Problemas de Matemáticas 4º de ESO

Funciones

1 Funciones

1.1 Concepto de función

1. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = 3x + 1$

   Solución:

   - **dominio** todo R
   - **recorrido** todo R

   (b) $f(x) = x^2 + 4x$

   Solución:

   - **dominio** todo R
   - **recorrido** todo $(-4, +\infty)$

   (c) $f(x) = \sqrt{x + 9}$

   Solución:

   - **dominio** todo $[-9, +\infty)$
   - **recorrido** todo $[0, +\infty)$

   (d) $f(x) = -x^2 + 2$

   Solución:

   - **dominio** todo R
   - **recorrido** todo $(-\infty, 2]$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

   Solución:

   - **dominio** todo $R - \{-1\}$
   - **recorrido** todo $R - \{0\}$

   (f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$

   Solución:

   - **dominio** todo $R - \{-1, 0\}$

- **recorrido** todo $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

2. Halla el dominio de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = x^3 - x + 2$

   Solución:

   El dominio será todo R, ya que se trata de un polinomio.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$

   Solución:

   Cuando se anula el denominador la función no está definida, es decir, $2 + x = 0 \Longrightarrow x = -2$. El dominio es $R - \{-2\}$

   (c) $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$

   Solución:

   Cuando se anula el denominador la función no está definida, es decir, $x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4$. El dominio es $R - \{4\}$

   (d) $f(x) = \dfrac{2}{3x+6}$

   Solución:

   Cuando se anula el denominador la función no está definida, es decir, $3x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -2$. El dominio es $R - \{-2\}$

   (e) $f(x) = 2 + \sqrt{x+5}$

   Solución:

   Cuando el radicando es negativo la función no está definida, es decir, $x + 5 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -5$. El dominio es $[-5, +\infty)$

3. En las funciones del ejercicio anterior, calcular las imagenes de $0,\ 4,\ -2,\ -5$.

   Solución:

   (a) $f(x) = x^3 - x + 2$

   $f(0) = 2;\ f(4) = 62;\ f(-2) = -4;\ f(-5) = -118$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$

$f(0) = \dfrac{1}{2}$; $f(4) = \dfrac{1}{6}$; $f(-2)$ no está definida; $f(-5) = -\dfrac{1}{3}$

(c) $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$

$f(0) = 0$; $f(4)$ no está definida; $f(-2) = \dfrac{2}{3}$; $f(-5) = \dfrac{10}{9}$

(d) $f(x) = \dfrac{2}{3x+6}$

$f(0) = \dfrac{1}{3}$; $f(4) = \dfrac{1}{9}$; $f(-2)$ no está definida; $f(-5) = -\dfrac{2}{9}$

(e) $f(x) = 2 + \sqrt{x+5}$

$f(0) = 2 + \sqrt{5}$; $f(4) = 5$; $f(-2) = 2 + \sqrt{3}$; $f(-5) = 2$

1.2 Funciones definidas a trozos

1. Representar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2-3x & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 \le x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

2. Representar la función $f(x) = |x+1|$ Tener en cuenta que por la definición de valor absoluto tenemos

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x+1 \ge 0 \\ -(x+1) & \text{si} \quad x+1 < 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \ge -1 \\ -x-1 & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

1.3 Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

1. Calcula la variación de la función $f(x) = x^2 - 4$ en los intervalos que se indican

(a) En el $[-1,5]$

Solución:

$f(-1) = -3,\ f(5) = 21 \Longrightarrow$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo $[-1,5]$ es $f(5) - f(-1) = 21 - (-3) = 24$.

(b) En el $[0,5]$

Solución:

$f(0) = -4,\ f(5) = 21 \Longrightarrow$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo $[0,5]$ es $f(5) - f(0) = 21 - (-4) = 25$.

(c) En el $[-6,-1]$

Solución:

$f(-6) = 32,\ f(-1) = -3 \Longrightarrow$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo $[-6,-1]$ es $f(-1) - f(-6) = -3 - 32 = -35$.

