Examen de Matemáticas 4º de ESO

Funciones (Mayo 2003)

Problema 1 *(2 puntos)*

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x-1)}{(x+1)\sqrt{x}}$$

Solución:

Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x \geq 0$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x = 0$ valor que no eliminamos en el razonamiento anterior; eliminamos el valor $x = 0$, y podemos concluir con que el dominio de la función será: $(0, +\infty)$

2. Si $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

Solución:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 - 3 = x - 4$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 3) = \sqrt{(x^2-3)-1} = \sqrt{x^2-4}$

3. Sea $f(x) = \dfrac{5x-2}{x+1}$ en el dominio $R^+ - \{-1\}$, calcular $f^{-1}(x)$

Solución:

$f(x) = \dfrac{5x-2}{x+1} \Longrightarrow y = \dfrac{5x-2}{x+1} \Longrightarrow (x+1)y = 5x - 2 \Longrightarrow$

$xy + y = 5x - 2 \Longrightarrow xy - 5x = -y - 2 \Longrightarrow x(y-5) = -(y+2) \Longrightarrow$
$x = -\dfrac{y+2}{y-5}$ En conclusión:

$$f^{-1}(x) = -\frac{x+2}{x-5}$$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^2+8}$

Solución:

$f(-x) = \dfrac{3(-x)^3}{(-x)^2+8} = \dfrac{-x^3}{x^2+8} = -f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al origen O.

Problema 2 *(4 puntos)*

1. Encuentra los valores de k para los que la función

   $$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 3kx + 1 & si \quad x < 1 \\ kx^2 - 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases} \text{ es continua en todo } R$$

   Solución:
   Vamos a calcular los límites laterales:

   $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (kx^2 - 3kx + 1) = -2k + 1$$
   $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (kx^2 - 1) = k - 1$$

   Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
   $-2k + 1 = k - 1 \Longrightarrow 3k = 2 \Longrightarrow k = \dfrac{2}{3}$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad -1 < x < 5 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si} \quad x \geq 5 \end{cases} \quad \text{en } x = -1, \text{ y en } x = 5$$

   En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

   Solución:

   Primero voy a estudiar en $x = -1$

   $$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1} 1 = 1 \\ \lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 1$$

Luego la función es continua en el punto $x = -1$.

Ahora estudiamos en $x = 5$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5} \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 5} \left(\frac{x^2+1}{2}\right) = 13 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x\longrightarrow 5^+} f(x)$$

La función es discontinua en $x = 5$, y es no evitable; En este punto la función pega un salto.

No tiene extensión por continuidad.

Problema 3 *(2 puntos)* Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Solución:

1. **Asíntotas verticales:** Vemos los puntos en los que se anula el denominador, $x^2 - 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$ (doble)

   $$\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{3x^3 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \pm\infty$$

   Luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

2. **Asíntotas horizontales:**

   $$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x^3 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \infty$$

   Luego no hay asíntotas horizontales.

3. **Asíntotas oblicuas:**

   Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

   $$a = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{\frac{3x^3+x-1}{x^2-2x+1}}{x} = \frac{3x^3 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} = 3$$

$$b = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x) - a\cdot x) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^3+x-1}{x^2-2x+1} - 3x\right) =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{6x^2-2x-1}{x^2-2x+1} = 6$$

La asíntota oblicua es $y = 3x + 6$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(\sqrt{x^2+3})^2-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1}{2}$$

2. $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-x}$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2-x} = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x-1)(x+6)}{x(x-1)} = \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x+6}{x} = 7$$

Función $f(x) = \dfrac{3x^3 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$