Examen de Matemáticas 4º de ESO

Enero 2003-Recuperación

Problema 1 *(1 puntos)* Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
$\frac{1}{4}$; $\sqrt{3}$; 7 ; $0,12359359\ldots$; $0,123123412345\ldots$; -2 ; π;
$0,110011100011110000\ldots$; 0; $\frac{4}{5}$.

Solución:

- $\frac{1}{4}$ es un número racional $\frac{1}{4} \in Q$.
- $\sqrt{3}$ es un número irracional.
- 7 es un número natural $7 \in N$.
- $0,12359359\ldots$ es un número racional $0,12\widehat{359} \in Q$.
- $0,123123412345\ldots$ es un número irracional.
- -2 es un número entero $-2 \in Z$.
- π es un número irracional.
- $0,110011100011110000\ldots$ es un número irracional.
- 0 es un número natural $0 \in N$.
- $\frac{4}{5}$ es un número racional $\frac{4}{5} \in Q$

Problema 2 *(3 puntos)* Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2-x-2}{x+3} \geq 0$
2. $\frac{x^2+3x-4}{x-3} \leq 0$
3. $\frac{2-3x}{3} + \frac{1-2x}{6} \geq \frac{19-22x}{18}$

Solución:

1.

$$\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x + 3} \geq 0$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
$x + 3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-2)(x+1)}{x+3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-3, -1] \cup [2, +\infty)$$

2.

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 3} = \frac{(x + 4)(x - 1)}{x - 3} \leq 0$$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+4)(x-1)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty, -4] \cup [1, 3)$$

3.

$$\frac{2 - 3x}{3} + \frac{1 - 2x}{6} \geq \frac{19 - 22x}{18} \Longrightarrow 15 - 24x \geq 19 - 22x$$

$$\Longrightarrow -2x \geq 4 \Longrightarrow x \leq -\frac{4}{2} \Longrightarrow x \leq -2$$

La solución pedida sería:

$$(-\infty, -2]$$

Problema 3 *(2 puntos)* Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1)$
2. $2^{2x-1} + 2^{x+1} - 2 = 0$

Solución:

1.

$$\log(3x^2-2) = 1+\log(x-1) \Longrightarrow \log(3x^2-2) = \log 10 + \log(x-1)$$

$$\log(3x^2-2) = \log(10(x-1)) \Longrightarrow 3x^2-10x+8=0 \Longrightarrow \ x=2, \ \ x=\frac{4}{3}$$

2.

$$2^{2x-1}+2^{x+1}-2=0 \Longrightarrow \frac{2^{2x}}{2}+2\cdot 2^x-2=0 \Longrightarrow 2^{2x}+4\cdot 2^x-4=0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2+4u-4=0 \Longrightarrow u=0,8284271247, \ \ u=-4,828427124$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u=0,8284271247=2^x \Longrightarrow \log 0,8284271247 = \log 2^x \Longrightarrow$$

$$x\log 2 = \log 0,8284271247 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\log 0,8284271247}{\log 2} = -0,2715533031$$

En el otro caso, $u=-4,828427124=2^x$ no es posible obtener solución.

Problema 4 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log\frac{x^3}{y^2} & = & 2 \\ \log(x^2y) & = & 3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \log\frac{x^3}{y^2} & = & 2 \\ \log(x^2y) & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrcr} 3\log x- & 2\log y = & 2 \\ 2\log x+ & \log y = & 3 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3u- & 2v = & 2 \\ 2u+ & v = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 3u- & 2v = & 2 \\ 4u+ & 2v = & 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=\frac{8}{7} \\ v=\frac{5}{7} \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} \log x = u = \frac{8}{7} \\ \log y = v = \frac{5}{7} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10^{\frac{8}{7}} \\ y = 10^{\frac{5}{7}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 13,89495494 \\ y = 5,179474679 \end{array}\right.$$

Problema 5 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2^{x+1}- & 3^{y-1} = & 3 \\ 2^{x+1}+ & 3^{y+1} = & 4 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2^{x+1}- & 3^{y-1} = & 3 \\ 2^{x+1}+ & 3^{y+1} = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} 2\cdot 2^{x}- & \frac{3^y}{3} = & 3 \\ 2\cdot 2^{x}+ & 3\cdot 3^{y} = & 4 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $2^x = u$ y $3^y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2u- & \frac{v}{3} = & 3 \\ 2u+ & 3v = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{31}{20} = 1,55 \\ v = \frac{3}{10} = 0,3 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} 2^x = u = \frac{31}{20} \\ 3^y = v = \frac{3}{10} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\log 2 = \log\frac{31}{20} \\ y\log 3 = \log\frac{3}{10} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\log\frac{31}{20}}{\log 2} = 0,6322682154 \\ y = \frac{\log\frac{3}{10}}{\log 3} = -1,095903274 \end{array}\right.$$