfrac{3n+4}{3n-1}\right)$

Solución:

$a_1 = 3.5$
$a_4 = 1.454545454$
$a_{10} = 1.172413793$
$a_{40} = 1.042016806$
$a_{100} = 1.016722408$
$a_{1000} = 1.001667222$
Luego el límite es 1.

(c) $(a_n) = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{5}, \frac{7}{8}, \frac{9}{11}, ... \right\}$

Solución:

Si nos fijamos un poco el numerador sigue una progresión aritmética y el denominador también. Calculamos el termino general de la sucesión del numerador y del denominador para obtener la del cociente:

- Numerador, $a_1 = 3, \ \ d = 2 \Longrightarrow a_n = 3 + (n-1)2 = 1 + 2n$
- Denominador, $b_1 = 2, \ \ d = 3 \Longrightarrow b_n = 2 + (n-1)3 = 3n - 1$
- El termino general de la sucesión que buscamos será

$$a_n = \frac{2n+1}{3n-1}$$

$a_1 = 1.5$
$a_4 = 0.8181818181$
$a_{10} = 0.7241379310$
$a_{40} = 0.6806722689$
$a_{100} = 0.6722408026$
$a_{1000} = 0.6672224074$
Luego el límite será 0,666...

(d) $(a_n) = \left(\sqrt{\frac{4n+3}{n+1}} \right)$

Solución:

$a_1 = 1.870828693$
$a_4 = 1.949358868$
$a_{10} = 1.977142106$
$a_{40} = 1.993893115$
$a_{100} = 1.997523218$

$a_{1000} = 1.999750234$
Luego el límite será 2.

1.2 Definición:

1. Averigua a partir de que término de la sucesión $a_n = \dfrac{4n-3}{3n}$ se cumple que $\left|a_n - \dfrac{4}{3}\right| < \dfrac{1}{1000}$.

   Solución:

   $$\left|a_n - \frac{4}{3}\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \left|\frac{4n-3}{3n} - \frac{4}{3}\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow$$
   $$\Longrightarrow 1000 < n$$

   Es decir, a partir del término a_{1000} se cumple que $\left|a_n - \dfrac{4}{3}\right| < \dfrac{1}{1000}$.

2. La sucesión $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n+4}\right)$ tiene de límite 0. ¿A partir de que término de esta sucesión todos los siguientes se diferencian del límite menos de una milésima?

   Solución
   $$|a_n - 0| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \left|\frac{1}{n+4} - 0\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \frac{1}{n+4} < \frac{1}{1000} \Longrightarrow$$
   $$\Longrightarrow n > 996$$
   Es decir, a partir del término a_{996} se cumple que $\left|\dfrac{1}{n+4} - 0\right| < \dfrac{1}{1000}$.

3. Hallar un término de la sucesión $(a_n) = \left(\dfrac{1-3n}{2n+1}\right)$ a partir del cual todos los términos siguientes se diferencien del límite menos de una milésima.

   Solución
   Primero calculamos a que término se aproxima la sucesión $a_1 = -0.6666666666$
   $a_4 = -1.222222222$
   $a_{10} = -1.380952380$
   $a_{40} = -1.469135802$
   $a_{100} = -1.487562189$
   $a_{1000} = -1.498750624$
   $a_{1000000} = -1.49999875$
   Luego el límite será -1,5.

$$\left|\frac{1-3n}{2n+1}+\frac{3}{2}\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \left|\frac{5}{4n+2}\right| < \frac{1}{1000} \Longrightarrow \frac{5}{4n+2} < \frac{1}{1000} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow n > 1250$

A partir del término a_{1250} se cumple la diferencia pedida.

1.3 Sucesiones que tienden a infinito

1. Utiliza la calculadora para averiguar que ocurre con los términos de las siguientes sucesiones al dar valores a n cada vez mayores.

