Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Noviembre 2002

Problema 1 *(1 puntos)* Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
-3 ; 2 ; $-\frac{4}{3}$; $4,3322277722227777\dots$; $4,33278278278\dots$; $\sqrt{5}$; π; $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; $7,1203870387\dots$

Solución:

- -3 es un número entero $3 \in Z$.
- 2 es un número natural $2 \in N$.
- $-\frac{4}{3}$ es un número racional $-\frac{4}{3} \in Q$.
- $4,3322277722227777\dots$ es un número irracional.
- $4,33\widehat{278}$ es un número racional $4,33\widehat{278} \in Q$.
- $\sqrt{5}$ es un número irracional.
- π es un número irracional.
- $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ es un número irracional.
- $7,1203870387\dots$ es un número racional $7,120\widehat{387} \in Q$

Problema 2 *(3 puntos)* Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2-2x-3}{x-1} \geq 0$
2. $\frac{x^2-5x-14}{x-3} \leq 0$
3. $\frac{x-5}{6} + 1 \geq \left(\frac{x+1}{2}\right) x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2-2x-3}{x-1}=\frac{(x+1)(x-3)}{x-1}\geq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+1)(x-3)}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-1,1)\cup[3,+\infty)$$

2.

$$\frac{x^2-5x-14}{x-3}=\frac{(x+2)(x-7)}{x-3}\leq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,7)$	$(7,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+2)(x-7)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-2]\cup(3,7]$$

3.

$$\frac{x-5}{6}+1\geq\left(\frac{x+1}{2}\right)x\Longrightarrow x-5+6\geq 3(x+1)x$$

$$x+1\geq 3x^2+3x\Longrightarrow -3x^2-2x+1\geq 0$$

$$3x^2+2x-1\leq 0\Longrightarrow (x+1)(x-\frac{1}{3})\leq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3},+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-\frac{1}{3}$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-\frac{1}{3})$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$\left[-1,\frac{1}{3}\right]$$

Problema 3 *(2 puntos)* Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x+1) - \log x = 1 + \log(1-x)$
2. $2^{2x-1} + 2^{x+3} - 1 = 0$

Solución:

1.

$$\log(3x+1)-\log x = 1+\log(1-x) \Longrightarrow \log(3x+1) = \log 10+\log(1-x)+\log x$$

$$\log(3x+1) = \log(10x(1-x)) \Longrightarrow 10x^2-7x+1 = 0 \Longrightarrow \ x = \frac{1}{2}, \ \ x = \frac{1}{5}$$

2.

$$2^{2x-1}+2^{x+3}-1 = 0 \Longrightarrow \frac{2^{2x}}{2}+2^x\cdot 2^3-1 = 0 \Longrightarrow 2^{2x}+16\cdot 2^x-2 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2+16u-2 = 0 \Longrightarrow u = -16,12403840, \ \ u = 0,1240384046$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,1240384046 = 2^x \Longrightarrow \log 0,1240384046 = \log 2^x \Longrightarrow$$

$$x\log 2 = \log 0,1240384046 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\log 0,1240384046}{\log 2} = -3,011141219$$

En el otro caso, $u = -16,12403840 = 2^x$ no es posible obtener solución.

Problema 4 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log\frac{x^4}{y} & = & 1 \\ \log(x\cdot y^2) & = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log\frac{x^4}{y} & = & 1 \\ \log(x\cdot y^2) & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 4\log x- & \log y = & 1 \\ \log x+2 & \log y = & 2 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 4u- & v = & 1 \\ u+ & 2v = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 4u- & v = & 1 \\ -4u- & 8v = & -8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{4}{9} \\ v = \frac{7}{9} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = \frac{4}{9} \\ \log y = v = \frac{7}{9} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^{\frac{4}{9}} \\ y = 10^{\frac{7}{9}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2,782559402 \\ y = 5,994842503 \end{array}\right.$$

Problema 5 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2^{x+1}- & 3^{y-1} = & 4 \\ 2^{x+1}+ & 3^{y+1} = & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2^{x+1}- & 3^{y-1} = & 4 \\ 2^{x+1}+ & 3^{y+1} = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 2\cdot 2^{x}- & \frac{3^y}{3} = & 4 \\ 2\cdot 2^{x}+ & 3\cdot 3^{y} = & 5 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $2^x = u$ y $3^y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2u- & \frac{v}{3} = & 4 \\ 2u+ & 3v = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{41}{20} = 2,05 \\ v = \frac{3}{10} = 0,3 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} 2^x = u = \frac{41}{20} \\ 3^y = v = \frac{3}{10} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\log 2 = \log\frac{41}{20} \\ y\log 3 = \log\frac{3}{10} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\log\frac{41}{20}}{\log 2} = 1,035623909 \\ y = \frac{\log\frac{3}{10}}{\log 3} = -1,095903274 \end{array}\right.$$