Examen de Matemáticas 4º de ESO

Noviembre 2002

Problema 1 *(1 puntos)* Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
3 ; -2 ; $-\frac{4}{3}$; $4,3327832783278\ldots$; $4,33133113331113333\ldots$; $\sqrt{7}$; π; $7,1203870387\ldots$; $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

Solución:

- 3 es un número natural $3 \in N$.
- -2 es un número entero $-2 \in Z$.
- $-\frac{4}{3}$ es un número racional $-\frac{4}{3} \in Q$.
- $4,3327832783278\ldots$ es un número racional $4,33\widehat{278} \in Q$.
- $4,33133113331113333\ldots$ es un número irracional.
- $\sqrt{7}$ es un número irracional.
- π es un número irracional.
- $7,1203870387\ldots$ es un número racional $7,120\widehat{387} \in Q$
- $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ es un número irracional.

Problema 2 *(3 puntos)* Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2-2x-3}{x-1} \le 0$
2. $\frac{x^2-5x-14}{x-3} \ge 0$
3. $\frac{x-5}{6} + 1 \le \left(\frac{x+1}{2}\right) x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2-2x-3}{x-1} = \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} \leq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+1)(x-3)}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-1] \cup (1,3]$$

2.

$$\frac{x^2-5x-14}{x-3} = \frac{(x+2)(x-7)}{x-3} \geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,7)$	$(7,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+2)(x-7)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-2,3) \cup [7,+\infty)$$

3.

$$\frac{x-5}{6} + 1 \leq \left(\frac{x+1}{2}\right) x \Longrightarrow x-5+6 \leq 3(x+1)x$$

$$x+1 \leq 3x^2+3x \Longrightarrow -3x^2-2x+1 \leq 0$$

$$3x^2+2x-1 \geq 0 \Longrightarrow (x+1)(x-\frac{1}{3}) \geq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3},+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-\frac{1}{3}$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-\frac{1}{3})$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-1] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

Problema 3 *(2 puntos)* Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x+1) - \log x = 1 + \log x$
2. $2^{2x-1} + 2^{x+2} - 1 = 0$

Solución:

1.

$$\log(3x+1) - \log x = 1 + \log x \Longrightarrow \log(3x+1) = \log 10 + 2\log x$$

$$\log(3x+1) = \log(10x^2) \Longrightarrow 10x^2 - 3x - 1 = 0 \Longrightarrow \ x = \frac{1}{2}, \ \ x = -\frac{1}{5}$$

De las dos soluciones hay una que no es posible ya que no existen logaritmos de números negativos, es decir, de las dos soluciones la única posible es $x = \frac{1}{2}$

2.

$$2^{2x-1} + 2^{x+2} - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{2^{2x}}{2} + 2^x 2^2 - 1 = 0 \Longrightarrow 2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 2 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2 + 8u - 2 = 0 \Longrightarrow u = 0,2426406871, \ \ u = -8,242640687$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,2426406871 = 2^x \Longrightarrow \log 0,2426406871 = \log 2^x \Longrightarrow$$

$$x \log 2 = \log 0,2426406871 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\log 0,2426406871}{\log 2} = -2,242640687$$

En el otro caso, $u = -8,242640687 = 2^x$ no es posible obtener solución.

Problema 4 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \log \frac{x^3}{y^2} & = & 1 \\ \log(x^2 y) & = & 2 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \log \frac{x^3}{y^2} & = & 1 \\ \log(x^2 y) & = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcr} 3\log x - & 2\log y = & 1 \\ 2\log x + & \log y = & 2 \end{array} \right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} 3u- & 2v = & 1 \\ 2u+ & v = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} 3u- & 2v = & 1 \\ 4u+ & 2v = & 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{5}{7} \\ v = \frac{4}{7} \end{array} \right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = \frac{5}{7} \\ \log y = v = \frac{4}{7} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^{\frac{5}{7}} \\ y = 10^{\frac{4}{7}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5,179474679 \\ y = 3,72759372 \end{array}\right.$$

Problema 5 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2^{x-1}+ & 3^{y+1} = & 4 \\ 2^{x+1}- & 3^{y+1} = & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2^{x-1}+ & 3^{y+1} = & 4 \\ 2^{x+1}- & 3^{y+1} = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} \frac{2^x}{2}+ & 3\cdot 3^y = & 4 \\ 2\cdot 2^x- & 3\cdot 3^y = & 5 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $2^x = u$ y $3^y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} \frac{u}{2}+ & 3v = & 4 \\ 2u- & 3v = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{18}{5} \\ v = \frac{11}{15} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} 2^x = u = \frac{18}{5} \\ 3^y = v = \frac{11}{15} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\log 2 = \log\frac{18}{5} \\ y\log 3 = \log\frac{11}{15} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\log\frac{18}{5}}{\log 2} = 1,847996906 \\ y = \frac{\log\frac{11}{15}}{\log 3} = -0,2823151820 \end{array}\right.$$