Problemas de Matemáticas 4º de ESO

Funciones

1 Funciones

1.1 Concepto de función

1. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = 3x + 1$
   (b) $f(x) = x^2 + 4x$
   (c) $f(x) = \sqrt{x + 9}$
   (d) $f(x) = -x^2 + 2$
   (e) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$
   (f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$

2. Halla el dominio de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = x^3 - x + 2$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$
   (c) $f(x) = \dfrac{2x}{x - 4}$
   (d) $f(x) = \dfrac{2}{3x + 6}$
   (e) $f(x) = 2 + \sqrt{x + 5}$

3. En las funciones del ejercicio anterior, calcular las imagenes de 0, 4, -2, -5.

1.2 Funciones definidas a trozos

1. Representar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

2. Representar la función $f(x) = |x + 1|$

   Tener en cuenta que por la definición de valor absoluto tenemos

$$f(x) = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x + 1 \geq 0 \\ -(x + 1) & \text{si} \quad x + 1 < 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq -1 \\ -x-1 & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

1.3 Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

1. Calcula la variación de la función $f(x) = x^2 - 4$ en los intervalos que se indican
   (a) En el $[-1, 5]$
   (b) En el $[0, 5]$
   (c) En el $[-6, -1]$

2. Calcula la variación de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 2 \\ 9 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

   En los siguientes intervalos.
   (a) En el $[-2, 1]$
   (b) En el $[1, 3]$
   (c) En el $[4, 7]$

3. Estudia si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en los puntos que se indican utilizando la calculadora.
   (a) $f(x) = x^3$ en $x = 0$
   (b) $f(x) = 3 - x^2$ en $x = 1$

4. Indica en que intervalos son crecientes o decrecientes las siguientes funciones y calcular, si los tienen, sus máximos y mínimos relativos.
   (a) $f(x) = -x^3 + 1$
   (b) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$
   (c) $f(x) = x^3 - 3x$
   (d) $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$
   (e) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
   (f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x}$

1.4 Funciones acotadas. Funciones simétricas. Estudio gráfico de la continuidad. Puntos de corte con los ejes.

1. Explicar si las siguientes funciones están acotadas y porqué

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

   (b) $f(x) = |x-1|$

   (c) $f(x) = \cos x$

2. Estudiar la simetría de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = 3x^2 - 1$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^6+3}$

   (c) $f(x) = \dfrac{|x|-5}{x}$

   (d) $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 5}$

3. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = 2x^3 - 8x$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^6+3}$

   (c) $f(x) = \dfrac{|x|-5}{x}$

   (d) $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 5}$

4. clasifica el tipo de discontinuidad de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = -\dfrac{1}{|x-2|}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

   (c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si} & x < -1 \\ 9 & \text{si} & -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} & x > 0 \end{cases}$

5. Idear cuatro funciones definidas a trozos y calcular su dominio, recorrido, cortes con los ejes, simetrías, continuidad y por último decir si están acotadas.

6. Representar gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos

   (a) $\begin{cases} -2x-5 & \text{si} \quad x<-1 \\ -3 & \text{si} \quad -1\leq x\leq 0 \\ x+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x-5 & \text{si} \quad x<-3 \\ 4 & \text{si} \quad -3\leq x\leq 0 \\ x+4 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} -2x & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1\leq x\leq 1 \\ x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<-1 \\ -3 & \text{si} \quad -1\leq x\leq 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

1.5 Operaciones con funciones. Funciones recíprocas

1. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$, calcuar si es posible

   (a) $(f+g)(4)$
   (b) $(f+g)(-2)$
   (c) $(3\cdot f)(-3)$
   (d) $(f\cdot g)(0)$
   (e) $(f\cdot g)(-3)$
   (f) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(4)$

2. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$

   (a) Dominio de f
   (b) Dominio de g
   (c) Calcular la función $(2\cdot f)$ y su dominio.
   (d) Calcular la función $(f+g)$ y su dominio.
   (e) Calcular $(f\cdot g)$ y su dominio.

(f) Calcular $\left(\frac{f}{g}\right)$ y su dominio.

3. Siendo las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = 2x$, calcular las funciones compuestas

   (a) $(g \circ g)$

   (b) $(f \circ g)$

   (c) $(g \circ f)$

4. Siendo las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$, calcular las funciones compuestas

   (a) $(g \circ g)$

   (b) $(f \circ g)$

   (c) $(g \circ f)$

5. Calcula la función recíproca de

   (a) $f(x) = 5x$

   (b) $f(x) = 3x + 1$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

2 Continuidad

2.1 Continuidad en un punto y en un intervalo

1. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

   (a)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} & x < & -2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si} & -2 \leq x \leq & 0 \\ 5 & \text{si} & x = & 0 \\ x + 3 & \text{si} & x > & 0 \end{cases} \qquad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

   (b)

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} & x < & -2 \\ x & \text{si} & -2 < x \leq & 0 \\ x^2 & \text{si} & x > & 0 \end{cases} \qquad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \\ 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x = -1, \text{ y en } x = 2$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+8 & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ x & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

2. Estudia si la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad -8 < x \leq 2 \\ x+2 & \text{si} \quad 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

es continua en el intervalo $(-8, 5]$.

3. Calcular el valor de k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ kx - 2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 3$$

4. Calcular cuánto deben valer a y b para que la función siguiente sea continua en todo su dominio.

$$\begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad x < 2 \\ ax + b & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

2.2 Tipos de discontinuidad

1. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones e indica de que tipo son:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 + 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -8 < x < -2 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad -2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x < 6 \end{cases}$$

Solución:

En $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} 2 = 2 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} (x^2 - 1) = 3 \end{cases}$$

Los límites laterales son distintos y por tanto la función pega un salto en ese punto, la discontinuidad es inevitable. El valor del salto es

$$\left| \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) - \lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) \right| = |3 - 2| = 1$$

En $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (x^2 - 1) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} 0 = 0 \\ \\ f(1) \text{ no definida} \end{cases}$$

Los límites laterales son iguales, basta definir $f(1) = 0$ para que la función sea continua en $x = 1$, luego la discontinuidad es evitable.

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} & x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{si} & -1 \le x < 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si} & 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{si} & x > 2 \end{cases}$$

2. Calcular el verdadero valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

(a)

$$\begin{cases} x^3 - 2 & \text{si} & 2 > x \\ 3x & \text{si} & 2 < x \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} \quad \text{en } x = -2$$

2.3 Continuidad y Operaciones:

1. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = x^2 - 9$, estudia la continuidad de las funciones siguientes:

   (a) $f + g$

   (b) $f \cdot g$

   (c) $\dfrac{f}{g}$

   (d) $\dfrac{g}{f - g}$

2. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 9x + 14}{x + 2}$ y, si es posible, complétala para que sea continua en todo R.