2. Calcula la variación de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 2 \\ 9 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

En los siguientes intervalos.

(a) En el $[-2,1]$

Solución:

$f(-2) = 3,\ f(1) = 1 \Longrightarrow$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo es $f(1) - f(-2) = 1 - 3 = -2$

(b) En el $[1,3]$

Solución:

$f(1) = 1,\ f(3) = 9 \Longrightarrow$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo es $f(3) - f(1) = 9 - 1 = 8$

(c) En el $[4,7]$

Solución:

$f(4) = 9$, $f(7) = 9 \Longrightarrow$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo es $f(7) - f(4) = 9 - 9 = 0$

3. Estudia si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en los puntos que se indican utilizando la calculadora.

(a) $f(x) = x^3$ en $x = 0$

Solución:

Cogemos valores próximos a cero y calculamos sus imágenes.
Sean $-0.1 < -0.01 < -0.001 < 0.001 < 0.01 < 0.1$ que tendrán las siguientes imágenes correspondientes:
$-0.001 < -10^{-6} < -10^{-9} < 10^{-9} < 10^{-6} < 0.001$

Luego la función es creciente en el punto $x = 0$

(b) $f(x) = 3 - x^2$ en $x = 1$

Solución:

Cogemos valores próximos a uno y calculamos sus imágenes.
Sean $0.9 < 0.99 < 0.999 < 1.001 < 1.01 < 1.1$ que tendrán las siguientes imágenes correspondientes:
$2.19 > 2.0199 > 2.001999 > 1.997999 > 1.9799 > 1.79$

Luego la función es decreciente en el punto $x = 1$

4. Indica en que intervalos son crecientes o decrecientes las siguientes funciones y calcular, si los tienen, sus máximos y mínimos relativos.

(a) $f(x) = -x^3 + 1$

Solución:

- **creciente:** Nunca
- **decreciente:** Siempre
- **máximos:** No tiene
- **mínimos:** No tiene

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Solución:

- **creciente:** $(1, +\infty)$
- **decreciente:** $(-\infty, 1)$
- **máximos:** No tiene
- **mínimos:** $(1, 0)$

(c) $f(x) = x^3 - 3x$

Solución:

- **creciente:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- **decreciente:** $(-1, 1)$
- **máximos:** $(-1, 2)$
- **mínimos:** $(1, -2)$

(d) $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$

Solución:

- **creciente:** $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- **decreciente:** Nunca
- **máximos:** No tiene
- **mínimos:** No tiene

(e) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Solución:

- **creciente:** Nunca
- **decreciente:** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- **máximos:** No tiene
- **mínimos:** No tiene

(f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x}$

Solución:

- **creciente:** $(-\infty, -1) \cup (-1, -1/2)$
- **decreciente:** $(-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$
- **máximos:** $(-1/2, -4)$
- **mínimos:** No tiene

1.4 Funciones acotadas. Funciones simétricas. Estudio gráfico de la continuidad. Puntos de corte con los ejes.

1. Explicar si las siguientes funciones están acotadas y porqué

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Solución:

No está acotada, por no estarlo ni superior ni inferiormente.

(b) $f(x) = |x-1|$

Solución:

La función está acotada inferiormente, ya que todos los valores de $f(x)$ son siempre mayores de cero; pero no lo está superiormente, y por tanto, no está acotada.

(c) $f(x) = \cos x$

Solución:

Todos los valores de $f(x)$ están comprendidos entre $-1 \leq f(x) \leq 1$, es decir, está acotada superior e inferiormente, y por tanto, está acotada.

2. Estudiar la simetría de las siguientes funciones

(a) $f(x) = 3x^2 - 1$

Solución:

$f(-x) = 3(-x)^2 - 1 = 3x^2 - 1 = f(x) \Longrightarrow$ La función es simétrica respecto al eje de ordenadas (eje Y).

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^6+3}$

Solución:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^6+3} = \dfrac{x^2-1}{x^6+3} = f(x) \Longrightarrow$ La función es simétrica respecto al eje de ordenadas (eje Y).

