

Problemas de 4ºESO

Isaac Musat Hervás

7 de marzo de 2020

www.musat.net

Índice general

1. Problemas de Álgebra	7
1.1. Números Reales	7
1.1.1. Los números	7
1.1.2. Intervalos	9
1.1.3. Ecuaciones Bicuadradas	11
1.2. Números Racionales	11
1.2.1. Operaciones con números racionales	11
1.2.2. Ecuaciones Racionales	12
1.3. Logaritmos	13
1.3.1. Ecuaciones Logarítmicas	13
1.3.2. Sistemas de Ecuaciones Logarítmicas	17
1.4. Exponenciales	20
1.4.1. Ecuaciones Exponenciales:	20
1.4.2. Sistemas de Ecuaciones Exponenciales:	23
1.5. Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales	26
1.6. Sistemas de Ecuaciones no Lineales	27
1.7. Inecuaciones	27
1.7.1. Inecuaciones	27
1.7.2. Sistemas de Inecuaciones	35
1.8. Polinomios	36
1.8.1. Introducción	36
1.8.2. Teorema del Resto	39
1.8.3. Descomposición Polinómica	40
1.8.4. Simplificación	42
1.8.5. Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo	42
1.8.6. Simplificación de expresiones racionales de polinomios	44
1.8.7. Ecuaciones Polinómicas	47
2. Problemas de Geometría	49
2.1. Trigonometría	49
2.1.1. Ángulos	49
2.1.2. Razones Trigonométricas	52
2.1.3. Resolución de Triángulos	55

2.1.4.	Aplicaciones	55
2.2.	Vectores	66
2.2.1.	Operaciones con Vectores	66
2.2.2.	Distancia entre dos puntos	66
2.2.3.	División de un segmento	67
2.2.4.	Punto medio y simétrico	67
2.2.5.	Ángulo entre dos vectores	68
2.2.6.	Varios	68
2.3.	Geometría Analítica	69
2.3.1.	Ecuaciones de la Recta	69
2.3.2.	Intersección de dos rectas	70
2.3.3.	Distancias	71
2.3.4.	Ángulos	72
2.4.	Cónicas	72
2.4.1.	Circunferencia	72
2.4.2.	Elipse	74
2.4.3.	Hipérbola	74
3.	Problemas de Análisis	75
3.1.	Sucesiones	75
3.1.1.	Términos de una sucesión	75
3.1.2.	Sucesiones crecientes y acotadas:	76
3.1.3.	Progresiones aritméticas	76
3.1.4.	Progresiones geométricas	78
3.2.	Límites de sucesiones	81
3.2.1.	Idea intuitiva	81
3.2.2.	Definición	81
3.2.3.	Sucesiones que tienden a infinito	82
3.2.4.	Cálculo de Límites de sucesiones	82
3.2.5.	Número e	83
3.2.6.	Varios	83
3.3.	Funciones	85
3.3.1.	Concepto de función, Dominio y Recorrido	85
3.3.2.	Funciones definidas a trozos	86
3.3.3.	Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos	86
3.3.4.	Funciones acotadas. Funciones simétricas. Estudio gráfico de la continuidad. Puntos de corte con los ejes.	87
3.3.5.	Operaciones con funciones. Funciones recíprocas	88
3.3.6.	Puntos de Corte	89
3.3.7.	Simetría	90
3.3.8.	Composición de Funciones	93
3.3.9.	Función Inversa	94
3.3.10.	Monotonía	94
3.4.	Límites de funciones	95

ÍNDICE GENERAL

5

3.4.1.	Límite de una función en un punto	95
3.4.2.	Límite de una función en el infinito	95
3.4.3.	Cálculo de límites de funciones racionales	96
3.5.	Continuidad	97
3.5.1.	Continuidad en un punto y en un intervalo	97
3.5.2.	Tipos de discontinuidad	98
3.5.3.	Continuidad y Operaciones:	99
3.5.4.	Problemas de Continuidad	99
3.6.	Asíntotas de una función	103
3.7.	Problemas de Límites	103
3.8.	Problemas Varios	119
3.8.1.	Problemas de Dominio	119
3.8.2.	Varios	120

www.muscat.net

www.muscat.net

Capítulo 1

Problemas de Álgebra

1.1. Números Reales

1.1.1. Los números

Problema 1 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

-7 ; 12 ; 0 ; π ; $2,333\dots$; $-\frac{3}{7}$; $2,1010010001\dots$

Problema 2 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

-12 ; $\frac{5}{2}$; $\sqrt{7}$; 23 ; $7,34$; $5,222272727\dots$; $3,7770700700070000\dots$

Problema 3 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

3 ; -2 ; $-\frac{4}{3}$; $4,3327832783278\dots$; $4,33133113331113333\dots$; $\sqrt{7}$; π ; $7,1203870387\dots$; $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

Problema 4 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

-3 ; 2 ; $-\frac{4}{3}$; $4,332227772227777\dots$; $4,33278278278\dots$; $\sqrt{5}$; π ; $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; $7,1203870387\dots$

Problema 5 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$\frac{3}{4}$; $\sqrt{2}$; 5 ; $0,12348348\dots$; $0,123123412345\dots$; -3 ; π ; $0,110011100011110000\dots$; 0 ; $\frac{2}{5}$.

Problema 6 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$\frac{1}{4}$; $\sqrt{3}$; 7 ; $0,12359359\dots$; $0,123123412345\dots$; -2 ; π ; $0,110011100011110000\dots$; 0 ; $\frac{4}{5}$.

Problema 7 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$3; -\sqrt{5}; 2,125125125\dots; -\frac{9}{4}; -1$$

Problema 8 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$-3; 0,56; 0; \pi; 1,1122111222\dots; -\frac{3}{4}; 2; 7,161616\dots; 3,21213214215\dots; 8,666\dots$$

Problema 9 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$-1; 0,71; 0; \sqrt{2}; 1,1133111333\dots; -\frac{1}{7}; 2; 9,262626\dots; 3,21213214215\dots; 3,333\dots$$

Problema 10 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$2; -3; \frac{3}{4}; 3,7728122812\dots; 5,1133111333\dots; \sqrt{3}; \pi; 3,230173017\dots; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0$$

Problema 11 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$3; -2; \frac{1}{4}; 2,7728122812\dots; 6,1133111333\dots; \sqrt{5}; \pi; 4,230273027\dots; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0$$

Problema 12 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$-3; 2,71; 0; \sqrt{5}; 1,2233222333\dots; -\frac{13}{7}; 5; 11,163636\dots; 4,21132142152\dots; 5,333\dots$$

Problema 13 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$3; 2,7171\dots; \pi; \sqrt{9}; 3,2244222444\dots; -\frac{7}{9}; 0; 23,163737\dots; 7,2122132142\dots; 6,111\dots$$

Problema 14 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$5; 4,8282; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \sqrt{81}; 3,2277222777\dots; -\frac{5}{9}; 0; 21,253838\dots; 7,112113114\dots; 4,111\dots$$

Problema 15 Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$6; 7,5252\dots; \pi; \sqrt{36}; 3,5577555777\dots; -\frac{3}{4}; -1; 1,143939\dots; 7,772773774\dots; 9,999\dots$$

1.1.2. Intervalos

Problema 16 Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1. $|x - 3| < 1$
2. $|x - 5| \leq 3$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$).

Problema 17 Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1. $|x - 4| < 2$
2. $|x - 1| \leq 3$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$).

Problema 18 Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1. $\{x \in R : -3 \leq x < 7\}$
2. $\{x \in R : 4 < x < 8\}$
3. $\{x \in R : x \geq 3\}$
4. $\{x \in R : x < -1\}$
5. $\{x \in R : |x - 3| \leq 5\}$
6. $\{x \in R : |x + 1| < 2\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$).

Problema 19 Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1. $\{x \in R : -2 \leq x < 6\}$
2. $\{x \in R : 1 < x < 9\}$
3. $\{x \in R : x \geq 1\}$
4. $\{x \in R : x < -3\}$
5. $\{x \in R : |x - 2| \leq 5\}$
6. $\{x \in R : |x + 1| < 3\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$).

Problema 20 Dados los intervalos $A = (-1, 4]$, $B = (-\infty, 2]$ y $C = (1, 3)$, calcular $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$ y $B \cup C$

Problema 21 Escribe de todas las maneras que conozcas los siguientes intervalos

1. $\{x \in R : |x - 2| \leq 8\}$

2. $\{x \in R : |x + 1| < 9\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$).

Problema 22 Dados los intervalos $A = (-2, 4]$, $B = (-\infty, 2]$ y $C = (1, 4)$, calcular $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$ y $B \cup C$

Problema 23 Escribe de todas las maneras que conozcas los siguientes intervalos

1. $\{x \in R : |x - 5| \leq 5\}$

2. $\{x \in R : |x + 2| < 8\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$).

Problema 24 Dados los intervalos $A = (-3, 4]$, $B = (-3, 2]$ y $C = (0, 4]$, calcular $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$ y $B \cup C$

Problema 25 Escribe de todas las maneras que conozcas los siguientes intervalos

1. $\{x \in R : |x - 1| \leq 7\}$

2. $\{x \in R : |x + 4| < 10\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$).

Problema 26 Dados los intervalos $A = (-3, 7]$, $B = (-\infty, 3]$ y $C = (0, 7)$, calcular $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$ y $B \cup C$

Problema 27 Escribe de todas las maneras que conozcas los siguientes intervalos

1. $\{x \in R : |x - 2| \leq 12\}$

2. $\{x \in R : |x + 3| < 11\}$

(Recuerda la definición de entorno, $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$).

1.1.3. Ecuaciones Bicuadradas**Problema 28**

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

Problema 29

$$x^4 - 14x^2 - 32 = 0$$

Problema 30

$$x^4 - 80x^2 - 81 = 0$$

Problema 31

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

Problema 32

$$x^4 - 24x^2 - 25 = 0$$

Problema 33

$$x^4 + x^2 - 20 = 0$$

1.2. Números Racionales**1.2.1. Operaciones con números racionales****Problema 34** Racionalizar las siguientes expresiones:

1. $\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{3}{\sqrt{3}}$

2. $\frac{1}{1 + \sqrt{5}}; \frac{2}{5 - \sqrt{5}}$

Problema 35 Racionalizar las siguientes expresiones:

1. $\frac{3}{\sqrt{7}}; \frac{5}{\sqrt{5}}$

2. $\frac{1}{1 + \sqrt{7}}; \frac{3}{7 - \sqrt{7}}$

Problema 36 Simplifica todo lo que puedas

$$\sqrt{27} - \sqrt{3} + \sqrt{192} - 2\sqrt{12}, \quad \frac{\sqrt[4]{a^3}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}, \quad \sqrt{27} + \frac{1}{2}\sqrt{12} - 2\sqrt{75}$$

Problema 37 Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{3}{1 + \sqrt{7}}; \quad \frac{3}{\sqrt[3]{3}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

Problema 38 Simplifica todo lo que puedas

$$\sqrt{27} + \frac{1}{2}\sqrt{12} - 2\sqrt{75}, \quad \frac{\sqrt{75}\sqrt[3]{25}}{\sqrt{15}}, \quad \sqrt{48} + 3\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{108}$$

Problema 39 Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{2}{1 + \sqrt{5}}; \quad \frac{2}{\sqrt[3]{3^2}}, \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

Problema 40 Simplifica todo lo que puedas

$$3\sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{72} + \sqrt{128}, \quad \frac{\sqrt{27}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}, \quad \sqrt{48} + 3\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{108}$$

Problema 41 Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{7}{2 + \sqrt{11}}; \quad \frac{6}{\sqrt[5]{3^2}}, \quad \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$$

Problema 42 Simplifica todo lo que puedas

$$\sqrt{75} + \frac{1}{2}\sqrt{192} + \sqrt{147}, \quad \frac{\sqrt{216}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}, \quad \sqrt{96} - \sqrt{150} + 2\sqrt{294}$$

Problema 43 Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{4}{1 + \sqrt{5}}; \quad \frac{3}{\sqrt[7]{3^2}}, \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$$

1.2.2. Ecuaciones Racionales

Problema 44 $\sqrt{x-1} - \sqrt{x} = 4$

Problema 45 $2 + \sqrt{x-1} = x$

Problema 46 $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = 3$

Problema 47 $3 - \sqrt{x+2} = x$

Problema 48 $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 4$

Problema 49 $\sqrt{x+4} = x - 1$

Problema 50 $\sqrt{2x-1} + x = 8$

Problema 51 $\sqrt{x+1} = x - 1$

Problema 52 $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$

Problema 53 $\sqrt{3x-5} + x = 1$

Problema 54 $\sqrt{x^2-8} = x + 2$

Problema 55 Halla las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{2-x} = 4$$

Problema 56 Halla las soluciones reales de:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x} = 2$$

Problema 57 Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x} = 7$$

Problema 58 Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = 3$$

Problema 59 Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$$

1.3. Logaritmos

1.3.1. Ecuaciones Logarítmicas

Problema 60 Resolver las ecuaciones:

1. $\log x + \log 50 = \log 1000$

2. $2 \log x^3 = \log 8 + 3 \log x$

Problema 61 Resolver las ecuaciones:

1. $3 \log x + 2 \log x^2 = \log 128$

2. $3 \log x^2 = 4 + 4 \log x$

Problema 62 Halla las soluciones de:

$$\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1)$$

Problema 63 Halla las soluciones de:

$$\log(x^2 + 6x + 7) = 1 + \log(x + 1)$$

Problema 64 Hallar las soluciones reales de:

$$\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1)$$

Problema 65 Hallar las soluciones reales de:

$$\log(x^2 + 2699) = 2 + \log(x + 2)$$

Problema 66 Calcular

$$\log(x^2 - 1) + 2 = 1 + 2\log(x + 1)$$

Problema 67 Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(1 + x^2) - 1 = \log(x - 2)$$

Problema 68 Resolver las ecuaciones:

1. $\log \frac{10}{x} = 2 - 2\log x$

2. $3\log x - 2 = 2\log x$

Problema 69 Resolver las ecuaciones:

1. $\log 10(x + 2) - \log(x^2) = 1$

2. $\log x + \log x^2 = 3$

Problema 70

$$\log(3x + 1) - 2\log x = 2$$

Problema 71

$$\log(2x + 1) - 2\log x = 1$$

Problema 72

$$2\log(x + 1) - \log x = 1$$

Problema 73

$$\log x - \log(1 - x) = 2$$

Problema 74

$$\log(x + 1) - \log(x^2 - 1) = 1$$

Problema 75

$$\log x - \log(1 - x) = 2$$

Problema 76 Resolver las ecuaciones:

1. $\log x^2 - \log(x - 1) + 1 = 2 \log x$
2. $\log(x + 1) - 2 \log(x - 1) = 1$

Problema 77 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(10x^2 - 2) - 1 = \log(x + 1) + \log x$
2. $\log(3x^2 - 2) - 2 \log(1 - x) = 1$

Problema 78 Resolver las ecuaciones:

1. $2 \log(x - 1) + 1 = \log(x^2 - 1)$
2. $\log(10(x^3 + 2x)) - 2 \log(x + 1) = 1 + \log x$

Problema 79 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x - 1) + \log(x + 1) = 2 \log x - 1$
2. $\log x^2 + 3 \log x = 2$

Problema 80 Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(2 + x) - \log x = 1 + \log(1 - x)$$

Problema 81 Unos problemas para ejercitarse:

1. $5 \log 2x = 20$ Sol: $x = 5000$
2. $3 \log 5x = -9$ Sol: $x = 0,0002$
3. $\log \frac{2x-4}{5} = 2$ Sol: $x = 252$
4. $\log(x + 1)^2 = 2$ Sol: $x = 9$; $x = -11$
5. $\log(7x + 15) - \log 5 = 1$ Sol: $x = 5$
6. $\log \frac{x}{2} = 1 + \log(21 - x)$ Sol: $x = 20$
7. $\log \frac{10}{x} = 2 - 2 \log x$ Sol: $x = 10$; $x = 0$
8. $2 \log x - \log(x^2 - 2x + 6) = 0$ Sol: $x = 3$
9. $\log(2x - 3) + \log(3x - 2) = 2 - \log 25$ Sol: $x = 2$; $x = \frac{1}{6}$

10. $\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1)$ Sol: $x = 2$; $x = \frac{4}{3}$
11. $\log x^2 + 3 \log x = 2$ Sol: $x = 10^{\frac{2}{5}}$
12. $2 \log x^2 - 2 \log x = 2$ Sol: $x = 10$
13. $\log x^2 + 1 = \log x^3$ Sol: $x = 10$
14. $\log(1 - x) + \log x = 1$ Sol: No tiene solución real.
15. $\log x - \log(1 - x) = 1$ Sol: $x = \frac{10}{11}$
16. $\log x + 2 = \log x^3$ Sol: $x = 10$
17. $\log(1 + x) + \log(1 - x) = 2$ Sol: No tiene solución real.
18. $\log(2x + 7) - \log(x - 1) = \log 5$ Sol: $x = 4$
19. $\frac{\log(35-x^2)}{\log(5-x)} = 3$ Sol: $x = 3$; $x = 2$
20. $\log x^2 - \log \frac{10x+11}{10} = 1$ Sol: $x = 11$; $x = -1$
21. $\log(2x + 2) + \log(x + 3) = \log 6$ Sol: $x = 0$, $x = -4$
22. $\frac{\log 2 + \log(x^2 - 2)}{\log(2x - 2)} = 2$ Sol: $x = 2$
23. $\log(x + 6) - \frac{1}{2} \log(2x - 3) = 2 - \log 25$ Sol: $x = 6$; $x = 14$
24. $\log x = \log 2 + 2 \log(x - 3)$ Sol: $x = \frac{9}{2}$; $x = 2$
25. $2 \log x = 2 + \log x$ Sol: $x = 0$; $x = 2$
26. $\log 8 + (x^2 - 5x + 7) \log 3 = \log 24$ Sol: $x = 3$; $x = 2$
27. $2 \log x - \log 16 = \log \frac{x}{2}$ Sol: $x = 0$; $x = 8$
28. $\log(2x+4) + \log(3x+1) - \log 4 = 2 \log(8-x)$ Sol: $x = -42$ $x = 3$
29. $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$ Sol: $x = 3$ $x = 2$
30. $\frac{\log 2 + \log(11-x^2)}{\log(5-x)} = 2$ Sol: $x = \frac{1}{3}$ $x = 3$
31. $\log(5x + 4) - \log 2 = \frac{1}{2} \log(x + 4)$ Sol: $x = 0$
32. $(x^2 - x + 3) \log 4 = 3 \log \frac{1}{4}$ Sol: No tiene solución.

