Examen de Matemáticas 4º de ESO

Funciones (Mayo 2003)

Problema 1 *(2 puntos)*

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x-5}{(x+3)\sqrt{x-2}}$$

Solución:

Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x - 2 \geq 0 \implies x \geq 2$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x - 2 = 0 \implies x = 2$, luego eliminando el valor $x = 2$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(2, +\infty)$

2. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

Solución:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 2 = x - 2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g((x^2 - 2)) = \sqrt{x^2 - 2}$

3. Sea $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x}$ en el dominio $D = (0, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$

Solución:

$f(x) = \dfrac{2x-1}{3x} \Longrightarrow y = \dfrac{2x-1}{3x} \Longrightarrow (3x)y = 2x - 1 \Longrightarrow$

$3xy - 2x = -1 \Longrightarrow x(3y - 2) = -1 \Longrightarrow x = \dfrac{-1}{3y-2}$ En conclusión:

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3x-2}$$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \dfrac{3x^4 - 1}{2x}$

Solución:

$f(-x) = \dfrac{3(-x)^4 - 1}{2(-x)} = \dfrac{3x^4 - 1}{-2x} = -f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al origen.

Problema 2 *(3 puntos)*

1. Encuentra los valores de k para los que la función

   $$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - k & si \quad x < 1 \\ kx & si \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \text{es continua en todo } R$$

   Solución:
   Vamos a calcular los límites laterales:

   $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (3x^2 - k) = 3 - k$$
   $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} kx = k$$

   Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
   $3 - k = k \Longrightarrow 2k = 3 \Longrightarrow k = \dfrac{3}{2}$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

   $$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} & x < -2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si} & -2 \leq x < 0 \\ x + 3 & \text{si} & x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

   En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

   Solución:

   Primero estudiamos en $x = -2$

   $$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2} 2 = 2 \\ \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2} \left(\dfrac{x}{2} + 3 \right) = 2 \\ f(-2) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

   $$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 2$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} (x+3) = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$

La función no está definida en $x = 0$

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

Como los límites laterales coinciden, la discontinuidad es evitable. Bastaría imponer $f(0) = 3$ para que la función sea continua en ese punto y, por tanto, podemos encontrar otra función que será la extensión continua de $f(x)$ imponiendo la nueva condición:

$$F(x) = \left\{\begin{array}{ccrr} 2 & \text{si} & x < & -2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si} & -2 \leq x < & 0 \\ 3 & \text{si} & x = & 0 \\ x+3 & \text{si} & x > & 0 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x+1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Solución:

1. **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow -1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1} \frac{2x^2 - 1}{x+1} = \pm\infty$$

Luego $x = -1$ es una asíntota vertical.

2. **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x+1} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales.

3. **Asíntotas oblicuas:**
   Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2-1}{x+1}}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x} = 2$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - a \cdot x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x + 1} - 2x \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-2x - 1}{x + 1} = -2$$

   La asíntota oblicua es $y = 2x - 2$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

   Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} =$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

2. $\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

   Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(x - 1)} = \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x + 1}{x - 1} = 3$$

Problema 5 *(1 puntos)* Definición de infimo, supremo, máximo y mínimo (relativos y absolutos).