Examen de Matemáticas 4º de ESO

Funciones (Mayo 2003)

Problema 1 *(2 puntos)*

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x+8)\sqrt{x-2}}{(x-2)}$$

Solución:

Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x - 2 \geq 0 \implies x \geq 2$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x - 2 = 0 \implies x = 2$, valor no eliminado en el razonamiento anterior, eliminamos el valor $x = 2$, y podemos concluir con que el dominio de la función será: $(2, +\infty)$

2. Si $f(x) = x - 2$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

Solución:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{x^2 - 1} - 2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 2) = \sqrt{(x-2)^2 - 1}$

3. Sea $f(x) = \dfrac{3x}{x-3}$ en el dominio $R^+ - \{3\}$, calcular $f^{-1}(x)$

Solución:

$f(x) = \dfrac{3x}{x-3} \Longrightarrow y = \dfrac{3x}{x-3} \Longrightarrow (x-3)y = 3x \Longrightarrow$

$xy - 3y = 3x \Longrightarrow xy - 3x = 3y \Longrightarrow x(y-3) = 3y \Longrightarrow x = \dfrac{3y}{y-3}$

En conclusión:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x}{x-3}$$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^4 + 1}$

Solución:

$f(-x) = \dfrac{3(-x)^2-1}{(-x)^4+1} = \dfrac{3x^2-1}{x^4+1} = f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al eje OY.

Problema 2 *(4 puntos)*

1. Encuentra los valores de k para los que la función

   $f(x) = \begin{cases} 3kx^2-2k & si \quad x<2 \\ kx-1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ es continua en todo R

   Solución:
   Vamos a calcular los límites laterales:

   $$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(3kx^2-2k) = 10k$$
   $$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2}(kx-1) = 2k-1$$

   Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 2, mejor dicho, en el 2 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
   $10k = 2k-1 \Longrightarrow 8k = -1 \Longrightarrow k = -\dfrac{1}{8}$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

   $$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x}+3 & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ \dfrac{x^2+1}{3} & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases} \quad \text{en } x=1, \text{ y en } x=3$$

   En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

   Solución:

   Primero voy a estudiar en $x=3$

   $$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3}\left(\dfrac{1}{x}+3\right) = \dfrac{10}{3} \\ \lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3}\left(\dfrac{x^2+1}{3}\right) = \dfrac{10}{3} \\ f(3) = \left(\dfrac{x^2+1}{3}\right) = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = f(3) = \frac{10}{3}$$

Luego la función es continua en el punto $x = 3$.

Ahora estudiamos en $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \left(\dfrac{1}{x} + 3\right) = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$$

La función no está definida en $x = 1$

Luego la función no es continua en el punto $x = 1$.

Como los límites laterales coinciden, la discontinuidad es evitable. Bastaría imponer $f(1) = 4$ para que la función sea continua en ese punto y, por tanto, podemos encontrar otra función que será la extensión continua de $f(x)$ imponiendo la nueva condición:

$$F(x) = \left\{\begin{array}{ccrl} 4 & \text{si} & x < & 1 \\ 4 & \text{si} & x = & 1 \\ \dfrac{1}{x} + 3 & \text{si} & 1 < x < & 3 \\ \dfrac{x^2+1}{3} & \text{si} & x \geq & 3 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Solución:

1. **Asíntotas verticales:** Vemos los puntos en los que se anula el denominador, $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ \ x = -1$

   $$\lim_{x\longrightarrow -1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1} \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

   Luego $x = -1$ es una asíntota vertical.

   $$\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

   Luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

2. **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = 3$$

Luego la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal.

3. **Asíntotas oblicuas:**

Como hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x^2+5}}{x+2}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x^2+5}}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{(3 - \sqrt{x^2+5})(3 + \sqrt{x^2+5})}{(x+2)(3 + \sqrt{x^2+5})} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{3^2 - (\sqrt{x^2+5})^2}{(x+2)(3 + \sqrt{x^2+5})} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{4 - x^2}{(x+2)(3 + \sqrt{x^2+5})} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3 + \sqrt{x^2+5})} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{2-x}{3 + \sqrt{x^2+5}} = \frac{2}{3}$$

2. $\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9x + 20}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9x + 20} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{(x-4)(x+6)}{(x-4)(x-5)} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{x+6}{x-5} = -10$$