

# Problemas de 4ºESO

Isaac Musat Hervás

25 de febrero de 2012



# Índice general

<b>1. Problemas de Álgebra</b>	<b>7</b>
1.1. Números Reales . . . . .	7
1.1.1. Los números . . . . .	7
1.1.2. Intervalos . . . . .	9
1.1.3. Ecuaciones Bicuadradas . . . . .	11
1.2. Números Racionales . . . . .	11
1.2.1. Operaciones con números racionales . . . . .	11
1.2.2. Ecuaciones Racionales . . . . .	12
1.3. Logaritmos . . . . .	13
1.3.1. Ecuaciones Logarítmicas . . . . .	13
1.3.2. Sistemas de Ecuaciones Logarítmicas . . . . .	17
1.4. Exponenciales . . . . .	20
1.4.1. Ecuaciones Exponenciales: . . . . .	20
1.4.2. Sistemas de Ecuaciones Exponenciales: . . . . .	23
1.5. Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales . . . . .	26
1.6. Sistemas de Ecuaciones no Lineales . . . . .	27
1.7. Inecuaciones . . . . .	27
1.7.1. Inecuaciones . . . . .	27
1.7.2. Sistemas de Inecuaciones . . . . .	35
1.8. Polinomios . . . . .	36
1.8.1. Introducción . . . . .	36
1.8.2. Teorema del Resto . . . . .	39
1.8.3. Descomposición Polinómica . . . . .	40
1.8.4. Simplificación . . . . .	42
1.8.5. Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo . . . . .	42
1.8.6. Simplificación de expresiones racionales de polinomios . . . . .	44
1.8.7. Ecuaciones Polinómicas . . . . .	47
<b>2. Problemas de Geometría</b>	<b>49</b>
2.1. Trigonometría . . . . .	49
2.1.1. Ángulos . . . . .	49
2.1.2. Razones Trigonométricas . . . . .	52
2.1.3. Resolución de Triángulos . . . . .	55

2.1.4.	Aplicaciones . . . . .	55
2.2.	Vectores . . . . .	66
2.2.1.	Operaciones con Vectores . . . . .	66
2.2.2.	Distancia entre dos puntos . . . . .	66
2.2.3.	División de un segmento . . . . .	67
2.2.4.	Punto medio y simétrico . . . . .	67
2.2.5.	Ángulo entre dos vectores . . . . .	68
2.2.6.	Varios . . . . .	68
2.3.	Geometría Analítica . . . . .	69
2.3.1.	Ecuaciones de la Recta . . . . .	69
2.3.2.	Intersección de dos rectas . . . . .	70
2.3.3.	Distancias . . . . .	71
2.3.4.	Ángulos . . . . .	72
2.4.	Cónicas . . . . .	72
2.4.1.	Circunferencia . . . . .	72
2.4.2.	Elipse . . . . .	74
2.4.3.	Hipérbola . . . . .	74
<b>3.</b>	<b>Problemas de Análisis</b>	<b>75</b>
3.1.	Sucesiones . . . . .	75
3.1.1.	Términos de una sucesión . . . . .	75
3.1.2.	Sucesiones crecientes y acotadas: . . . . .	76
3.1.3.	Progresiones aritméticas . . . . .	76
3.1.4.	Progresiones geométricas . . . . .	78
3.2.	Límites de sucesiones . . . . .	81
3.2.1.	Idea intuitiva . . . . .	81
3.2.2.	Definición . . . . .	81
3.2.3.	Sucesiones que tienden a infinito . . . . .	82
3.2.4.	Cálculo de Límites de sucesiones . . . . .	82
3.2.5.	Número e . . . . .	83
3.2.6.	Varios . . . . .	83
3.3.	Funciones . . . . .	85
3.3.1.	Concepto de función, Dominio y Recorrido . . . . .	85
3.3.2.	Funciones definidas a trozos . . . . .	86
3.3.3.	Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos . . . . .	86
3.3.4.	Funciones acotadas. Funciones simétricas. Estudio gráfico de la continuidad. Puntos de corte con los ejes. . . . .	87
3.3.5.	Operaciones con funciones. Funciones recíprocas . . . . .	88
3.3.6.	Puntos de Corte . . . . .	89
3.3.7.	Simetría . . . . .	90
3.3.8.	Composición de Funciones . . . . .	93
3.3.9.	Función Inversa . . . . .	94
3.3.10.	Monotonía . . . . .	94
3.4.	Límites de funciones . . . . .	95

3.4.1.	Límite de una función en un punto . . . . .	95
3.4.2.	Límite de una función en el infinito . . . . .	95
3.4.3.	Cálculo de límites de funciones racionales . . . . .	96
3.5.	Continuidad . . . . .	97
3.5.1.	Continuidad en un punto y en un intervalo . . . . .	97
3.5.2.	Tipos de discontinuidad . . . . .	98
3.5.3.	Continuidad y Operaciones: . . . . .	99
3.5.4.	Problemas de Continuidad . . . . .	99
3.6.	Asíntotas de una función . . . . .	103
3.7.	Problemas de Límites . . . . .	103
3.8.	Problemas Varios . . . . .	119
3.8.1.	Problemas de Dominio . . . . .	119
3.8.2.	Varios . . . . .	120



# Capítulo 1

## Problemas de Álgebra

### 1.1. Números Reales

#### 1.1.1. Los números

**Problema 1** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$-7$ ;  $12$ ;  $0$ ;  $\pi$ ;  $2,333\dots$ ;  $-\frac{3}{7}$ ;  $2,1010010001\dots$

**Problema 2** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$-12$ ;  $\frac{5}{2}$ ;  $\sqrt{7}$ ;  $23$ ;  $7,34$ ;  $5,222272727\dots$ ;  $3,7770700700070000\dots$

**Problema 3** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$3$ ;  $-2$ ;  $-\frac{4}{3}$ ;  $4,3327832783278\dots$ ;  $4,33133113331113333\dots$ ;  $\sqrt{7}$ ;  $\pi$ ;  $7,1203870387\dots$ ;  $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

**Problema 4** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$-3$ ;  $2$ ;  $-\frac{4}{3}$ ;  $4,3322277722227777\dots$ ;  $4,33278278278\dots$ ;  $\sqrt{5}$ ;  $\pi$ ;  $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ;  $7,1203870387\dots$

**Problema 5** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$\frac{3}{4}$ ;  $\sqrt{2}$ ;  $5$ ;  $0,12348348\dots$ ;  $0,123123412345\dots$ ;  $-3$ ;  $\pi$ ;  $0,110011100011110000\dots$ ;  $0$ ;  $\frac{2}{5}$ .

**Problema 6** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$\frac{1}{4}$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $7$ ;  $0,12359359\dots$ ;  $0,123123412345\dots$ ;  $-2$ ;  $\pi$ ;  $0,110011100011110000\dots$ ;  $0$ ;  $\frac{4}{5}$ .

**Problema 7** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$3; -\sqrt{5}; 2,125125125\dots; -\frac{9}{4}; -1$$

**Problema 8** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$-3; 0,56; 0; \pi; 1,1122111222\dots; -\frac{3}{4}; 2; 7,161616\dots; 3,21213214215\dots; 8,666\dots$$

**Problema 9** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$-1; 0,71; 0; \sqrt{2}; 1,1133111333\dots; -\frac{1}{7}; 2; 9,262626\dots; 3,21213214215\dots; 3,333\dots$$

**Problema 10** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$2; -3; \frac{3}{4}; 3,7728122812\dots; 5,1133111333\dots; \sqrt{3}; \pi; 3,230173017\dots; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0$$

**Problema 11** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$3; -2; \frac{1}{4}; 2,7728122812\dots; 6,1133111333\dots; \sqrt{5}; \pi; 4,230273027\dots; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0$$

**Problema 12** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$-3; 2,71; 0; \sqrt{5}; 1,2233222333\dots; -\frac{13}{7}; 5; 11,163636\dots; 4,21132142152\dots; 5,333\dots$$

**Problema 13** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$3; 2,7171\dots; \pi; \sqrt{9}; 3,2244222444\dots; -\frac{7}{9}; 0; 23,163737\dots; 7,2122132142\dots; 6,111\dots$$

**Problema 14** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$5; 4,8282; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \sqrt{81}; 3,2277222777\dots; -\frac{5}{9}; 0; 21,253838\dots; 7,112113114\dots; 4,111\dots$$

**Problema 15** Indica el conjunto más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

$$6; 7,5252\dots; \pi; \sqrt{36}; 3,5577555777\dots; -\frac{3}{4}; -1; 1,143939\dots; 7,772773774\dots; 9,999\dots$$

**1.1.2. Intervalos**

**Problema 16** Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1.  $|x - 3| < 1$
2.  $|x - 5| \leq 3$

(Recuerda la definición de entorno,  $E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$ ).

**Problema 17** Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1.  $|x - 4| < 2$
2.  $|x - 1| \leq 3$

(Recuerda la definición de entorno,  $E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$ ).

**Problema 18** Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1.  $\{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < 7\}$
2.  $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x < 8\}$
3.  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$
4.  $\{x \in \mathbb{R} : x < -1\}$
5.  $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \leq 5\}$
6.  $\{x \in \mathbb{R} : |x + 1| < 2\}$

(Recuerda la definición de entorno,  $E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$ ).

**Problema 19** Dibuja los siguientes intervalos en la recta real:

1.  $\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 6\}$
2.  $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 9\}$
3.  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$
4.  $\{x \in \mathbb{R} : x < -3\}$
5.  $\{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq 5\}$
6.  $\{x \in \mathbb{R} : |x + 1| < 3\}$

(Recuerda la definición de entorno,  $E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$ ).

**Problema 20** Dados los intervalos  $A = (-1, 4]$ ,  $B = (-\infty, 2]$  y  $C = (1, 3)$ , calcular  $A \cap B$ ,  $A \cup C$ ,  $B \cap C$  y  $B \cup C$

**Problema 21** Escribe de todas las maneras que conozcas los siguientes intervalos

1.  $\{x \in R : |x - 2| \leq 8\}$

2.  $\{x \in R : |x + 1| < 9\}$

(Recuerda la definición de entorno,  $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$ ).

**Problema 22** Dados los intervalos  $A = (-2, 4]$ ,  $B = (-\infty, 2]$  y  $C = (1, 4)$ , calcular  $A \cap B$ ,  $A \cup C$ ,  $B \cap C$  y  $B \cup C$

**Problema 23** Escribe de todas las maneras que conozcas los siguientes intervalos

1.  $\{x \in R : |x - 5| \leq 5\}$

2.  $\{x \in R : |x + 2| < 8\}$

(Recuerda la definición de entorno,  $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$ ).

**Problema 24** Dados los intervalos  $A = (-3, 4]$ ,  $B = (-3, 2]$  y  $C = (0, 4]$ , calcular  $A \cap B$ ,  $A \cup C$ ,  $B \cap C$  y  $B \cup C$

**Problema 25** Escribe de todas las maneras que conozcas los siguientes intervalos

1.  $\{x \in R : |x - 1| \leq 7\}$

2.  $\{x \in R : |x + 4| < 10\}$

(Recuerda la definición de entorno,  $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$ ).

**Problema 26** Dados los intervalos  $A = (-3, 7]$ ,  $B = (-\infty, 3]$  y  $C = (0, 7)$ , calcular  $A \cap B$ ,  $A \cup C$ ,  $B \cap C$  y  $B \cup C$

**Problema 27** Escribe de todas las maneras que conozcas los siguientes intervalos

1.  $\{x \in R : |x - 2| \leq 12\}$

2.  $\{x \in R : |x + 3| < 11\}$

(Recuerda la definición de entorno,  $E(a, r) = \{x \in R : |x - a| < r\}$ ).

**1.1.3. Ecuaciones Bicuadradas****Problema 28**

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

**Problema 29**

$$x^4 - 14x^2 - 32 = 0$$

**Problema 30**

$$x^4 - 80x^2 - 81 = 0$$

**Problema 31**

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

**Problema 32**

$$x^4 - 24x^2 - 25 = 0$$

**Problema 33**

$$x^4 + x^2 - 20 = 0$$

**1.2. Números Racionales****1.2.1. Operaciones con números racionales****Problema 34** Racionalizar las siguientes expresiones:

$$1. \frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$2. \frac{1}{1 + \sqrt{5}}; \frac{2}{5 - \sqrt{5}}$$

**Problema 35** Racionalizar las siguientes expresiones:

$$1. \frac{3}{\sqrt{7}}; \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$2. \frac{1}{1 + \sqrt{7}}; \frac{3}{7 - \sqrt{7}}$$

**Problema 36** Simplifica todo lo que puedas

$$\sqrt{27} - \sqrt{3} + \sqrt{192} - 2\sqrt{12}, \quad \frac{\sqrt[4]{a^3}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}, \quad \sqrt{27} + \frac{1}{2}\sqrt{12} - 2\sqrt{75}$$

**Problema 37** Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{3}{1 + \sqrt{7}}; \quad \frac{3}{\sqrt[3]{3}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

**Problema 38** Simplifica todo lo que puedas

$$\sqrt{27} + \frac{1}{2}\sqrt{12} - 2\sqrt{75}, \quad \frac{\sqrt{75}\sqrt[3]{25}}{\sqrt{15}}, \quad \sqrt{48} + 3\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{108}$$

**Problema 39** Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{2}{1 + \sqrt{5}}; \quad \frac{2}{\sqrt[3]{3^2}}, \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

**Problema 40** Simplifica todo lo que puedas

$$3\sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{72} + \sqrt{128}, \quad \frac{\sqrt{27}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}, \quad \sqrt{48} + 3\sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{108}$$

**Problema 41** Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{7}{2 + \sqrt{11}}; \quad \frac{6}{\sqrt[5]{3^2}}, \quad \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$$

**Problema 42** Simplifica todo lo que puedas

$$\sqrt{75} + \frac{1}{2}\sqrt{192} + \sqrt{147}, \quad \frac{\sqrt{216}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}, \quad \sqrt{96} - \sqrt{150} + 2\sqrt{294}$$

**Problema 43** Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{4}{1 + \sqrt{5}}; \quad \frac{3}{\sqrt[7]{3^2}}, \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$$

### 1.2.2. Ecuaciones Racionales

**Problema 44**  $\sqrt{x-1} - \sqrt{x} = 4$

**Problema 45**  $2 + \sqrt{x-1} = x$

**Problema 46**  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = 3$

**Problema 47**  $3 - \sqrt{x+2} = x$

**Problema 48**  $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 4$

**Problema 49**  $\sqrt{x+4} = x - 1$

**Problema 50**  $\sqrt{2x-1} + x = 8$

**Problema 51**  $\sqrt{x+1} = x - 1$

**Problema 52**  $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$

**Problema 53**  $\sqrt{3x-5} + x = 1$

**Problema 54**  $\sqrt{x^2-8} = x + 2$

**Problema 55** Halla las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{2-x} = 4$$

**Problema 56** Halla las soluciones reales de:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x} = 2$$

**Problema 57** Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x} = 7$$

**Problema 58** Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = 3$$

**Problema 59** Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$$

## 1.3. Logaritmos

### 1.3.1. Ecuaciones Logarítmicas

**Problema 60** Resolver las ecuaciones:

1.  $\log x + \log 50 = \log 1000$

2.  $2 \log x^3 = \log 8 + 3 \log x$

**Problema 61** Resolver las ecuaciones:

1.  $3 \log x + 2 \log x^2 = \log 128$

2.  $3 \log x^2 = 4 + 4 \log x$

**Problema 62** Halla las soluciones de:

$$\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1)$$

**Problema 63** Halla las soluciones de:

$$\log(x^2 + 6x + 7) = 1 + \log(x + 1)$$

**Problema 64** Hallar las soluciones reales de:

$$\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1)$$

**Problema 65** Hallar las soluciones reales de:

$$\log(x^2 + 2699) = 2 + \log(x + 2)$$

**Problema 66** Calcular

$$\log(x^2 - 1) + 2 = 1 + 2 \log(x + 1)$$

**Problema 67** Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(1 + x^2) - 1 = \log(x - 2)$$

**Problema 68** Resolver las ecuaciones:

1.  $\log \frac{10}{x} = 2 - 2 \log x$

2.  $3 \log x - 2 = 2 \log x$

**Problema 69** Resolver las ecuaciones:

1.  $\log 10(x + 2) - \log(x^2) = 1$

2.  $\log x + \log x^2 = 3$

**Problema 70**

$$\log(3x + 1) - 2 \log x = 2$$

**Problema 71**

$$\log(2x + 1) - 2 \log x = 1$$

**Problema 72**

$$2 \log(x + 1) - \log x = 1$$

**Problema 73**

$$\log x - \log(1 - x) = 2$$

**Problema 74**

$$\log(x + 1) - \log(x^2 - 1) = 1$$

**Problema 75**

$$\log x - \log(1 - x) = 2$$

**Problema 76** Resolver las ecuaciones:

1.  $\log x^2 - \log(x - 1) + 1 = 2 \log x$
2.  $\log(x + 1) - 2 \log(x - 1) = 1$

