Examen de Matemáticas 4º de ESO

Funciones (Mayo 2003)

Problema 1 *(2 puntos)*

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x-6}{(x+3)\sqrt{x-2}}$$

Solución:

Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x - 2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 2$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+3 = 0 \Longrightarrow x = -3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$, luego eliminando el valor $x = 2$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(2, +\infty)$

2. Si $f(x) = \sqrt{x^2-3}$ y $g(x) = x - 1$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

Solución:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = \sqrt{(x-1)^2 - 3}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2-3}) = \sqrt{x^2-3} - 1$

3. Sea $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$ en el dominio $R - \{1/2\}$, calcular $f^{-1}(x)$

Solución:

$f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1} \Longrightarrow y = \dfrac{2x+1}{2x-1} \Longrightarrow (2x-1)y = 2x+1 \Longrightarrow$

$2xy - 2y = 2x + 1 \Longrightarrow 2xy - 2x = 2y + 1 \Longrightarrow 2x(y-1) = 2y+1 \Longrightarrow$
$x = \dfrac{2y+1}{2(y-1)}$ En conclusión:

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{2(x-1)}$$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{2x^2 + 5}$

Solución:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^4 - (-x)^2 + 1}{2(-x)^2 + 5} = \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{2x^2 + 5} = f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al eje OY.

Problema 2 *(4 puntos)*

1. Encuentra los valores de k para los que la función

   $$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 3 & si \quad x < 3 \\ (k+1)x & si \quad x \geq 3 \end{cases} \text{ es continua en todo } R$$

   Solución:
   Vamos a calcular los límites laterales:

   $$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} (kx^2 + 3) = 9k + 3$$
   $$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} (k+1)x = 3(k+1)$$

   Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 3, mejor dicho, en el 3 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
   $9k + 3 = 3(k+1) \Longrightarrow 6k = 0 \Longrightarrow k = 0$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

   $$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} & x < 0 \\ \dfrac{x-2}{2} & \text{si} & 0 \leq x < 6 \\ x - 4 & \text{si} & x > 6 \end{cases} \quad \text{en } x = 0, \text{ y en } x = 6$$

   En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

   Solución:

   Primero estudiamos en $x = 0$

   $$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{x-2}{2} \right) = -1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Longrightarrow$$

   $$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1$$

Luego la función es continua en el punto $x = 0$.

Ahora estudiamos en $x = 6$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 6^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 6}\left(\dfrac{x-2}{2}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 6^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 6}(x-4) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 6^+} f(x) \neq f(6)$$

La función no está definida en $x = 6$

Luego la función no es continua en el punto $x = 6$.

Como los límites laterales coinciden, la discontinuidad es evitable. Bastaría imponer $f(6) = 2$ para que la función sea continua en ese punto y, por tanto, podemos encontrar otra función que será la extensión continua de $f(x)$ imponiendo la nueva condición:

$$F(x) = \left\{\begin{array}{ccrl} -1 & \text{si} & x < & 0 \\ \dfrac{x-2}{2} & \text{si} & 0 \le x < & 6 \\ 2 & \text{si} & x = & 6 \\ x-4 & \text{si} & x > & 6 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Solución:

1. **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

Luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\longrightarrow -1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

Luego $x = -1$ es una asíntota vertical.

2. **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales.

3. **Asíntotas oblicuas:**
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{3x^3-2x^2+1}{x^2-1}}{x} = \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 + x} = 3$$

$$b = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x) - a \cdot x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} - 3x \right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = -2$$

La asíntota oblicua es $y = 3x - 2$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1})^2 - 1^2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x - 2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = \frac{1}{2}$$

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 18}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 18} = \lim_{x\longrightarrow -3} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-6)(x+3)} = \lim_{x\longrightarrow -3} \frac{x - 2}{x - 6} = \frac{5}{9}$$

Función $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$