(c) $f(x) = \dfrac{|x|-5}{x}$

Solución:

$f(-x) = \dfrac{|-x|-5}{-x} = -\dfrac{|x|-5}{x} = -f(x) \Longrightarrow$ La función es simétrica respecto al origen.

(d) $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 5}$

Solución:

$f(-x) = \sqrt{(-x)^4 - 3(-x)^2 - 5} = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 5} = f(x) \Longrightarrow$ La función es simétrica respecto al eje de ordenadas (eje Y).

3. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones

(a) $f(x) = 2x^3 - 8x$

Solución:

$2x^3 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = \pm 2$ luego los puntos de corte serán $(0,0)$, $(2,0)$ y $(-2,0)$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^6 + 3}$

Solución:

$\dfrac{x^2 - 1}{x^6 + 3} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$
$f(0) = -\dfrac{1}{3}$

Luego los puntos de corte serán $(-1,0)$, $(1,0)$ y $\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$

(c) $f(x) = \dfrac{|x| - 5}{x}$

Solución:

$\dfrac{|x| - 5}{x} = 0 \Longrightarrow x = 5$

No hay cortes con el eje Y. Luego el único punto de corte con los ejes es $(5,0)$.

(d) $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 5}$

Solución:

$\sqrt{x^4 - 3x^2 - 5} = 0 \Longrightarrow x^4 - 3x^2 - 5 = 0 \Longrightarrow x = -2.047579645,\ \ x = 2.047579645$
$f(0) = \sqrt{-5}$, luego no hay corte con el eje Y.

Los puntos de corte serán $(-2.047579645, 0)$ y $(2.047579645, 0)$.

4. clasifica el tipo de discontinuidad de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = -\dfrac{1}{|x-2|}$

   Solución:

   Tiene una discontinuidad inevitable en $x = 2$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

   Solución:

   Tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$

   (c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

   Solución:

   Tiene una discontinuidad inevitable en $x = 0$, donde pega un salto.

   (d) $\begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si} & x < -1 \\ 9 & \text{si} & -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} & x > 0 \end{cases}$

   Solución:

   Tiene una discontinuidad inevitable en $x = 0$, donde pega un salto.

5. Idear cuatro funciones definidas a trozos y calcular su dominio, recorrido, cortes con los ejes, simetrías, continuidad y por último decir si están acotadas.

6. Representar gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos

   (a) $\begin{cases} -2x - 5 & \text{si} & x < -1 \\ -3 & \text{si} & -1 \leq x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si} & x > 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x - 5 & \text{si} & x < -3 \\ 4 & \text{si} & -3 \leq x \leq 0 \\ x + 4 & \text{si} & x > 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ -3 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

1.5 Operaciones con funciones. Funciones recíprocas

1. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$, calcuar si es posible

   (a) $(f+g)(4)$

   Solución:

   $(f+g)(4) = f(4) + g(4) = 62 + \sqrt{6}$

   (b) $(f+g)(-2)$

   Solución:

   $(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = -10$

   (c) $(3 \cdot f)(-3)$

   Solución:

   $(3 \cdot f)(-3) = -87$

   (d) $(f \cdot g)(0)$

   Solución:

   $(f \cdot g)(0) = -2 + \sqrt{2}$

   (e) $(f \cdot g)(-3)$

   Solución:

   $(f \cdot g)(-3)$ no existe, ya que -3 no pertenece al dominio de $g(x)$.

   (f) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(4)$

Solución:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = 25.31139400$$

2. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$

   (a) Dominio de f

   Solución:

   f estará definida en todos los números reales, excepto en aquellos en los que se anule el denominador, es decir, $x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5$; luego $Dom(f) = R - \{5\}$.

   (b) Dominio de g

   Solución:

   f estará definida en todos los números reales, excepto en aquellos en los que se anule el denominador, es decir, $x = 0$; luego $Dom(g) = R - \{0\}$.

   (c) Calcular la función $(2 \cdot f)$ y su dominio.