**Problema 77** Resolver las ecuaciones:

1.  $\log(10x^2 - 2) - 1 = \log(x + 1) + \log x$
2.  $\log(3x^2 - 2) - 2 \log(1 - x) = 1$

**Problema 78** Resolver las ecuaciones:

1.  $2 \log(x - 1) + 1 = \log(x^2 - 1)$
2.  $\log(10(x^3 + 2x)) - 2 \log(x + 1) = 1 + \log x$

**Problema 79** Resolver las ecuaciones:

1.  $\log(x - 1) + \log(x + 1) = 2 \log x - 1$
2.  $\log x^2 + 3 \log x = 2$

**Problema 80** Resolver la siguiente ecuación:

$$\log(2 + x) - \log x = 1 + \log(1 - x)$$

**Problema 81** Unos problemas para ejercitarse:

1.  $5 \log 2x = 20$  Sol:  $x = 5000$
2.  $3 \log 5x = -9$  Sol:  $x = 0,0002$
3.  $\log \frac{2x-4}{5} = 2$  Sol:  $x = 252$
4.  $\log(x + 1)^2 = 2$  Sol:  $x = 9$ ;  $x = -11$
5.  $\log(7x + 15) - \log 5 = 1$  Sol:  $x = 5$
6.  $\log \frac{x}{2} = 1 + \log(21 - x)$  Sol:  $x = 20$
7.  $\log \frac{10}{x} = 2 - 2 \log x$  Sol:  $x = 10$ ;  $x = 0$
8.  $2 \log x - \log(x^2 - 2x + 6) = 0$  Sol:  $x = 3$
9.  $\log(2x - 3) + \log(3x - 2) = 2 - \log 25$  Sol:  $x = 2$ ;  $x = \frac{1}{6}$

10.  $\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1)$  Sol:  $x = 2$ ;  $x = \frac{4}{3}$
11.  $\log x^2 + 3 \log x = 2$  Sol:  $x = 10^{\frac{2}{5}}$
12.  $2 \log x^2 - 2 \log x = 2$  Sol:  $x = 10$
13.  $\log x^2 + 1 = \log x^3$  Sol:  $x = 10$
14.  $\log(1 - x) + \log x = 1$  Sol: No tiene solución real.
15.  $\log x - \log(1 - x) = 1$  Sol:  $x = \frac{10}{11}$
16.  $\log x + 2 = \log x^3$  Sol:  $x = 10$
17.  $\log(1 + x) + \log(1 - x) = 2$  Sol: No tiene solución real.
18.  $\log(2x + 7) - \log(x - 1) = \log 5$  Sol:  $x = 4$
19.  $\frac{\log(35-x^2)}{\log(5-x)} = 3$  Sol:  $x = 3$ ;  $x = 2$
20.  $\log x^2 - \log \frac{10x+11}{10} = 1$  Sol:  $x = 11$ ;  $x = -1$
21.  $\log(2x + 2) + \log(x + 3) = \log 6$  Sol:  $x = 0$ ,  $x = -4$
22.  $\frac{\log 2 + \log(x^2 - 2)}{\log(2x - 2)} = 2$  Sol:  $x = 2$
23.  $\log(x + 6) - \frac{1}{2} \log(2x - 3) = 2 - \log 25$  Sol:  $x = 6$ ;  $x = 14$
24.  $\log x = \log 2 + 2 \log(x - 3)$  Sol:  $x = \frac{9}{2}$ ;  $x = 2$
25.  $2 \log x = 2 + \log x$  Sol:  $x = 0$ ;  $x = 2$
26.  $\log 8 + (x^2 - 5x + 7) \log 3 = \log 24$  Sol:  $x = 3$ ;  $x = 2$
27.  $2 \log x - \log 16 = \log \frac{x}{2}$  Sol:  $x = 0$ ;  $x = 8$
28.  $\log(2x+4) + \log(3x+1) - \log 4 = 2 \log(8-x)$  Sol:  $x = -42$   $x = 3$
29.  $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$  Sol:  $x = 3$   $x = 2$
30.  $\frac{\log 2 + \log(11-x^2)}{\log(5-x)} = 2$  Sol:  $x = \frac{1}{3}$   $x = 3$
31.  $\log(5x + 4) - \log 2 = \frac{1}{2} \log(x + 4)$  Sol:  $x = 0$
32.  $(x^2 - x + 3) \log 4 = 3 \log \frac{1}{4}$  Sol: No tiene solución.

### 1.3.2. Sistemas de Ecuaciones Logarítmicas

**Problema 82** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} 3 \log x + 2 \log y = 12 \\ \log \frac{x}{y} = -1 \end{cases}$$

**Problema 83** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} 2 \log x + \log y = 4 \\ \log \frac{x}{y} = -1 \end{cases}$$

**Problema 84** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x^3}{y^2} = 1 \\ \log(x^2 y) = 2 \end{cases}$$

**Problema 85** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x^4}{y} = 1 \\ \log(x \cdot y^2) = 2 \end{cases}$$

**Problema 86** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x^3}{y^2} = 1 \\ \log(x^2 y) = 2 \end{cases}$$

**Problema 87** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x^3}{y^2} = 2 \\ \log(x^2 y) = 3 \end{cases}$$

**Problema 88** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log(x \cdot y) = 3 \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

**Problema 89** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log x - \log y^2 = 3 \\ \log(x^2 \cdot y) = 1 \end{cases}$$

**Problema 90** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x}{y^2} = 1 \\ \log(x^2 y) = 2 \end{cases}$$

**Problema 91** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x}{y^2} = 3 \\ \log(x^2y) = 2 \end{cases}$$

**Problema 92**

$$\begin{cases} \log(xy^2) = 2 \\ \log\left(\frac{x^2}{y}\right) = 3 \end{cases}$$

**Problema 93**

$$\begin{cases} \log(x^2y) = 3 \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \end{cases}$$

**Problema 94**

$$\begin{cases} 2\log(xy) = 3 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 5 \end{cases}$$

**Problema 95**

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - \log y = 0 \end{cases}$$

**Problema 96**

$$\begin{cases} \log(x^3y^2) = 8 \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = 1 \end{cases}$$

**Problema 97**

$$\begin{cases} \log x + 2\log y = 3 \\ -\log x + \log y = 0 \end{cases}$$

**Problema 98** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log(xy)^2 = 4 \\ \log\left(\frac{x^3}{y^2}\right) = 1 \end{cases}$$

**Problema 99** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log(xy)^2 = 4 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 2 \end{cases}$$

**Problema 100** Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log(xy)^2 = 8 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 4 \end{cases}$$

**Problema 101** Unos problemas para ejercitarse:

1.

$$\begin{cases} 2 \log x - 5 \log y = -1 \\ 3 \log x + 2 \log y = 8 \end{cases}$$

Sol:  $x = 100$ ;  $y = 10$

2.

$$\begin{cases} 4 \log x - 3 \log y = -1 \\ \log(x \cdot y) = 5 \end{cases}$$

Sol:  $x = 100$ ;  $y = 1000$

3.

$$\begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log \frac{x^3}{y^2} = 4 \end{cases}$$

Sol:  $x = 100$ ;  $y = 10$

4.

$$\begin{cases} \log(x^2 \cdot y) = 2 \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

Sol:  $x = 10$ ;  $y = 1$

5.

$$\begin{cases} \log x^2 - 3 \log y = -1 \\ \log(x \cdot y^2) = 3 \end{cases}$$

Sol:  $x = 10$ ;  $y = 10$

6.

$$\begin{cases} \log x^2 - 3 \log y = 2 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 3 \end{cases}$$

Sol:  $x = 10^{-5}$ ;  $y = 10^{-4}$

7.

$$\begin{cases} \log x - \log y = 7 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

Sol:  $x = 10^5$ ;  $y = 10^{-2}$ 

8.

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

Sol:  $x = -5$ ;  $y = -20$  o bien  $x = 20$ ;  $y = 5$ 

9.

$$\begin{cases} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log \frac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$$

Sol:  $x = 100$ ;  $y = 10$ 

10.

$$\begin{cases} 2 \log x^2 - \log y^2 = 4 \\ 2 \log x + \log y^2 = 2 \end{cases}$$

Sol:  $x = 100$ ;  $y = 1$ 

## 1.4. Exponenciales

### 1.4.1. Ecuaciones Exponenciales:

**Problema 102** Halla las soluciones de:

$$3^{x^2+5x-4} \cdot 9^{2x+3} = 27^{x-1}$$

**Problema 103** Halla las soluciones de:

$$3^{x^2+5x-4} \cdot 9^{2x+3} = 27^{x-1}$$

**Problema 104** Calcular

$$2 \cdot 3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0$$

**Problema 105**

$$7^{2x-1} + 7^{x+1} - 1 = 0$$

**Problema 106**

$$6^{2x-1} + 6^{x+1} - 1 = 0$$

**Problema 107**

$$3^{2x+1} - 3^{x-1} - 1 = 0$$

**Problema 108**

$$2^x - 2^{x+1} + 1 = 0$$

**Problema 109**

$$5^{2x-1} - 5^x + 1 = 0$$

**Problema 110**

$$2^x - 2^{x-1} - 1 = 0$$

**Problema 111** Unos problemas para ejercitarse:

1.  $2^{x+1} = 8$                       Sol:  $x = 2$
2.  $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$                       Sol:  $x = 3$
3.  $6^{12-3x} = 216$                       Sol:  $x = 3$
4.  $5^{3x-12} = 125$                       Sol:  $x = 5$
5.  $2^x + 2^{x+3} = 36$                       Sol:  $x = 2$
6.  $3^x + 3^{x-2} = 270$                       Sol:  $x = 5$
7.  $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \frac{31}{25}$                       Sol:  $x = -2$
8.  $5^{2x^2+3x-11} = 125$                       Sol:  $x = 2$ ;  $x = -\frac{7}{2}$
9.  $4^x + 2^{2x-1} = 24$                       Sol:  $x = 2$ ; la otra solución no es real.
10.  $2^x + 2^{2x} = 6$                       Sol:  $x = 1$ ; la otra solución no es real.
11.  $3^{x+3} + 9^{x+2} = 4$                       Sol:  $x = -2$ ; la otra solución no es real.
12.  $4^{2x+1} - 4^{x+2} = 768$                       Sol:  $x = 2$ ; la otra solución no es real.
13.  $2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 18$                       Sol:  $x = 3$
14.  $9^{x+3} = 3^{2x+5}$                       Sol: No tiene solución.
15.  $8^{x^2+3x+2} = 1$                       Sol:  $x = -1$ ;  $x = -2$
16.  $5^x + 5^{x-1} + x^{x-2} = 31$                       Sol:  $x = 2$
17.  $2^{x+2} = 0, 5^{2x-1}$                       Sol:  $x = -\frac{1}{3}$
18.  $\sqrt[3]{a^{7-x}} = a^2$                       Sol:  $x = 1$

19.  $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$  Sol:  $x = 2$ ;  $x = 0$
20.  $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$  Sol:  $x = -1$ ;  $x = -2$
21.  $4^x \cdot 5^{x-1} = 1600$  Sol:  $x = 3$
22.  $10^{x^2-11x+30} = (2 \cdot 5)^2$  Sol:  $x = 7$ ;  $x = 4$
23.  $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$  Sol:  $x = 3$
24.  $3^{2(x+1)} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$  Sol:  $x = -2$ ;  $x = 1$
25.  $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$  Sol:  $x = 2$ ;  $x = 1$
26.  $\left(\frac{2}{7}\right)^5 = 3 \cdot 5^{x+1}$  Sol:  $x = -6$
27.  $5^x - \frac{5}{5^{x-1}} - 24 = 0$  Sol:  $x = 2$
28.  $(4^{3-x})^{2-x} = 1$  Sol:  $x = 3$ ;  $x = 2$
29.  $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$  Sol:  $x = \pm 2$
30.  $3^{2x-1} = \sqrt[3]{9^{x^2-\frac{1}{4}}}$  Sol:  $x = \frac{11}{2}$ ;  $x = \frac{1}{2}$
31.  $3 \cdot 2^{x+3} = 192 \cdot 3^{x-3}$  Sol: No tiene solución.

**Problema 112** Más problemitas:

1.  $2^{x-2} + 2^{x+1} - 1 = 0$  Sol:  $x = -1, 169925001$
2.  $3^{x+1} + 3^x - 3^{x-1} = 2$  Sol:  $x = -0, 5517286062$
3.  $2^{x-2} - 2^x + 2^{x-1} = 0$  Sol: No tiene solución.
4.  $3^{x-2} + 2 \cdot 3^x = 1$  Sol:  $x = -0, 6801438331$
5.  $4^{x-1} - 3 \cdot 4^x + 4^{x-2} = 0$  Sol: No tiene solución.
6.  $2^{2x-1} + 2^{x+1} - 2 = 0$  Sol:  $x = -0, 2715533031$
7.  $5^{2x-1} + 3 \cdot 5^x - 2 = 0$  Sol:  $x = -0, 2778665354$
8.  $3^{2x-2} + 3^{x-1} - 1 = 0$  Sol:  $x = -1, 011034949$
9.  $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x-1} - 3 = 0$  Sol:  $x = 0, 7275884076$
10.  $2^{2x-1} - 3 \cdot 2^{x+2} - 2 = 0$  Sol:  $x = 4, 594878436$
11.  $7^{2x-1} - 7^{x+1} - 2 = 0$  Sol:  $x = 2, 002970617$
12.  $6^{2x-1} - 6^{x-1} - 4 = 0$  Sol:  $x = 0, 9437163029$

13.  $5^{4x-1} - 5^{2x+1} - 3 = 0$  Sol:  $x = 0,4606479652$   
 14.  $4^{4x-1} - 4^{2x+1} - 7 = 0$  Sol:  $1,034204992$   
 15.  $7^{4x+1} + 3 \cdot 7^{2x} - 5 = 0$  Sol:  $x = -0,1076980693$   
 16.  $3^{4x+1} + 2 \cdot 3^{2x-2} - 2 = 0$  Sol:  $x = -0,1129051332$   
 17.  $2^{4x+2} + 3 \cdot 2^{2x} - 1 = 0$  Sol:  $x = -1$   
 18.  $5^{4x-2} + 5^{2x} - 1 = 0$  Sol:  $x = -0,01174112826$

### 1.4.2. Sistemas de Ecuaciones Exponenciales:

**Problema 113** Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 4^{x+1} - 6^y = 40 \\ 2 \cdot 4^x - 6^y = -88 \end{cases}$$

**Problema 114** Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$$

**Problema 115** Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y+1} = 4 \\ 2^{x+1} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}$$

**Problema 116** Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y-1} = 4 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 5 \end{cases}$$

**Problema 117** Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y-1} = 3 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 4 \end{cases}$$

**Problema 118** Resolver el sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y-1} = 1 \\ 2^{x-1} + 3^{y+1} = 2 \end{cases}$$

**Problema 119**

$$\begin{cases} 3^{x-1} + 2^{y+1} = 2 \\ 3^x - 2^y = 3 \end{cases}$$

**Problema 120**

$$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y+1} = 5 \\ 2^x - 3^y = 2 \end{cases}$$

**Problema 121**

$$\begin{cases} 3^{x-2} + 2^y = 1 \\ 2^x + 3 \cdot 2^y = 5 \end{cases}$$

**Problema 122**

$$\begin{cases} 2^x - 3^y = 1 \\ 2^x + 3^y = 3 \end{cases}$$

**Problema 123**

$$\begin{cases} 2^{x+2} - 3^y = 1 \\ 2^x + 2 \cdot 3^y = 3 \end{cases}$$

**Problema 124**

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 2 \\ 2^{x+1} - 3^y = 1 \end{cases}$$

**Problema 125** Unos problemas para ejercitarse:

1.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 4 \cdot 7^y = -172 \\ 7 \cdot 2^x + 2 \cdot 7^y = 154 \end{cases}$$

Sol:  $x = 3$ ;  $y = 2$ 

2.

$$\begin{cases} 4^{x+1} - 6^y = 40 \\ 2 \cdot 4^x - 6^y = -88 \end{cases}$$

Sol:  $x = 3$ ;  $y = 3$ 

3.