1.3.2. Sistemas de Ecuaciones Logarítmicas**Problema 82** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} 3 \log x + 2 \log y = 12 \\ \log \frac{x}{y} = -1 \end{cases}$$

Problema 83 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} 2 \log x + \log y = 4 \\ \log \frac{x}{y} = -1 \end{cases}$$

Problema 84 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x^3}{y^2} = 1 \\ \log(x^2 y) = 2 \end{cases}$$

Problema 85 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x^4}{y} = 1 \\ \log(x \cdot y^2) = 2 \end{cases}$$

Problema 86 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x^3}{y^2} = 1 \\ \log(x^2 y) = 2 \end{cases}$$

Problema 87 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x^3}{y^2} = 2 \\ \log(x^2 y) = 3 \end{cases}$$

Problema 88 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log(x \cdot y) = 3 \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

Problema 89 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log x - \log y^2 = 3 \\ \log(x^2 \cdot y) = 1 \end{cases}$$

Problema 90 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x}{y^2} = 1 \\ \log(x^2 y) = 2 \end{cases}$$

Problema 91 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x}{y^2} = 3 \\ \log(x^2y) = 2 \end{cases}$$

Problema 92

$$\begin{cases} \log(xy^2) = 2 \\ \log\left(\frac{x^2}{y}\right) = 3 \end{cases}$$

Problema 93

$$\begin{cases} \log(x^2y) = 3 \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \end{cases}$$

Problema 94

$$\begin{cases} 2 \log(xy) = 3 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 5 \end{cases}$$

Problema 95

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2 \log x - \log y = 0 \end{cases}$$

Problema 96

$$\begin{cases} \log(x^3y^2) = 8 \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = 1 \end{cases}$$

Problema 97

$$\begin{cases} \log x + 2 \log y = 3 \\ -\log x + \log y = 0 \end{cases}$$

Problema 98 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log(xy)^2 = 4 \\ \log\left(\frac{x^3}{y^2}\right) = 1 \end{cases}$$

Problema 99 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log(xy)^2 = 4 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 2 \end{cases}$$

Problema 100 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log(xy)^2 = 8 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 4 \end{cases}$$

Problema 101 Unos problemas para ejercitarse:

1.

$$\begin{cases} 2 \log x - 5 \log y = -1 \\ 3 \log x + 2 \log y = 8 \end{cases}$$

Sol: $x = 100$; $y = 10$

2.

$$\begin{cases} 4 \log x - 3 \log y = -1 \\ \log(x \cdot y) = 5 \end{cases}$$

Sol: $x = 100$; $y = 1000$

3.

$$\begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log \frac{x^3}{y^2} = 4 \end{cases}$$

Sol: $x = 100$; $y = 10$

4.

$$\begin{cases} \log(x^2 \cdot y) = 2 \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

Sol: $x = 10$; $y = 1$

5.

$$\begin{cases} \log x^2 - 3 \log y = -1 \\ \log(x \cdot y^2) = 3 \end{cases}$$

Sol: $x = 10$; $y = 10$

6.

$$\begin{cases} \log x^2 - 3 \log y = 2 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 3 \end{cases}$$

Sol: $x = 10^{-5}$; $y = 10^{-4}$

7.

$$\begin{cases} \log x - \log y = 7 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

Sol: $x = 10^5$; $y = 10^{-2}$

8.

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

Sol: $x = -5$; $y = -20$ o bien $x = 20$; $y = 5$

9.

$$\begin{cases} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log \frac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$$

Sol: $x = 100$; $y = 10$

10.

$$\begin{cases} 2 \log x^2 - \log y^2 = 4 \\ 2 \log x + \log y^2 = 2 \end{cases}$$

Sol: $x = 100$; $y = 1$

1.4. Exponenciales

1.4.1. Ecuaciones Exponenciales:

Problema 102 Halla las soluciones de:

$$3^{x^2+5x-4} \cdot 9^{2x+3} = 27^{x-1}$$

Problema 103 Halla las soluciones de:

$$3^{x^2+5x-4} \cdot 9^{2x+3} = 27^{x-1}$$

Problema 104 Calcular

$$2 \cdot 3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0$$

Problema 105

$$7^{2x-1} + 7^{x+1} - 1 = 0$$

Problema 106

$$6^{2x-1} + 6^{x+1} - 1 = 0$$

Problema 107

$$3^{2x+1} - 3^{x-1} - 1 = 0$$

Problema 108

$$2^x - 2^{x+1} + 1 = 0$$

Problema 109

$$5^{2x-1} - 5^x + 1 = 0$$

Problema 110

$$2^x - 2^{x-1} - 1 = 0$$

Problema 111 Unos problemas para ejercitarse:

1. $2^{x+1} = 8$ Sol: $x = 2$
2. $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ Sol: $x = 3$
3. $6^{12-3x} = 216$ Sol: $x = 3$
4. $5^{3x-12} = 125$ Sol: $x = 5$
5. $2^x + 2^{x+3} = 36$ Sol: $x = 2$
6. $3^x + 3^{x-2} = 270$ Sol: $x = 5$
7. $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \frac{31}{25}$ Sol: $x = -2$
8. $5^{2x^2+3x-11} = 125$ Sol: $x = 2$; $x = -\frac{7}{2}$
9. $4^x + 2^{2x-1} = 24$ Sol: $x = 2$; la otra solución no es real.
10. $2^x + 2^{2x} = 6$ Sol: $x = 1$; la otra solución no es real.
11. $3^{x+3} + 9^{x+2} = 4$ Sol: $x = -2$; la otra solución no es real.
12. $4^{2x+1} - 4^{x+2} = 768$ Sol: $x = 2$; la otra solución no es real.
13. $2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 18$ Sol: $x = 3$
14. $9^{x+3} = 3^{2x+5}$ Sol: No tiene solución.
15. $8^{x^2+3x+2} = 1$ Sol: $x = -1$; $x = -2$
16. $5^x + 5^{x-1} + x^{x-2} = 31$ Sol: $x = 2$
17. $2^{x+2} = 0, 5^{2x-1}$ Sol: $x = -\frac{1}{3}$
18. $\sqrt[3]{a^{7-x}} = a^2$ Sol: $x = 1$

19. $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ Sol: $x = 2$; $x = 0$
20. $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$ Sol: $x = -1$; $x = -2$
21. $4^x \cdot 5^{x-1} = 1600$ Sol: $x = 3$
22. $10^{x^2-11x+30} = (2 \cdot 5)^2$ Sol: $x = 7$; $x = 4$
23. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$ Sol: $x = 3$
24. $3^{2(x+1)} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$ Sol: $x = -2$; $x = 1$
25. $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$ Sol: $x = 2$; $x = 1$
26. $\left(\frac{2}{7}\right)^5 = 3 \cdot 5^{x+1}$ Sol: $x = -6$
27. $5^x - \frac{5}{5^{x-1}} - 24 = 0$ Sol: $x = 2$
28. $(4^{3-x})^{2-x} = 1$ Sol: $x = 3$; $x = 2$
29. $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$ Sol: $x = \pm 2$
30. $3^{2x-1} = \sqrt[3]{9^{x^2-\frac{1}{4}}}$ Sol: $x = \frac{11}{2}$; $x = \frac{1}{2}$
31. $3 \cdot 2^{x+3} = 192 \cdot 3^{x-3}$ Sol: No tiene solución.

Problema 112 Más problemitas:

1. $2^{x-2} + 2^{x+1} - 1 = 0$ Sol: $x = -1, 169925001$
2. $3^{x+1} + 3^x - 3^{x-1} = 2$ Sol: $x = -0, 5517286062$
3. $2^{x-2} - 2^x + 2^{x-1} = 0$ Sol: No tiene solución.
4. $3^{x-2} + 2 \cdot 3^x = 1$ Sol: $x = -0, 6801438331$
5. $4^{x-1} - 3 \cdot 4^x + 4^{x-2} = 0$ Sol: No tiene solución.
6. $2^{2x-1} + 2^{x+1} - 2 = 0$ Sol: $x = -0, 2715533031$
7. $5^{2x-1} + 3 \cdot 5^x - 2 = 0$ Sol: $x = -0, 2778665354$
8. $3^{2x-2} + 3^{x-1} - 1 = 0$ Sol: $x = -1, 011034949$
9. $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x-1} - 3 = 0$ Sol: $x = 0, 7275884076$
10. $2^{2x-1} - 3 \cdot 2^{x+2} - 2 = 0$ Sol: $x = 4, 594878436$
11. $7^{2x-1} - 7^{x+1} - 2 = 0$ Sol: $x = 2, 002970617$
12. $6^{2x-1} - 6^{x-1} - 4 = 0$ Sol: $x = 0, 9437163029$

13. $5^{4x-1} - 5^{2x+1} - 3 = 0$ Sol: $x = 0,4606479652$
 14. $4^{4x-1} - 4^{2x+1} - 7 = 0$ Sol: $1,034204992$
 15. $7^{4x+1} + 3 \cdot 7^{2x} - 5 = 0$ Sol: $x = -0,1076980693$
 16. $3^{4x+1} + 2 \cdot 3^{2x-2} - 2 = 0$ Sol: $x = -0,1129051332$
 17. $2^{4x+2} + 3 \cdot 2^{2x} - 1 = 0$ Sol: $x = -1$
 18. $5^{4x-2} + 5^{2x} - 1 = 0$ Sol: $x = -0,01174112826$

1.4.2. Sistemas de Ecuaciones Exponenciales:

Problema 113 Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 4^{x+1} - 6^y = 40 \\ 2 \cdot 4^x - 6^y = -88 \end{cases}$$

Problema 114 Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$$

Problema 115 Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y+1} = 4 \\ 2^{x+1} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}$$

Problema 116 Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y-1} = 4 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 5 \end{cases}$$

Problema 117 Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y-1} = 3 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 4 \end{cases}$$

Problema 118 Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y-1} = 1 \\ 2^{x-1} + 3^{y+1} = 2 \end{cases}$$

Problema 119

$$\begin{cases} 3^{x-1} + 2^{y+1} = 2 \\ 3^x - 2^y = 3 \end{cases}$$

Problema 120

$$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y+1} = 5 \\ 2^x - 3^y = 2 \end{cases}$$

Problema 121

$$\begin{cases} 3^{x-2} + 2^y = 1 \\ 2^x + 3 \cdot 2^y = 5 \end{cases}$$

Problema 122

$$\begin{cases} 2^x - 3^y = 1 \\ 2^x + 3^y = 3 \end{cases}$$

Problema 123

$$\begin{cases} 2^{x+2} - 3^y = 1 \\ 2^x + 2 \cdot 3^y = 3 \end{cases}$$

Problema 124

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 2 \\ 2^{x+1} - 3^y = 1 \end{cases}$$

Problema 125 Unos problemas para ejercitarse:

1.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 4 \cdot 7^y = -172 \\ 7 \cdot 2^x + 2 \cdot 7^y = 154 \end{cases}$$

Sol: $x = 3$; $y = 2$

2.

$$\begin{cases} 4^{x+1} - 6^y = 40 \\ 2 \cdot 4^x - 6^y = -88 \end{cases}$$

Sol: $x = 3$; $y = 3$

3.

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+1} - 5^{y+2} = -2639 \\ 4 \cdot 3^x + 5^y = 449 \end{cases}$$

Sol: $x = 4$; $y = 4$

4.

$$\begin{cases} 3^x + 2^y = 31 \\ 3^{x+1} - 2^{y+2} = 65 \end{cases}$$

Sol: $x = 3$; $y = 2$

5.

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 25^3 \\ 3^{x-y} = 25 \end{cases}$$

Sol: $x = 4$; $y = 2$

6.

$$\begin{cases} 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \\ 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \end{cases}$$

Sol: $x = 3$; $y = 2$

7.

$$\begin{cases} a^{x+y} = a^4 \\ a^{x-y} = a^2 \end{cases}$$

Sol: $x = 3$; $y = 1$

8.

$$\begin{cases} 8^y \cdot 2^{2x} = 128 \\ 3^{2y} \cdot 3^{x-1} = 27 \end{cases}$$

Sol: $x = -70$; $y = 49$

9.

$$\begin{cases} 3^{3x-y} = \sqrt{3^{10}} \\ 3^{2x+y} = 3 \end{cases}$$

Sol: $x = \frac{6}{5}$; $y = -\frac{7}{5}$

10.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -6 \\ 4 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = -11 \end{cases}$$

Sol: $x = 2$; $y = 2$

11.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 5 \cdot 3^y = 3 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 59 \end{cases}$$

Sol: $x = 4$; $y = 2$

12.

$$\begin{cases} 2^x - 3^{y-1} = 5 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 712 \end{cases}$$

Sol: $x = 5$; $y = 4$

13.

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^x + 2^{y+3} = 86 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases}$$

Sol: $x = 3$; $y = 2$

14.

$$\begin{cases} 2^{x+2y} = 32 \\ 5^{2x-y} = 1 \end{cases}$$

Sol: $x = 1$; $y = 2$

1.5. Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales

Problema 126 Resolver las ecuaciones:

- $\log(3x + 1) - \log x = 1 + \log x$
- $2^{2x-1} + 2^{x+2} - 1 = 0$

Problema 127 Resolver las ecuaciones:

- $\log(3x + 1) - \log x = 1 + \log(1 - x)$
- $2^{2x-1} + 2^{x+3} - 1 = 0$

Problema 128 Resolver las ecuaciones:

- $\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1)$
- $2^{2x-1} + 2^{x+1} - 2 = 0$

Problema 129 Calcular:

- $\log(x^2 + 2) - \log x = 1$
- $4^{x-1} + 2^x - 1 = 0$

Problema 130 Resolver las ecuaciones:

- $\log(x - 1) - \log(x + 1) = 1 - \log x$
- $\log x + 1 = \log x^2$
- $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0$
- $3^{x+1} + 3^{x-1} - 1 = 0$

Problema 131 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x - 1) - \log(x + 1) = 1 - \log x$

2. $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0$

Problema 132 Resolver:

1. $\log(1 + x) - \log(1 - x) = 2$

2. $3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$

Problema 133 Resolver las siguientes ecuaciones

1. $\log(x^2 - 2) + 1 = \log(x + 1) + \log(x - 1)$

2. $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0$

Problema 134 Resolver:

1. $\log(5x + 1) - \log x = 1 - \log(1 - x)$

2. $2^{2x-1} - 2^{x+1} + 2 = 0$

3.

$$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y+1} = 3 \\ 2^{x+1} - 3^{y-1} = 1 \end{cases}$$

1.6. Sistemas de Ecuaciones no Lineales

Problema 135 Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Problema 136 Calcular:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

1.7. Inecuaciones

1.7.1. Inecuaciones

Problema 137 Resolver las inecuaciones siguientes:

1.

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 3} > 0$$

2.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 1} \leq 0$$

Problema 138 Resolver las inecuaciones siguientes:

1.

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x - 3} < 0$$

2.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 5} \geq 0$$

Problema 139 Resolver las inecuaciones siguientes:

1.

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} \geq 0$$

2.

$$\frac{x - 1}{10} - \frac{3x}{5} \geq \frac{2x}{6} + 1$$

Problema 140 Resolver las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x - 1} \leq 0, \quad \frac{x - 1}{x^2 + 3x + 2} \geq 0$$

Problema 141 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} \leq 0$

2. $\frac{x^2 - 5x - 14}{x - 3} \geq 0$

3. $\frac{x - 5}{6} + 1 \leq \left(\frac{x + 1}{2}\right)x$

Problema 142 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} \geq 0$

2. $\frac{x^2 - 5x - 14}{x - 3} \leq 0$

3. $\frac{x - 5}{6} + 1 \geq \left(\frac{x + 1}{2}\right)x$

Problema 143 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2+4x-5}{x+1} \geq 0$
2. $\frac{x^2+3x-4}{x-3} \leq 0$
3. $\frac{x^2}{3} + 6 < \frac{4}{3} - 3x$

Problema 144 Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2-x-2}{x+3} \geq 0$
2. $\frac{x^2+3x-4}{x-3} \leq 0$
3. $\frac{2-3x}{3} + \frac{1-2x}{6} \geq \frac{19-22x}{18}$

Problema 145 Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{x + 3} \geq 0$$

Problema 146 Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2+x-6}{x+1} \leq 0$
2. $\frac{x^2+4x-5}{x-2} \geq 0$
3. $\frac{2x+1}{2} - x < \left(\frac{x-2}{6}\right)x$

Problema 147 Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2+x-6}{x+1} \leq 0$
2. $\frac{x^2+4x-5}{x-2} \geq 0$
3. $\frac{2x+1}{2} - x < \left(\frac{x-2}{6}\right)x$

Problema 148 Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 1} \geq 0$$

Problema 149 Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2 - 6x - 7}{x - 3} \leq 0$
2. $\frac{x^2 + x - 6}{x + 1} \geq 0$
3. $\frac{2x}{3} - 2x < \left(\frac{x - 2}{6}\right)x$

Problema 150 Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2 - 2x - 35}{x + 1} \geq 0$

2. $\frac{4x}{3} - x < \left(\frac{x-3}{6}\right)x \implies 2x < x^2 - 3x$

Problema 151 Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 3} \geq 0$$

Problema 152

$$\frac{x + 3}{2} - \frac{2x}{7} \geq 1 - \frac{x}{14}$$

Problema 153

$$\frac{x^2 + 5x - 6}{x - 3} \geq 0$$

Problema 154

$$\frac{x + 1}{3} - \frac{x - 1}{8} \leq \frac{x}{4} + 1$$

Problema 155

$$\frac{x^2 + 2x - 35}{x + 1} \leq 0$$

Problema 156

$$\frac{x - 1}{5} - \frac{x}{15} \leq \frac{x + 1}{3} + 2$$

Problema 157

$$\frac{x^2 + 3x - 40}{x - 2} \geq 0$$

Problema 158

$$\frac{x}{2} + \frac{x - 1}{6} < 1 - \frac{x + 1}{3}$$

Problema 159

$$x^2 - x - 2 < 0$$

Problema 160

$$\frac{x + 2}{12} - \frac{x + 1}{4} \leq 1 + \frac{x}{3}$$

Problema 161

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} \geq 0$$

Problema 162

$$\frac{x - 1}{8} - \frac{x}{2} < \frac{x + 1}{4}$$

Problema 163

$$\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} \geq 0$$

Problema 164 Resolverlas siguientes inecuaciones:

1. $\frac{x^2 + 6x - 7}{x - 2} \geq 0$
2. $\frac{4x}{3} - x < \left(\frac{x - 3}{6}\right)x \implies 2x < x^2 - 3x$