   Solución:

   $$(2 \cdot f)(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot \frac{2}{x-5} = \frac{4}{x-5}$$

   $(2 \cdot f)$ estará definida en todos los números reales, excepto en aquellos en los que se anule el denominador, es decir, $x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5$; luego $Dom(2 \cdot f) = R - \{5\}$.

   (d) Calcular la función $(f + g)$ y su dominio.

   Solución:

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{2}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{3x-5}{x(x-5)}$$

   $(f + g)$ estará definida en todos los números reales, excepto en aquellos en los que se anule el denominador, es decir, $x(x-5) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 5$; luego $Dom(f+g) = R - \{0, 5\}$.

   (e) Calcular $(f \cdot g)$ y su dominio.

   Solución:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{2}{x-5} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-5)}$$

$(f \cdot g)$ estará definida en todos los números reales, excepto en aquellos en los que se anule el denominador, es decir, $x(x-5) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 5$; luego $Dom(f \cdot g) = R - \{0, 5\}$.

(f) Calcular $\left(\frac{f}{g}\right)$ y su dominio.

Solución:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{2}{x-5}}{\frac{1}{x}} = \frac{2x}{x-5}$$

$\left(\frac{f}{g}\right)$ estará definida en todos los números reales, excepto en aquellos en los que se anule el denominador, es decir, $x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5$; luego $Dom\left(\frac{f}{g}\right) = R - \{5\}$

3. Siendo las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = 2x$, calcular las funciones compuestas

(a) $(g \circ g)$

Solución:

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(2x) = 2 \cdot (2x) = 4x$$

(b) $(f \circ g)$

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = (2x)^3 + 1 = 8x^3 + 1$$

(c) $(g \circ f)$

Solución:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 + 1) = 2(x^3 + 1) = 2x^3 + 2$$

4. Siendo las funciones $f(x) = \frac{1}{x-2}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, calcular las funciones compuestas

(a) $(g \circ g)$

Solución:

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$$

(b) $(f \circ g)$

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right) - 2} = \frac{x}{1-2x}$$

(c) $(g \circ f)$

Solución:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x-2}\right)} = x - 2$$

5. Calcula la función recíproca de

(a) $f(x) = 5x$

Solución:

Despejamos x de la ecuación $y = 5x \Longrightarrow x = \dfrac{y}{5}$

Intercambiamos las variables x e $y \Longrightarrow y = \dfrac{x}{5}$

La función recíproca es $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{5}$

(b) $f(x) = 3x + 1$

Solución:

Despejamos x de la ecuación $y = 3x + 1 \Longrightarrow x = \dfrac{y-1}{3}$

Intercambiamos las variables x e $y \Longrightarrow y = \dfrac{x-1}{3}$

La función recíproca es $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Solución:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<0\\[2ex] \sqrt{x} & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{x}\Longrightarrow x=\dfrac{1}{y}\\[2ex] y=\sqrt{x}\Longrightarrow x=y^2\end{cases}$$

Luego la función recíproca será $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<0\\[2ex] x^2 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$

2 Continuidad

2.1 Continuidad en un punto y en un intervalo

1. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

   (a)

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} & x< & -2\\ \dfrac{x}{2}+3 & \text{si} & -2\leq x\leq & 0\\ 5 & \text{si} & x= & 0\\ x+3 & \text{si} & x> & 0\end{cases} \quad \text{en } x=-2, \text{ y en } x=0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x=-2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -2} 2=2\\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -2} \left(\dfrac{x}{2}+3\right)=2\\ f(-2)=2\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x)=f(-2)=2$$

Luego la función es continua en el punto $x=-2$.

Ahora estudiamos en $x=0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{x}{2}+3\right)=3\\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0} (x+3)=3\\ f(0)=5\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)\neq f(0)$$

Luego la función no es continua en el punto $x=0$.

(b)

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < -2 \\ x & \text{si} \quad -2 < x \leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} (-2) = -2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} x = -2 \\ f(-2) \text{ no definida} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) \neq f(-2)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} x = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

Luego la función es continua en el punto $x = 0$.