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{x+1} - 5^{y+2} = -2639 \\ 4 \cdot 3^x + 5^y = 449 \end{cases}$$

Sol:  $x = 4$ ;  $y = 4$ 

4.

$$\begin{cases} 3^x + 2^y = 31 \\ 3^{x+1} - 2^{y+2} = 65 \end{cases}$$

Sol:  $x = 3$ ;  $y = 2$

5.

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 25^3 \\ 3^{x-y} = 25 \end{cases}$$

Sol:  $x = 4$ ;  $y = 2$ 

6.

$$\begin{cases} 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \\ 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \end{cases}$$

Sol:  $x = 3$ ;  $y = 2$ 

7.

$$\begin{cases} a^{x+y} = a^4 \\ a^{x-y} = a^2 \end{cases}$$

Sol:  $x = 3$ ;  $y = 1$ 

8.

$$\begin{cases} 8^y \cdot 2^{2x} = 128 \\ 3^{2y} \cdot 3^{x-1} = 27 \end{cases}$$

Sol:  $x = -70$ ;  $y = 49$ 

9.

$$\begin{cases} 3^{3x-y} = \sqrt{3^{10}} \\ 3^{2x+y} = 3 \end{cases}$$

Sol:  $x = \frac{6}{5}$ ;  $y = -\frac{7}{5}$ 

10.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -6 \\ 4 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = -11 \end{cases}$$

Sol:  $x = 2$ ;  $y = 2$ 

11.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 5 \cdot 3^y = 3 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 59 \end{cases}$$

Sol:  $x = 4$ ;  $y = 2$ 

12.

$$\begin{cases} 2^x - 3^{y-1} = 5 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 712 \end{cases}$$

Sol:  $x = 5$ ;  $y = 4$

13.

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^x + 2^{y+3} = 86 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases}$$

Sol:  $x = 3$ ;  $y = 2$ 

14.

$$\begin{cases} 2^{x+2y} = 32 \\ 5^{2x-y} = 1 \end{cases}$$

Sol:  $x = 1$ ;  $y = 2$ 

## 1.5. Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales

**Problema 126** Resolver las ecuaciones:

1.  $\log(3x + 1) - \log x = 1 + \log x$
2.  $2^{2x-1} + 2^{x+2} - 1 = 0$

**Problema 127** Resolver las ecuaciones:

1.  $\log(3x + 1) - \log x = 1 + \log(1 - x)$
2.  $2^{2x-1} + 2^{x+3} - 1 = 0$

**Problema 128** Resolver las ecuaciones:

1.  $\log(3x^2 - 2) = 1 + \log(x - 1)$
2.  $2^{2x-1} + 2^{x+1} - 2 = 0$

**Problema 129** Calcular:

1.  $\log(x^2 + 2) - \log x = 1$
2.  $4^{x-1} + 2^x - 1 = 0$

**Problema 130** Resolver las ecuaciones:

1.  $\log(x - 1) - \log(x + 1) = 1 - \log x$
2.  $\log x + 1 = \log x^2$
3.  $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0$
4.  $3^{x+1} + 3^{x-1} - 1 = 0$

**Problema 131** Resolver las ecuaciones:

1.  $\log(x - 1) - \log(x + 1) = 1 - \log x$

2.  $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 2 = 0$

**Problema 132** Resolver:

1.  $\log(1 + x) - \log(1 - x) = 2$

2.  $3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$

**Problema 133** Resolver las siguientes ecuaciones

1.  $\log(x^2 - 2) + 1 = \log(x + 1) + \log(x - 1)$

2.  $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0$

**Problema 134** Resolver:

1.  $\log(5x + 1) - \log x = 1 - \log(1 - x)$

2.  $2^{2x-1} - 2^{x+1} + 2 = 0$

3.

$$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y+1} = 3 \\ 2^{x+1} - 3^{y-1} = 1 \end{cases}$$

## 1.6. Sistemas de Ecuaciones no Lineales

**Problema 135** Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

**Problema 136** Calcular:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

## 1.7. Inecuaciones

### 1.7.1. Inecuaciones

**Problema 137** Resolver las inecuaciones siguientes:

1.

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 3} > 0$$

2.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 1} \leq 0$$

**Problema 138** Resolver las inecuaciones siguientes:

1.

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x - 3} < 0$$

2.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 5} \geq 0$$

**Problema 139** Resolver las inecuaciones siguientes:

1.

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} \geq 0$$

2.

$$\frac{x - 1}{10} - \frac{3x}{5} \geq \frac{2x}{6} + 1$$

**Problema 140** Resolver las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{x - 1} \leq 0, \quad \frac{x - 1}{x^2 + 3x + 2} \geq 0$$

**Problema 141** Resolverlas siguientes inecuaciones:

1.  $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} \leq 0$

2.  $\frac{x^2 - 5x - 14}{x - 3} \geq 0$

3.  $\frac{x - 5}{6} + 1 \leq \left(\frac{x + 1}{2}\right)x$

**Problema 142** Resolverlas siguientes inecuaciones:

1.  $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} \geq 0$

2.  $\frac{x^2 - 5x - 14}{x - 3} \leq 0$

3.  $\frac{x - 5}{6} + 1 \geq \left(\frac{x + 1}{2}\right)x$

**Problema 143** Resolverlas siguientes inecuaciones:

1.  $\frac{x^2+4x-5}{x+1} \geq 0$
2.  $\frac{x^2+3x-4}{x-3} \leq 0$
3.  $\frac{x^2}{3} + 6 < \frac{4}{3} - 3x$

**Problema 144** Resolver las siguientes inecuaciones:

1.  $\frac{x^2-x-2}{x+3} \geq 0$
2.  $\frac{x^2+3x-4}{x-3} \leq 0$
3.  $\frac{2-3x}{3} + \frac{1-2x}{6} \geq \frac{19-22x}{18}$

**Problema 145** Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{x + 3} \geq 0$$

**Problema 146** Resolver las siguientes inecuaciones:

1.  $\frac{x^2+x-6}{x+1} \leq 0$
2.  $\frac{x^2+4x-5}{x-2} \geq 0$
3.  $\frac{2x+1}{2} - x < \left(\frac{x-2}{6}\right)x$

**Problema 147** Resolver las siguientes inecuaciones:

1.  $\frac{x^2+x-6}{x+1} \leq 0$
2.  $\frac{x^2+4x-5}{x-2} \geq 0$
3.  $\frac{2x+1}{2} - x < \left(\frac{x-2}{6}\right)x$

**Problema 148** Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 1} \geq 0$$

**Problema 149** Resolver las siguientes inecuaciones:

1.  $\frac{x^2 - 6x - 7}{x - 3} \leq 0$
2.  $\frac{x^2 + x - 6}{x + 1} \geq 0$
3.  $\frac{2x}{3} - 2x < \left(\frac{x - 2}{6}\right)x$

**Problema 150** Resolver las siguientes inecuaciones:

$$1. \frac{x^2 - 2x - 35}{x + 1} \geq 0$$

$$2. \frac{4x}{3} - x < \left(\frac{x-3}{6}\right)x \implies 2x < x^2 - 3x$$

**Problema 151** Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 3} \geq 0$$

**Problema 152**

$$\frac{x + 3}{2} - \frac{2x}{7} \geq 1 - \frac{x}{14}$$

**Problema 153**

$$\frac{x^2 + 5x - 6}{x - 3} \geq 0$$

**Problema 154**

$$\frac{x + 1}{3} - \frac{x - 1}{8} \leq \frac{x}{4} + 1$$

**Problema 155**

$$\frac{x^2 + 2x - 35}{x + 1} \leq 0$$

**Problema 156**

$$\frac{x - 1}{5} - \frac{x}{15} \leq \frac{x + 1}{3} + 2$$

**Problema 157**

$$\frac{x^2 + 3x - 40}{x - 2} \geq 0$$

**Problema 158**

$$\frac{x}{2} + \frac{x - 1}{6} < 1 - \frac{x + 1}{3}$$

**Problema 159**

$$x^2 - x - 2 < 0$$

**Problema 160**

$$\frac{x + 2}{12} - \frac{x + 1}{4} \leq 1 + \frac{x}{3}$$

**Problema 161**

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} \geq 0$$

**Problema 162**

$$\frac{x - 1}{8} - \frac{x}{2} < \frac{x + 1}{4}$$

**Problema 163**

$$\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} \geq 0$$

**Problema 164** Resolverlas siguientes inecuaciones:

1.  $\frac{x^2 + 6x - 7}{x - 2} \geq 0$
2.  $\frac{4x}{3} - x < \left(\frac{x - 3}{6}\right)x \implies 2x < x^2 - 3x$

**Problema 165** Algunos problemas para ejercitarse:

1.  $3x - 9 > 0$  Sol:  $(3, +\infty)$
2.  $4x - 20 < 0$  Sol:  $(-\infty, 5)$
3.  $5x + 3 > 2x + 6$  Sol:  $(-3, +\infty)$
4.  $10 - 3x < 4x - 4$  Sol:  $(2, +\infty)$
5.  $2(5 - 7x) \geq 52$  Sol:  $(-\infty, -3]$
6.  $3(2x - 1) + 1 < -13 - 5x$  Sol:  $(-\infty, -1)$
7.  $\frac{x}{10} > 4x - \frac{78}{10}$  Sol:  $(-\infty, 2)$
8.  $\frac{6x-22}{20} - \frac{10x+2}{14} \geq \frac{2x-14}{10} - \frac{10x-12}{21}$  Sol:  $(-\infty, -3]$
9.  $\frac{2x}{3} + \frac{5x-1}{2} < \frac{26}{3}$  Sol:  $(-\infty, 3)$
10.  $\frac{3(4x-7)}{4} - \frac{x}{8} \geq \frac{3x}{8} - \frac{21}{4}$  Sol:  $[0, +\infty)$
11.  $\frac{3x+5}{6} - \frac{5-2x}{2} \leq \frac{x-12}{3}$  Sol:  $(-\infty, -2]$
12.  $\frac{4-3x}{3} - \frac{2x-3}{4} > -\frac{65}{13}$  Sol:  $(-\infty, 5)$
13.  $\frac{2-3x}{3} + \frac{1-2x}{6} \geq \frac{19-22x}{18}$  Sol:  $(-\infty, -2]$
14.  $x^2 - 7x + 10 > 0$  Sol:  $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$

15.  $x^2 - 7x + 6 < 0$  Sol: (1, 6)
16.  $x^2 - 7x + 12 \geq 0$  Sol:  $(-\infty, 3] \cup [4, +\infty)$
17.  $-8x \leq -x^2 - 15$  Sol: [3, 5]
18.  $6x^2 > 12x$  Sol:  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
19.  $-27x \leq -12x^2$  Sol:  $[0, \frac{9}{4}]$
20.  $-2x^2 - 10x - 8 > 0$  Sol: (-4, -1)
21.  $-(x+2)^2 + 3x \leq 2(-x^2 + 1)$  Sol: [-2, 3]
22.  $x - 3 + \frac{25}{x} - 7 < 0$  Sol:  $\phi$
23.  $\frac{x-2}{x+3} > 0$  Sol:  $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
24.  $x^3 - 2x^2 - 3x < 0$  Sol:  $(-\infty, -1) \cup (0, 3)$
25.  $x^4 + 2x^2 - 3x^3 \geq 0$  Sol:  $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$
26.  $\frac{x^2+x}{x-2} > 0$  Sol:  $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$
27.  $(x^2 + 1)(x - 1) > 0$  Sol: (1,  $+\infty$ )
28.  $(x^2 - 3)(x^2 - 5x + 6) < 0$  Sol:  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (2, 3)$
29.  $4x^4 + 2x^2 + 1 \geq 0$  Sol:  $R$
30.  $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 > 0$  Sol:  $(-3, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$
31.  $\frac{x-3}{x+1} > 0$  Sol:  $(-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$
32.  $\frac{2x(x-3)+x^2}{x-1} < 3(x-1)$  Sol: (1,  $+\infty$ )
33.  $\frac{(x^2+1)(x^2-9x+8)}{x^2+2} \leq 0$  Sol: [1, 8]
34.  $\frac{x^2-25}{x^2-7x+10} \leq 0$  Sol: [-5, 2]
35.  $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x-5} \geq 0$  Sol:  $(-\infty, -1) \cup [2, 3] \cup (5, +\infty)$
36.  $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x+1} < 0$  Sol: (1, 3)  $\cup$  (-2, -1)
37.  $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x+2} \leq 0$  Sol: (-2, -1)  $\cup$  (1, 3)
38.  $\frac{x^2-8x+7}{x^2-3x-10} < 0$  Sol: (5, 7)  $\cup$  (-2, 1)
39.  $\frac{x^2-2x-8}{x^2-1} \geq 0$  Sol:  $(-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [4, +\infty)$