Problema 165 Algunos problemas para ejercitarse:

1. $3x - 9 > 0$ Sol: $(3, +\infty)$
2. $4x - 20 < 0$ Sol: $(-\infty, 5)$
3. $5x + 3 > 2x + 6$ Sol: $(-3, +\infty)$
4. $10 - 3x < 4x - 4$ Sol: $(2, +\infty)$
5. $2(5 - 7x) \geq 52$ Sol: $(-\infty, -3]$
6. $3(2x - 1) + 1 < -13 - 5x$ Sol: $(-\infty, -1)$
7. $\frac{x}{10} > 4x - \frac{78}{10}$ Sol: $(-\infty, 2)$
8. $\frac{6x-22}{20} - \frac{10x+2}{14} \geq \frac{2x-14}{10} - \frac{10x-12}{21}$ Sol: $(-\infty, -3]$
9. $\frac{2x}{3} + \frac{5x-1}{2} < \frac{26}{3}$ Sol: $(-\infty, 3)$
10. $\frac{3(4x-7)}{4} - \frac{x}{8} \geq \frac{3x}{8} - \frac{21}{4}$ Sol: $[0, +\infty)$
11. $\frac{3x+5}{6} - \frac{5-2x}{2} \leq \frac{x-12}{3}$ Sol: $(-\infty, -2]$
12. $\frac{4-3x}{3} - \frac{2x-3}{4} > -\frac{65}{13}$ Sol: $(-\infty, 5)$
13. $\frac{2-3x}{3} + \frac{1-2x}{6} \geq \frac{19-22x}{18}$ Sol: $(-\infty, -2]$
14. $x^2 - 7x + 10 > 0$ Sol: $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$

15. $x^2 - 7x + 6 < 0$ Sol: (1, 6)
16. $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ Sol: $(-\infty, 3] \cup [4, +\infty)$
17. $-8x \leq -x^2 - 15$ Sol: [3, 5]
18. $6x^2 > 12x$ Sol: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
19. $-27x \leq -12x^2$ Sol: $[0, \frac{9}{4}]$
20. $-2x^2 - 10x - 8 > 0$ Sol: (-4, -1)
21. $-(x+2)^2 + 3x \leq 2(-x^2 + 1)$ Sol: [-2, 3]
22. $x - 3 + \frac{25}{x} - 7 < 0$ Sol: ϕ
23. $\frac{x-2}{x+3} > 0$ Sol: $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
24. $x^3 - 2x^2 - 3x < 0$ Sol: $(-\infty, -1) \cup (0, 3)$
25. $x^4 + 2x^2 - 3x^3 \geq 0$ Sol: $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$
26. $\frac{x^2+x}{x-2} > 0$ Sol: $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$
27. $(x^2 + 1)(x - 1) > 0$ Sol: (1, $+\infty$)
28. $(x^2 - 3)(x^2 - 5x + 6) < 0$ Sol: $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (2, 3)$
29. $4x^4 + 2x^2 + 1 \geq 0$ Sol: R
30. $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 > 0$ Sol: $(-3, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$
31. $\frac{x-3}{x+1} > 0$ Sol: $(-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$
32. $\frac{2x(x-3)+x^2}{x-1} < 3(x-1)$ Sol: (1, $+\infty$)
33. $\frac{(x^2+1)(x^2-9x+8)}{x^2+2} \leq 0$ Sol: [1, 8]
34. $\frac{x^2-25}{x^2-7x+10} \leq 0$ Sol: [-5, 2]
35. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x-5} \geq 0$ Sol: $(-\infty, -1) \cup [2, 3] \cup (5, +\infty)$
36. $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x+1} < 0$ Sol: (1, 3) \cup (-2, -1)
37. $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x+2} \leq 0$ Sol: (-2, -1) \cup (1, 3)
38. $\frac{x^2-8x+7}{x^2-3x-10} < 0$ Sol: (5, 7) \cup (-2, 1)
39. $\frac{x^2-2x-8}{x^2-1} \geq 0$ Sol: $(-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [4, +\infty)$

40. $x^2 - 6x + 9 > 0$ Sol: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
41. $3x^2 + 5x - 2 \leq 0$ Sol: $[-2, \frac{1}{3}]$
42. $x^2 + 2x > 0$ Sol: $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
43. $x^2 + 1 \leq 0$ Sol: No tiene solución.
44. $(x - 3)^3 \leq 4$ Sol: $(-\infty, 2\frac{2}{3} + 3]$
45. $3(x^2 - 1) - 5(x - 2) < 0$ Sol: No tiene solución.
46. $x^2 - 7 \geq -3(x - 1)$ Sol: $(-\infty, -5] \cup [2, +\infty)$
47. $x^2 + \frac{1}{4} < x - 2$ Sol: No tiene solución.
48. $2(5 - x^2) > 3x$ Sol: $(-3, 11; 1, 61)$
49. $\frac{2x-1}{5} > \frac{3x^2}{2}$ Sol: No tiene solución.
50. $\frac{x-3}{x+1} > 0$ Sol: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
51. $\frac{2x-1}{x} \leq 0$ Sol: $(0, \frac{1}{2}]$
52. $\frac{x^2-3x-4}{x} > 0$ Sol: $(-1, 0) \cup (4, +\infty)$
53. $\frac{x^2-2x-3}{x^2-4} > 0$ Sol: $(-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (3, +\infty)$
54. $5x - 3(1 - 4x) \leq 4x - 1$ Sol: $(-\infty, \frac{2}{13}]$
55. $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-3}{2} \geq \frac{x-2}{3} + \frac{29}{6}$ Sol: $(-\infty, 0]$
56. $7(2x - 1) - 3x \leq 2(x + 1) - 9$ Sol: $(-\infty, 0]$
57. $3(x - 7) + 2x \leq 5(x - 1)$ Sol: $(-\infty, +\infty)$
58. $4(3x - 1) - 5x < 7(x - 1) + 3$ Sol: ϕ
59. $3x - \frac{x+2}{3} > \frac{2x+1}{4} - \frac{5-x}{2}$ Sol: $(-\frac{19}{20}, +\infty)$
60. $(x - 2)(x + 1) \geq 18$ Sol: $(-\infty, -4] \cup [5, +\infty)$
61. $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$ Sol: $\{\frac{1}{3}\}$
62. $\frac{x-3}{4} > (x - 2)(x + 7) + 17$ Sol: $(-\frac{15}{4}, -1)$

Problema 166 Más problemitas:

1. $x^2 - 7x - 30 = (x + 3)(x - 10) < 0$ Sol: $(-3, 10)$
2. $x^2 - 15x + 44 = (x - 4)(x - 11) > 0$ Sol: $(-\infty, 4) \cup (11, +\infty)$

3. $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1) > 0$ Sol: $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$
4. $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) > 0$ Sol: $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
5. $x^2 - 10x - 11 = (x+1)(x-11) < 0$ Sol: $(-1, 11)$
6. $x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5) < 0$ Sol: $(4, 5)$
7. $x^2 + 5x - 14 = (x-2)(x+7) < 0$ Sol: $(-7, 2)$
8. $x^2 + 3x - 54 = (x+9)(x-6) < 0$ Sol: $(-9, 6)$
9. $x^2 + 3x - 40 = (x+8)(x-5) > 0$ Sol: $(-\infty, -8) \cup (5, +\infty)$
10. $x^2 + 9x + 14 = (x+2)(x+7) > 0$ Sol: $(-\infty, -7) \cup (-2, +\infty)$
11. $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4) > 0$ Sol: $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$
12. $x^2 - 11x + 18 = (x-2)(x-9) > 0$ Sol: $(-\infty, 2) \cup (9, +\infty)$
13. $x^2 - 12x - 13 = (x+1)(x-13) > 0$ Sol: $(-\infty, -1) \cup (13, +\infty)$
14. $x^2 + 14x - 15 = (x+15)(x-1) > 0$ Sol: $(-\infty, -15) \cup (1, +\infty)$
15. $x^2 - 11x - 42 = (x-14)(x+3) > 0$ Sol: $(-\infty, -3) \cup (14, +\infty)$
16. $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6) > 0$ Sol: $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$
17. $x^2 - 13x + 22 = (x-11)(x-2) < 0$ Sol: $(2, 11)$
18. $x^2 + 13x - 14 = (x-1)(x+14) < 0$ Sol: $(-14, 1)$
19. $x^2 - 9x - 22 = (x+2)(x-11) < 0$ Sol: $(-2, 11)$
20. $\frac{x^2-4x-21}{x+10} = \frac{(x-7)(x+3)}{x+10} \leq 0$ Sol: $(-\infty, -10) \cup [-3, 7]$
21. $\frac{x^2+4x-77}{x+8} = \frac{(x+11)(x-7)}{x+8} \geq 0$ Sol: $[-11, -8] \cup [7, +\infty)$
22. $\frac{x^2-4x-77}{x+5} = \frac{(x-11)(x+7)}{x+5} \geq 0$ Sol: $[-7, -5] \cup [11, +\infty)$
23. $\frac{x^2-x-6}{x+3} = \frac{(x+2)(x-3)}{x+3} \leq 0$ Sol: $(-\infty, -3) \cup [-2, 3]$
24. $\frac{x^2+3x-40}{x-7} = \frac{(x+8)(x-5)}{x-7} \geq 0$ Sol: $[-8, 5] \cup (7, +\infty)$
25. $\frac{x^2-3x-70}{x+2} = \frac{(x+7)(x-10)}{x+2} \geq 0$ Sol: $[-7, -2] \cup [10, +\infty)$
26. $\frac{x^2-12x-13}{x+6} = \frac{(x+1)(x-13)}{x+6} \leq 0$ Sol: $(-\infty, -6) \cup [-1, 13]$
27. $\frac{x^2-17x+52}{x+8} = \frac{(x-4)(x-13)}{x+8} \leq 0$ Sol: $(-\infty, -8) \cup [4, 13]$
28. $\frac{x^2-7x-30}{x-11} = \frac{(x+3)(x-10)}{x-11} \geq 0$ Sol: $[-3, 10] \cup (11, +\infty)$

29. $\frac{x^2-x-2}{x+3} = \frac{(x-2)(x+1)}{x+3} \geq 0$ Sol: $(-3, -1] \cup [2, +\infty)$
30. $\frac{x^2+7x+10}{x-2} = \frac{(x+5)(x+2)}{x-2} \leq 0$ Sol: $(-\infty, -5] \cup [-2, 2)$
31. $\frac{x^2-6x-7}{x+2} = \frac{(x+1)(x-7)}{x+2} \leq 0$ Sol: $(-\infty, -2) \cup [-1, 7]$
32. $\frac{x^2-x-12}{x+1} = \frac{(x+3)(x-4)}{x+1} \geq 0$ Sol: $[-3, -1) \cup [4, +\infty)$
33. $\frac{x^2-3x-18}{x-5} = \frac{(x-6)(x+3)}{x-5} \geq 0$ Sol: $[-3, 5) \cup [6, +\infty)$
34. $\frac{x^2+3x-4}{x-3} = \frac{(x+4)(x-1)}{x-3} \leq 0$ Sol: $(-\infty, -4] \cup [-1, 3)$
35. $\frac{x^2-11x+24}{x+7} = \frac{(x-3)(x-8)}{x+7} \leq 0$ Sol: $(-\infty, -7) \cup [3, 8]$
36. $\frac{x^2+4x-5}{x+1} = \frac{(x+5)(x-1)}{x+1} \geq 0$ Sol: $[-5, -1) \cup [1, +\infty)$
37. $\frac{x^2+3x-54}{x+2} = \frac{(x+9)(x-6)}{x+2} \leq 0$ Sol: $(-\infty, -9] \cup (-2, 6]$

1.7.2. Sistemas de Inecuaciones

Problema 167

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + y \geq 3 \end{cases}$$

Problema 168

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ x - y > 3 \end{cases}$$

Problema 169

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \\ x - 2y < 1 \end{cases}$$

Problema 170

$$\begin{cases} x + y < 1 \\ x - y > 0 \end{cases}$$

Problema 171

$$\begin{cases} 2x - y > 1 \\ x + y < 2 \end{cases}$$

Problema 172 Unos problemitas para el entrenamiento

1.

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \leq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > 0 \end{cases}$$

Sol: $[-2, -1) \cup (1, 4]$

2.

$$\begin{cases} x < 3 \\ 2(x-1) < 5(x-1) \end{cases}$$

Sol: $(-1, 3)$

3.

$$\begin{cases} 5 \cdot \frac{x-1}{2} \leq 3(x-1) \\ x < -2 \end{cases}$$

Sol: ϕ

1.8. Polinomios

1.8.1. Introducción

Problema 173 Identidades Notables:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

$$(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$(2x^2 - x)^2 = (2x^2)^2 - 2(2x^2)x + x^2 = 4x^4 - 4x^3 + x^2$$

$$(\sqrt{2}x - 2x^3)(\sqrt{2}x + 2x^3) = (\sqrt{2}x)^2 - (2x^3)^2 = 2x^2 - 4x^6$$

A la vista de estos ejemplos:

1. Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las identidades notables:

a) $(3x^2 - 3)^2 = 9x^4 - 18x^2 + 9$

b) $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x + \sqrt{2}) = 3x^2 - 2$

c) $(2x^3 + 3x)^2 = 4x^6 + 12x^4 + 9x^2$

d) $(\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3})(\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}) = 2x^4 - 3$

2. Expresa como un cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los polinomios siguientes:

a) $16x^4 + 56x^3 + 49x^2$

b) $9x^4 - 42x^3 + 49x^2$

c) $4x^4 - 25x^3$

d) $2x^4 - 36x^2$

e) $3x^6 - 6\sqrt{2}x^4 + 6x^2$

f) $5x^2 - 3$

Problema 174 Productos

Efectua los siguientes productos:

1. $(2x^2 + 5x - 10)(x^3 - 3x)$

2. $(3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5)(3x^2 - x + 2)$

3. $(5x^2 + 2x - 3)(2x^2 + 3x - 1)$

4. $(3x^3 + 2x - 1)^2$

Problema 175 Sacar factor común

Ejemplo:

Sea $P(x) = 8x^6 - 4x^3 + 12x^2 - 4x$, el monomio $4x$ es factor común de todos los términos de $P(x)$, luego:

$$P(x) = 4x(2x^5 - x^2 + 3x - 1)$$

Sacar factor común de:

1. $P(x) = 6x^5 - 4x^3 - 4x^2$

2. $Q(x) = 9x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 6x^2$

3. $R(x) = 15x^6 + 5x^4 - 5x^2 + 35x$

Problema 176 Cociente de un polinomio por un monomio:

Calcular:

1. $(3x^5 + x^3 - x + 7) : (x - 3)$

2. $(2x^4 - 3x^2 + 2x - 1) : (x + 2)$

3. $(x^5 - 2x^3 + 1) : (x + 3)$

Problema 177 (Teorema del Resto)

1. Halla el valor de k para que el polinomio $P(x) = kx^3 + 2kx^2 - 3x + 1$ sea divisible entre $(x - 1)$.
2. a) Halla el valor numérico de $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$ para $x = -1$
b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x + 1$.
3. a) Halla el valor numérico de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ para $x = 1$
b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x - 1$.
4. Dado el polinomio $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x - 1$
 - a) Halla el cociente y el resto de la división $P(x) : (x - 2)$
 - b) ¿Cuánto vale $P(2)$.
5. Halla el valor de k para que la siguiente división sea exacta:
 $(3x^2 + kx - 2) : (x + 2)$
6. a) Halla el valor numérico de $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$ para $x = -1$
b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x + 1$.

Problema 178 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $x^4 - 2x^3 + x^2$
2. $x^3 - 4x^2 + x + 6$
3. $x^3 + 2x^2 + x$
4. $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$
5. $2x^4 - 18x^2$
6. $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$
7. $x^5 + x^4 - 2x^3$
8. $x^3 - 3x + 2$
9. $x^3 - 13x^2 + 36x$
10. $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$

Problema 179 Sacar factor común

Ejemplo:

Sea $P(x) = 8x^6 - 4x^3 + 12x^2 - 4x$, el monomio $4x$ es factor común de todos los términos de $P(x)$, luego:

$$P(x) = 4x(2x^5 - x^2 + 3x - 1)$$

Sacar factor común de:

1. $P(x) = 6x^5 - 4x^3 - 4x^2$
2. $Q(x) = 9x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 6x^2$
3. $R(x) = 15x^6 + 5x^4 - 5x^2 + 35x$

Problema 180 Cociente de un polinomio por un monomio:

Calcular:

1. $(3x^5 + x^3 - x + 7) : (x - 3)$
2. $(2x^4 - 3x^2 + 2x - 1) : (x + 2)$
3. $(x^5 - 2x^3 + 1) : (x + 3)$

1.8.2. Teorema del Resto

Problema 181 Sea $P(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 3$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 2, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Problema 182 Sea $P(x) = 2x^3 + ax^2 - bx - 3$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 2, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Problema 183 Sea $P(x) = ax^3 - bx^2 + 2x + 1$ un polinomio divisible por $x - 1$ y por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Problema 184 Sea $P(x) = 3x^3 - ax^2 - bx + 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x + 2$ obtenemos de resto 3, y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Problema 185 Sea $P(x) = ax^3 - bx^2 + x + 2$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 2$ obtenemos de resto 6, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Problema 186 Sea $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 3$ obtenemos de resto -10 , y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

1.8.3. Descomposición Polinómica**Problema 187** Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^5 + 2x^4 - 16x^3 - 2x^2 + 15x$

2. $Q(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

3. $R(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 5x + 6$

Problema 188 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^5 + 8x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 15x$

2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

3. $R(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 13x - 6$

Problema 189 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

2. $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

3. $R(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

Problema 190 Factorizar:

1. $x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$

2. $x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2$

3. $x^4 - 3x^2 + 2x$

4. $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 27x^2 - 32x - 12$

5. $x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 21x + 9$

6. $x^5 + 3x^4 - 4x^2$

7. $x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2$

8. $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 21x - 30$

9. $x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 30x + 35$

10. $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$

Problema 191 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$

2. $Q(x) = x^3 - 11x^2 + 35x - 25$

3. $R(x) = 2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3$

Problema 192 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$

2. $Q(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 25$

3. $R(x) = 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3$

Problema 193 Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$

2. $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$

3. $R(x) = 3x^4 + 14x^3 + 16x^2 + 2x - 3$

Problema 194 Factorizar:

1. $P(x) = 2x^4 - x^3 - 12x^2 + x + 10$

2. $Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 12x - 4$

3. $R(x) = 3x^4 + 10x^3 - 7x^2 - 38x - 24$

Problema 195 Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

2. $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

Problema 196 Descompón el siguiente polinomio como producto de factores de grado uno:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 6$$

Problema 197 Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1. $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$

2. $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

3. $H(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 10$

Problema 198 Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$

2. $Q(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

3. $H(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9$

1.8.4. Simplificación

Problema 199 Simplificar:

1. $\frac{x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 9x - 27}{x^2 + 2x - 3}$

2. $\frac{x^6 + x^5 - 7x^4 + x^3 + 10x^2 - 6x}{x^3 + 7x^2 + 7x - 15}$

3. $\frac{x^4 + 4x^3 - 22x^2 - 4x + 21}{x^3 - x^2 - x + 1}$

4. $\frac{x^5 + 12x^4 + 22x^3 - 84x^2 + 49x}{x^4 - 16x^3 + 78x^2 - 112x + 49}$

5. $\frac{x^5 + 10x^4 + 34x^3 + 36x^2 - 27x - 54}{x^2 + 1}$

1.8.5. Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo

Problema 200 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x$, $Q(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x - 1$

2. $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$, $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3$

Problema 201 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x$, $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$

2. $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$, $Q(x) = 2x^5 + x^4 - x^3$

Problema 202 Calcula el MCD y el mcm de los siguientes polinomios

$$P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 10x - 6$$

$$Q(x) = x^5 + 5x^4 + x^3 - 19x^2 - 6x + 18$$

Problema 203 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$

2. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$, $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

Problema 204 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$, $Q(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$

2. $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2$, $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3$

Problema 205 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$

2. $P(x) = 2x^5 + 5x^4 + 3x^3 - x^2 - x$, $Q(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$

Problema 206 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x$, $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$

2. $P(x) = 3x^5 - 10x^4 + 12x^3 - 6x^2 + x$, $Q(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

Problema 207 Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x$, $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$

2. $P(x) = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x$, $Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1$

Problema 208 Si $P(x) = (x - 3)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 3x = x(x - 3)$

2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x - 3)^2x^2(x + 7)$

Problema 209 Si $P(x) = (x + 3)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 3x = x(x + 3)$

2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x + 3)^2x^2(x - 7)$

Problema 210 Si $P(x) = (x - 2)^3x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x - 2)^2$

2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x - 2)^3x^2(x + 1)$

Problema 211 Si $P(x) = (x - 5)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 5x = x(x - 5)$

2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x - 5)^2x^2(x + 6)$

Problema 212 Si $P(x) = (x - 6)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 6x = x(x - 6)$

2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x - 6)^2x^2(x + 5)$

Problema 213 Si $P(x) = (x - 7)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 7x = x(x - 7)$

2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x - 7)^2x^2(x + 1)$

1.8.6. Simplificación de expresiones racionales de polinomios

Problema 214 Efectuar:

1. $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}$

2. $\left(\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x}\right) : \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)$

3. $\frac{2x}{x-1} \cdot \frac{3}{x}$

Problema 215 Efectuar:

1. $\frac{2x}{x-1} + \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1}$

2. $\left(\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x}\right) : \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$

3. $\frac{2x}{x-1} \cdot \frac{3}{x^2}$

Problema 216 Efectuar:

1. $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1}$

$$2. \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} \right)$$

$$3. \frac{3x}{x-1} \cdot \frac{5}{x}$$

Problema 217 Efectuar:

$$1. \frac{x}{x-1} - \frac{3x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$2. \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} \right)$$

$$3. \frac{3x}{x-1} \cdot \frac{5}{x}$$

Problema 218 Efectuar:

$$1. \frac{x+1}{x-1} - \frac{3x}{x^2-1} + \frac{x}{x+1}$$

$$2. \left(\frac{x+1}{x-1} - 3 \right) : \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right)$$

$$3. \frac{6x^2}{x+1} \cdot \frac{5}{x}$$

Problema 219 Calcular:

$$1. \left(\frac{3x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \right) : \left(\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} \right)$$

$$2. \frac{3x}{x-2} \cdot \frac{1}{x}$$

Problema 220 Calcular:

$$1. \frac{2x}{x-2} + \frac{1}{x^2-4} = \frac{x}{x+2}$$

$$2. \left(\frac{3x}{x+1} + \frac{x}{x-1} \right) : \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} \right)$$

$$3. \frac{5x}{x-2} \cdot \frac{2}{x}$$

Problema 221 Calcular:

$$1. \frac{x}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{x}{x+2}$$

$$2. \left(\frac{3x}{x+1} + \frac{x}{x-1} \right) : \left(\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} \right)$$

$$3. \frac{8x}{x+3} \cdot \frac{3}{2x}$$

Problema 222 Efectuar:

$$1. \frac{x+1}{x-1} - \frac{3x}{x^2-1} + \frac{x}{x+1}$$

$$2. \left(\frac{x+1}{x-1} - 3 \right) : \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right)$$

$$3. \frac{6x^2}{x+1} \cdot \frac{5}{x}$$

Problema 223 Calcular x en apartado 1. y Simplificar en apartado 2.

1.

$$\frac{3x}{x-5} - \frac{1}{x+5} = \frac{x}{x^2-25}$$

2.

$$\left(\frac{x^2}{x^2+2x-3} - \frac{1}{x-1} \right) : \left(\frac{x+1}{x+3} + \frac{2x}{x-1} \right)$$

Problema 224 Reduce a común denominador y efectua la operación correspondiente:

$$1. \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x+1}{x(x^2-1)}$$

$$2. \frac{x+1}{(x-1)(x+3)} - \frac{x-1}{(x-2)(x-1)(x+3)}$$

$$3. \frac{1}{x^2-1} + \frac{x}{x^2+x}$$

$$4. \frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{(x+1)^2}$$

$$5. \frac{x+1}{x^3-8x^2+21x-18} + \frac{1}{x^2-4x+3}$$

$$6. \frac{2}{x^3+9x^2+15x-25} - \frac{1}{x^3+3x^2-9x+5}$$

$$7. \frac{2x}{x^3-6x^2+11x-6} + \frac{1}{x^2-4x+3}$$

$$8. \frac{x}{x^3-3x+2} - \frac{3x}{x^3-4x^2+5x-2}$$

$$9. \frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{x}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

$$10. \frac{2}{x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6} + \frac{x}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$$

Problema 225 Resolver y simplificar:

$$1. \left(\frac{x+2}{x^2+x-2} - 1 \right) : \left(\frac{x+5}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$2. \left(\frac{x+2}{4x^2+40x+84} \right) \cdot \left(\frac{8x+24}{x^2+4x+4} \right)$$

Problema 226 Resolver y simplificar:

$$1. \left(\frac{x+2}{x^2-3x-10} - 1 \right) : \left(\frac{x+2}{x-5} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$2. \left(\frac{x+2}{5x^2-15x+10} \right) \cdot \left(\frac{5x-5}{x^2+4x+4} \right)$$

Problema 227 Resolver y simplificar:

$$1. \left(\frac{x+2}{x^2+2x-3} - 1 \right) : \left(\frac{x+5}{x+3} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$2. \left(\frac{x+2}{3x^2+12x-63} \right) \cdot \left(\frac{9x-27}{x^2+4x+4} \right)$$

1.8.7. Ecuaciones Polinómicas

Problema 228 Calcular

$$\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$$

Problema 229 Calcular las soluciones reales de:

$$1. \frac{2x-3}{x-1} = \frac{3x-7}{2x-5}$$

$$2. \frac{2+x}{x^2+x} = \frac{2-x}{x^2-x}$$

Problema 230 Calcular x en la siguiente ecuación

$$\frac{2x}{x^2 - 4x + 3} - \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{x^2 - 2x - 3}$$

Problema 231 Calcular las soluciones reales de:

$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{x + 1}$$

Problema 232 Resolver:

1. $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3x + 9 = 0$

2. $\frac{x + 1}{x^2 + 4x - 5} - \frac{1}{x + 5} = \frac{x}{x - 1}$

3. $\frac{x + 1}{x^2 + 4x - 5} - \frac{1}{x + 5} = \frac{x}{x - 1}$

Capítulo 2

Problemas de Geometría

2.1. Trigonometría

2.1.1. Ángulos

Problema 233 1. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número de vueltas y un ángulo menor de 360°

a) 3215°

b) 2612°

2. Expresa en grados los siguientes radianes

a) $\frac{4\pi}{3}$ rad

b) $\frac{7\pi}{4}$ rad

3. Expresa en radianes los siguientes ángulos medidos en grados

a) 215°

b) 325°

Problema 234 1. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número de vueltas y un ángulo menor de 360°

a) 3215°

b) 4160°

2. Expresa en grados los siguientes radianes

a) $\frac{5\pi}{3}$ rad

b) $\frac{8\pi}{9}$ rad

3. Expresa en radianes los siguientes ángulos medidos en grados

a) 315°

b) 228°

Problema 235 Calcular:

1. Expresa el 915° como suma de un número de vueltas y un ángulo menor de 360°

2. Expresa en grados $\frac{3\pi}{4}$ radianes

3. Expresa en radianes 215°

Problema 236 1. Reducir los siguientes ángulos a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta

▪ 3485°

▪ 5636°

2. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

▪ 335°

▪ 126°

3. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

▪ $\frac{3}{5}\pi$ radianes.

▪ $\frac{3}{2}\pi$ radianes.

Problema 237 1. Reducir los siguientes ángulos a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta

▪ 5725°

▪ 8391°

2. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

▪ 325°

▪ 385°

3. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

▪ $\frac{3}{7}\pi$ radianes.

▪ $\frac{6}{5}\pi$ radianes.

Problema 238 1. Reducir los siguientes ángulos a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta

- 8793°
- 7421°

2. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

- 185°
- 270°

3. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

- $\frac{1}{5}\pi$ radianes.
- $\frac{4}{7}\pi$ radianes.

Problema 239 1. Reducir los siguientes ángulos a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta

- 9236°
- 8721°

2. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

- 335°
- 126°

3. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

- $\frac{2}{7}\pi$ radianes.
- $\frac{8}{5}\pi$ radianes.

Problema 240 Calcular

1. Reducir el ángulo 3824° a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta.
2. Pasar $\frac{8\pi}{7}$ de radianes a grados.
3. Pasar 335° de grados a radianes.

Problema 241 Calcular

1. Reducir el ángulo 4526° a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta.

2. Pasar $\frac{9\pi}{7}$ de radianes a grados.
3. Pasar 321° de grados a radianes.

Problema 242 Calcular

1. Reducir el ángulo 5728° a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta.
2. Pasar $\frac{6\pi}{7}$ de radianes a grados.
3. Pasar 223° de grados a radianes.

Problema 243 Calcular

1. Reducir el ángulo 8324° a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta.
2. Pasar $\frac{9\pi}{7}$ de radianes a grados.
3. Pasar 311° de grados a radianes.

2.1.2. Razones Trigonómicas

Problema 244 Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α , que pertenece al segundo cuadrante, y sabiendo que $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

Problema 245 Conociendo las razones trigonométricas de 45° calcular las de 225° .

Problema 246 Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α , que pertenece al tercer cuadrante, y sabiendo que $\sin \alpha = -\frac{3}{4}$

Problema 247 Calcular las razones trigonométricas de un ángulo α , que pertenece al tercer cuadrante, y sabiendo que $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$

Problema 248 Conociendo las razones trigonométricas de 60° , calcular las de 120° .

Problema 249 Conociendo las razones trigonométricas de 30° , calcular las de 150° .

Problema 250 Sabiendo que $\tan \alpha = 3$ y que $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 251 Sabiendo que $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ y que $\alpha \in$ segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 252 Conociendo las razones trigonométricas de 45° , calcular las de 225° .

Problema 253 Sabiendo que $\tan \alpha = -4$ y que $\alpha \in$ segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 254 Sabiendo que $\tan \alpha = 4$ y que $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 255 Sabiendo que $\tan \alpha = 3$ y que $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 256 Conociendo las razones trigonométricas de 60° , calcular las de 240° .

Problema 257 Sabiendo que $\tan \alpha = -2$ y que $\alpha \in$ cuarto cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 258 Sabiendo que $\tan \alpha = 3$ y que $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 259 Sabiendo que $\tan \alpha = \frac{3}{2}$ y que $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 260 Sabiendo que $\tan \alpha = -5$ y que $\alpha \in$ segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 261 Sabiendo que $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ y que $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 262 Deducir las razones trigonométricas de 30°

Problema 263 Conociendo las razones trigonométricas de 30° , 45° y 60° calcular las de 240° .

Problema 264 Sabiendo que $\tan \alpha = 4$ y que $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 265 Deducir las razones trigonométricas de 60°

Problema 266 Conociendo las razones trigonométricas de 30° , 45° y 60° calcular las de 330° .

Problema 267 Sabiendo que $\tan \alpha = -5$ y que $\alpha \in$ segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 268 Deducir las razones trigonométricas de 45°

Problema 269 Conociendo las razones trigonométricas de 30° , 45° y 60° calcular las de 225° .

Problema 270 Deducir las razones trigonométricas de 45°

Problema 271 Conociendo las razones trigonométricas de 30° , 45° y 60° calcular las de 135° .

Problema 272 Sabiendo que $\tan \alpha = -7$ y que $\alpha \in$ segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 273 Sabiendo que $\tan \alpha = -7$ y que $\alpha \in$ segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 274 Sabiendo que $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ y que $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 275 Sabiendo que $\tan \alpha = 2$, calcular el resto de las razones trigonométricas; teniendo en cuenta que α pertenece al tercer cuadrante.

Problema 276 Teniendo en cuenta que $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ y que α pertenece al primer cuadrante, calcular:

$$\sin(\alpha + 30^\circ); \sin(\alpha + 45^\circ); \cos(\alpha - 60^\circ); \tan(60^\circ - \alpha)$$

Problema 277 Hallar las razones trigonométricas de α sabiendo que $\sec \alpha = 3$ y $\alpha \in 4^\circ$ Cuadrante.

Problema 278 Sabiendo que $\csc \alpha = 3$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 279 Sabiendo que $\csc \alpha = 2$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Problema 280 Sabiendo que $\tan \alpha = -4$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

2.1.3. Resolución de Triángulos

Problema 281 Resolver el siguiente triángulo, conociendo los catetos $a = 4\text{cm}$ y $b = 3\text{cm}$:

Problema 282 De un triángulo rectángulo se conoce su hipotenusa y un cateto, que valen 25cm y 16cm respectivamente. Calcular el otro cateto y los ángulos de este triángulo.

Problema 283 En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de 5 y 9 cm respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

Problema 284 En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de 7 y 10 cm respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

Problema 285 En un triángulo rectángulo se conocen un ángulo $A = 37^\circ$ y el cateto opuesto $a = 9$. Calcular el otro ángulo, el otro cateto y su hipotenusa.

Problema 286 En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de 4 y 7 cm respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

Problema 287 En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de 3 y 5 cm respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

Problema 288 En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de 5 y 8 cm respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

Problema 289 En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de 9 y 12 cm respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

2.1.4. Aplicaciones

Problema 290 La sombra de un árbol mide 50m y el ángulo que forman los rayos del sol con el suelo es de 60° . ¿Cuál es la altura del árbol?

Problema 291 La longitud del lado de un octógono es de 16cm . Calcular su área.

Problema 292 Desde un puesto de caza, un cazador apunta con su escopeta a una tórtola, que se encuentra posada en la copa de un árbol, con un ángulo de 50° . Cuando iba a disparar la tórtola salió volando y se posó en una rama 4m más abajo; la apunta cuidadosamente con un ángulo de 40° y cuando fué a disparar decidió no hacerlo; se acordó del pesado de su profesor de "mate" de 4° y se hizo las siguientes preguntas: ¿Qué altura tiene el árbol?, ¿Qué distancia me separa de él?. (Pobre tórtola)

Problema 293 En el tejado de un edificio están colocando una antena. Desde la calle veo la base de ella con un ángulo de 70° mientras que el extremo superior lo veo con un ángulo de 80° . Si la antena mide $10m$, calcular la altura del edificio y la distancia que me separa de él.

Problema 294 Dos personas, separadas por una distancia de $6Km$ observan un avión, que vuela de uno de ellos hacia el otro. Uno de ellos lo observa bajo un ángulo de 30° , mientras el otro lo hace bajo un ángulo de 15° . Calcular la altura a la que vuela el avión.

Problema 295 Calcular la altura del pico de una montaña, sabiendo que, en ese momento del día, el sol incide con sus rayos sobre el suelo con un ángulo de 75° y provoca una sombra sobre el suelo de 53 metros.

Problema 296 Una escalera de $12m$ de largo esta apoyada en una pared con un ángulo de 60° . Calcular la altura de pared hasta donde apoya la escalera, y la separación de ésta a la pared.

Problema 297 Calcular el área de un octógono de $5cm$ de lado.

Problema 298 Pablo observa desde la ventana de su casa un accidente con un ángulo de 60° ; como es muy curioso y desde allí no lo ve muy bien, decide subir a la azotea del edificio, que se encuentra 10 metros más arriba. Desde allí, con unos prismáticos, se empapa de todo mirando con un ángulo de 40° . Lo que no se imaginaba, era que a su vez era observado por el profesor de matemáticas, y éste no le preguntó sobre el accidente, sino por la altura del edificio y la distancia a la que ocurrió desde su casa.

(Nota: los ángulos son los medidos entre el observador y la vertical)

Problema 299 Calcular el área de un decágono de $4m$ de lado.

Problema 300 En un examen de matemáticas, Juan Vicente está intentando copiar de Luis (¿es raro?), el profesor que le observa comprueba que, cuando Juan Vicente intenta mirar sin levantar la cabeza lo hace con un ángulo de 70° , pero en ese caso no puede ver el examen del compañero, así es que estira la cabeza y el cuerpo $10cm$, con lo que ahora si alcanza un ángulo perfecto de visión con 65° (Luis se hace cómplice bajando el hombro). El profesor decide quitarles el examen y les propone este problema para que calculen la distancia que hay entre Juan Vicente y el examen de Luis, también tendrán que calcular la altura que hay desde el examen de Juan Vicente hasta sus ojos, en el momento en el que esta copiando.

(Nota: los ángulos son los medidos entre el observador y la vertical)

Problema 301 Calcular el área de un dodecágono de $4cm$ de lado.

