Examen de Matemáticas 4º de ESO

Diciembre 2002-Recuperación

Problema 1 *(1 puntos)* Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:
$\frac{3}{4}$; $\sqrt{2}$; 5 ; $0,12348348\dots$; $0,123123412345\dots$; -3 ; π; $0,110011100011110000\dots$; 0; $\frac{2}{5}$.

Solución:

- $\frac{3}{4}$ es un número racional $\frac{3}{4} \in Q$.
- $\sqrt{2}$ es un número irracional.
- 5 es un número natural $5 \in N$.
- $0,12348348\dots$ es un número racional $0,12\widehat{348} \in Q$.
- $0,123123412345\dots$ es un número irracional.
- -3 es un número entero $-3 \in Z$.
- π es un número irracional.
- $0,110011100011110000\dots$ es un número irracional.
- 0 es un número natural $0 \in N$.
- $\frac{2}{5}$ es un número racional $\frac{2}{5} \in Q$

Problema 2 *(3 puntos)* Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2+4x-5}{x+1} \geq 0$
2. $\frac{x^2+3x-4}{x-3} \leq 0$
3. $\frac{x^2}{3} + 6 < \frac{4}{3} - 3x$

Solución:

1.

$$\frac{x^2+4x-5}{x+1}=\frac{(x+5)(x-1)}{x+1}\geq 0$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+5)(x-1)}{x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$[-5,-1)\cup[1,+\infty)$$

2.

$$\frac{x^2+3x-4}{x-3}=\frac{(x+4)(x-1)}{x-3}\leq 0$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+4)(x-1)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-\infty,-4]\cup[1,3)$$

3.

$$\frac{x^2}{3}+6<\frac{4}{3}-3x\Longrightarrow x^2+18<4-9x$$

$$x^2+9x+14<0\Longrightarrow x^2+9x+14=(x+2)(x+7)<0$$

	$(-\infty,-7)$	$(-7,-2)$	$(-2,+\infty)$
$x+7$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x+7)$	$+$	$-$	$+$

La solución pedida sería:

$$(-7,-2)$$

Problema 3 *(2 puntos)* Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x+1)-\log x=1+\log(1-x)$

2. $2^{2x-1}+2^{x+2}-1=0$

Solución:

1.

$$\log(3x+1)-\log x=1+\log(1-x)\Longrightarrow \log(3x+1)=\log 10+\log(1-x)+\log x$$

$$\log(3x+1)=\log(10x(1-x))\Longrightarrow 10x^2-7x+1=0\Longrightarrow\ x=\frac{1}{2},\ \ x=\frac{1}{5}$$

2.

$$2^{2x-1}+2^{x+2}-1=0\Longrightarrow \frac{2^{2x}}{2}+2^x\cdot 2^2-1=0\Longrightarrow \frac{2^{2x}}{2}+4\cdot 2^x-1=0$$

Haciendo el cambio de variables $u=2^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$u^2+8u-2=0\Longrightarrow u=0.2426406871,\ \ u=-8.242640687$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u=0.2426406871=2^x\Longrightarrow \log 0.2426406871=\log 2^x\Longrightarrow$$

$$x\log 2=\log 0.2426406871\Longrightarrow$$

$$x=\frac{\log 0.2426406871}{\log 2}=-2.043106606$$

En el otro caso, $u=-8.242640687=2^x$ no es posible obtener solución.

Problema 4 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\log\frac{x^3}{y^2} & = & 1\\ \log(x^2y) & = & 2\end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\log\frac{x^3}{y^2} & = & 1\\ \log(x^2y) & = & 2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrl}3\log x- & 2\log y= & 1\\ 2\log x+ & \log y= & 2\end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $\log x=u$ y $\log y=v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrl}3u- & 2v= & 1\\ 2u+ & v= & 2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrl}3u- & 2v= & 1\\ 4u+ & 2v= & 4\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}u=\frac{5}{7}\\ v=\frac{4}{7}\end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l}\log x=u=\frac{5}{7}\\ \log y=v=\frac{4}{7}\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=10^{\frac{5}{7}}\\ y=10^{\frac{4}{7}}\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=5,179474679\\ y=3,72759372\end{array}\right.$$

Problema 5 *(2 puntos)* Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2^{x+1}- & 3^{y-1} & = & 4 \\ 2^{x+1}+ & 3^{y+1} & = & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2^{x+1}- & 3^{y-1} & = & 4 \\ 2^{x+1}+ & 3^{y+1} & = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 2\cdot 2^{x}- & \frac{3^y}{3} & = & 4 \\ 2\cdot 2^{x}+ & 3\cdot 3^{y} & = & 5 \end{array}\right.$$

Haciendo el cambio de variables $2^x = u$ y $3^y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2u- & \frac{v}{3} & = & 4 \\ 2u+ & 3v & = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{41}{20} = 2,05 \\ v = \frac{3}{10} = 0,3 \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{l} 2^x = u = \frac{41}{20} \\ 3^y = v = \frac{3}{10} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\log 2 = \log\frac{41}{20} \\ y\log 3 = \log\frac{3}{10} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\log\frac{41}{20}}{\log 2} = 1,035623909 \\ y = \frac{\log\frac{3}{10}}{\log 3} = -1,095903274 \end{array}\right.$$