40.  $x^2 - 6x + 9 > 0$  Sol:  $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
41.  $3x^2 + 5x - 2 \leq 0$  Sol:  $[-2, \frac{1}{3}]$
42.  $x^2 + 2x > 0$  Sol:  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
43.  $x^2 + 1 \leq 0$  Sol: No tiene solución.
44.  $(x - 3)^3 \leq 4$  Sol:  $(-\infty, 2^{\frac{2}{3}} + 3]$
45.  $3(x^2 - 1) - 5(x - 2) < 0$  Sol: No tiene solución.
46.  $x^2 - 7 \geq -3(x - 1)$  Sol:  $(-\infty, -5] \cup [2, +\infty)$
47.  $x^2 + \frac{1}{4} < x - 2$  Sol: No tiene solución.
48.  $2(5 - x^2) > 3x$  Sol:  $(-3, 11; 1, 61)$
49.  $\frac{2x-1}{5} > \frac{3x^2}{2}$  Sol: No tiene solución.
50.  $\frac{x-3}{x+1} > 0$  Sol:  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
51.  $\frac{2x-1}{x} \leq 0$  Sol:  $(0, \frac{1}{2}]$
52.  $\frac{x^2-3x-4}{x} > 0$  Sol:  $(-1, 0) \cup (4, +\infty)$
53.  $\frac{x^2-2x-3}{x^2-4} > 0$  Sol:  $(-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (3, +\infty)$
54.  $5x - 3(1 - 4x) \leq 4x - 1$  Sol:  $(-\infty, \frac{2}{13}]$
55.  $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-3}{2} \geq \frac{x-2}{3} + \frac{29}{6}$  Sol:  $(-\infty, 0]$
56.  $7(2x - 1) - 3x \leq 2(x + 1) - 9$  Sol:  $(-\infty, 0]$
57.  $3(x - 7) + 2x \leq 5(x - 1)$  Sol:  $(-\infty, +\infty)$
58.  $4(3x - 1) - 5x < 7(x - 1) + 3$  Sol:  $\phi$
59.  $3x - \frac{x+2}{3} > \frac{2x+1}{4} - \frac{5-x}{2}$  Sol:  $(-\frac{19}{20}, +\infty)$
60.  $(x - 2)(x + 1) \geq 18$  Sol:  $(-\infty, -4] \cup [5, +\infty)$
61.  $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$  Sol:  $\{\frac{1}{3}\}$
62.  $\frac{x-3}{4} > (x - 2)(x + 7) + 17$  Sol:  $(-\frac{15}{4}, -1)$

**Problema 166** Más problemitas:

1.  $x^2 - 7x - 30 = (x + 3)(x - 10) < 0$  Sol:  $(-3, 10)$
2.  $x^2 - 15x + 44 = (x - 4)(x - 11) > 0$  Sol:  $(-\infty, 4) \cup (11, +\infty)$

3.  $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1) > 0$  Sol:  $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$
4.  $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3) > 0$  Sol:  $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
5.  $x^2 - 10x - 11 = (x + 1)(x - 11) < 0$  Sol:  $(-1, 11)$
6.  $x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5) < 0$  Sol:  $(4, 5)$
7.  $x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7) < 0$  Sol:  $(-7, 2)$
8.  $x^2 + 3x - 54 = (x + 9)(x - 6) < 0$  Sol:  $(-9, 6)$
9.  $x^2 + 3x - 40 = (x + 8)(x - 5) > 0$  Sol:  $(-\infty, -8) \cup (5, +\infty)$
10.  $x^2 + 9x + 14 = (x + 2)(x + 7) > 0$  Sol:  $(-\infty, -7) \cup (-2, +\infty)$
11.  $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4) > 0$  Sol:  $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$
12.  $x^2 - 11x + 18 = (x - 2)(x - 9) > 0$  Sol:  $(-\infty, 2) \cup (9, +\infty)$
13.  $x^2 - 12x - 13 = (x + 1)(x - 13) > 0$  Sol:  $(-\infty, -1) \cup (13, +\infty)$
14.  $x^2 + 14x - 15 = (x + 15)(x - 1) > 0$  Sol:  $(-\infty, -15) \cup (1, +\infty)$
15.  $x^2 - 11x - 42 = (x - 14)(x + 3) > 0$  Sol:  $(-\infty, -3) \cup (14, +\infty)$
16.  $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6) > 0$  Sol:  $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$
17.  $x^2 - 13x + 22 = (x - 11)(x - 2) < 0$  Sol:  $(2, 11)$
18.  $x^2 + 13x - 14 = (x - 1)(x + 14) < 0$  Sol:  $(-14, 1)$
19.  $x^2 - 9x - 22 = (x + 2)(x - 11) < 0$  Sol:  $(-2, 11)$
20.  $\frac{x^2 - 4x - 21}{x + 10} = \frac{(x - 7)(x + 3)}{x + 10} \leq 0$  Sol:  $(-\infty, -10) \cup [-3, 7]$
21.  $\frac{x^2 + 4x - 77}{x + 8} = \frac{(x + 11)(x - 7)}{x + 8} \geq 0$  Sol:  $[-11, -8] \cup [7, +\infty)$
22.  $\frac{x^2 - 4x - 77}{x + 5} = \frac{(x - 11)(x + 7)}{x + 5} \geq 0$  Sol:  $[-7, -5] \cup [11, +\infty)$
23.  $\frac{x^2 - x - 6}{x + 3} = \frac{(x + 2)(x - 3)}{x + 3} \leq 0$  Sol:  $(-\infty, -3) \cup [-2, 3]$
24.  $\frac{x^2 + 3x - 40}{x - 7} = \frac{(x + 8)(x - 5)}{x - 7} \geq 0$  Sol:  $[-8, 5] \cup (7, +\infty)$
25.  $\frac{x^2 - 3x - 70}{x + 2} = \frac{(x + 7)(x - 10)}{x + 2} \geq 0$  Sol:  $[-7, -2] \cup [10, +\infty)$
26.  $\frac{x^2 - 12x - 13}{x + 6} = \frac{(x + 1)(x - 13)}{x + 6} \leq 0$  Sol:  $(-\infty, -6) \cup [-1, 13]$
27.  $\frac{x^2 - 17x + 52}{x + 8} = \frac{(x - 4)(x - 13)}{x + 8} \leq 0$  Sol:  $(-\infty, -8) \cup [4, 13]$
28.  $\frac{x^2 - 7x - 30}{x - 11} = \frac{(x + 3)(x - 10)}{x - 11} \geq 0$  Sol:  $[-3, 10] \cup (11, +\infty)$

29.  $\frac{x^2-x-2}{x+3} = \frac{(x-2)(x+1)}{x+3} \geq 0$  Sol:  $(-3, -1] \cup [2, +\infty)$
30.  $\frac{x^2+7x+10}{x-2} = \frac{(x+5)(x+2)}{x-2} \leq 0$  Sol:  $(-\infty, -5] \cup [-2, 2)$
31.  $\frac{x^2-6x-7}{x+2} = \frac{(x+1)(x-7)}{x+2} \leq 0$  Sol:  $(-\infty, -2) \cup [-1, 7]$
32.  $\frac{x^2-x-12}{x+1} = \frac{(x+3)(x-4)}{x+1} \geq 0$  Sol:  $[-3, -1) \cup [4, +\infty)$
33.  $\frac{x^2-3x-18}{x-5} = \frac{(x-6)(x+3)}{x-5} \geq 0$  Sol:  $[-3, 5) \cup [6, +\infty)$
34.  $\frac{x^2+3x-4}{x-3} = \frac{(x+4)(x-1)}{x-3} \leq 0$  Sol:  $(-\infty, -4] \cup [-1, 3)$
35.  $\frac{x^2-11x+24}{x+7} = \frac{(x-3)(x-8)}{x+7} \leq 0$  Sol:  $(-\infty, -7) \cup [3, 8]$
36.  $\frac{x^2+4x-5}{x+1} = \frac{(x+5)(x-1)}{x+1} \geq 0$  Sol:  $[-5, -1) \cup [1, +\infty)$
37.  $\frac{x^2+3x-54}{x+2} = \frac{(x+9)(x-6)}{x+2} \leq 0$  Sol:  $(-\infty, -9] \cup (-2, 6]$

**1.7.2. Sistemas de Inecuaciones****Problema 167**

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + y \geq 3 \end{cases}$$

**Problema 168**

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ x - y > 3 \end{cases}$$

**Problema 169**

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \\ x - 2y < 1 \end{cases}$$

**Problema 170**

$$\begin{cases} x + y < 1 \\ x - y > 0 \end{cases}$$

**Problema 171**

$$\begin{cases} 2x - y > 1 \\ x + y < 2 \end{cases}$$

**Problema 172** Unos problemitas para el entrenamiento

1.

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \leq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > 0 \end{cases}$$

Sol:  $[-2, -1) \cup (1, 4]$ 

2.

$$\begin{cases} x < 3 \\ 2(x-1) < 5(x-1) \end{cases}$$

Sol:  $(-1, 3)$ 

3.

$$\begin{cases} 5 \cdot \frac{x-1}{2} \leq 3(x-1) \\ x < -2 \end{cases}$$

Sol:  $\phi$ 

## 1.8. Polinomios

### 1.8.1. Introducción

**Problema 173** Identidades Notables:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

$$(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$(2x^2 - x)^2 = (2x^2)^2 - 2(2x^2)x + x^2 = 4x^4 - 4x^3 + x^2$$

$$(\sqrt{2}x - 2x^3)(\sqrt{2}x + 2x^3) = (\sqrt{2}x)^2 - (2x^3)^2 = 2x^2 - 4x^6$$

A la vista de estos ejemplos:

1. Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las identidades notables:

a)  $(3x^2 - 3)^2 = 9x^4 - 18x^2 + 9$

b)  $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x + \sqrt{2}) = 3x^2 - 2$

c)  $(2x^3 + 3x)^2 = 4x^6 + 12x^4 + 9x^2$

d)  $(\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3})(\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}) = 2x^4 - 3$

2. Expresa como un cuadrado o como producto de dos binomios cada uno de los polinomios siguientes:

a)  $16x^4 + 56x^3 + 49x^2$

b)  $9x^4 - 42x^3 + 49x^2$

c)  $4x^4 - 25x^3$

d)  $2x^4 - 36x^2$

e)  $3x^6 - 6\sqrt{2}x^4 + 6x^2$

f)  $5x^2 - 3$

**Problema 174** Productos

Efectua los siguientes productos:

1.  $(2x^2 + 5x - 10)(x^3 - 3x)$

2.  $(3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5)(3x^2 - x + 2)$

3.  $(5x^2 + 2x - 3)(2x^2 + 3x - 1)$

4.  $(3x^3 + 2x - 1)^2$

**Problema 175** Sacar factor común

Ejemplo:

Sea  $P(x) = 8x^6 - 4x^3 + 12x^2 - 4x$ , el monomio  $4x$  es factor común de todos los términos de  $P(x)$ , luego:

$$P(x) = 4x(2x^5 - x^2 + 3x - 1)$$

Sacar factor común de:

1.  $P(x) = 6x^5 - 4x^3 - 4x^2$

2.  $Q(x) = 9x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 6x^2$

3.  $R(x) = 15x^6 + 5x^4 - 5x^2 + 35x$

**Problema 176** Cociente de un polinomio por un monomio:

Calcular:

1.  $(3x^5 + x^3 - x + 7) : (x - 3)$

2.  $(2x^4 - 3x^2 + 2x - 1) : (x + 2)$

$$3. (x^5 - 2x^3 + 1) : (x + 3)$$

**Problema 177** (Teorema del Resto)

1. Halla el valor de  $k$  para que el polinomio  $P(x) = kx^3 + 2kx^2 - 3x + 1$  sea divisible entre  $(x - 1)$ .
2. a) Halla el valor numérico de  $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$  para  $x = -1$   
b) ¿Es divisible el polinomio anterior,  $P(x)$ , entre  $x + 1$ .
3. a) Halla el valor numérico de  $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$  para  $x = 1$   
b) ¿Es divisible el polinomio anterior,  $P(x)$ , entre  $x - 1$ .
4. Dado el polinomio  $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x - 1$ 
  - a) Halla el cociente y el resto de la división  $P(x) : (x - 2)$
  - b) ¿Cuánto vale  $P(2)$ .
5. Halla el valor de  $k$  para que la siguiente división sea exacta:  
 $(3x^2 + kx - 2) : (x + 2)$
6. a) Halla el valor numérico de  $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$  para  $x = -1$   
b) ¿Es divisible el polinomio anterior,  $P(x)$ , entre  $x + 1$ .

**Problema 178** Factoriza los siguientes polinomios:

1.  $x^4 - 2x^3 + x^2$
2.  $x^3 - 4x^2 + x + 6$
3.  $x^3 + 2x^2 + x$
4.  $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$
5.  $2x^4 - 18x^2$
6.  $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$
7.  $x^5 + x^4 - 2x^3$
8.  $x^3 - 3x + 2$
9.  $x^3 - 13x^2 + 36x$
10.  $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$

**Problema 179** Sacar factor común

Ejemplo:

Sea  $P(x) = 8x^6 - 4x^3 + 12x^2 - 4x$ , el monomio  $4x$  es factor común de todos los términos de  $P(x)$ , luego:

$$P(x) = 4x(2x^5 - x^2 + 3x - 1)$$

Sacar factor común de:

1.  $P(x) = 6x^5 - 4x^3 - 4x^2$
2.  $Q(x) = 9x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 6x^2$
3.  $R(x) = 15x^6 + 5x^4 - 5x^2 + 35x$

**Problema 180** Cociente de un polinomio por un monomio:

Calcular:

1.  $(3x^5 + x^3 - x + 7) : (x - 3)$
2.  $(2x^4 - 3x^2 + 2x - 1) : (x + 2)$
3.  $(x^5 - 2x^3 + 1) : (x + 3)$

**1.8.2. Teorema del Resto**

**Problema 181** Sea  $P(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 3$  un polinomio que cuando lo dividimos por  $x - 1$  obtenemos de resto 2, y es divisible por  $x + 1$ . Calcular  $a$  y  $b$ , completando con estos resultados el polinomio.

**Problema 182** Sea  $P(x) = 2x^3 + ax^2 - bx - 3$  un polinomio que cuando lo dividimos por  $x - 1$  obtenemos de resto 2, y es divisible por  $x + 1$ . Calcular  $a$  y  $b$ , completando con estos resultados el polinomio.

**Problema 183** Sea  $P(x) = ax^3 - bx^2 + 2x + 1$  un polinomio divisible por  $x - 1$  y por  $x + 1$ . Calcular  $a$  y  $b$ , completando con estos resultados el polinomio.

**Problema 184** Sea  $P(x) = 3x^3 - ax^2 - bx + 1$  un polinomio que cuando lo dividimos por  $x + 2$  obtenemos de resto 3, y es divisible por  $x - 1$ . Calcular  $a$  y  $b$ , completando con estos resultados el polinomio.

**Problema 185** Sea  $P(x) = ax^3 - bx^2 + x + 2$  un polinomio que cuando lo dividimos por  $x - 2$  obtenemos de resto 6, y es divisible por  $x + 1$ . Calcular  $a$  y  $b$ , completando con estos resultados el polinomio.

**Problema 186** Sea  $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$  un polinomio que cuando lo dividimos por  $x - 3$  obtenemos de resto  $-10$ , y es divisible por  $x - 1$ . Calcular  $a$  y  $b$ , completando con estos resultados el polinomio.