Problema 302 En un viaje del colegio por Extremadura, Cristina y Marina quedaron fascinadas con las cigüeñas. En Trujillo decidieron subir a una torre para ver el nido de cerca. Primero subieron hasta el campanario, y desde allí veían al grupo de compañeros con un ángulo de 75° , pero aun tuvieron que subir 7 peligrosos metros para llegar hasta el nido; desde allí volvieron a mirar al grupo y esta vez con un ángulo de 70° . Cometieron el fallo de ir acompañados del profesor de matemáticas, que en cuanto bajaron les pregunto por la altura de la torre y la distancia de ésta al grupo. (No se puede llevar a un profesor de matemáticas de excursión)
(Nota: los ángulos son los medidos entre el observador y la vertical)

Problema 303 Calcular el área de un octógono de 6cm de lado.

Problema 304 Una escalera de 10m de largo esta apoyada en una pared con un ángulo de 60° . Calcular la altura de pared hasta donde apoya la escalera, y la separación de ésta a la pared.

Problema 305 Un paracaidista se va a lanzar desde lo alto de un rascacielos, y tu te encuentras abajo, no muy lejos, para disfrutar con su demostración de valor. Le observas preparar hasta los más mínimos detalles, con un ángulo de 81° , y luego le ves lanzarse al vacío sin el menor asomo de miedo. Todo el mundo contiene la respiración, y por fin despliega el paracaídas, en ese momento tomas aire mientras le observas con un ángulo de 78° . Han sido 30 metros de caída libre, pero no todo va a ser tan espectacular. Allí estaba el pesado de mi profesor de matemáticas para preguntarme por la altura del edificio y por la distancia que nos separaba de él.

Problema 306 En el Parque de Atracciones observas a tu amigo en lo alto de la Noria con un ángulo de 60° . Calcular a la altura que se encuentra, sabiendo que tu estás a 50m de la Noria.

Problema 307 Daniel Merino observa a sus compañeros, que están en lo alto de un campanario, con un ángulo de 80° . Calcular la altura a la que se encuentran sabiendo que Daniel está a 10 metros del edificio.

Problema 308 Observas el nido de un águila, en una pared vertical de una montaña, con un ángulo de 70° . Calcular la altura a la que se encuentra el nido, sabiendo que estás a 40m de esa pared.

Problema 309 Calcular el área de un Dodecágono regular inscrito en una circunferencia de 6m de radio.

Problema 310 Nos hemos encontrado un mensaje en una botella que estaba a la deriva, flotando en las aguas del mar. Se trata de un antiguo manuscrito del pirata Barbacana, y nos explica que su tesoro está escondido

en "Isla Perdida". Nos precisa la siguiente información:

Si nos situamos en el centro de la isla veremos una enorme palmera que nos servirá de referencia; desde ella se ve una gruta a nuestra izquierda (oeste) con un ángulo de 25° (respecto al norte) y si caminamos hacia el norte 300 pasos la vemos con un ángulo de 50° . El tesoro se encuentra en nuestro camino hacia el norte, justamente donde corta la perpendicular al camino que llega desde la gruta. ¿A cuántos pasos de la palmera se encuentra el tesoro?. (Hay dos posibles planteamientos).

Problema 311 En un paseo por Madrid Elías se quedó boquiabierto al ver como se quedó el edificio Windsor después del incendio. Observó el trabajo de las grúas, fascinado por la exactitud de sus movimientos.

Había una de ellas que se apoyaba en lo alto del edificio y tenía colgado un hierro enorme en un cable de $20m$.

Elías observaba el hierro con un ángulo de 79° y a la grúa con un ángulo de 81° . Calcular la altura del edificio y la distancia a la que Elías se encuentra de él.

Problema 312 En el parque de atracciones todos estaban pendientes de Marcos de las Heras, que se había subido en la lanzadera, y allí en lo alto parecía tener una cara que era un poema. Le observaban con un ángulo de 80° . La cara se le puso mucho peor cuando en la caída se atascó la lanzadera después de recorrer $20m$, ahora le observaban con un ángulo de 78° . Calcular la altura de la lanzadera y la distancia a la que nos encontramos de ella. (Por eso no vino al examen de Mates)

Problema 313 Calcular el área de un octógono regular de $4m$ de lado.

Problema 314 A Quique le han dado trabajo de torpedero en un submarino (hay trabajos peores). En unas maniobras le han trazado un camino rectilíneo de boyas de $5Km$ por el que navegará el submarino; y alejado de este camino habrá un objetivo para torpedear. El disparo se hará cuando la distancia del camino al objetivo sea la menor posible. Se acuerda del pelma de su profesor de matemáticas de 4° y se decide a tomar los datos necesarios: El ángulo con el que observa el objetivo en el origen del camino es de 25° y el ángulo con el que observa el objetivo en el destino es de 40° .

Se pregunta por la distancia que debe recorrer el submarino desde su origen para que Quique de la orden de disparo, y en ese momento la distancia a la que esta el objetivo.

Problema 315 Calcular el área de un pentágono regular de $8m$ de lado.

Problema 316 Cristina y Desiré se encuentran en una llanura separadas por una distancia de $5Km$ en una excursión del colegio. Se llaman por el teléfono móvil porque acaban de observar un OVNI que vuela en la dirección

que las separa. Cristina lo ve con un ángulo de 80° , mientras que Desiré lo ve con un ángulo de 60° . El profesor de matemáticas, que observa a sus alumnas, aprovecha la oportunidad para preguntarlas por la altura a la vuela ese objeto. (Un poco pesado, ¿no?)

Problema 317 Calcular el área de un Decágono regular de $6m$ de lado.

Problema 318 Como Luís Alberto no paraba de hablar con Christian Fenández los metimos en un submarino que iba a estar trabajando una semana en el fondo del mar. (¡Que broma!). El submarino se sumergió con un ángulo de 1° , y después emergió con un ángulo de 2° a $5Km$ de donde se empezó a sumergir. Todo ello en camino rectilíneo y con los ángulos medidos sobre la horizontal. Calcular la profundidad a la que estuvo trabajando el submarino con nuestros dos amigos.

Problema 319 Calcular el área de un Dodecágono regular de $6m$ de lado.

Problema 320 Desde un punto determinado del mar, el capitán de un barco observa la luz de un faro con una inclinación de 15° . Su situación es dramática, le queda combustible para recorrer $10 Km$ y no sabe si llegará a tierra. Después de recorrer $2 Kms$ en dirección hacia el faro vuelve a comprobar la inclinación de la luz del faro que ahora resulta de 25° . En estos momentos el capitán ya conoce lo que le interesa, y yo pido que calculéis:

1. La altura del faro.
2. La distancia a la que se encuentra del faro.

Problema 321 Dos personas, separadas por una distancia de $6Km$ observan un avión, que vuela de uno de ellos hacia el otro. Uno de ellos lo observa bajo un ángulo de 30° , mientras el otro lo hace bajo un ángulo de 15° . Calcular la altura a la que vuela el avión.

Problema 322 Un submarino desciende hacia el fondo del mar con una inclinación de 35° . Cuando llega al fondo, y después de realizar los pertinentes trabajos, asciende a la superficie con un ángulo de 45° . Cuando ha emergido completamente comprueba que se ha desplazado 200 metros desde el punto donde empezó la inmersión. Se pide calcular la profundidad del mar en el punto en el que estuvo trabajando el submarino.

Problema 323 Dos personas separadas por una llanura de $2Km$, observan un globo aerostático con ángulos de 30° y 45° respectivamente. Hallar la altura a la que vuela dicho artefacto.

Problema 324 Acaban de colocar una antena de 7 metros en lo alto de un edificio. Observas el extremo superior de la antena con un ángulo de 85° , mientras que su base la observamos con 80° . Calcular la altura del edificio y la distancia que te separa de él.

Problema 325 Después de un viaje a Ávila con el colegio, Lorena se encuentra sorprendida por las leyendas que la contaron sobre las murallas de la ciudad. El profesor de matemáticas la plantea una cuestión, ¿unos hipotéticos enemigos de esa ciudad de qué tamaño harían las escaleras para saltar las murallas?, ¿cómo podrían saber estas medidas sin llegar a la ciudad?. Todo pasa por contestar a este problema: un guerrero observa la parte alta de la muralla con un ángulo de 3° y después se acerca 200 m y ahora ve ese mismo punto con un ángulo de 10° . En este momento, el guerrero no sólo sabe la altura de la muralla, sino que también sabe la distancia que le separa de ella. Lorena ha decidido que esta es una buena pregunta para que todos la resolváis en este examen.

Problema 326 Laura y Sandra se encuentran en un circo, debajo de una cuerda en la que un equilibrista se juega la vida con la mayor de las indiferencias, cada una de ellas se encuentra en un extremo de la cuerda y son 50 metros la distancia que las separa. Laura observa al acróbata con un ángulo de 50° , mientras que Sandra lo ve con un ángulo de 70° . Se pide calcular la altura a la que se encuentra el artista y que distancias de cuerda le separan de los extremos.

Problema 327 En unos lanzamientos a canasta Miguel Ángel se acuerda de las clases de trigonometría y piensa. Primero observa la canasta con un ángulo de 80° y retrocediendo 5 m la observa con un ángulo de 60° . Ahora tiene que calcular la altura a la que se encuentra la canasta y la distancia a la que se encuentra la base de esa canasta.

Problema 328 Sheila y Javier viajaban en un avión con sus compañeros, en un viaje de fin de curso a la ciudad de Roma. En este viaje divisaron la isla de Ibiza con un ángulo de 70° con la horizontal del avión. En este momento le preguntaron a la azafata por la distancia que debía de recorrer el avión para encontrarse encima de la isla, ella contestó que en el tiempo que habían estado hablando el avión había recorrido 10 Km, volvieron a mirar y se dieron cuenta que ahora se veía la isla con un ángulo de 80° . Se lo contáis al profesor de mates, y como es un poco pesado no se le ocurre otra cosa que preguntaros por la altura a la que vuela el avión y la distancia que nos queda por recorrer para estar encima de la isla.

Problema 329 Diego se encuentra en la cima del pico de los Claveles (Peñalara) y desde allí observa la Laguna de los Pájaros con un ángulo de 8° con la vertical. El espectáculo es muy bonito, pero tiene que concentrarse, debe de hacer un descenso de 30 metros por la pared de roca (un rapel) hasta un pequeño saliente. Cuando llegó allí veía la laguna con un ángulo de 10° . Pero eso de hacer alpinismo con el profesor de mates no es de lo más divertido, ya que no se le ocurrió otra cosa que preguntarle por la altura de la pared y por la distancia que separaba a ésta de la laguna.

Problema 330 A nuestro compañero Enrique le encanta el equilibrio y a decidido jugarse la vida cruzando, sobre una cuerda, el desfiladero de "La Hermida", por un lugar en el que la separación entre las paredes de roca es de 300 metros. Nosotros nos encontramos en el fondo del desfiladero y vemos un extremo de la cuerda con un ángulo de 55° , mientras que el otro extremo lo observamos con un ángulo de 80° (cuidado los ángulos medidos sobre la horizontal). No podía faltar la pregunta del profe de mates para preguntarnos por la altura a la que está la cuerda y por la distancia que nos separa de alguna de las paredes. (¡Que pesado!). El desfiladero de "La Hermida" se encuentra en Cantabria; por él fluye el río Deva, uniendo los pueblos de Panes y Potes. Hace de frontera natural con Asturias, y no me equivoco al afirmar que es uno de los parajes más bellos de España.

Problema 331 Juan José se encontraba ante las murallas y almenas de un castillo medieval con unos antiguos compañeros del colegio Villaeuropa. Recordando viejos tiempos de estudio, apareció el recuerdo del profesor de matemáticas con la pesadez de sus problemas:

Juan José podía ver el extremo superior de una de las almenas, donde ondeaba una bandera, con un ángulo de 4° , mientras que al acercarse a ella 100 m en línea recta ese mismo punto lo veía con un ángulo de 6° .

Calcular la altura de la almena y la distancia que hay desde el grupo hasta ella.

Problema 332 Tomás es un detective con fama nacional. Se encuentra investigando un robo cometido en el último piso de un edificio. Su sorpresa fue enorme al reconocer que el testigo era Laura, su antigua compañera de colegio. Según la declaración de Laura, el ladrón salió por la ventana, trepó por la fachada y subió hasta el punto más alto y desde allí se lanzó en parapente. Laura dejó claro el lugar desde donde observó el suceso. La policía empezó a tomar medidas desde la ventana por donde salió el ladrón, resultó que el ángulo que se forma entre la ventana y el punto en el que estaba Laura era de 45° sobre la vertical, mientras que el formado desde el punto más alto y el lugar de observación de Laura era de 40° , también sobre la vertical del edificio. El ladrón tuvo que trepar 10 metros por el exterior para alcanzar el extremo desde donde Laura dijo que se había lanzado.

Tomás sabe perfectamente que, para poder lanzarse en parapente tiene que haber una altura mínima de 70 m. Observó detenidamente el edificio, y recordando las clases de trigonometría, se puso a hacer cálculos.

Calcular la altura del edificio y la distancia hasta él desde donde Laura vio el suceso.

Problema 333 Adrián y Esteban se encuentran, con sus equipos de radio aficionado, en una noche muy oscura y cada uno en su coche, participando en el célebre juego de "La cacería del zorro". Se trata de localizar y capturar a otro coche que emite una señal por una frecuencia determinada (sería el zorro) y un montón de amigos se disponen a la caza, siempre guardando el mayor respeto tanto a las normas de tráfico como a las de medio ambiente. El zorro se mueve por carreteras, caminos, se para, retrocede,... En un cierto momento Adrián y Esteban se encuentran en los dos extremos de un camino de un camino rectilíneo, que según el mapa mide 3 Km, y está cruzado por un montón de caminos que inciden en éste de forma vertical. Están recibiendo claramente la señal del zorro y se encuentra entre ambos coches, uno de ellos recibe la señal con un ángulo de 50° , mientras que el otro la recibe con un ángulo de 35° . Para decidirse por que camino deben de entrar, se ponen a hacer sus cálculos.

Calcular la distancia a la que se encuentra el zorro desde el camino y la distancia que deben recorrer los dos amigos para coger el camino que de manera infalible los llevaría hasta el zorro.

Problema 334 Gemma, María, Alba, Mónica, Cintia, Cristina y Nerea están pasando unas merecidas vacaciones en la costa asturiana. Se encontraban en un pequeño pueblo llamado Poó de LLanes, donde se acercaron a disfrutar de los bellos acantilados de su costa, el paisaje era impresionante. Desde un prado verde esmeralda podían disfrutar del panorama de un mar rabioso y enfurecido. Luchando contra las olas había un pequeño barco pesquero que se afanaba por llegar a la costa en dirección hacia ellas; lo veían con un ángulo de 70° . Se quedaron ensimismadas observando las manibras y el lento avance durante un rato y ahora lo vieron con un ángulo de 60° (ángulos medidos sobre la vertical del acantilado). María, buena conocedora de aquel lugar y tomando como referencia los islotes, dijo a sus amigas que el barco había avanzado 100 metros entre las dos medidas angulares.

Gemma preguntó a sus amigas: ¿qué altura tendrá el acantilado? ¿qué distancia le queda por recorrer al barco para llegar hasta la base del acantilado?

Problema 335 Luís, Darío, Carlos, Alejandro, Gwydion y Rubén se decidieron por el estudio de arqueología (¿se habrían visto todas las películas de Indiana Jones?). No les fué nada mal, por casualidad hicieron un gran descubrimiento. En el desierto, muy cerca del Nilo, después de una gran tormenta de arena, quedó al descubierto una gran pirámide, hasta entonces desconocida con una enorme esfinge que custodiaba la puerta de entrada a ella. Según contaba la leyenda esta esfinge era la guardiana de los grandes tesoros que había en la pirámide y mataba a todo aquel que se acercaba a menos de 50 metros de ella. Vieron el extremo superior de esta estatua con un ángulo de 30° y después de aproximarse a ella 100 metros con un

ángulo de 70° . Gwydion alarmó a los compañeros, recordando las clases de matemáticas de 4º ESO y les dijo que había que reflexionar, seguro que aquel pesado profesor les preguntaría por la altura de esfinge y, sobre todo, si estaban seguros en ese momento.

(Nota: la Esfinge era un monstruo con rostro y pecho de mujer, patas y cola de león, y alas de pájaro).

Problema 336 Laura, Verónica, Virginia, Tania, Andrés, Borja, Iván y Manuel, se encuentran en un pueblo de la Costa del Sol llamado Torrox dándose un fenomenal baño en el mar. Miraban extrañadas la cantidad de montañas que parecían crecer a la orilla del mar formando La Axarquía. Por encima de estos macizos montañosos se veía un pico con nieve, que contrastaba curiosamente con la buena temperatura que hacía en la playa; estaban viendo "El Maroma" con un ángulo de 88° . Por la tarde decidieron recorrer en coche 36 kilómetros en dirección rectilínea hacia la base de esa montaña, y ahora veían el pico con un ángulo de 89° . Laura, recordando las clases de matemáticas de 4º ESO y aquel pesado profesor, seguro que les preguntaría por la altura del pico y, por la distancia que les separaba.

(Nota: Torrox es la cuna de Almanzor).

Problema 337 Roberto, Guillermo, Ismael, Pedro, David, Victor, Carlos, Gabriel e Israel se encuentran muy preocupados por el examen de trigonometría y, ante el posible fracaso, se deciden por robarlo. Saben que ese examen con sus soluciones se encuentra en el domicilio del profesor, les bastará una cuerda para descolgarse mediante un "rápel" desde lo más alto del edificio. En la calle se queda Israel para avisar de una inesperada llegada del profesor.

La maniobra hubiera sido éxito, pero toda la maniobra fué observada en la lejanía y el profesor dejó que se produjera el robo del examen.

Cuando se marcharon contentos por el éxito obtenido, el profesor se situó en el punto en el que Israel vigilaba atentamente. Desde este punto se veía el tejado del edificio bajo un ángulo de 31° y la terraza por la que entraron con otro de 22° . La altura que se descolgaron era de 10 metros

La pregunta del examen había cambiado, ahora les preguntan por la altura a la que se encuentra la terraza de la vivienda del profesor y por la distancia a la que se encontraba Israel de la base de ese edificio.

Problema 338 Laura, María, Andrea, Adriana, Emma, Leticia, Inés, Shara y Natalia se encuentran caminando por el desierto y sus fuerzas han llegado al límite. La deshidratación y el cansancio las nubla el pensamiento y sus cerebros comienzan a jugar con visiones y espejismos. En un momento dado se quedan paradas, ante ellas pueden ver un oasis con una palmera

y un laguna de frescas aguas. Las parece mentira y piensan que es un espejismo. Laura se acuerda del profesor de matemáticas de 4°ESO y comienza a hacer mediciones mentales. Se ve la altura de la palmera bajo un ángulo de 2° y cuando se aproximaron 100 metros hacia ella con un ángulo de 3° .