   (a) $(a_n) = \left(4^{n-1}\right)$

   Solución:
   $a_1 = 1$
   $a_4 = 64$
   $a_{10} = 262144$
   $a_{40} = 302231454903657293676544$
   $a_{50} = 316912650057057350374175801344$
   $a_{60} = 332306998946228968225951765070086144$
   Luego el límite será $+\infty$.

   (b) $(b_n) = \left(\dfrac{1-n^3}{n}\right)$

   Solución:
   $a_1 = 0$
   $a_4 = -15.75$
   $a_{10} = -99.9$
   $a_{40} = -1599.975$
   $a_{100} = -9999.99$
   $a_{1000} = -9.99999999 \cdot 10^5$
   Luego el límite será $-\infty$.

   (c) $(c_n) = \left((-1)^n \cdot (n+3)^2\right)$

   Solución:

   $a_1 = -16$

$a_4 = 49$
$a_{10} = 169$
$a_{41} = -1936$
$a_{100} = 10609$
$a_{999} = -1004004$
Luego no existe límite, los numeros oscilan de positivos a negativos, haciéndose los positivos cada vez más grandes y los negativos cada vez más pequeños.

2. Dado $k = 121$, averiguar a partir de que término de la sucesión $(a_n) = (4n - 3)$ todos los siguientes son mayores que k. Compruébalo calculando algún termino posterior.

   Solución:

   $4n - 3 > 121 \Longrightarrow n > 31$

   A partir del término a_{31} todos los términos son mayores de 121. Calculamos $a_{32} = 125$, $a_{33} = 129$, etc.

3. Dado $k = -213$, averiguar a partir de que término de la sucesión $(a_n) = (3 - 6n)$ todos los siguientes son menores que k. Compruébalo calculando algún termino posterior.

   Solución:

   $3 - 6n < -213 \Longrightarrow n > 36$

   A partir del término a_{36} todos los términos son menores de -213. Calculamos $a_{37} = -219$, $a_{38} = -225$, etc.

1.4 Cálculo de Límites de sucesiones

1. Dadas las sucesiones $(a_n) = \left(n^2 + 2\right)$ y $(b_n) = \left(1 - n^2\right)$, calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim a_n$

   Solución

   $\lim a_n = \lim(n^2 + 2) = +\infty$

(b) $\lim b_n$

Solución

$\lim b_n = \lim(1 - n^2) = -\infty$

(c) $\lim(a_n - b_n)$

Solución

$\lim(b_n - a_n) = \lim(1 - n^2 - n^2 - 2) = \lim(-1) = -1$

(d) $\lim(a_n + b_n)$

Solución:

$\lim(n^2 + 2 + 1 - n^2) = \lim 3 = 3$

(e) $\lim(a_n \cdot b_n)$

Solución:

$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(n^2 + 2)(1 - n^2) = \lim(-n^4 - n^2 + 2) = -\infty$

(f) $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$

Solución:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2 + 2}{1 - n^2} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right] = \lim \frac{1 + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

2. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim \dfrac{2n + 1}{4n + 7}$

Solución:

$$\lim \frac{2n+1}{4n+7} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{2+\frac{1}{n}}{4+\frac{7}{n}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(b) $\lim \dfrac{2n^2+1}{3n^3+2}$

Solución:

$$\lim \frac{2n^2+1}{3n^3+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{\frac{2n^2}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{\frac{3n^3}{n^3}+\frac{2}{n^3}} = \lim \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n^3}} = \frac{0}{3} = 0$$

(c) $\lim \dfrac{n^3-2n^2+1}{3n^3+2}$

Solución:

$$\lim \frac{n^3-2n^2+1}{3n^3+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{\frac{n^3}{n^3}-\frac{2n^2}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{\frac{3n^3}{n^3}+\frac{2}{n^3}} = \lim \frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n^3}} = \frac{1}{3}$$

(d) $\lim \dfrac{2n^3+2n^2+1}{3n^2+1}$

Solución:

$$\lim \frac{2n^3+2n^2+1}{3n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{2n+2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$$