**1.8.3. Descomposición Polinómica****Problema 187** Factoriza los siguientes polinomios:

1.  $P(x) = x^5 + 2x^4 - 16x^3 - 2x^2 + 15x$

2.  $Q(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

3.  $R(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 5x + 6$

**Problema 188** Factoriza los siguientes polinomios:

1.  $P(x) = x^5 + 8x^4 + 14x^3 - 8x^2 - 15x$

2.  $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

3.  $R(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 13x - 6$

**Problema 189** Factoriza los siguientes polinomios:

1.  $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

2.  $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

3.  $R(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

**Problema 190** Factorizar:

1.  $x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$

2.  $x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2$

3.  $x^4 - 3x^2 + 2x$

4.  $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 27x^2 - 32x - 12$

5.  $x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 21x + 9$

6.  $x^5 + 3x^4 - 4x^2$

7.  $x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2$

8.  $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 21x - 30$

9.  $x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 30x + 35$

10.  $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$

**Problema 191** Factoriza los siguientes polinomios:

1.  $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$

2.  $Q(x) = x^3 - 11x^2 + 35x - 25$

3.  $R(x) = 2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3$

**Problema 192** Factoriza los siguientes polinomios:

1.  $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$

2.  $Q(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 25$

3.  $R(x) = 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3$

**Problema 193** Factoriza los siguientes polinomios:

1.  $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$

2.  $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$

3.  $R(x) = 3x^4 + 14x^3 + 16x^2 + 2x - 3$

**Problema 194** Factorizar:

1.  $P(x) = 2x^4 - x^3 - 12x^2 + x + 10$

2.  $Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 12x - 4$

3.  $R(x) = 3x^4 + 10x^3 - 7x^2 - 38x - 24$

**Problema 195** Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1.  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

2.  $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

**Problema 196** Descompón el siguiente polinomio como producto de factores de grado uno:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 6$$

**Problema 197** Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1.  $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$

2.  $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

3.  $H(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 10$

**Problema 198** Descompón cada polinomio como producto de factores de grado uno:

1.  $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$

2.  $Q(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

3.  $H(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9$

#### 1.8.4. Simplificación

**Problema 199** Simplificar:

1.  $\frac{x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 9x - 27}{x^2 + 2x - 3}$

2.  $\frac{x^6 + x^5 - 7x^4 + x^3 + 10x^2 - 6x}{x^3 + 7x^2 + 7x - 15}$

3.  $\frac{x^4 + 4x^3 - 22x^2 - 4x + 21}{x^3 - x^2 - x + 1}$

4.  $\frac{x^5 + 12x^4 + 22x^3 - 84x^2 + 49x}{x^4 - 16x^3 + 78x^2 - 112x + 49}$

5.  $\frac{x^5 + 10x^4 + 34x^3 + 36x^2 - 27x - 54}{x^2 + 1}$

#### 1.8.5. Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo

**Problema 200** Calcular el MCD y el mcm de:

1.  $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x$ ,  $Q(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x - 1$

2.  $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$ ,  $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3$

**Problema 201** Calcular el MCD y el mcm de:

1.  $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x$ ,  $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$

2.  $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$ ,  $Q(x) = 2x^5 + x^4 - x^3$

**Problema 202** Calcula el MCD y el mcm de los siguientes polinomios

$$P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 10x - 6$$

$$Q(x) = x^5 + 5x^4 + x^3 - 19x^2 - 6x + 18$$

**Problema 203** Calcular el MCD y el mcm de:

1.  $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$ ,  $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$

2.  $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$ ,  $Q(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

**Problema 204** Calcular el MCD y el mcm de:

1.  $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$ ,  $Q(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$

2.  $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2$ ,  $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3$

**Problema 205** Calcular el MCD y el mcm de:

1.  $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$ ,  $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$

2.  $P(x) = 2x^5 + 5x^4 + 3x^3 - x^2 - x$ ,  $Q(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$

**Problema 206** Calcular el MCD y el mcm de:

1.  $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x$ ,  $Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$

2.  $P(x) = 3x^5 - 10x^4 + 12x^3 - 6x^2 + x$ ,  $Q(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

**Problema 207** Calcular el MCD y el mcm de:

1.  $P(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x$ ,  $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$

2.  $P(x) = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x$ ,  $Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1$

**Problema 208** Si  $P(x) = (x - 3)^2x^2$ , busca un polinomio de tercer grado,  $Q(x)$ , que cumpla las dos condiciones siguientes:

1.  $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 3x = x(x - 3)$

2.  $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x - 3)^2x^2(x + 7)$

**Problema 209** Si  $P(x) = (x + 3)^2x^2$ , busca un polinomio de tercer grado,  $Q(x)$ , que cumpla las dos condiciones siguientes:

1.  $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 3x = x(x + 3)$

2.  $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x + 3)^2x^2(x - 7)$

**Problema 210** Si  $P(x) = (x - 2)^3x^2$ , busca un polinomio de tercer grado,  $Q(x)$ , que cumpla las dos condiciones siguientes:

1.  $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x - 2)^2$

2.  $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x - 2)^3x^2(x + 1)$

**Problema 211** Si  $P(x) = (x - 5)^2x^2$ , busca un polinomio de tercer grado,  $Q(x)$ , que cumpla las dos condiciones siguientes:

1.  $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 5x = x(x - 5)$

2.  $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x - 5)^2x^2(x + 6)$

**Problema 212** Si  $P(x) = (x - 6)^2x^2$ , busca un polinomio de tercer grado,  $Q(x)$ , que cumpla las dos condiciones siguientes:

1.  $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 6x = x(x - 6)$

2.  $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x - 6)^2x^2(x + 5)$

**Problema 213** Si  $P(x) = (x - 7)^2x^2$ , busca un polinomio de tercer grado,  $Q(x)$ , que cumpla las dos condiciones siguientes:

1.  $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 7x = x(x - 7)$

2.  $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x - 7)^2x^2(x + 1)$

### 1.8.6. Simplificación de expresiones racionales de polinomios

**Problema 214** Efectuar:

1.  $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}$

2.  $\left(\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x}\right) : \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)$

3.  $\frac{2x}{x-1} \cdot \frac{3}{x}$

**Problema 215** Efectuar:

1.  $\frac{2x}{x-1} + \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1}$

2.  $\left(\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x}\right) : \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$

3.  $\frac{2x}{x-1} \cdot \frac{3}{x^2}$

**Problema 216** Efectuar:

1.  $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1}$

$$2. \left( \frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x} \right) : \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} \right)$$

$$3. \frac{3x}{x-1} \cdot \frac{5}{x}$$

**Problema 217** Efectuar:

$$1. \frac{x}{x-1} - \frac{3x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$2. \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x} \right) : \left( \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} \right)$$

$$3. \frac{3x}{x-1} \cdot \frac{5}{x}$$

**Problema 218** Efectuar:

$$1. \frac{x+1}{x-1} - \frac{3x}{x^2-1} + \frac{x}{x+1}$$

$$2. \left( \frac{x+1}{x-1} - 3 \right) : \left( \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right)$$

$$3. \frac{6x^2}{x+1} \cdot \frac{5}{x}$$

**Problema 219** Calcular:

$$1. \left( \frac{3x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \right) : \left( \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} \right)$$

$$2. \frac{3x}{x-2} \cdot \frac{1}{x}$$

**Problema 220** Calcular:

$$1. \frac{2x}{x-2} + \frac{1}{x^2-4} = \frac{x}{x+2}$$

$$2. \left( \frac{3x}{x+1} + \frac{x}{x-1} \right) : \left( \frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} \right)$$

$$3. \frac{5x}{x-2} \cdot \frac{2}{x}$$

**Problema 221** Calcular:

$$1. \frac{x}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{x}{x+2}$$

$$2. \left( \frac{3x}{x+1} + \frac{x}{x-1} \right) : \left( \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} \right)$$

$$3. \frac{8x}{x+3} \cdot \frac{3}{2x}$$

**Problema 222** Efectuar:

$$1. \frac{x+1}{x-1} - \frac{3x}{x^2-1} + \frac{x}{x+1}$$

$$2. \left( \frac{x+1}{x-1} - 3 \right) : \left( \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right)$$

$$3. \frac{6x^2}{x+1} \cdot \frac{5}{x}$$

**Problema 223** Calcular  $x$  en apartado 1. y Simplificar en apartado 2.

1.

$$\frac{3x}{x-5} - \frac{1}{x+5} = \frac{x}{x^2-25}$$

2.

$$\left( \frac{x^2}{x^2+2x-3} - \frac{1}{x-1} \right) : \left( \frac{x+1}{x+3} + \frac{2x}{x-1} \right)$$

**Problema 224** Reduce a común denominador y efectua la operación correspondiente:

$$1. \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x+1}{x(x^2-1)}$$

$$2. \frac{x+1}{(x-1)(x+3)} - \frac{x-1}{(x-2)(x-1)(x+3)}$$

$$3. \frac{1}{x^2-1} + \frac{x}{x^2+x}$$

$$4. \frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{(x+1)^2}$$

$$5. \frac{x+1}{x^3-8x^2+21x-18} + \frac{1}{x^2-4x+3}$$

$$6. \frac{2}{x^3+9x^2+15x-25} - \frac{1}{x^3+3x^2-9x+5}$$

$$7. \frac{2x}{x^3-6x^2+11x-6} + \frac{1}{x^2-4x+3}$$

$$8. \frac{x}{x^3-3x+2} - \frac{3x}{x^3-4x^2+5x-2}$$

$$9. \frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{x}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

$$10. \frac{2}{x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6} + \frac{x}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$$

**Problema 225** Resolver y simplificar:

$$1. \left( \frac{x+2}{x^2+x-2} - 1 \right) : \left( \frac{x+5}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$2. \left( \frac{x+2}{4x^2+40x+84} \right) \cdot \left( \frac{8x+24}{x^2+4x+4} \right)$$

**Problema 226** Resolver y simplificar:

$$1. \left( \frac{x+2}{x^2-3x-10} - 1 \right) : \left( \frac{x+2}{x-5} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$2. \left( \frac{x+2}{5x^2-15x+10} \right) \cdot \left( \frac{5x-5}{x^2+4x+4} \right)$$

**Problema 227** Resolver y simplificar:

$$1. \left( \frac{x+2}{x^2+2x-3} - 1 \right) : \left( \frac{x+5}{x+3} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$2. \left( \frac{x+2}{3x^2+12x-63} \right) \cdot \left( \frac{9x-27}{x^2+4x+4} \right)$$

### 1.8.7. Ecuaciones Polinómicas

**Problema 228** Calcular

$$\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$$

**Problema 229** Calcular las soluciones reales de:

$$1. \frac{2x-3}{x-1} = \frac{3x-7}{2x-5}$$

$$2. \frac{2+x}{x^2+x} = \frac{2-x}{x^2-x}$$

**Problema 230** Calcular  $x$  en la siguiente ecuación

$$\frac{2x}{x^2 - 4x + 3} - \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{x^2 - 2x - 3}$$

**Problema 231** Calcular las soluciones reales de:

$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{x + 1}$$

**Problema 232** Resolver:

1.  $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3x + 9 = 0$
2.  $\frac{x + 1}{x^2 + 4x - 5} - \frac{1}{x + 5} = \frac{x}{x - 1}$
3.  $\frac{x + 1}{x^2 + 4x - 5} - \frac{1}{x + 5} = \frac{x}{x - 1}$

## Capítulo 2

# Problemas de Geometría

### 2.1. Trigonometría

#### 2.1.1. Ángulos

**Problema 233** 1. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número de vueltas y un ángulo menor de  $360^\circ$

a)  $3215^\circ$

b)  $2612^\circ$

2. Expresa en grados los siguientes radianes

a)  $\frac{4\pi}{3}$  rad

b)  $\frac{7\pi}{4}$  rad

3. Expresa en radianes los siguientes ángulos medidos en grados

a)  $215^\circ$

b)  $325^\circ$

**Problema 234** 1. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número de vueltas y un ángulo menor de  $360^\circ$

a)  $3215^\circ$

b)  $4160^\circ$

2. Expresa en grados los siguientes radianes

a)  $\frac{5\pi}{3}$  rad

b)  $\frac{8\pi}{9}$  rad

3. Expresa en radianes los siguientes ángulos medidos en grados

a)  $315^\circ$

b)  $228^\circ$

**Problema 235** Calcular:

1. Expresa el  $915^\circ$  como suma de un número de vueltas y un ángulo menor de  $360^\circ$

2. Expresa en grados  $\frac{3\pi}{4}$  radianes

3. Expresa en radianes  $215^\circ$

**Problema 236** 1. Reducir los siguientes ángulos a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta

▪  $3485^\circ$

▪  $5636^\circ$

2. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

▪  $335^\circ$

▪  $126^\circ$

3. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

▪  $\frac{3}{5}\pi$  radianes.

▪  $\frac{3}{2}\pi$  radianes.

**Problema 237** 1. Reducir los siguientes ángulos a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta

▪  $5725^\circ$

▪  $8391^\circ$

2. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

▪  $325^\circ$

▪  $385^\circ$

3. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

▪  $\frac{3}{7}\pi$  radianes.

▪  $\frac{6}{5}\pi$  radianes.

**Problema 238** 1. Reducir los siguientes ángulos a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta

- $8793^\circ$
- $7421^\circ$

2. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

- $185^\circ$
- $270^\circ$

3. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

- $\frac{1}{5}\pi$  radianes.
- $\frac{4}{7}\pi$  radianes.

**Problema 239** 1. Reducir los siguientes ángulos a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta

- $9236^\circ$
- $8721^\circ$

2. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

- $335^\circ$
- $126^\circ$

3. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

- $\frac{2}{7}\pi$  radianes.
- $\frac{8}{5}\pi$  radianes.

**Problema 240** Calcular

1. Reducir el ángulo  $3824^\circ$  a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta.
2. Pasar  $\frac{8\pi}{7}$  de radianes a grados.
3. Pasar  $335^\circ$  de grados a radianes.

**Problema 241** Calcular

1. Reducir el ángulo  $4526^\circ$  a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta.

2. Pasar  $\frac{9\pi}{7}$  de radianes a grados.
3. Pasar  $321^\circ$  de grados a radianes.

**Problema 242** Calcular

1. Reducir el ángulo  $5728^\circ$  a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta.
2. Pasar  $\frac{6\pi}{7}$  de radianes a grados.
3. Pasar  $223^\circ$  de grados a radianes.

**Problema 243** Calcular

1. Reducir el ángulo  $8324^\circ$  a un número de vueltas y su valor en la primera vuelta.
2. Pasar  $\frac{9\pi}{7}$  de radianes a grados.
3. Pasar  $311^\circ$  de grados a radianes.

**2.1.2. Razones Trigonómicas**

**Problema 244** Calcular las razones trigonométricas de un ángulo  $\alpha$ , que pertenece al segundo cuadrante, y sabiendo que  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

**Problema 245** Conociendo las razones trigonométricas de  $45^\circ$  calcular las de  $225^\circ$ .

**Problema 246** Calcular las razones trigonométricas de un ángulo  $\alpha$ , que pertenece al tercer cuadrante, y sabiendo que  $\sin \alpha = -\frac{3}{4}$

**Problema 247** Calcular las razones trigonométricas de un ángulo  $\alpha$ , que pertenece al tercer cuadrante, y sabiendo que  $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$

**Problema 248** Conociendo las razones trigonométricas de  $60^\circ$ , calcular las de  $120^\circ$ .

**Problema 249** Conociendo las razones trigonométricas de  $30^\circ$ , calcular las de  $150^\circ$ .

**Problema 250** Sabiendo que  $\tan \alpha = 3$  y que  $\alpha \in$  tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 251** Sabiendo que  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$  y que  $\alpha \in$ segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 252** Conociendo las razones trigonométricas de  $45^\circ$ , calcular las de  $225^\circ$ .

**Problema 253** Sabiendo que  $\tan \alpha = -4$  y que  $\alpha \in$ segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 254** Sabiendo que  $\tan \alpha = 4$  y que  $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 255** Sabiendo que  $\tan \alpha = 3$  y que  $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 256** Conociendo las razones trigonométricas de  $60^\circ$ , calcular las de  $240^\circ$ .

**Problema 257** Sabiendo que  $\tan \alpha = -2$  y que  $\alpha \in$ cuarto cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 258** Sabiendo que  $\tan \alpha = 3$  y que  $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 259** Sabiendo que  $\tan \alpha = \frac{3}{2}$  y que  $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 260** Sabiendo que  $\tan \alpha = -5$  y que  $\alpha \in$ segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 261** Sabiendo que  $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$  y que  $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 262** Deducir las razones trigonométricas de  $30^\circ$

**Problema 263** Conociendo las razones trigonométricas de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$  calcular las de  $240^\circ$ .

**Problema 264** Sabiendo que  $\tan \alpha = 4$  y que  $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 265** Deducir las razones trigonométricas de  $60^\circ$

**Problema 266** Conociendo las razones trigonométricas de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$  calcular las de  $330^\circ$ .