¿Qué altura tiene la palmera?

¿A qué distancia se encuentran de ella?

¿Será un espejismo?

Problema 339 Rubén, Pedro, Alejandro, Adrián, Rosty, Andrés, Fernando y Pablo se encuentran en una excursión de 4°ESO por Aranjuez y resulta que en las afueras de esta ciudad se oferta un viaje en globo bastante bonito. En realidad recorre una distancia muy corta a lo largo de una llanura. En uno de los extremos se encuentran Rubén, Pedro y Alejandro mientras que en el contrario Andrés, Fernando y Pablo. El globo viaja del primer grupo hasta el segundo en línea recta por el aire. Los tres primeros ven un globo con un ángulo de 35° y los otros tres compañeros lo ven con un ángulo de 25° . Estos dos grupitos se encuentran separados por una distancia de 2 Km. En el momento de la observación el globo comenzó a descender verticalmente aunque despacio, las caras de Alejandro, Adrián y Rosty que iban en él eran auténticos poemas, hasta que llegó al suelo mansamente.

El profesor de matemáticas les pidió calcular la altura a la que viajaba el globo y la distancia a la que se encontraba el globo cuando se posó en el suelo.

Problema 340 Sara, Gema, Gloria, Marta, Julia, y Patricia están de excursión por las cumbres de Cotos. Casi sin esfuerzo llegaron a un punto en el que se quedaron sorprendidas por la espectacular vista de la Laguna, en la base del pico de Dos Hermanas, un macizo de roca casi vertical que descansa en las orillas del glaciar. En estos momentos nos encontramos a la misma altura que la Laguna y se veía la cumbre con un ángulo de 50° . Se quedaron boquiabiertas al ver a dos montañeros, que luchaban por alcanzar la cumbre, con un ángulo de 40° . El profesor de matemáticas las dijo que aún deberían escalar 30 metros para conquistar ese coloso de piedra y las pidió que calcularan:

1. La distancia a la que se encontraban de la Laguna.
2. La altura de ese pico desde la Laguna.

Problema 341 Carolina, Noelia, Sergio, Julen, Andrea, Laura e Irene son tripulantes de un buque cargero que se encuentra en una situación muy delicada. Los modernos aparatos de medida han dejado de funcionar por el impacto de un rayo y, hay que recurrir a otros métodos de cálculo para dirigir el barco. El problema que se plantea es parecido al que sufrió el TITANIC: un iceberg se les acerca suspedido en el agua, su extremo superior se nos

muestra bajo un ángulo de 1° , después de acercarnos 200 metros hacia él observamos ese mismo punto con un ángulo de $1^\circ 30'$. Calcular la altura del iceberg y la distancia que nos separa de él.

Por curiosidad, sabemos que de un iceberg sólo se muestra el 10% y que la capacidad de frenado y virage de nuestro navío es de 500 metros, ¿estarán nuestros amigos en peligro?

Problema 342 Paula, Daniel, Rodrigo, Lorena, Luis Fernando y Alejandro se encuentran en un barco que se dedica a rescatar tesoros de antiguos galeones hundidos. En este caso han detectado un viejo transatlántico que, por su situación, podría ser el TITANIC. Primero lo detectan con un ángulo de 12° y cuando se acercaron 2000 metros con un ángulo de 20° . Se pide calcular la profundidad a la que se encuentra el barco hundido y la distancia que nos queda por recorrer para estar encima de él. ¿Será posible acceder al barco hundido?

Problema 343 Sergio, Nerea, Carlos, Rosa M^a, Elena, Iván y M^aElvira se encuentran en una excursión por Galicia y residían en el pazo "Las Meigas". El lugar estaba plagado de extrañas leyendas y cuentos, desplegando por esos paisajes y haciendas una caricia de exoterismo y magia. El dueño de la casa rural animó el espectáculo contándonos alguna terroríficas historias de la comarca. Nos contó que se encontraba en la copa del árbol de enfrente de la puerta de la casa, cuando salieron dos jóvenes discutiendo con el trágico desenlace de un asesinato; él intentó bajar lo más rápidamente posible, pero cuando llevaba descendidos 12 metros se cayó al vacío. Se levantó de inmediato y corrió para auxiliar al herido, ya era demasiado tarde. Mientras tanto el asesino huyó despavorido y no pudo reconocerlo. La Policía recogió los siguientes datos: Desde el lugar donde ocurrió la tragedia se veía la copa del árbol con un ángulo de 62° y, la rama desde la que presumiblemente cayó nuestro interlocutor con un ángulo de 50° .

Calcular la altura desde la que se precipitó al suelo nuestro narrador y la distancia que tuvo que recorrer para llegar hasta el herido. ¿Que conclusión sacáis de los resultados?

Problema 344 Julio Alberto, Roberto, Javier y Marta nos vienen contando una bonita historia de aventuras. Han estado haciendo barranquismo y hacen grandes alardes de valor personal en la lucha contra implacables elementos naturales. En particular nos contaron que se habían lanzado en tirolesa por encima de árboles y barrancos. Después de preguntarles a fondo sobre este suceso sacamos las siguientes medidas. Desde abajo se veía el principio de la tirolesa con un ángulo de 60° y retrocediendo 200 metros desde ese punto se volvía a ver el principio de la tirolesa con un ángulo de 58° .

Calcular la altura de la tirolina y la distancia que les separa hasta la base en la que se alza. ¿Nos están contando una trola o podemos creerlos?

2.2. Vectores

2.2.1. Operaciones con Vectores

Problema 345 Calcular el vector $\vec{z} = 3\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$ donde $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 2)$ y $\vec{w} = (2, 1)$

Problema 346 Calcular el vector $\vec{z} = 3\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$ donde $\vec{u} = (-1, 1)$, $\vec{v} = (-3, 2)$ y $\vec{w} = (2, 1)$

Problema 347 Calcular el vector $\vec{z} = 4\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$ donde $\vec{u} = (-1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1)$ y $\vec{w} = (1, 4)$

Problema 348 (1 puntos) Calcular el vector $\vec{z} = 4\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$ donde $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (5, 1)$ y $\vec{w} = (-2, 4)$

Problema 349 Calcular el vector $\vec{z} = 2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$ donde $\vec{u} = (3, 1)$, $\vec{v} = (-1, 2)$ y $\vec{w} = (3, -1)$

Problema 350 Calcular el vector $\vec{z} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$ donde $\vec{u} = (3, -2)$, $\vec{v} = (1, -3)$ y $\vec{w} = (1, -2)$

Problema 351 Calcular el vector $\vec{z} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$ donde $\vec{u} = (3, -1)$, $\vec{v} = (-1, 3)$ y $\vec{w} = (1, 2)$

Problema 352 Calcular el vector $\vec{z} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$ donde $\vec{u} = (-3, 1)$, $\vec{v} = (1, -3)$ y $\vec{w} = (1, 2)$

Problema 353 Calcular el vector $\vec{z} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$ donde $\vec{u} = (4, -1)$, $\vec{v} = (1, -3)$ y $\vec{w} = (1, 3)$

2.2.2. Distancia entre dos puntos

Problema 354 Calcular la distancia entre los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, -2)$

Problema 355 Calcular la distancia entre los puntos $A(3, 2)$ y $B(5, -2)$

Problema 356 Calcular la distancia entre los puntos $A(1, 3)$ y $B(4, -7)$

Problema 357 Calcular la distancia entre los puntos $A(2, 3)$ y $B(4, -6)$

Problema 358 Calcular la distancia entre los puntos $A(1, -3)$ y $B(3, 8)$

2.2.3. División de un segmento

Problema 359 Dividir el segmento que une los puntos $A(1, 1)$ y $B(5, 9)$ en cuatro partes iguales.

Problema 360 Dividir el segmento que une los puntos $A(-1, 1)$ y $B(7, 9)$ en cuatro partes iguales.

Problema 361 Dividir el segmento que une los puntos $A(3, -1)$ y $B(15, 7)$ en cuatro partes iguales.

Problema 362 Dividir el segmento que une los puntos $A(-2, 3)$ y $B(14, 7)$ en cuatro partes iguales.

Problema 363 Dividir el segmento que une los puntos $A(-1, 1)$ y $B(8, 22)$ en tres partes iguales.

Problema 364 Dividir el segmento que une los puntos $A(2, 1)$ y $B(11, 7)$ en tres partes iguales.

Problema 365 Dividir el segmento que une los puntos $A(-2, -1)$ y $B(13, 9)$ en cinco partes iguales.

Problema 366 Dividir el segmento que une los puntos $A(3, 2)$ y $B(13, 7)$ en cinco partes iguales.

Problema 367 Dividir el segmento que une los puntos $A(1, 3)$ y $B(11, 18)$ en cinco partes iguales.

Problema 368 Dividir el segmento que une los puntos $A(1, 3)$ y $B(21, 18)$ en cinco partes iguales.

2.2.4. Punto medio y simétrico

Problema 369 Encontrar el punto simétrico B de $A(1, -1)$ respecto del punto $M(2, 3)$

Problema 370 Encontrar el punto simétrico B de $A(1, -1)$ respecto del punto $M(-2, 3)$

Problema 371 Encontrar el punto simétrico B de $A(-2, 3)$ respecto del punto $M(3, -4)$

Problema 372 Encontrar el punto simétrico B de $A(3, -1)$ respecto del punto $M(-3, 5)$

Problema 373 Encontrar el punto simétrico B de $A(-3, 1)$ respecto del punto $M(1, 0)$

Problema 374 Encontrar el punto simétrico B de $A(3, 1)$ respecto del punto $M(1, 0)$

Problema 375 Encontrar el punto simétrico B de $A(3, -1)$ respecto del punto $M(1, 0)$

Problema 376 Encontrar el punto simétrico B de $A(5, -1)$ respecto del punto $M(1, 0)$

2.2.5. Ángulo entre dos vectores

Problema 377 Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (3, -1)$.

Problema 378 Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (3, 1)$.

Problema 379 Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1, 3)$ y $\vec{v} = (5, 1)$.

Problema 380 Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (-2, 3)$ y $\vec{v} = (3, 1)$.

2.2.6. Varios

Problema 381 Sean $A(-2, 1)$, $B(3, -1)$ y $C(5, 8)$ vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide calcular el cuarto vértice y su centro.

Problema 382 Sean $A(-1, 1)$, $B(2, -1)$ y $C(5, 8)$ vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide calcular el cuarto vértice y su centro.

Problema 383 Sean $A(-3, 1)$, $B(3, -2)$ y $C(5, 8)$ vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide calcular el cuarto vértice y su centro.

Problema 384 Sean $A(-3, 1)$, $B(3, -1)$ y $C(5, 7)$ vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide calcular el cuarto vértice y su centro.

Problema 385 Dado el vector $\vec{u} = (-1, 4)$ encontrar otro que tenga la misma dirección y sentido pero con módulo 3.

Problema 386 Dado el vector $\vec{u} = (3, 1)$ encontrar otro que tenga la misma dirección y sentido pero con módulo 3.

Problema 387 Dado el vector $\vec{u} = (2, -1)$ encontrar otro que tenga la misma dirección y sentido pero con módulo 3.

Problema 388 Dado el vector $\vec{u} = (3, -1)$ encontrar otro que tenga la misma dirección y sentido pero con módulo 3.

Problema 389 Dados los puntos $A(-2, -1)$, $B(2, 6)$ y $C(4, 2)$, se pide:

1. Encontrar un punto D de manera que estos cuatro puntos formen un paralelogramo y encontrar su centro.
2. Calcular sus ángulos y la longitud de sus lados.
3. Encontrar todos los vectores perpendiculares al vector \overrightarrow{AB} que tengan módulo 8.

Problema 390 Hallar todos los vectores perpendiculares a $\vec{u} = (-3, -4)$ que tengan módulo 20.

Problema 391 Calcular dos vectores perpendiculares a $\vec{u} = (3, -1)$ que tengan de módulo 8.

Problema 392 Sean los puntos $A(1, 0)$, $B(3, 1)$ y $C(5, 7)$ vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Calcular el cuarto vértice D y el centro.
2. Calcular el ángulo que tiene por vértice B .
3. Encontrar los vectores perpendiculares a \overrightarrow{AB} que tengan módulo 5.

2.3. Geometría Analítica

2.3.1. Ecuaciones de la Recta

Problema 393 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(-1, 5)$

Problema 394 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(4, -5)$

Problema 395 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(3, -1)$ y $B(5, 2)$

Problema 396 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(4, -3)$

Problema 397 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(3, 1)$ y $B(4, -1)$

Problema 398 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, -1)$

Problema 399 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(-1, 3)$

Problema 400 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, -1)$

Problema 401 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(3, 3)$ y el ángulo que forma con el eje de abscisas.

Problema 402 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(3, 3)$ y el ángulo que forma con el eje de abscisas.

Problema 403 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, -1)$ y $B(3, 3)$ y el ángulo que forma con el eje de abscisas.

Problema 404 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, -1)$ y $B(3, 3)$ y el ángulo que forma con el eje de abscisas.

Problema 405 Expresa de todas las maneras que conozcas la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(4, 5)$, calcula después el ángulo que forma con el eje de abscisas.

2.3.2. Intersección de dos rectas

Problema 406 Hallar el punto de intersección de las rectas

$$2x - y + 8 = 0, \quad 3x + y - 3 = 0$$

Problema 407 Hallar el punto de intersección de las rectas

$$2x + y + 8 = 0, \quad 3x - y - 3 = 0$$

Problema 408 Hallar el punto de intersección de las rectas

$$3x + 2y + 8 = 0, \quad 3x - y - 4 = 0$$

Problema 409 Hallar el punto de intersección de las rectas

$$2x - y + 8 = 0, \quad 3x - y - 4 = 0$$

Problema 410 Hallar el punto de intersección de las rectas

$$x - y + 3 = 0, \quad 2x + y - 6 = 0$$

Problema 411 Hallar el punto de intersección de las rectas $r : x - 3y + 2 = 0$

y $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$, así como el ángulo que forman.

Problema 412 Hallar el punto de intersección de las rectas $r : 2x + 3y - 1 = 0$

y $s : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$, así como el ángulo que forman.

Problema 413 Hallar el punto de intersección de las rectas $r : 2x + y - 1 = 0$

y $s : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$, así como el ángulo que forman.

Problema 414 Hallar el punto de intersección de las rectas $r : 2x + y - 1 = 0$

y $s : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$, así como el ángulo que forman.

2.3.3. Distancias

Problema 415 Calcula la distancia del punto $P(2, 3)$ a la recta r en los siguientes casos:

1. $r : y = 3x - 2$

2. $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$

3. $r : 3x + 4y - 5 = 0$

Problema 416 Dado el punto $P(2, -1)$, calcular la distancia de éste a las siguientes rectas:

1.

$$r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

2.

$$s : \frac{x - 1}{-2} = \frac{y + 1}{1}$$

Problema 417 Calcular la distancia del punto $A(3, -1)$ a las rectas:

a) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2}$

b) $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

c) $r : 2x + 3y - 3 = 0$

Problema 418 Calcular

1. la distancia del punto $P(2, 1)$ a la recta $3x - y + 1 = 0$.
2. el ángulo formado por las rectas

$$r : 3x - y - 1 = 0, \quad s : x + y + 2 = 0$$

2.3.4. Ángulos

Problema 419 Calcular el ángulo formado por las rectas:

1.

$$r_1 : 3x - y + 1 = 0$$

$$s_1 : 2x + 3y + 4 = 0$$

2.

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases} \quad r_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2}$$

Problema 420 Calcular el ángulo que forman las rectas

a) $r : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3}, \quad s : 2x + y - 1 = 0$

b) $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \quad s : 3x + y + 1 = 0$

2.4. Cónicas

2.4.1. Circunferencia

Problema 421 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(3, 1)$ y radio $r = 2$

Problema 422 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 16 = 0$, calcular su centro y su radio.

Problema 423 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(3, -1)$ y radio $r = 2$

Problema 424 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 16 = 0$, calcular su centro y su radio.

Problema 425 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(3, -2)$ y radio $r = 3$

Problema 426 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 16 = 0$, calcular su centro y su radio.

Problema 427 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(-1, 1)$ y radio $r = 4$

Problema 428 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 16 = 0$, calcular su centro y su radio.

Problema 429 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(2, -1)$ y radio $r = 4$

Problema 430 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(1, 2)$ y radio $r = 3$

Problema 431 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(-1, 1)$ y radio $r = \sqrt{3}$

Problema 432 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$, calcular su centro y su radio.

Problema 433 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(1, -2)$ y radio $r = \sqrt{7}$

Problema 434 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$, calcular su centro y su radio.

Problema 435 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(2, 0)$ y radio $r = \sqrt{5}$

Problema 436 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$, calcular su centro y su radio.

Problema 437 Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $C(3, 0)$ y radio $r = \sqrt{5}$

Problema 438 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$, calcular su centro y su radio.

Problema 439 Calcula la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 + x - 5y - 2 = 0$ en el punto $P(-1, 0)$

Problema 440 Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $A(-1, 1)$, $B(2, 2)$ y $C(2, 0)$.

Problema 441 Encontrar el centro y el radio de las posibles circunferencias:

1. $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 4 = 0$

2. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 15 = 0$

2.4.2. Elipse

Problema 442 Sea una elipse cuyo eje mayor mide 18cm y su distancia focal es 6cm . Calcular el semieje menor y su excentricidad.

Problema 443 Dada una elipse, que tiene una excentricidad de $0,6$, y una distancia focal de 8cm , calcular las dimensiones del semieje mayor y del eje menor.

Problema 444 Dada una elipse, que tiene $0,4$ de excentricidad, y su semieje menor mide 4cm , calcular las dimensiones del eje mayor y la semidistancia focal.

2.4.3. Hipérbola

Problema 445 Dada una hipérbola de excentricidad $1,5$ y cuyo eje principal mide 4cm , calcular el eje secundario y la distancia focal.

Problema 446 Dada la hipérbola de cuyo eje secundario mide 6cm y tiene de semidistancia focal 9cm , calcular el eje principal y su excentricidad.

Problema 447 Si la distancia desde un punto cualquiera de la hipérbola hasta los dos focos es de 28 y 14cm respectivamente, y su excentricidad es de $1,8$, calcular la distancia focal y el semieje secundario.