(c)

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \\ 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x = -1, \text{ y en } x = 2$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1} |x| = 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 1$$

Luego la función es continua en el punto $x = -1$.

Ahora estudiamos en $x = 2$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} x^2 = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 2$.

(d)

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccrr} 2x+8 & \text{si} & x < & -2 \\ x^2 & \text{si} & -2 \le x < & 1 \\ 3 & \text{si} & x = & 1 \\ x & \text{si} & 1 < x < & 2 \\ 0 & \text{si} & x \ge & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} x^2 = 4 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} (2x+8) = 4 \\ f(-2) = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 4$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} x = 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} x^2 = 1 \\ f(1) = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 1$.

Ahora estudiamos en $x = 2$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} x = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 1$.

2. Estudia si la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad -8 < x \leq 2 \\ x+2 & \text{si} \quad 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

es continua en el intervalo $(-8, 5]$.

Solución:

La función es continua en los intervalos $(-8, 2)$ y en el $(2, 5]$. Sólo nos falta por comprobar la continuidad en el punto $x = 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} 4 = 4 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} (x+2) = 4 \\ \\ f(2) = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

Luego la función es continua en el punto $x = 2$ y, por tanto, la función es continua en el intervalo $(-8, 5]$.

3. Calcular el valor de k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ kx - 2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 3$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3} x^2 - 2 = 7 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3} kx - 2 = 3k - 2 \end{array} \right. \Longrightarrow 3k - 2 = 7 \Longrightarrow k = 3$$

Cuando $k = 3$ la función $f(x)$ es continua en $x = 3$.

4. Calcular cuánto deben valer a y b para que la función siguiente sea continua en todo su dominio.

$$\begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad x < 2 \\ ax + b & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Solución: Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 2$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} (x^2 + a) = 4 + a \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} (ax + b) = 2a + b \end{array}\right. \Longrightarrow 4+a = 2a+b \Longrightarrow a+b = 4$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 3$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} (ax + b) = 3a + b \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} 4 = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow 3a + b = 4$$

$$\left\{\begin{array}{r} 3a + b = 4 \\ a + b = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 4 \end{array}\right.$$

La función es continua en todo su dominio si $a = 0$ y $b = 4$

2.2 Tipos de discontinuidad

1. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones e indica de que tipo son:

   (a)

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2x + 3 & \text{si} & x \le 1 \\ x^2 + 2 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

   Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} (2x + 3) = 5 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} (x^2 + 2) = 3 \end{array}\right.$$

   La discontinuidad en el punto $x = 1$ es inevitable, en dicho punto hay un salto. El valor del salto de la función en dicho punto será:

$$\left| \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) - \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) \right| = |3 - 5| = |-2| = 2$$

   (b)

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccr} 2 & \text{si} & -8 < x < -2 \\ x^2 - 1 & \text{si} & -2 \le x < 1 \\ 0 & \text{si} & 1 < x < 6 \end{array}\right.$$

Solución:

En $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -2} 2 = 2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -2} (x^2-1) = 3 \end{cases}$$

Los límites laterales son distintos y por tanto la función pega un salto en ese punto, la discontinuidad es inevitable. El valor del salto es

$$\left| \lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x) - \lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x) \right| = |3-2| = 1$$

En $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} (x^2-1) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} 0 = 0 \\ \\ f(1) \text{ no definida} \end{cases}$$

Los límites laterales son iguales, basta definir $f(1) = 0$ para que la función sea continua en $x = 1$, luego la discontinuidad es evitable.

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} & x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{si} & -1 \le x < 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si} & 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{si} & x > 2 \end{cases}$$

Solución:

En $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1} \dfrac{1}{x} = -1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1} (x^2-2) = -1 \\ \\ f(-1) \text{ no definida} \end{cases}$$

Los límites laterales son iguales, basta definir $f(-1) = -1$ para que la función sea continua en $x = -1$, luego la discontinuidad es evitable.

En $x=1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (x^2-2) = -1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -1 \\ \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

Los límites laterales son iguales y el valor coincide con el valor de la función en $x=1$, luego la función es continua en este punto.