**Problema 267** Sabiendo que  $\tan \alpha = -5$  y que  $\alpha \in$ segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 268** Deducir las razones trigonométricas de  $45^\circ$

**Problema 269** Conociendo las razones trigonométricas de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$  calcular las de  $225^\circ$ .

**Problema 270** Deducir las razones trigonométricas de  $45^\circ$

**Problema 271** Conociendo las razones trigonométricas de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$  calcular las de  $135^\circ$ .

**Problema 272** Sabiendo que  $\tan \alpha = -7$  y que  $\alpha \in$ segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 273** Sabiendo que  $\tan \alpha = -7$  y que  $\alpha \in$ segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 274** Sabiendo que  $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$  y que  $\alpha \in$ tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 275** Sabiendo que  $\tan \alpha = 2$ , calcular el resto de las razones trigonométricas; teniendo en cuenta que  $\alpha$  pertenece al tercer cuadrante.

**Problema 276** Teniendo en cuenta que  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  y que  $\alpha$  pertenece al primer cuadrante, calcular:

$$\sin(\alpha + 30^\circ); \sin(\alpha + 45^\circ); \cos(\alpha - 60^\circ); \tan(60^\circ - \alpha)$$

**Problema 277** Hallar las razones trigonométricas de  $\alpha$  sabiendo que  $\sec \alpha = 3$  y  $\alpha \in 4^\circ$  Cuadrante.

**Problema 278** Sabiendo que  $\csc \alpha = 3$  y que  $\alpha$  pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 279** Sabiendo que  $\csc \alpha = 2$  y que  $\alpha$  pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

**Problema 280** Sabiendo que  $\tan \alpha = -4$  y que  $\alpha$  pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

### 2.1.3. Resolución de Triángulos

**Problema 281** Resolver el siguiente triángulo, conociendo los catetos  $a = 4\text{cm}$  y  $b = 3\text{cm}$ :

**Problema 282** De un triángulo rectángulo se conoce su hipotenusa y un cateto, que valen  $25\text{cm}$  y  $16\text{cm}$  respectivamente. Calcular el otro cateto y los ángulos de este triángulo.

**Problema 283** En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de  $5$  y  $9\text{ cm}$  respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

**Problema 284** En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de  $7$  y  $10\text{ cm}$  respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

**Problema 285** En un triángulo rectángulo se conocen un ángulo  $A = 37^\circ$  y el cateto opuesto  $a = 9$ . Calcular el otro ángulo, el otro cateto y su hipotenusa.

**Problema 286** En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de  $4$  y  $7\text{ cm}$  respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

**Problema 287** En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de  $3$  y  $5\text{ cm}$  respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

**Problema 288** En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de  $5$  y  $8\text{ cm}$  respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

**Problema 289** En un triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos de  $9$  y  $12\text{ cm}$  respectivamente. Calcular su hipotenusa y sus ángulos.

### 2.1.4. Aplicaciones

**Problema 290** La sombra de un árbol mide  $50\text{m}$  y el ángulo que forman los rayos del sol con el suelo es de  $60^\circ$ . ¿Cuál es la altura del árbol?.

**Problema 291** La longitud del lado de un octógono es de  $16\text{cm}$ . Calcular su área.

**Problema 292** Desde un puesto de caza, un cazador apunta con su escopeta a una tórtola, que se encuentra posada en la copa de un árbol, con un ángulo de  $50^\circ$ . Cuando iba a disparar la tórtola salió volando y se posó en una rama  $4\text{m}$  más abajo; la apunta cuidadosamente con un ángulo de  $40^\circ$  y cuando fué a disparar decidió no hacerlo; se acordó del pesado de su profesor de "mate" de  $4^\circ$  y se hizo las siguientes preguntas: ¿Qué altura tiene el árbol?, ¿Qué distancia me separa de él?. (Pobre tórtola)

**Problema 293** En el tejado de un edificio están colocando una antena. Desde la calle veo la base de ella con un ángulo de  $70^\circ$  mientras que el extremo superior lo veo con un ángulo de  $80^\circ$ . Si la antena mide  $10m$ , calcular la altura del edificio y la distancia que me separa de él.

**Problema 294** Dos personas, separadas por una distancia de  $6Km$  observan un avión, que vuela de uno de ellos hacia el otro. Uno de ellos lo observa bajo un ángulo de  $30^\circ$ , mientras el otro lo hace bajo un ángulo de  $15^\circ$ . Calcular la altura a la que vuela el avión.

**Problema 295** Calcular la altura del pico de una montaña, sabiendo que, en ese momento del día, el sol incide con sus rayos sobre el suelo con un ángulo de  $75^\circ$  y provoca una sombra sobre el suelo de 53 metros.

**Problema 296** Una escalera de  $12m$  de largo esta apoyada en una pared con un ángulo de  $60^\circ$ . Calcular la altura de pared hasta donde apoya la escalera, y la separación de ésta a la pared.

**Problema 297** Calcular el área de un octógono de  $5cm$  de lado.

**Problema 298** Pablo observa desde la ventana de su casa un accidente con un ángulo de  $60^\circ$ ; como es muy curioso y desde allí no lo ve muy bien, decide subir a la azotea del edificio, que se encuentra 10 metros más arriba. Desde allí, con unos prismáticos, se empapa de todo mirando con un ángulo de  $40^\circ$ . Lo que no se imaginaba, era que a su vez era observado por el profesor de matemáticas, y éste no le preguntó sobre el accidente, sino por la altura del edificio y la distancia a la que ocurrió desde su casa.

(Nota: los ángulos son los medidos entre el observador y la vertical)

**Problema 299** Calcular el área de un decágono de  $4m$  de lado.

**Problema 300** En un examen de matemáticas, Juan Vicente está intentando copiar de Luis (¿es raro?), el profesor que le observa comprueba que, cuando Juan Vicente intenta mirar sin levantar la cabeza lo hace con un ángulo de  $70^\circ$ , pero en ese caso no puede ver el examen del compañero, así es que estira la cabeza y el cuerpo  $10cm$ , con lo que ahora si alcanza un ángulo perfecto de visión con  $65^\circ$  (Luis se hace complice bajando el hombro). El profesor decide quitarles el examen y les propone este problema para que calculen la distancia que hay entre Juan Vicente y el examen de Luis, también tendrán que calcular la altura que hay desde el examen de Juan Vicente hasta sus ojos, en el momento en el que esta copiando.

(Nota: los ángulos son los medidos entre el observador y la vertical)

**Problema 301** Calcular el área de un dodecágono de  $4cm$  de lado.

**Problema 302** En un viaje del colegio por Extremadura, Cristina y Marina quedaron fascinadas con las cigüeñas. En Trujillo decidieron subir a una torre para ver el nido de cerca. Primero subieron hasta el campanario, y desde allí veían al grupo de compañeros con un ángulo de  $75^\circ$ , pero aun tuvieron que subir 7 peligrosos metros para llegar hasta el nido; desde allí volvieron a mirar al grupo y esta vez con un ángulo de  $70^\circ$ . Cometieron el fallo de ir acompañados del profesor de matemáticas, que en cuato bajaron les pregunto por la altura de la torre y la distancia de ésta al grupo. (No se puede llevar a un profesor de matemáticas de excursión)

(Nota: los ángulos son los medidos entre el observador y la vertical)

**Problema 303** Calcular el área de un octógono de  $6\text{cm}$  de lado.

**Problema 304** Una escalera de  $10\text{m}$  de largo esta apoyada en una pared con un ángulo de  $60^\circ$ . Calcular la altura de pared hasta donde apoya la escalera, y la separación de ésta a la pared.

**Problema 305** Un paracaidista se va a lanzar desde lo alto de un rascacielos, y tu te encuentras abajo, no muy lejos, para disfrutar con su demostración de valor. Le observas preparar hasta los más mínimos detalles, con un ángulo de  $81^\circ$ , y luego le ves lanzarse al vacio sin el menor asomo de miedo. Todo el mundo contiene la respiración, y por fin despliega el paracaidas, en ese momento tomas aire mientras le observas con un ángulo de  $78^\circ$ . Han sido 30 metros de caída libre, pero no todo va a ser tan espectacular. Allí estaba el pesado de mi profesor de matemáticas para preguntarme por la altura del edificio y por la distancia que nos separaba de él.

**Problema 306** En el Parque de Atracciones observas a tu amigo en lo alto de la Noria con un ángulo de  $60^\circ$ . Calcular a la altura que se encuentra, sabiendo que tu estás a  $50\text{m}$  de la Noria.

**Problema 307** Daniel Merino observa a sus compañeros, que están en lo alto de un campanario, con un ángulo de  $80^\circ$ . Calcular la altura a la que se encuentran sabiendo que Daniel está a 10 metros del edificio.

**Problema 308** Observas el nido de un águila, en una pared vertical de una montaña, con un ángulo de  $70^\circ$ . Calcular la altura a la que se encuentra el nido, sabiendo que estás a  $40\text{m}$  de esa pared.

**Problema 309** Calcular el área de un Dodecágono regular inscrito en una circunferencia de  $6\text{m}$  de radio.

**Problema 310** Nos hemos encontrado un mensaje en una botella que estaba a la deriva, flotando en las aguas del mar. Se trata de un antiguo manuscrito del pirata Barbacana, y nos explica que su tesoro está escondido

en "Isla Perdida". Nos precisa la siguiente información:

Si nos situamos en el centro de la isla veremos una enorme palmera que nos servirá de referencia; desde ella se ve una gruta a nuestra izquierda (oeste) con un ángulo de  $25^\circ$  (respecto al norte) y si caminamos hacia el norte 300 pasos la vemos con un ángulo de  $50^\circ$ . El tesoro se encuentra en nuestro camino hacia el norte, justamente donde corta la perpendicular al camino que llega desde la gruta. ¿A cuántos pasos de la palmera se encuentra el tesoro?. (Hay dos posibles planteamientos).

**Problema 311** En un paseo por Madrid Elías se quedó boquiabierto al ver como se quedó el edificio Windsor después del incendio. Observó el trabajo de las gruas, fascinado por la exactitud de sus movimientos.

Había una de ellas que se apoyaba en lo alto del edificio y tenía colgado un hierro enorme en un cable de  $20m$ .

Elías observaba el hierro con un ángulo de  $79^\circ$  y a la grua con un ángulo de  $81^\circ$ . Calcular la altura del edificio y la distancia a la que Elías se encuentra de él.

**Problema 312** En el parque de atracciones todos estaban pendientes de Marcos de las Heras, que se había subido en la lanzadera, y allí en lo alto parecía tener una cara que era un poema. Le observaban con un ángulo de  $80^\circ$ . La cara se le puso mucho peor cuando en la caída se atascó la lanzadera después de recorrer  $20m$ , ahora le observaban con un ángulo de  $78^\circ$ . Calcular la altura de la lanzadera y la distancia a la que nos encontramos de ella.

(Por eso no vino al examen de Mates)

**Problema 313** Calcular el área de un octógono regular de  $4m$  de lado.

**Problema 314** A Quique le han dado trabajo de torpedero en un submarino (hay trabajos peores). En unas maniobras le han trazado un camino rectilíneo de boyas de  $5Km$  por el que navegará el submarino; y alejado de este camino habrá un objetivo para torpedear. El disparo se hará cuando la distancia del camino al objetivo sea la menor posible. Se acuerda del pelma de su profesor de matemáticas de  $4^\circ$  y se decide a tomar los datos necesarios: El ángulo con el que observa el objetivo en el origen del camino es de  $25^\circ$  y el ángulo con el que observa el objetivo en el destino es de  $40^\circ$ .

Se pregunta por la distancia que debe recorrer el submarino desde su origen para que Quique de la orden de disparo, y en ese momento la distancia a la que está el objetivo.

**Problema 315** Calcular el área de un pentágono regular de  $8m$  de lado.

**Problema 316** Cristina y Desiré se encuentran en una llanura separadas por una distancia de  $5Km$  en una excursión del colegio. Se llaman por el teléfono móvil porque acaban de observar un OVNI que vuela en la dirección

que las separa. Cristina lo ve con un ángulo de  $80^\circ$ , mientras que Desiré lo ve con un ángulo de  $60^\circ$ . El profesor de matemáticas, que observa a sus alumnas, aprovecha la oportunidad para preguntarlas por la altura a la vuela ese objeto. (Un poco pesado, ¿no?)

**Problema 317** Calcular el área de un Decágono regular de  $6m$  de lado.

**Problema 318** Como Luís Alberto no paraba de hablar con Christian Fenández los metimos en un submarino que iba a estar trabajando una semana en el fondo del mar. (¡Que broma!). El submarino se sumergió con un ángulo de  $1^\circ$ , y después emergió con un ángulo de  $2^\circ$  a  $5Km$  de donde se empezó a sumergir. Todo ello en camino rectilíneo y con los ángulos medidos sobre la horizontal. Calcular la profundidad a la que estuvo trabajando el submarino con nuestros dos amigos.

**Problema 319** Calcular el área de un Dodecágono regular de  $6m$  de lado.

**Problema 320** Desde un punto determinado del mar, el capitán de un barco observa la luz de un faro con una inclinación de  $15^\circ$ . Su situación es dramática, le queda combustible para recorrer  $10 Km$  y no sabe si llegará a tierra. Después de recorrer  $2 Kms$  en dirección hacia el faro vuelve a comprobar la inclinación de la luz del faro que ahora resulta de  $25^\circ$ . En estos momentos el capitán ya conoce lo que le interesa, y yo pido que calculéis:

1. La altura del faro.
2. La distancia a la que se encuentra del faro.

**Problema 321** Dos personas, separadas por una distancia de  $6Km$  observan un avión, que vuela de uno de ellos hacia el otro. Uno de ellos lo observa bajo un ángulo de  $30^\circ$ , mientras el otro lo hace bajo un ángulo de  $15^\circ$ . Calcular la altura a la que vuela el avión.

**Problema 322** Un submarino desciende hacia el fondo del mar con una inclinación de  $35^\circ$ . Cuando llega al fondo, y después de realizar los pertinentes trabajos, asciende a la superficie con un ángulo de  $45^\circ$ . Cuando ha emergido completamente comprueba que se ha desplazado  $200$  metros desde el punto donde empezó la inmersión. Se pide calcular la profundidad del mar en el punto en el que estuvo trabajando el submarino.

**Problema 323** Dos personas separadas por una llanura de  $2Km$ , observan un globo aerostático con ángulos de  $30^\circ$  y  $45^\circ$  respectivamente. Hallar la altura a la que vuela dicho artefacto.

**Problema 324** Acaban de colocar una antena de  $7$  metros en lo alto de un edificio. Observas el extremo superior de la antena con un ángulo de  $85^\circ$ , mientras que su base la observamos con  $80^\circ$ . Calcular la altura del edificio y la distancia que te separa de él.

**Problema 325** Después de un viaje a Ávila con el colegio, Lorena se encuentra sorprendida por las leyendas que la contaron sobre las murallas de la ciudad. El profesor de matemáticas la plantea una cuestión, ¿unos hipotéticos enemigos de esa ciudad de qué tamaño harían las escaleras para saltar las murallas?, ¿cómo podrían saber estas medidas sin llegar a la ciudad?. Todo pasa por contestar a este problema: un guerrero observa la parte alta de la muralla con un ángulo de  $3^\circ$  y después se acerca  $200\text{ m}$  y ahora ve ese mismo punto con un ángulo de  $10^\circ$ . En este momento, el guerrero no sólo sabe la altura de la muralla, sino que también sabe la distancia que le separa de ella. Lorena ha decidido que esta es una buena pregunta para que todos la resolváis en este examen.