Capítulo 3

Problemas de Análisis

3.1. Sucesiones

3.1.1. Términos de una sucesión

Problema 448 Se pide:

1. Calcular el término primero y noveno de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 2n^2 + 3$

b) $b_n = \frac{2n + 5}{n + 1}$

c) $c_n = (-1)^n \cdot 2^n$

2. Ahora calcular los términos segundo y séptimo de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = n^3 - 1$

b) $b_n = \frac{2n^2 - 1}{2n - 1}$

c) $c_n = (-1)^n \cdot n^n$

3. Comprobar si los números $1, 6, 5, \frac{9}{4}, \frac{18}{5}, 4$ y $\frac{7}{2}$ son términos de la sucesión $a_n = \frac{3n + 6}{n}$

4. Hallar el término general de las siguientes sucesiones:

a) $4, 9, 14, 19, 24, \dots$

b) $5, 11, 17, 23, 29, \dots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$

- d) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$
e) $3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, \dots$
f) $-3, 9, -27, 81, -243, \dots$

3.1.2. Sucesiones crecientes y acotadas:

Problema 449 Se pide:

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son monótonas crecientes o decrecientes y cuyos términos generales son:

a) $a_n = \frac{2n+1}{n}$

b) $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$

c) $c_n = \frac{2n-1}{n+1}$

d) $d_n = 7$

e) $e_n = n - 3^n$

2. Indicar si están acotadas las siguientes sucesiones, que tienen por término general:

a) $a_n = 3n - 2$

b) $b_n = \frac{3n-1}{n+1}$

c) $c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3n}$

d) $d_n = (-1)^{n+1}(n+3)$

3.1.3. Progresiones aritméticas

Problema 450 Se pide:

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son aritméticas

a) $1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$

b) $1, 4, 8, 13, 19, 26, \dots$

c) $-2, -5, -8, -11, -14, \dots$

d) $1, -2, 3, -4, 5, \dots$

e) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots$

2. Escribir los cuatro primeros términos de las sucesiones siguientes, y calcular en cada una de ellas el término que ocupa el lugar 10 y el término general.
 - a) El primero es -2 y la diferencia es $d = \frac{1}{5}$
 - b) El segundo vale -4 y la diferencia es $d = 3$.
 - c) El primero vale 16 y el segundo 12.
3. En las siguientes progresiones aritméticas, hallar el primer término, la diferencia, el término general y el término a_{12}
 - a) El tercer término es -5 y el cuarto -9
 - b) El cuarto término es $\sqrt{2}$ y el noveno $3 + \sqrt{2}$.
4. Calcular el término a_{13} de las siguientes progresiones aritméticas:
 - a) La diferencia es igual al cuarto término, y el noveno vale 8.
 - b) El quinto término es $-\frac{1}{2}$ y el décimo es 5.
5. Calcular el término a_{15} de las siguientes progresiones aritméticas.
 - a) La diferencia es igual al segundo término y el término octavo vale -6.
 - b) El tercer término es $-\frac{1}{3}$ y el noveno es 9.

Problema 451 Las edades de cinco hermanos están en progresión aritmética y suman 40 años. Si la edad del mayor es cinco veces la del pequeño, ¿cuál es la edad de cada uno de ellos?.

Problema 452 Hallar la suma de los 30 primeros términos de la progresión aritmética 2, 8, 14, 20, ...

Problema 453 Calcular la suma de los 50 primeros números pares.

Problema 454 En una progresión aritmética en la que $a_4 = 12$ y $d = \frac{1}{2}$. Calcular la suma de los primeros 20 primeros números.

Problema 455 En una progresión aritmética sea $a_4 = \frac{3}{8}$ y $a_7 = 6$. Calcular la suma de los 20 primeros términos.

Problema 456 ¿Cuántos términos hay que sumar a la progresión 38, 35, 32, 29, ... para obtener como resultado 245.

Problema 457 Dada la progresión $3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots$

1. Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.
2. Calcular en término a_{20} , y r o d si procede.
3. Calcular la suma de los veinte primeros términos.

Problema 458 Dada la progresión $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots$

1. Calcular en término a_{10} , y d .
2. Calcular la suma de los diez primeros términos.

Problema 459 Dada la progresión $3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots$

1. Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.
2. Calcular en término a_{20} , y r o d si procede.
3. Calcular la suma de los veinte primeros términos.

Problema 460 Dada la progresión $6, 12, 18, 24, 30, \dots$

1. Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.
2. Calcular en término a_n , y r o d si procede.
3. Calcular la suma de los diez primeros términos.

3.1.4. Progresiones geométricas

Problema 461 Se pide:

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son geométricas
 - a) $1, 4, 7, 11, 16, 22, \dots$
 - b) $1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots$
 - c) $4^{-3}, 4^{-2}, 4^{-1}, 1, 4, 4^2, \dots$
 - d) $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \dots$
 - e) $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, 5^2, 5^3, \dots$
2. En una progresión geométrica con $a_2 = \frac{1}{3}$ y $r = \frac{2}{3}$, calcular a_1 , a_n y a_{10} .

Problema 462 Escribe los cinco primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = \sqrt{2}$. Halla el término general y el lugar que ocupa el término que vale 64.

Problema 463 Calcular el término a_1 y la razón de una progresión geométrica si $a_5 = -\frac{4}{3}$ y $a_8 = \frac{32}{3}$

Problema 464 Calcular el término a_{12} de una progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros terminos es 16 y la razón vale 3.

Problema 465 Calcular el término a_9 de una progresión geométrica creciente sabiendo que la suma de los tres primeros términos es 42 y que el segundo vale 12.

Problema 466 ¿Cuánto valen los ángulos interiores de un cuadrilátero si están en progresión geométrica y el ángulo mayor es ocho veces el ángulo menor?.

Problema 467 En una progresión geométrica el primer término es 5 y la razón vale -3. Calcular la suma de los diez primeros términos de ella.

Problema 468 En una progresión geométrica de razón $-\frac{1}{2}$ el primer término es 8. Calcular el producto de los cinco primeros términos.

Problema 469 El cuarto término de una progresión geométrica es 4 y el noveno es 128. Calcular:

Problema 470 El primer día entrenamos 7 minutos y cada día siguiente entrenamos el doble que el día anterior. ¿Cuánto tiempo hemos entrenado después de una semana?.

Problema 471 Hallar la suma de los términos de las siguientes progresiones geométricas ilimitadas.

Problema 472 Si los términos de una progresión geométrica decreciente suman 12 y el primer término es 2, ¿cuál es la razón?. Escribir seis términos de esta progresión.

Problema 473 Dada la progresión geométrica cuyo tercer término es 9 y el noveno es 1, calcular

1. El primer término y la razón
2. El término general
3. Estudiar si la sucesión es creciente o decreciente

4. Estudiar si la sucesión está acotada
5. El producto de los nueve primeros términos
6. La suma de los nueve primeros términos
7. La suma total de la progresión

Problema 474 Dada la progresión $2, 6, 18, 54, \dots$

1. Calcular r , a_6 y su término general (a_n) .
2. Calcular el producto de los seis primeros términos.
3. Calcular la suma de los seis primeros términos.

Problema 475 Dada la progresión geométrica cuyo tercer término es 9 y el quinto es 1, calcular

1. El primer término y la razón
2. El término general
3. Estudiar si la sucesión es creciente o decreciente
4. Estudiar si la sucesión está acotada
5. El producto de los nueve primeros términos
6. La suma de los nueve primeros términos
7. La suma total de la progresión

Problema 476 De una progresión geométrica se conoce el tercer término $a_3 = 81$, y el sexto $a_6 = 3$.

1. Calcular r , a_1 y su término general (a_n) .
2. Estudiar si la sucesión es creciente o decreciente
3. Estudiar si la sucesión está acotada
4. La suma y producto de los seis primeros términos
5. La suma total de la progresión

3.2. Límites de sucesiones

3.2.1. Idea intuitiva

Problema 477 Utiliza la calculadora para comprobar que los términos de la sucesión $(a_n) = \left(\frac{3n^2 + 3}{n^2}\right)$ se aproximan a 3. Calcular para ello los valores de $a_1, a_4, a_{10}, a_{40}, a_{100}$ y a_{1000} .

Problema 478 Utilizar la calculadora para calcular a que valor se aproximan las siguientes sucesiones. Calcular para ello los valores de $a_1, a_4, a_{10}, a_{40}, a_{100}$ y a_{1000}

1. $(a_n) = \left(\frac{n+3}{n^2+1}\right)$
2. $(a_n) = \left(\frac{3n+4}{3n-1}\right)$
3. $(a_n) = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{5}, \frac{7}{8}, \frac{9}{11}, \dots\right\}$
4. $(a_n) = \left(\sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}\right)$

3.2.2. Definición

Problema 479 Averigua a partir de que término de la sucesión $a_n = \frac{4n-3}{3n}$ se cumple que $\left|a_n - \frac{4}{3}\right| < \frac{1}{1000}$.

Problema 480 La sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n+4}\right)$ tiene de límite 0. ¿A partir de que término de esta sucesión todos los siguientes se diferencian del límite menos de una milésima?

Problema 481 Hallar un término de la sucesión $(a_n) = \left(\frac{1-3n}{2n+1}\right)$ a partir del cual todos los términos siguientes se diferencien del límite menos de una milésima.

Problema 482 Dada la sucesión de término general $a_n = \frac{2n^3 - 4}{n^3 - 1}$ calcular el término de esta sucesión, a partir de cual todos los términos difieren del límite en menos de una milésima.

Problema 483 Dada la sucesión de término general $a_n = \frac{2n^3 - 4}{n^3 - 1}$ calcular el término de esta sucesión, a partir de cual todos los términos difieren del límite en menos de una milésima.

3.2.3. Sucesiones que tienden a infinito

Problema 484 Utiliza la calculadora para averiguar que ocurre con los términos de las siguientes sucesiones al dar valores a n cada vez mayores.

1. $(a_n) = (4^{n-1})$

2. $(b_n) = \left(\frac{1-n^3}{n}\right)$

3. $(c_n) = ((-1)^n \cdot (n+3)^2)$

4. Dado $k = 121$, averiguar a partir de que término de la sucesión $(a_n) = (4n - 3)$ todos los siguientes son mayores que k . Compruébalo calculando algún término posterior.

5. Dado $k = -213$, averiguar a partir de que término de la sucesión $(a_n) = (3 - 6n)$ todos los siguientes son menores que k . Compruébalo calculando algún término posterior.

3.2.4. Cálculo de Límites de sucesiones

Problema 485 Dadas las sucesiones $(a_n) = (n^2 + 2)$ y $(b_n) = (1 - n^2)$, calcular los siguientes límites:

1. $\lim a_n$

2. $\lim b_n$

3. $\lim(a_n - b_n)$

4. $\lim(a_n + b_n)$

5. $\lim(a_n \cdot b_n)$

6. $\lim \frac{a_n}{b_n}$

Problema 486 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim \frac{2n+1}{4n+7}$

2. $\lim \frac{2n^2+1}{3n^3+2}$

3. $\lim \frac{n^3-2n^2+1}{3n^3+2}$

4. $\lim \frac{2n^3 + 2n^2 + 1}{3n^2 + 1}$

5. $\lim \frac{2n^3 + 2n^2 + 1}{3n^2 + 1}$

Problema 487 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim \sqrt{\frac{8n + 1}{2n + 5}}$

2. $\lim \sqrt{\frac{3n + 1}{n^2 - 1}}$

3. $\lim \sqrt{\frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 - 2}}$

3.2.5. Número e

Problema 488 Calcular los cinco primeros términos de la sucesión de término general $a_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}$. Calcular también los términos a_{200} y a_{1000} . Relacionar esta sucesión con el número e .

Problema 489 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$

2. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$

3. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$

4. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2}$

3.2.6. Varios

Problema 490 Calcular los siguientes límites

1. $\lim \frac{2n^2 - n + 1}{3n^3 + 1}$

2. $\lim \frac{2n^4 - n^2 + 1}{n^3 - 1}$

3. $\lim \sqrt{\frac{8n^2 - n + 1}{2n^2 - 1}}$

4. $\lim \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 - 1} \right)^{2n^3}$

5. $\lim \left(\frac{2n^2 + n - 1}{n^2 - 1} \right)^{2n}$

Problema 491 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 - x^2 + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{2x^2 - x} \right)^{x^2}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \right)^{2x}$

Problema 492 Calcular los siguientes límites

1. $\lim \frac{2n^2 - n + 1}{3n^3 + 1}$

2. $\lim \frac{2n^4 - n^2 + 1}{n^3 - 1}$

3. $\lim \sqrt{\frac{8n^2 - n + 1}{2n^2 - 1}}$

4. $\lim \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 - 1} \right)^{2n^3}$

5. $\lim \left(\frac{2n^2 + n - 1}{n^2 - 1} \right)^{2n}$

3.3. Funciones

3.3.1. Concepto de función, Dominio y Recorrido

Problema 493 Se pide:

1. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones

a) $f(x) = 3x + 1$

b) $f(x) = x^2 + 4x$

c) $f(x) = \sqrt{x+9}$

d) $f(x) = -x^2 + 2$

e) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$

2. Halla el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^3 - x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{2+x}$

c) $f(x) = \frac{2x}{x-4}$

d) $f(x) = \frac{2}{3x+6}$

e) $f(x) = 2 + \sqrt{x+5}$

3. En las funciones del ejercicio anterior, calcular las imágenes de 0, 4, -2, -5.

Problema 494 Hallar el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{x-1}$

2. $f(x) = x^2$

3. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

4. $f(x) = \frac{1}{|x|}$

5. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

6. $f(x) = \sqrt{1-x}$

7. $f(x) = 4 - x^2$

8. $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

9. $f(x) = |x-2|$

10. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

3.3.2. Funciones definidas a trozos**Problema 495** Se pide:

1. Representar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2. Representar la función
- $f(x) = |x + 1|$
- Tener en cuenta que por la definición de valor absoluto tenemos

$$\begin{aligned} f(x) = |x + 1| &= \begin{cases} x + 1 & \text{si } x + 1 \geq 0 \\ -(x + 1) & \text{si } x + 1 < 0 \end{cases} \implies \\ \implies f(x) &= \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{si } x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

3.3.3. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos**Problema 496** Se pide:

1. Calcula la variación de la función
- $f(x) = x^2 - 4$
- en los intervalos que se indican

- a) En el $[-1, 5]$
- b) En el $[0, 5]$
- c) En el $[-6, -1]$

2. Calcula la variación de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 9 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

En los siguientes intervalos.

- a) En el $[-2, 1]$
- b) En el $[1, 3]$

Solución:

$f(1) = 1$, $f(3) = 9 \implies$ la variación de la función $f(x)$ en el intervalo es $f(3) - f(1) = 9 - 1 = 8$

- c) En el $[4, 7]$

3. Estudia si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en los puntos que se indican utilizando la calculadora.

a) $f(x) = x^3$ en $x = 0$

b) $f(x) = 3 - x^2$ en $x = 1$

4. Indica en que intervalos son crecientes o decrecientes las siguientes funciones y calcular, si los tienen, sus máximos y mínimos relativos.

a) $f(x) = -x^3 + 1$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = x^3 - 3x$

d) $f(x) = \frac{x-2}{x}$

e) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

f) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x}$

3.3.4. Funciones acotadas. Funciones simétricas. Estudio gráfico de la continuidad. Puntos de corte con los ejes.

Problema 497 Se pide:

1. Explicar si las siguientes funciones están acotadas y porqué

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

b) $f(x) = |x-1|$

c) $f(x) = \cos x$

2. Estudiar la simetría de las siguientes funciones

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^6 + 3}$

c) $f(x) = \frac{|x| - 5}{x}$

d) $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 5}$

3. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones

a) $f(x) = 2x^3 - 8x$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^6 + 3}$

$$c) f(x) = \frac{|x| - 5}{x}$$

$$d) f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 5}$$

4. clasifica el tipo de discontinuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = -\frac{1}{|x - 2|}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$c) \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si } x < -1 \\ 9 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

5. Idear cuatro funciones definidas a trozos y calcular su dominio, recorrido, cortes con los ejes, simetrías, continuidad y por último decir si están acotadas.

6. Representar gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos

3.3.5. Operaciones con funciones. Funciones recíprocas

Problema 498 Se pide:

1. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x + 2}$, calcular si es posible

$$a) (f + g)(4)$$

$$b) (f + g)(-2)$$

$$c) (3 \cdot f)(-3)$$

$$d) (f \cdot g)(0)$$

$$e) (f \cdot g)(-3)$$

$$f) \left(\frac{f}{g}\right)(4)$$

2. Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x - 5}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$

a) Dominio de f

b) Dominio de g

c) Calcular la función $(2 \cdot f)$ y su dominio.

d) Calcular la función $(f + g)$ y su dominio.