(e) $\lim \dfrac{2n^3+2n^2+1}{3n^2+1}$

Solución:

$$\lim \frac{(n-2)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{3-6n}{n^2+n+1} = \lim \frac{\frac{3}{n^2}-\frac{6}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

3. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim \sqrt{\dfrac{8n+1}{2n+5}}$

Solución:

$$\lim \sqrt{\frac{8n+1}{2n+5}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \sqrt{\frac{8+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}}} = \sqrt{4} = 2$$

(b) $\lim \sqrt{\dfrac{3n+1}{n^2-1}}$

Solución:

$$\lim \sqrt{\frac{3n+1}{n^2-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \sqrt{\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}} = \sqrt{\frac{0}{1}} = 0$$

(c) $\lim \sqrt{\dfrac{3n^2+2n+1}{n^2-2}}$

Solución:

$$\lim \sqrt{\frac{3n^2+2n+1}{n^2-2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \sqrt{\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}}} = \sqrt{3}$$

1.5 Número e

1. Calcular los cinco primeros términos de la sucesión de término general $a_n = \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{3n}$. Calcular también los términos a_{200} y a_{1000}. Relacionar esta sucesión con el número e.

   Solución:

   - $a_1 = \left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3 = 2.370370370$
   - $a_2 = \left(1+\dfrac{1}{6}\right)^6 = 2.521626371$
   - $a_2 = \left(1+\dfrac{1}{9}\right)^9 = 2.581174791$

- $a_2 = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.613035290$
- $a_2 = \left(1+\frac{1}{15}\right)^{15} = 2.632878717$
- $a_{200} = \left(1+\frac{1}{600}\right)^{600} = 2.716020048$
- $a_{1000} = \left(1+\frac{1}{3000}\right)^{3000} = 2.718130828$

  El límite de esta sucesión es el número e.

2. Calcula los siguientes límites:

   (a) $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$

   Solución:

   $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n} = [1^{\infty}] = e^{\lambda} = e^4$

   Donde $\lambda = \lim 4n\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = 4$

   (b) $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$

   Solución:

   $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = [1^{\infty}] = e^{\lambda} = e$

   Donde $\lambda = \lim(n+5)\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = 1$

   (c) $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$

   Solución:

   $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}} = [1^{\infty}] = e^{\lambda} = e^{\frac{1}{3}}$

   Donde $\lambda = \lim \frac{n}{3}\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \frac{1}{3}$

(d) $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+2}$

Solución:

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+2} = [1^{\infty}] = e^{\lambda} = e^{3}$

Donde $\lambda = \lim(3n+2)\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = 3$

2 Límites de funciones

2.1 Límite de una función en un punto

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{si} \quad x<0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ 2x+2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Calcular:

(a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} 1 = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (1+x^2) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$$

(b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} f(x)$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} (2x+2) = 6 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} 1 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 2} f(x) \text{ No existe}$$

(c) $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} f(x)$

Solución:

$\lim_{x \longrightarrow -1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1} (1 + x^2) = 2$

Observar que $\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = 2$

2. Utilizar la calculadora para calcular a que valores se acercan las siguientes funciones en los puntos indicados:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ en $x = 3$

   Solución:

   $f(2,9) = 5.9 \quad f(2,99) = 5.99 \quad f(2,999) = 5.999 \Longrightarrow$

   $\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 6$

   $f(3.1) = 6.1 \quad f(3.01) = 6.01 \quad f(3.001) = 6.001 \Longrightarrow$

   $\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 6$

   Podemos concluir con que $\lim_{x \longrightarrow 3} f(x) = 6$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$ en $x = -3$

   Solución:

   $f(-2,9) = -3.9 \quad f(-2,99) = -3.99 \quad f(-2,999) = -3.999 \Longrightarrow$

   $\lim_{x \longrightarrow -3^-} f(x) = -4$

   $f(-3.1) = -4.1 \quad f(-3.01) = -4.01 \quad f(-3.001) = -4.001 \Longrightarrow$

   $\lim_{x \longrightarrow -3^+} f(x) = -4$

   Podemos concluir con que $\lim_{x \longrightarrow -3} f(x) = -4$

2.2 Límite de una función en el infinito

1. Para las siguientes funciones, calcular $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3}$

Solución:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^2-2}{x^3} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x^2-2}{x^3} = 0 \end{cases}$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+5}$

Solución:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^2-2}{x^2+5} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x^2-2}{x^2+5} = 1 \end{cases}$$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2+1}$

Solución:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^3-2}{x^2+1} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x^3-2}{x^2+1} = -\infty \end{cases}$$

(d) $f(x) = 3^x$

Solución:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 3^x = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} 3^x = 0 \end{cases}$$

2. Calcular los límites de las siguientes funciones polinómicas:

(a) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x^2 + 4x - 1)$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x^2 + 4x - 1) = +\infty$$

(b) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (x^2 + 4x - 1)$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} (x^2 + 4x - 1) = +\infty$$

(c) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x^3 - 1)$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x^3 - 1) = +\infty$$

(d) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (x^3 - 1)$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} (x^3 - 1) = -\infty$$

(e) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (-x^5 - 7)$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-x^5 - 7) = -\infty$$

(f) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (-x^5 - 7)$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} (-x^5 - 7) = +\infty$$

2.3 Cálculo de límites de funciones racionales

1. Calcular los siguientes límites y, en caso de que no existan, calcular los laterales.

   (a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x+5}{x-1}$

   Solución:

   $$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x+5}{x-1} = 7$$

   (b) $\lim\limits_{x \longrightarrow -2} \dfrac{x^2-2}{x+3}$

   Solución:

   $$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x^2-2}{x+3} = 2$$

   (c) $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} \dfrac{x-1}{x-3}$

   Solución:

   $$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x-1}{x-3} = \left[\frac{2}{0}\right] \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{x-1}{x-3} = -\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{x-1}{x-3} = +\infty$$

   (d) $\lim\limits_{x \longrightarrow -2} \dfrac{x-1}{x+2}$

   Solución:

   $$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x-1}{x+2} = \left[\frac{-3}{0}\right] \Longrightarrow$$
   $$\Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{x-1}{x+2} = +\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{x-1}{x+2} = -\infty$$

   (e) $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} \dfrac{1-x}{x-3}$

   Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{1-x}{x-3} = \left[\frac{-2}{0}\right] \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{1-x}{x-3} = +\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{1-x}{x-3} = -\infty$$

2. Calcular los siguientes límites simplificando fracciones:

   (a) $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

   Solución:

   $$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \longrightarrow 1} (x+1) = 2$$

   (b) $\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

   Solución:

   $$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} =$$
   $$= \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

   (c) $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^3}{3x^4-x^3}$

   Solución:

   $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^3}{3x^4-x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^3}{x^3(3x-1)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{3x-1} = -1$$

   (d) $\lim_{x \longrightarrow \sqrt{3}} \frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$

   Solución:

   $$\lim_{x \longrightarrow \sqrt{3}} \frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow \sqrt{3}} \frac{x-\sqrt{3}}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})} =$$
   $$\lim_{x \longrightarrow \sqrt{3}} \frac{1}{x+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

(e) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -7} \frac{x^2+14x+49}{x^2-49}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -7} \frac{x^2+14x+49}{x^2-49} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow -7} \frac{(x+7)^2}{(x-7)(x+7)} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow -7} \frac{x+7}{x-7} = \frac{0}{-14} = 0$$

3. Calcular los siguientes límites

(a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^2-3x+4}{x^2-3}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^2-3x+4}{x^2-3} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}} = 1$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^4-2x-2}{3x^4+1}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^4-2x-2}{3x^4+1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{3+\frac{1}{x^4}} = \frac{1}{3}$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^3+5x-1}{x^2+2}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^3+5x-1}{x^2+2} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x-\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}} = +\infty$$