**Problema 326** Laura y Sandra se encuentran en un circo, debajo de una cuerda en la que un equilibrista se juega la vida con la mayor de las indiferencias, cada una de ellas se encuentra en un extremo de la cuerda y son  $50$  metros la distancia que las separa. Laura observa al acróbata con un ángulo de  $50^\circ$ , mientras que Sandra lo ve con un ángulo de  $70^\circ$ . Se pide calcular la altura a la que se encuentra el artista y que distancias de cuerda le separan de los extremos.

**Problema 327** En unos lanzamientos a canasta Miguel Ángel se acuerda de las clases de trigonometría y piensa. Primero observa la canasta con un ángulo de  $80^\circ$  y retrocediendo  $5\text{ m}$  la observa con un ángulo de  $60^\circ$ . Ahora tiene que calcular la altura a la que se encuentra la canasta y la distancia a la que se encuentra la base de esa canasta.

**Problema 328** Sheila y Javier viajaban en un avión con sus compañeros, en un viaje de fin de curso a la ciudad de Roma. En este viaje divisaron la isla de Ibiza con un ángulo de  $70^\circ$  con la horizontal del avión. En este momento le preguntaron a la azafata por la distancia que debía de recorrer el avión para encontrarse encima de la isla, ella contestó que en el tiempo que habían estado hablando el avión había recorrido  $10\text{ Km}$ , volvieron a mirar y se dieron cuenta que ahora se veía la isla con un ángulo de  $80^\circ$ . Se lo contáis al profesor de mates, y como es un poco pesado no se le ocurre otra cosa que preguntaros por la altura a la que vuela el avión y la distancia que nos queda por recorrer para estar encima de la isla.

**Problema 329** Diego se encuentra en la cima del pico de los Claveles (Peñalara) y desde allí observa la Laguna de los Pájaros con un ángulo de  $8^\circ$  con la vertical. El espectáculo es muy bonito, pero tiene que concentrarse, debe de hacer un descenso de  $30$  metros por la pared de roca (un rapel) hasta un pequeño saliente. Cuando llegó allí veía la laguna con un ángulo de  $10^\circ$ . Pero eso de hacer alpinismo con el profesor de mates no es de lo más divertido, ya que no se le ocurrió otra cosa que preguntarle por la altura de la pared y por la distancia que separaba a ésta de la laguna.

**Problema 330** A nuestro compañero Enrique le encanta el equilibrista y a decidido jugarse la vida cruzando, sobre una cuerda, el desfiladero de "La Hermida", por un lugar en el que la separación entre las paredes de roca es de 300 metros. Nosotros nos encontramos en el fondo del desfiladero y vemos un extremo de la cuerda con un ángulo de  $55^\circ$ , mientras que el otro extremo lo observamos con un ángulo de  $80^\circ$  (cuidado los ángulos medidos sobre la horizontal). No podía faltar la pregunta del profe de mates para preguntarnos por la altura a la que está la cuerda y por la distancia que nos separa de alguna de las paredes. (¡Que pesado!). El desfiladero de "La Hermida" se encuentra en Cantabria; por él fluye el río Deva, uniendo los pueblos de Panes y Potes. Hace de frontera natural con Asturias, y no me equivoco al afirmar que es uno de los parajes más bellos de España.

**Problema 331** Juan José se encontraba ante las murallas y almenas de un castillo medieval con unos antiguos compañeros del colegio Villaeuropa. Recordando viejos tiempos de estudio, apareció el recuerdo del profesor de matemáticas con la pesadez de sus problemas:

Juan José podía ver el extremo superior de una de las almenas, donde ondeaba una bandera, con un ángulo de  $4^\circ$ , mientras que al acercarse a ella 100 m en línea recta ese mismo punto lo veía con un ángulo de  $6^\circ$ .

Calcular la altura de la almena y la distancia que hay desde el grupo hasta ella.

**Problema 332** Tomás es un detective con fama nacional. Se encuentra investigando un robo cometido en el último piso de un edificio. Su sorpresa fue enorme al reconocer que el testigo era Laura, su antigua compañera de colegio. Según la declaración de Laura, el ladrón salió por la ventana, trepó por la fachada y subió hasta el punto más alto y desde allí se lanzó en parapente. Laura dejó claro el lugar desde donde observó el suceso. La policía empezó a tomar medidas desde la ventana por donde salió el ladrón, resultó que el ángulo que se forma entre la ventana y el punto en el que estaba Laura era de  $45^\circ$  sobre la vertical, mientras que el formado desde el punto más alto y el lugar de observación de Laura era de  $40^\circ$ , también sobre la vertical del edificio. El ladrón tuvo que trepar 10 metros por el exterior para alcanzar el extremo desde donde Laura dijo que se había lanzado.

Tomás sabe perfectamente que, para poder lanzarse en parapente tiene que haber una altura mínima de 70 m. Observó detenidamente el edificio, y recordando las clases de trigonometría, se puso a hacer cálculos.

Calcular la altura del edificio y la distancia hasta él desde donde Laura vio el suceso.

**Problema 333** Adrián y Esteban se encuentran, con sus equipos de radio aficionado, en una noche muy oscura y cada uno en su coche, participando en el célebre juego de "La cacería del zorro". Se trata de localizar y capturar a otro coche que emite una señal por una frecuencia determinada (sería el zorro) y un montón de amigos se disponen a la caza, siempre guardando el mayor respeto tanto a las normas de tráfico como a las de medio ambiente. El zorro se mueve por carreteras, caminos, se para, retrocede,... En un cierto momento Adrián y Esteban se encuentran en los dos extremos de un camino de un camino rectilíneo, que según el mapa mide 3 Km, y está cruzado por un montón de caminos que inciden en éste de forma vertical. Están recibiendo claramente la señal del zorro y se encuentra entre ambos coches, uno de ellos recibe la señal con un ángulo de  $50^\circ$ , mientras que el otro la recibe con un ángulo de  $35^\circ$ . Para decidirse por que camino deben de entrar, se ponen a hacer sus cálculos.

Calcular la distancia a la que se encuentra el zorro desde el camino y la distancia que deben recorrer los dos amigos para coger el camino que de manera infalible los llevaría hasta el zorro.

**Problema 334** Gemma, María, Alba, Mónica, Cintia, Cristina y Nerea están pasando unas merecidas vacaciones en la costa asturiana. Se encontraban en un pequeño pueblo llamado Poó de LLanes, donde se acercaron a disfrutar de los bellos acantilados de su costa, el paisaje era impresionante. Desde un prodo verde esmeralda podían disfrutar del panorama de un mar rabioso y enfurecido. Luchando contra las olas había un pequeño barco pesquero que se afanaba por llegar a la costa en dirección hacia ellas; lo veían con un ángulo de  $70^\circ$ . Se quedaron ensimismadas observando las manibras y el lento avance durante un rato y ahora lo vieron con un ángulo de  $60^\circ$  (ángulos medidos sobre la vertical del acantilado). María, buena conocedora de aquel lugar y tomando como referencia los islotes, dijo a sus amigas que el barco había avanzado 100 metros entre las dos medidas angulares. Gemma preguntó a sus amigas: ¿qué altura tendrá el acantilado? ¿qué distancia le queda por recorrer al barco para llegar hasta la base del acantilado?

**Problema 335** Luís, Darío, Carlos, Alejandro, Gwydion y Rubén se decidieron por el estudio de arqueología (¿se habrían visto todas las películas de Indiana Jones?). No les fué nada mal, por casualidad hicieron un gran descubrimiento. En el desierto, muy cerca del Nilo, después de una gran tormenta de arena, quedo al descubierto una gran pirámide, hasta entonces desconocida con una enorme esfinge que custodiaba la puerta de entrada a ella. Según contaba la leyenda esta esfinge era la guardiana de los grandes tesoros que había en la pirámide y mataba a todo aquel que se acercaba a menos de 50 metros de ella. Vieron el extremo superior de esta estatua con un ángulo de  $30^\circ$  y después de aproximarse a ella 100 metros con un

ángulo de  $70^\circ$ . Gwydion alarmó a los compañeros, recordando las clases de matemáticas de 4º ESO y les dijo que había que reflexionar, seguro que aquel pesado profesor les preguntaría por la altura de esfinge y, sobre todo, si estaban seguros en ese momento.

(Nota: la Esfinge era un monstruo con rostro y pecho de mujer, patas y cola de león, y alas de pájaro).

**Problema 336** Laura, Verónica, Virginia, Tania, Andrés, Borja, Iván y Manuel, se encuentran en un pueblo de la Costa del Sol llamado Torrox dándose un fenomenal baño en el mar. Miraban extrañadas la cantidad de montañas que parecían crecer a la orilla del mar formando La Axarquía. Por encima de estos macizos montañosos se veía un pico con nieve, que contrastaba curiosamente con la buena temperatura que hacía en la playa; estaban viendo "El Maroma" con un ángulo de  $88^\circ$ . Por la tarde decidieron recorrer en coche 36 kilómetros en dirección rectilínea hacia la base de esa montaña, y ahora veían el pico con un ángulo de  $89^\circ$ . Laura, recordando las clases de matemáticas de 4º ESO y aquel pesado profesor, seguro que les preguntaría por la altura del pico y, por la distancia que les separaba.

(Nota: Torrox es la cuna de Almanzor).

**Problema 337** Roberto, Guillermo, Ismael, Pedro, David, Victor, Carlos, Gabriel e Israel se encuentran muy preocupados por el examen de trigonometría y, ante el posible fracaso, se deciden por robarlo. Saben que ese examen con sus soluciones se encuentra en el domicilio del profesor, les bastará una cuerda para descolgarse mediante un "rápel" desde lo más alto del edificio. En la calle se queda Israel para avisar de una inesperada llegada del profesor.

La maniobra hubiera sido éxito, pero toda la maniobra fué observada en la lejanía y el profesor dejó que se produjera el robo del examen.

Cuando se marcharon contentos por el éxito obtenido, el profesor se situó en el punto en el que Israel vigilaba atentamente. Desde este punto se veía el tejado del edificio bajo un ángulo de  $31^\circ$  y la terraza por la que entraron con otro de  $22^\circ$ . La altura que se descolgaron era de 10 metros

La pregunta del examen había cambiado, ahora les preguntan por la altura a la que se encuentra la terraza de la vivienda del profesor y por la distancia a la que se encontraba Israel de la base de ese edificio.

**Problema 338** Laura, María, Andrea, Adriana, Emma, Leticia, Inés, Shara y Natalia se encuentran caminando por el desierto y sus fuerzas han llegado al límite. La deshidratación y el cansancio las nubla el pensamiento y sus cerebros comienzan a jugar con visiones y espejismos. En un momento dado se quedan paradas, ante ellas pueden ver un oasis con una palmera y un

laguna de frescas aguas. Las parece mentira y piensan que es un espejismo. Laura se acuerda del profesor de matemáticas de 4ºESO y comienza a hacer mediciones mentales. Se ve la altura de la palmera bajo un ángulo de  $2^\circ$  y cuando se aproximaron 100 metros hacia ella con un ángulo de  $3^\circ$ .

¿Qué altura tiene la palmera?

¿A qué distancia se encuentran de ella?

¿Será un espejismo?

**Problema 339** Rubén, Pedro, Alejandro, Adrián, Rosty, Andrés, Fernando y Pablo se encuentran en una excursión de 4ºESO por Aranjuez y resulta que en las afueras de esta ciudad se oferta un viaje en globo bastante bonito. En realidad recorre una distancia muy corta a lo largo de una llanura. En uno de los extremos se encuentran Rubén, Pedro y Alejandro mientras que en el contrario Andrés, Fernando y Pablo. El globo viaja del primer grupo hasta el segundo en línea recta por el aire. Los tres primeros ven un globo con un ángulo de  $35^\circ$  y los otros tres compañeros lo ven con un ángulo de  $25^\circ$ . Estos dos grupitos se encuentran separados por una distancia de 2 Km. En el momento de la observación el globo comenzó a descender verticalmente aunque despacio, las caras de Alejandro, Adrián y Rosty que iban en él eran auténticos poemas, hasta que llegó al suelo mansamente.

El profesor de matemáticas les pidió calcular la altura a la que viajaba el globo y la distancia a la que se encontraba el globo cuando se posó en el suelo.

**Problema 340** Sara, Gema, Gloria, Marta, Julia, y Patricia están de excursión por las cumbres de Cotos. Casi sin esfuerzo llegaron a un punto en el que se quedaron sorprendidas por la espectacular vista de la Laguna, en la base del pico de Dos Hermanas, un macizo de roca casi vertical que descansa en las orillas del glaciar. En estos momentos nos encontramos a la misma altura que la Laguna y se veía la cumbre con un ángulo de  $50^\circ$ . Se quedaron boquiabiertas al ver a dos montañeros, que luchaban por alcanzar la cumbre, con un ángulo de  $40^\circ$ . El profesor de matemáticas les dijo que aún deberían escalar 30 metros para conquistar ese coloso de piedra y les pidió que calcularan:

1. La distancia a la que se encontraban de la Laguna.
2. La altura de ese pico desde la Laguna.

**Problema 341** Carolina, Noelia, Sergio, Julen, Andrea, Laura e Irene son tripulantes de un buque cargero que se encuentra en una situación muy delicada. Los modernos aparatos de medida han dejado de funcionar por el impacto de un rayo y, hay que recurrir a otros métodos de cálculo para dirigir el barco. El problema que se plantea es parecido al que sufrió el TITANIC: un iceberg se les acerca suspendido en el agua, su extremo superior se nos

muestra bajo un ángulo de  $1^\circ$ , después de acercarnos 200 metros hacia él observamos ese mismo punto con un ángulo de  $1^\circ 30'$ . Calcular la altura del iceberg y la distancia que nos separa de él.

Por curiosidad, sabemos que de un iceberg sólo se muestra el 10% y que la capacidad de frenado y virage de nuestro navío es de 500 metros, ¿estarán nuestros amigos en peligro?

**Problema 342** Paula, Daniel, Rodrigo, Lorena, Luis Fernando y Alejandro se encuentran en un barco que se dedica a rescatar tesoros de antiguos galeones hundidos. En este caso han detectado un viejo transatlántico que, por su situación, podría ser el TITANIC. Primero lo detectan con un ángulo de  $12^\circ$  y cuando se acercaron 2000 metros con un ángulo de  $20^\circ$ . Se pide calcular la profundidad a la que se encuentra el barco hundido y la distancia que nos queda por recorrer para estar encima de él. ¿Será posible acceder al barco hundido?

**Problema 343** Sergio, Nerea, Carlos, Rosa M<sup>a</sup>, Elena, Iván y M<sup>a</sup>Elvira se encuentran en una excursión por Galicia y residían en el pazo "Las Meigas". El lugar estaba plagado de extrañas leyendas y cuentos, desplegando por esos paisajes y haciendas una caricia de exoterismo y magia. El dueño de la casa rural animó el espectáculo contándonos alguna terroríficas historias de la comarca. Nos contó que se encontraba en la copa del árbol de enfrente de la puerta de la casa, cuando salieron dos jóvenes discutiendo con el trágico desenlace de un asesinato; él intentó bajar lo más rápidamente posible, pero cuando llevaba descendidos 12 metros se cayó al vacío. Se levantó de inmediato y corrió para auxiliar al herido, ya era demasiado tarde. Mientras tanto el asesino huyó despavorido y no pudo reconocerlo. La Policía recogió los siguientes datos: Desde el lugar donde ocurrió la tragedia se veía la copa del árbol con un ángulo de  $62^\circ$  y, la rama desde la que presumiblemente cayó nuestro interlocutor con un ángulo de  $50^\circ$ .