- e) Calcular $(f \cdot g)$ y su dominio.
- f) Calcular $\left(\frac{f}{g}\right)$ y su dominio.
3. Siendo las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = 2x$, calcular las funciones compuestas
- $(g \circ g)$
 - $(f \circ g)$
 - $(g \circ f)$
4. Siendo las funciones $f(x) = \frac{1}{x-2}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, calcular las funciones compuestas
- $(g \circ g)$
 - $(f \circ g)$
 - $(g \circ f)$
5. Calcula la función recíproca de
- $f(x) = 5x$
 - $f(x) = 3x + 1$
 - $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

3.3.6. Puntos de Corte

Problema 499 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3}$$

Problema 500 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 30}{x^3 - 2}$$

Problema 501 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x^3 + 2}$$

Problema 502 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 4}$$

Problema 503 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 3}$$

Problema 504 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 5}$$

3.3.7. Simetría

Problema 505 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1}$

2. $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

Problema 506 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

2. $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

Problema 507 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x^3}{x^4 - x^2 + 1}$

2. $g(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^3}$

3. $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4}$

Problema 508 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^3}$

2. $g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1}$

3. $h(x) = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^4 - 1}$

Problema 509 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

2. $g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 1}$

3. $h(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1}$

Problema 510 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^3}$

2. $g(x) = \frac{x^3 + 1}{x^4}$

Problema 511 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x}$

2. $g(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2}$

Problema 512 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 2}$

2. $g(x) = \frac{4x^3 - x + 1}{x^2 + 1}$

3. $h(x) = \frac{2x^5}{x^2 - 1}$

Problema 513 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

2. $g(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$

3. $h(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 2}$

Problema 514 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \frac{x^6 - x^2 - 1}{x^4 + 2}$

$$2. g(x) = \frac{2x^2 - 1}{3x^3}$$

$$3. h(x) = \frac{3x + 2}{x + 1}$$

Problema 515 Calcular la simetría de las siguientes funciones

$$1. f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^6 + x^2 - 1}$$

$$2. g(x) = \frac{3x^5}{x^2 + 4}$$

$$3. h(x) = \frac{2x^2 + x}{x - 1}$$

Problema 516 Calcular la simetría de las siguientes funciones

$$1. f(x) = \frac{3x^6 - 2}{x^4 - 1}$$

$$2. g(x) = \frac{-2x^3}{x^2 + 1}$$

$$3. h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

Problema 517 Calcular la simetría de las siguientes funciones

$$1. f(x) = \frac{4x^4 + 1}{x^2 - 2}$$

$$2. g(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$$

$$3. h(x) = \frac{2x^2 + 1}{x + 3}$$

Problema 518 Calcular la simetría de las siguientes funciones

$$1. f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^6 + 1}$$

$$2. g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 4}$$

$$3. h(x) = \frac{x^5 - 1}{x^3}$$

Problema 519 Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

$$1. f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x}$$

$$2. g(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2}$$

3.3.8. Composición de Funciones**Problema 520** Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{x - 1}$$

Problema 521 Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo

$$f(x) = \frac{x - 1}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Problema 522 Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo

$$f(x) = \frac{2x - 1}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Problema 523 Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo

$$f(x) = \sqrt{x - 1} \text{ y } g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Problema 524 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{2x}{x - 1}, \quad g(x) = x - 1$$

Problema 525 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{x - 1}{2x}, \quad g(x) = x + 2$$

Problema 526 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad g(x) = x + 1$$

Problema 527 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2x}, \quad g(x) = x + 3$$

Problema 528 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{x + 2}{x}, \quad g(x) = x - 2$$

Problema 529 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{x + 3}{2x}, \quad g(x) = x - 4$$

3.3.9. Función Inversa

Problema 530 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

Problema 531 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

Problema 532 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2x+2}{3x+2}$

Problema 533 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

Problema 534 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

Problema 535 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Problema 536 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$

Problema 537 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{x+3}{3x-1}$

Problema 538 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

Problema 539 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

Problema 540 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{x+3}{2-x}$

Problema 541 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2x-1}{2-x}$

Problema 542 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

3.3.10. Monotonía

Problema 543 Comprobar si la función $f(x) = 10^{-x}$ es creciente o decreciente en $x = 2$

Problema 544 Comprobar si la función $f(x) = 3^x$ es creciente o decreciente en $x = 2$

Problema 545 Comprobar si la función $f(x) = x^x$ es creciente o decreciente en $x = 2$

3.4. Límites de funciones

3.4.1. Límite de una función en un punto

Problema 546 Se pide:

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calcular:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 - c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
2. Utilizar la calculadora para calcular a que valores se acercan las siguientes funciones en los puntos indicados:

- a) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ en $x = 3$

- b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$ en $x = -3$

Problema 547 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

3.4.2. Límite de una función en el infinito

Problema 548 Se pide:

1. Para las siguientes funciones, calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

- a) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3}$

- b) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 5}$

- c) $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$

$$d) f(x) = 3^x$$

2. Calcular los límites de las siguientes funciones polinómicas:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4x - 1)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x - 1)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 1)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 1)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5 - 7)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 - 7)$$

3.4.3. Cálculo de límites de funciones racionales

Problema 549 Se pide:

1. Calcular los siguientes límites y, en caso de que no existan, calcular los laterales.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 5}{x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2}{x + 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 1}{x - 3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 1}{x + 2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - x}{x - 3}$$

2. Calcular los siguientes límites simplificando fracciones:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{3x^4 - x^3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 - 3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 14x + 49}{x^2 - 49}$$

3. Calcular los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x - 2}{3x^4 + 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x - 1}{x^2 + 2}$$

3.5. Continuidad

3.5.1. Continuidad en un punto y en un intervalo

Problema 550 Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

1.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x}{2} + 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ x & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x = -1, \text{ y en } x = 2$$

4.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

5. Estudia si la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } -8 < x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

es continua en el intervalo $(-8, 5]$.

6. Calcular el valor de k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq 3 \\ kx - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 3$$

7. Calcular cuánto deben valer a y b para que la función siguiente sea continua en todo su dominio.

$$\begin{cases} x^2 + a & \text{si } x < 2 \\ ax + b & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

3.5.2. Tipos de discontinuidad

Problema 551 Se pide:

1. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones e indica de que tipo son:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -8 < x < -2 \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 6 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2. Calcular el verdadero valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a)

$$\begin{cases} x^3 - 2 & \text{si } 2 > x \\ 3x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} \quad \text{en } x = -2$$

3.5.3. Continuidad y Operaciones:**Problema 552** Se pide:

1. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = x^2 - 9$, estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f + g$

b) $f \cdot g$

c) $\frac{f}{g}$

d) $\frac{g}{f - g}$

2. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 + 9x + 14}{x + 2}$ y, si es posible, complétala para que sea continua en todo \mathbb{R} .

3.5.4. Problemas de Continuidad**Problema 553** 1. Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - k & \text{si } x < 1 \\ kx & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ es continua en todo } \mathbb{R}$$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x}{2} + 3 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Problema 554 1. Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - k & \text{si } x < 1 \\ kx & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ es continua en todo } \mathbb{R}$$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x}{2} + 3 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Problema 555 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 8 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 1, \text{ y en } x = 3$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Problema 556 1. Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3kx^2 - 2k & \text{si } x < 2 \\ kx - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{es continua en todo } R$$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} + 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ \frac{x^2 + 1}{3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 1, \text{ y en } x = 3$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Problema 557 Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 3kx + 1 & \text{si } x < 1 \\ kx^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{es continua en todo } R$$

Problema 558 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } -1 < x < 5 \\ \frac{x^2 + 1}{2} & \text{si } x \geq 5 \end{cases} \quad \text{en } x = -1, \text{ y en } x = 5$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Problema 559 Se pide:

1. Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 3 & \text{si } x < 3 \\ (k + 1)x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{es continua en todo } R$$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-2}{2} & \text{si } 0 \leq x < 6 \\ x-4 & \text{si } x > 6 \end{cases} \quad \text{en } x=0, \text{ y en } x=6$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de $f(x)$.

Problema 560 Encuentra los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2kx - 1 & \text{si } x < 3 \\ x + 2k & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{es continua en todo } \mathbb{R}$$

Problema 561 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ x + 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

1. Dibujar la gráfica de la función.
2. Estudiar la continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

Problema 562 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x - 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

1. Dibujar la gráfica de la función.
2. Estudiar la continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

Problema 563 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x + 5 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

1. Dibujar la gráfica de la función.
2. Estudiar la continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

Problema 564 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } x < -1 \\ 3x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Problema 565 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + 3ax - 2 & \text{si } x < 1 \\ a^2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

calcular a para que esta función sea continua en $x = 1$.

Problema 566 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x < -1 \\ x + 4 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 4 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Problema 567 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + a^2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2a^2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

calcular a para que esta función sea continua en $x = 1$.

Problema 568 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -1 \\ 3x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 5x + 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Problema 569 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 - 2ax + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2a^2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

calcular a y b para que esta función sea continua en $x = 1$.

Problema 570 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Problema 571 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

3.6. Asíntotas de una función

Problema 572 Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Problema 573 Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Problema 574 Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

Problema 575 Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Problema 576 Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

Problema 577 Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

3.7. Problemas de Límites

Problema 578 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 2x + 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3 + x - 1)$

3.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + x - 1}$$

4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x - 1}{x^2 + 3x}$$

5.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$$

Problema 579 Calcular los siguientes límites:

1.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{2x^2}$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + x - 1} \right)^{2x}$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{2x^2 + x} \right)^{x+1}$$

4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^{2x-2}$$

5.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + x}{x^2 - 1} \right)^{2x^2-1}$$

Problema 580 Calcular los siguientes límites:

1.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 - x + 1)$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^3 + x + 1)$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 1}{5x^2 + 1}$$

4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 3x - 1}{x^2 + 2x - 1}$$

5.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 2}$$

Problema 581 Calcular los siguientes límites:

1.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \right)^{2x^2}$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 1} \right)^{2x}$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{3x^2 + x - 1} \right)^{x^2+1}$$

4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^{4x-1}$$

5.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5 + 2x + 1}{x^5 - 1} \right)^{x^2-1}$$

Problema 582 Calcular los siguientes límites:

1.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 5x + 3)$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 5x + 2)$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 3x - 2}{5x^2 + 3x - 1}$$

4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 + 2x + 3}{3x^2 - 2x - 4}$$

5.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^5 + 2x}$$

Problema 583 Calcular los siguientes límites:

1.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^4 - x^3 - 1}{2x^4 - 1} \right)^{3x-1}$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^5 + 2x^2 - 1}{x^5 - 2x + 1} \right)^{x^3-1}$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{5x^4 + 3x^3 - 1} \right)^{2x^3+1}$$

4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 - x - 1}{3x^3 + 2} \right)^{x^2-1}$$

5.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^7 + x^4 - x + 1}{3x^7 - x^2 + 1} \right)^{7x-1}$$

Problema 584 Calcular los siguientes límites:

1.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 - 3x - 3)$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^4 + 3x - 2)$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 3x + 1}{5x^3 + 3x - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^4 - 2x + 3}{5x^2 - 2x - 4}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{x^5 - x}$

Problema 585 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1} \right)^{2x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^4 + x + 1} \right)^{2x^3 - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^6 + x^3 - 1}{3x^6 - x^3 - 1} \right)^{2x + 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x + 1}{x^3 + 2} \right)^{x^2 - 1}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^4 + x^3 - x^2 + 1}{3x^4 - x^2 + 1} \right)^{7x - 1}$

Problema 586 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 10x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - \sqrt{x + 14}}{x - 2}$

Problema 587 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 - 2x + 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^4 + x - 2)$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{5x^3 + 2x - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 + 2x^2 + 3}{5x^2 + 2x - 4}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x^5 - x}$

Problema 588 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 - 3}{3x^3} \right)^{2x^3}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^5 + x^3 - 1}{x^5 - x + 1} \right)^{x^3 + 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^7 - x^3 - 1}{5x^7 + 2x^3 - 1} \right)^{x + 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x + 1}{x^3 + 2} \right)^{x^2 - 1}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^4 + x^3 - x^2 + 1}{3x^4 - x^2 + 1} \right)^{7x - 1}$

Problema 589 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$
2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - \sqrt{x + 20}}{x - 5}$

Problema 590 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \right)^{5x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{3x^2 + x - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^{4x - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5 + 2x + 1}{x^5 - 1} \right)^{x^2 - 1}$

Problema 591 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$

Problema 592 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

Problema 593 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 3x + 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 2x - 1)$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 2x - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 - 3}{x^3 + 1}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 2}$

Problema 594 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 2}{x} \right)^{x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{2x^2 - 1} \right)^{3x^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^2/2}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 2} \right)^{x^2}$

Problema 595 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (6x^5 - 3x^2 - 1)$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^3 + 2x + 1)$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^3 + 3}$

4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 3x^2 - 2}{x^4 + 2x - 1}$$

5.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 2x^3 + 3}{5x^5 + 3}$$

Problema 596 Calcular los siguientes límites

1.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 - x - 1}{2x^2 + 1} \right)^{x+1}$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{3x^2 - x - 1} \right)^{2x^2}$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2/2}$$

4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 3}{3x - 1} \right)^{x/2}$$

Problema 597 Calcular los siguientes límites

1.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 + 2x - 1)$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^2 + x - 1)$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^3 + x^2 + 1}$$

4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 3x + 2}{x^5 - x^4 + 1}$$

5.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x - 1}{2x^3 + 1}$$

Problema 598 Calcular los siguientes límites

1.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{2x^3 + 3} \right)^{3x^2}$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^5 - 3x - 1}{3x^5 + 1} \right)^{x^3/2}$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{2x^2 + 5} \right)^{x^2/2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x-1} \right)^{3x}$$

Problema 599 Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 + 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{3x^2} \right)^{5x^2 - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{2x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^4 - 2x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2}$$

Problema 600 Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x - 1}{x^2 + 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x - 1}{4x^3 + 2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2 + 2x - 1}{3x^2 + 1} \right)^{(x^2+1)/2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x/2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 8}{x^3 - 3x^2 + x + 2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-2} - 2}{x-3}$$

Problema 601 Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 + x + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x + 1}{3x^3 + 2x^2 + 1}$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 2}{5x^2 - 1} \right)^{(3x^2 + 1)/2}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x - 5} \right)^{x/2}$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}$
6. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5x - 4} - 4}{x - 4}$

Problema 602 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 1}{5x} \right)^{2x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 8}$
3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5x - 4} - 4}{x - 4}$

Problema 603 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$
4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$
5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x}$

10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$
12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{5-x^2} - 2}$
13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x-2}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{5x}$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x \sec x}$
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \tan x}{x}$
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$
20. $\lim_{x \rightarrow \pi} x \sec x$
21. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cot x}$
22. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
23. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$. (Ayuda: $(\frac{\operatorname{sen} t}{t})^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$)
24. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3t}{t}$. (Ayuda: $\frac{\operatorname{sen} 3t}{t} = 3(\frac{\operatorname{sen} 3t}{3t})$)
25. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 3t}$. (Ayuda: $\frac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 3t} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\operatorname{sen} 3t}$)
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x}$
27. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos h)^2}{h}$

Problema 604 Calcular los límites siguientes:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x + 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 1}{10x^3 - 3x^2 + 7}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{10} - 11}{10x^{11} - 3}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x + 3}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 3)^{-2}$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{x - 1} + \frac{3x}{x + 1}\right)$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x - 1} + \frac{3x}{x + 1}\right)$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 + 3})$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 1})$

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x + \sqrt{9x^2 - x})$

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - x}}$

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 + x}}$

19.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^4 + 1x}}$$

20.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

21.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$$

22.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x + \operatorname{sen} x}$$

23.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

24.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x}$$

Problema 605 Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2}\right)^{3x^2}$$

Problema 606 Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{7x}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 1}\right)^{5x^2}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 1}\right)^{2x}$$

Problema 607 Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x + 2}$$

Problema 608 Calcular:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x - 1}{3x^3 - 1} \right)^{2x}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right)^{2x^3}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{6x} \right)^{8x}$$

Problema 609 Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5}$$

Problema 610 Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x} \right)^{7x}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} \right)^{5x^2}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 1} \right)^{2x}$$

Problema 611 Calcular los siguientes límites:

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{4 - \sqrt{x^2 - 9}}{x + 5}$$

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5}$$

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x + 2}$$

Calcular:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x - 1}{3x^3 - 1} \right)^{2x}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right)^{2x^3}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{6x} \right)^{8x}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^3 + 2x - 1}{x^3 - 1} \right)^{x^3}$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + 2} \right)^{5x}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1} \right)^{3x^2}$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x} \right)^{5x}$$

Problema 612 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x-2}$
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} \right)^{2x}$

Problema 613 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - x - 1} \right)^{2x}$

Problema 614 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2}$
2. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 18}$

Problema 615 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x-1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - x}$

Problema 616 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x+2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9x + 20}$

Problema 617 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x - 3}{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4}$$

Problema 618 Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2 + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2/2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^5 + 3x - 1}{5x^5 + 1} \right)^{2x + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x + 2} \right)^{3x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 6x - 16}{x^4 + 2x^3 + x^2 + x - 2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3}{3x^3 + 2x^2 - 4x - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 + 2x^3 - 2x^2}{x^3 + x^2 + x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^4 - 2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 11} - 4}{x - 3}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{13 - x^2} - 3}{x - 2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\sin x}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{\ln(1 + \sin x)}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} xe^x, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x$$

3.8. Problemas Varios

3.8.1. Problemas de Dominio

Problema 619 Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{x - 4}$$

Problema 620 Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}{x - 6}$$

Problema 621 Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}{x - 8}$$

Problema 622 Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 15}}{x - 7}$$

Problema 623 Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x - 14}}{x - 5}$$

Problema 624 Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}{x - 3}$$

Problema 625 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x - 1}}$$

Problema 626 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}}$$

Problema 627 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}}$$

Problema 628 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + x - 2}}$$

Problema 629 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 2}}$$

Problema 630 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 15}}$$

Problema 631 Calcular el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x - 3}}$

3.8.2. Varios

Problema 632 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x - 2}{(x + 2)\sqrt{x - 1}}$$

2. Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = 2x$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

3. Sea $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$ en el dominio $R - \{1\}$, calcular $f^{-1}(x)$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \frac{3x^3}{2x^2 - 1}$

Problema 633 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x - 3}{(x + 2)\sqrt{x + 1}}$$

2. Si $f(x) = x^3 - 3$ y $g(x) = |x|$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

3. Sea $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en el dominio $D = (-1, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$

Problema 634 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x - 4}{(x + 3)\sqrt{x + 2}}$$

2. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = |x|$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

3. Sea $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ en el dominio $D = (-1, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$

Problema 635 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x - 4)\sqrt{x + 2}}{x + 3}$$

2. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

3. Sea $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ en el dominio $D = (-1/2, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$

Problema 636 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x - 4)\sqrt{x + 2}}{x + 3}$$

2. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

3. Sea $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ en el dominio $D = (-1/2, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$

Problema 637 Resolver:

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x + 5)\sqrt{x - 2}}{x - 2}$$

2. Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

3. Sea $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ en el dominio $D = (1, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$

Problema 638 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x + 8)\sqrt{x - 2}}{(x - 2)}$$

2. Si $f(x) = x - 2$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

3. Sea $f(x) = \frac{3x}{x-3}$ en el dominio $R^+ - \{3\}$, calcular $f^{-1}(x)$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^4 + 1}$

Problema 639 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x-1)}{(x+1)\sqrt{x}}$$

2. Si $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

3. Sea $f(x) = \frac{5x-2}{x+1}$ en el dominio $R^+ - \{-1\}$, calcular $f^{-1}(x)$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \frac{3x^3}{x^2+8}$

Problema 640 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x-6}{(x+3)\sqrt{x-2}}$$

2. Si $f(x) = \sqrt{x^2-3}$ y $g(x) = x-1$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

3. Sea $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ en el dominio $R - \{1/2\}$, calcular $f^{-1}(x)$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{2x^2 + 5}$

Problema 641 1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x-5}{(x+3)\sqrt{x-2}}$$

2. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

3. Sea $f(x) = \frac{2x-1}{3x}$ en el dominio $D = (0, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$

4. Estudiar la simetría de la función $f(x) = \frac{3x^4 - 1}{2x}$