En $x=2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{2} \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} 2 = 2 \end{cases}$$

Los límites laterales son distintos y por tanto la función pega un salto en ese punto, la discontinuidad es inevitable. El valor del salto es

$$\left| \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) \right| = \left| 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{5}{2}$$

2. Calcular el verdadero valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

   (a)

$$\begin{cases} x^3-2 & \text{si} \quad 2 > x \\ 3x & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} (x^3-2) = 6 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} 3x = 6 \end{cases}$$

El verdadero valor es $f(2)=6$.

   (b)

$$f(x) = \frac{x^2+7x+10}{x+2} \quad \text{en } x=-2$$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow -2} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2} = \lim_{x \longrightarrow -2} \frac{(x+5)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \longrightarrow -2} (x+5) = 3$$

Luego el verdadero valor es $f(-2)=3$.

2.3 Continuidad y Operaciones:

1. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = x^2 - 9$, estudia la continuidad de las funciones siguientes:

   (a) $f + g$:

   bf Solución:

   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x + x^2 - 9 = 2x^2 + 3x - 9$$

   Función continua en todo R por ser un polinomio.

   (b) $f \cdot g$: bf Solución:

   $$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 3x)(x^2 - 9) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 27x$$

   Función continua en todo R por ser un polinomio.

   (c) $\dfrac{f}{g}$: bf Solución:

   $$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$$

   La función será discontinua en aquellos puntos en los que se anule el denominador, es decir, cuando $g(x) = x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = 3,\ x = -3$. Luego la función $\dfrac{f}{g}$ es continua en $R - \{-3, 3\}$

   En $x = 3$:

   $$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9} = \lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x}{x - 3} = \frac{3}{0}$$

   Indeterminación de signo que evaluamos mediante los límites laterales:

   $$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{x}{x - 3} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \dfrac{x}{x - 3} = -\infty \end{cases}$$

   Luego en el punto $x = 3$ no existe el límite de la función, en este punto hay un salto entre $-\infty$ y $+\infty$. La discontinuidad en $x = 3$ es inevitable.

   En $x = -3$:

   $$\lim_{x \longrightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9} = \lim_{x \longrightarrow -3} \frac{x(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \lim_{x \longrightarrow -3} \frac{x}{x - 3} = \frac{1}{2}$$

   Bastaría definir $f(-3) = \dfrac{1}{2}$, para que la función sea continua. Luego la discontinuidad es evitable en $x = -3$.

(d) $\dfrac{g}{f-g}$: bf Solución:

$$\left(\frac{g}{f-g}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)-g(x)} = \frac{x^2-9}{3x+9}$$

La función será discontinua en aquellos puntos en los que se anule el denominador, es decir, cuando $3x+9=0 \Longrightarrow x=-3$. Luego la función $\dfrac{g}{f-g}$ es continua en $R-\{-3\}$

Pero en $x=-3$:

$$\lim_{x\longrightarrow -3} \frac{x^2-9}{3x+9} = \lim_{x\longrightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)}{3(x+3)} = \lim_{x\longrightarrow -3} \frac{x-3}{3} = -2$$

Bastaría definir $f(-3)=-2$, para que la función sea continua. Luego la discontinuidad es evitable en $x=-3$.

2. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2+9x+14}{x+2}$ y, si es posible, complétala para que sea continua en todo R.

Solución:

La función será discontinua en aquellos puntos en los que se anule el denominador, es decir, cuando $x+2=0 \Longrightarrow x=-2$. Luego la función $f(x)$ es continua en $R-\{-2\}$

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2+9x+14}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{(x+7)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2}(x+7) = 5$$

Bastaría definir $f(-2)=5$, para que la función sea continua. Luego la discontinuidad es evitable en $x=-3$. Escribimos

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+9x+14}{x+2} & \text{si} \quad x \neq -2 \\ 5 & \text{si} \quad x=-2 \end{cases}$$

Diremos que $F(x)$ es la extensión por continuidad de $f(x)$.