Calcular la altura desde la que se precipitó al suelo nuestro narrador y la distancia que tuvo que recorrer para llegar hasta el herido. ¿Que conclusión sacáis de los resultados?

**Problema 344** Julio Alberto, Roberto, Javier y Marta nos vienen contando una bonita historia de aventuras. Han estado haciendo barranquismo y hacen grandes alardes de valor personal en la lucha contra implacables elementos naturales. En particular nos contaron que se habían lanzado en tirolesa por encima de árboles y barrancos. Después de preguntarles a fondo sobre este suceso sacamos las siguientes medidas. Desde abajo se veía el principio de la tirolesa con un ángulo de  $60^\circ$  y retrocediendo 200 metros desde ese punto se volvía a ver el principio de la tirolesa con un ángulo de  $58^\circ$ .

Calcular la altura de la tirolina y la distancia que les separa hasta la base en la que se alza. ¿Nos están contando una trola o podemos creerlos?

## 2.2. Vectores

### 2.2.1. Operaciones con Vectores

**Problema 345** Calcular el vector  $\vec{z} = 3\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$  donde  $\vec{u} = (1, -1)$ ,  $\vec{v} = (-3, 2)$  y  $\vec{w} = (2, 1)$

**Problema 346** Calcular el vector  $\vec{z} = 3\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$  donde  $\vec{u} = (-1, 1)$ ,  $\vec{v} = (-3, 2)$  y  $\vec{w} = (2, 1)$

**Problema 347** Calcular el vector  $\vec{z} = 4\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$  donde  $\vec{u} = (-1, 3)$ ,  $\vec{v} = (2, 1)$  y  $\vec{w} = (1, 4)$

**Problema 348** (1 puntos) Calcular el vector  $\vec{z} = 4\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$  donde  $\vec{u} = (1, 3)$ ,  $\vec{v} = (5, 1)$  y  $\vec{w} = (-2, 4)$

**Problema 349** Calcular el vector  $\vec{z} = 2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$  donde  $\vec{u} = (3, 1)$ ,  $\vec{v} = (-1, 2)$  y  $\vec{w} = (3, -1)$

**Problema 350** Calcular el vector  $\vec{z} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$  donde  $\vec{u} = (3, -2)$ ,  $\vec{v} = (1, -3)$  y  $\vec{w} = (1, -2)$

**Problema 351** Calcular el vector  $\vec{z} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$  donde  $\vec{u} = (3, -1)$ ,  $\vec{v} = (-1, 3)$  y  $\vec{w} = (1, 2)$

**Problema 352** Calcular el vector  $\vec{z} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$  donde  $\vec{u} = (-3, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, -3)$  y  $\vec{w} = (1, 2)$

**Problema 353** Calcular el vector  $\vec{z} = 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$  donde  $\vec{u} = (4, -1)$ ,  $\vec{v} = (1, -3)$  y  $\vec{w} = (1, 3)$

### 2.2.2. Distancia entre dos puntos

**Problema 354** Calcular la distancia entre los puntos  $A(-3, 2)$  y  $B(5, -2)$

**Problema 355** Calcular la distancia entre los puntos  $A(3, 2)$  y  $B(5, -2)$

**Problema 356** Calcular la distancia entre los puntos  $A(1, 3)$  y  $B(4, -7)$

**Problema 357** Calcular la distancia entre los puntos  $A(2, 3)$  y  $B(4, -6)$

**Problema 358** Calcular la distancia entre los puntos  $A(1, -3)$  y  $B(3, 8)$

**2.2.3. División de un segmento**

**Problema 359** Dividir el segmento que une los puntos  $A(1, 1)$  y  $B(5, 9)$  en cuatro partes iguales.

**Problema 360** Dividir el segmento que une los puntos  $A(-1, 1)$  y  $B(7, 9)$  en cuatro partes iguales.

**Problema 361** Dividir el segmento que une los puntos  $A(3, -1)$  y  $B(15, 7)$  en cuatro partes iguales.

**Problema 362** Dividir el segmento que une los puntos  $A(-2, 3)$  y  $B(14, 7)$  en cuatro partes iguales.

**Problema 363** Dividir el segmento que une los puntos  $A(-1, 1)$  y  $B(8, 22)$  en tres partes iguales.

**Problema 364** Dividir el segmento que une los puntos  $A(2, 1)$  y  $B(11, 7)$  en tres partes iguales.

**Problema 365** Dividir el segmento que une los puntos  $A(-2, -1)$  y  $B(13, 9)$  en cinco partes iguales.

**Problema 366** Dividir el segmento que une los puntos  $A(3, 2)$  y  $B(13, 7)$  en cinco partes iguales.

**Problema 367** Dividir el segmento que une los puntos  $A(1, 3)$  y  $B(11, 18)$  en cinco partes iguales.

**Problema 368** Dividir el segmento que une los puntos  $A(1, 3)$  y  $B(21, 18)$  en cinco partes iguales.

**2.2.4. Punto medio y simétrico**

**Problema 369** Encontrar el punto simétrico  $B$  de  $A(1, -1)$  respecto del punto  $M(2, 3)$

**Problema 370** Encontrar el punto simétrico  $B$  de  $A(1, -1)$  respecto del punto  $M(-2, 3)$

**Problema 371** Encontrar el punto simétrico  $B$  de  $A(-2, 3)$  respecto del punto  $M(3, -4)$

**Problema 372** Encontrar el punto simétrico  $B$  de  $A(3, -1)$  respecto del punto  $M(-3, 5)$

**Problema 373** Encontrar el punto simétrico  $B$  de  $A(-3, 1)$  respecto del punto  $M(1, 0)$

**Problema 374** Encontrar el punto simétrico  $B$  de  $A(3, 1)$  respecto del punto  $M(1, 0)$

**Problema 375** Encontrar el punto simétrico  $B$  de  $A(3, -1)$  respecto del punto  $M(1, 0)$

**Problema 376** Encontrar el punto simétrico  $B$  de  $A(5, -1)$  respecto del punto  $M(1, 0)$

### 2.2.5. Ángulo entre dos vectores

**Problema 377** Calcular el ángulo que forman los vectores  $\vec{u} = (1, 2)$  y  $\vec{v} = (3, -1)$ .

**Problema 378** Calcular el ángulo que forman los vectores  $\vec{u} = (1, 2)$  y  $\vec{v} = (3, 1)$ .

**Problema 379** Calcular el ángulo que forman los vectores  $\vec{u} = (1, 3)$  y  $\vec{v} = (5, 1)$ .

**Problema 380** Calcular el ángulo que forman los vectores  $\vec{u} = (-2, 3)$  y  $\vec{v} = (3, 1)$ .

### 2.2.6. Varios

**Problema 381** Sean  $A(-2, 1)$ ,  $B(3, -1)$  y  $C(5, 8)$  vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide calcular el cuarto vértice y su centro.

**Problema 382** Sean  $A(-1, 1)$ ,  $B(2, -1)$  y  $C(5, 8)$  vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide calcular el cuarto vértice y su centro.

**Problema 383** Sean  $A(-3, 1)$ ,  $B(3, -2)$  y  $C(5, 8)$  vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide calcular el cuarto vértice y su centro.

**Problema 384** Sean  $A(-3, 1)$ ,  $B(3, -1)$  y  $C(5, 7)$  vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide calcular el cuarto vértice y su centro.

**Problema 385** Dado el vector  $\vec{u} = (-1, 4)$  encontrar otro que tenga la misma dirección y sentido pero con módulo 3.

**Problema 386** Dado el vector  $\vec{u} = (3, 1)$  encontrar otro que tenga la misma dirección y sentido pero con módulo 3.

**Problema 387** Dado el vector  $\vec{u} = (2, -1)$  encontrar otro que tenga la misma dirección y sentido pero con módulo 3.

**Problema 388** Dado el vector  $\vec{u} = (3, -1)$  encontrar otro que tenga la misma dirección y sentido pero con módulo 3.

**Problema 389** Dados los puntos  $A(-2, -1)$ ,  $B(2, 6)$  y  $C(4, 2)$ , se pide:

1. Encontrar un punto  $D$  de manera que estos cuatro puntos formen un paralelogramo y encontrar su centro.
2. Calcular sus ángulos y la longitud de sus lados.
3. Encontrar todos los vectores perpendiculares al vector  $\overrightarrow{AB}$  que tengan módulo 8.

**Problema 390** Hallar todos los vectores perpendiculares a  $\vec{u} = (-3, -4)$  que tengan módulo 20.

**Problema 391** Calcular dos vectores perpendiculares a  $\vec{u} = (3, -1)$  que tengan de módulo 8.

**Problema 392** Sean los puntos  $A(1, 0)$ ,  $B(3, 1)$  y  $C(5, 7)$  vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Calcular el cuarto vértice  $D$  y el centro.
2. Calcular el ángulo que tiene por vértice  $B$ .
3. Encontrar los vectores perpendiculares a  $\overrightarrow{AB}$  que tengan módulo 5.

## 2.3. Geometría Analítica

### 2.3.1. Ecuaciones de la Recta

**Problema 393** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $A(1, 3)$  y  $B(-1, 5)$

**Problema 394** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $A(2, 3)$  y  $B(4, -5)$

**Problema 395** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $A(3, -1)$  y  $B(5, 2)$

**Problema 396** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $A(2, 1)$  y  $B(4, -3)$

**Problema 397** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $A(3, 1)$  y  $B(4, -1)$

**Problema 398** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $A(1, 1)$  y  $B(3, -1)$

**Problema 399** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $A(1, 2)$  y  $B(-1, 3)$

**Problema 400** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $A(1, 2)$  y  $B(3, -1)$

**Problema 401** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $A(1, -2)$  y  $B(3, 3)$  y el ángulo que forma con el eje de abscisas.

**Problema 402** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $A(-1, 2)$  y  $B(3, 3)$  y el ángulo que forma con el eje de abscisas.

**Problema 403** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $A(1, -1)$  y  $B(3, 3)$  y el ángulo que forma con el eje de abscisas.

**Problema 404** Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos  $A(1, -1)$  y  $B(3, 3)$  y el ángulo que forma con el eje de abscisas.

**Problema 405** Expresa de todas las maneras que conozcas la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(1, 0)$  y  $B(4, 5)$ , calcula después el ángulo que forma con el eje de abscisas.

### 2.3.2. Intersección de dos rectas

**Problema 406** Hallar el punto de intersección de las rectas

$$2x - y + 8 = 0, \quad 3x + y - 3 = 0$$

**Problema 407** Hallar el punto de intersección de las rectas

$$2x + y + 8 = 0, \quad 3x - y - 3 = 0$$

**Problema 408** Hallar el punto de intersección de las rectas

$$3x + 2y + 8 = 0, \quad 3x - y - 4 = 0$$

**Problema 409** Hallar el punto de intersección de las rectas

$$2x - y + 8 = 0, \quad 3x - y - 4 = 0$$

**Problema 410** Hallar el punto de intersección de las rectas

$$x - y + 3 = 0, \quad 2x + y - 6 = 0$$

**Problema 411** Hallar el punto de intersección de las rectas  $r : x - 3y + 2 = 0$  y  $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$ , así como el ángulo que forman.

**Problema 412** Hallar el punto de intersección de las rectas  $r : 2x + 3y - 1 = 0$  y  $s : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$ , así como el ángulo que forman.

**Problema 413** Hallar el punto de intersección de las rectas  $r : 2x + y - 1 = 0$  y  $s : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$ , así como el ángulo que forman.

**Problema 414** Hallar el punto de intersección de las rectas  $r : 2x + y - 1 = 0$  y  $s : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$ , así como el ángulo que forman.

### 2.3.3. Distancias

**Problema 415** Calcula la distancia del punto  $P(2, 3)$  a la recta  $r$  en los siguientes casos:

1.  $r : y = 3x - 2$

2.  $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$

3.  $r : 3x + 4y - 5 = 0$

**Problema 416** Dado el punto  $P(2, -1)$ , calcular la distancia de éste a las siguientes rectas:

1.

$$r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

2.

$$s : \frac{x - 1}{-2} = \frac{y + 1}{1}$$

**Problema 417** Calcular la distancia del punto  $A(3, -1)$  a las rectas:

a)  $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2}$

b)  $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

c)  $r : 2x + 3y - 3 = 0$

**Problema 418** Calcular

1. la distancia del punto  $P(2, 1)$  a la recta  $3x - y + 1 = 0$ .
2. el ángulo formado por las rectas

$$r : 3x - y - 1 = 0, \quad s : x + y + 2 = 0$$

### 2.3.4. Ángulos

**Problema 419** Calcular el ángulo formado por las rectas:

- 1.

$$r_1 : 3x - y + 1 = 0$$

$$s_1 : 2x + 3y + 4 = 0$$

- 2.

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases} \quad r_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2}$$

**Problema 420** Calcular el ángulo que forman las rectas

a)  $r : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3}, \quad s : 2x + y - 1 = 0$

b)  $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \quad s : 3x + y + 1 = 0$

## 2.4. Cónicas

### 2.4.1. Circunferencia

**Problema 421** Calcular la ecuación de la circunferencia de centro  $C(3, 1)$  y radio  $r = 2$

**Problema 422** Dada la circunferencia  $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 16 = 0$ , calcular su centro y su radio.

**Problema 423** Calcular la ecuación de la circunferencia de centro  $C(3, -1)$  y radio  $r = 2$

**Problema 424** Dada la circunferencia  $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 16 = 0$ , calcular su centro y su radio.

**Problema 425** Calcular la ecuación de la circunferencia de centro  $C(3, -2)$  y radio  $r = 3$

**Problema 426** Dada la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 16 = 0$ , calcular su centro y su radio.

**Problema 427** Calcular la ecuación de la circunferencia de centro  $C(-1, 1)$  y radio  $r = 4$

**Problema 428** Dada la circunferencia  $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 16 = 0$ , calcular su centro y su radio.

**Problema 429** Calcular la ecuación de la circunferencia de centro  $C(2, -1)$  y radio  $r = 4$

**Problema 430** Calcular la ecuación de la circunferencia de centro  $C(1, 2)$  y radio  $r = 3$

**Problema 431** Calcular la ecuación de la circunferencia de centro  $C(-1, 1)$  y radio  $r = \sqrt{3}$

**Problema 432** Dada la circunferencia  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ , calcular su centro y su radio.

**Problema 433** Calcular la ecuación de la circunferencia de centro  $C(1, -2)$  y radio  $r = \sqrt{7}$

**Problema 434** Dada la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$ , calcular su centro y su radio.

**Problema 435** Calcular la ecuación de la circunferencia de centro  $C(2, 0)$  y radio  $r = \sqrt{5}$

**Problema 436** Dada la circunferencia  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ , calcular su centro y su radio.

**Problema 437** Calcular la ecuación de la circunferencia de centro  $C(3, 0)$  y radio  $r = \sqrt{5}$

**Problema 438** Dada la circunferencia  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ , calcular su centro y su radio.

**Problema 439** Calcula la ecuación de la recta tangente a la circunferencia  $3x^2 + 3y^2 + x - 5y - 2 = 0$  en el punto  $P(-1, 0)$

**Problema 440** Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos  $A(-1, 1)$ ,  $B(2, 2)$  y  $C(2, 0)$ .

**Problema 441** Encontrar el centro y el radio de las posibles circunferencias:

1.  $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 4 = 0$

2.  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 15 = 0$

### 2.4.2. Elipse

**Problema 442** Sea una elipse cuyo eje mayor mide  $18\text{cm}$  y su distancia focal es  $6\text{cm}$ . Calcular el semieje menor y su excentricidad.

**Problema 443** Dada una elipse, que tiene una excentricidad de  $0,6$ , y una distancia focal de  $8\text{cm}$ , calcular las dimensiones del semieje mayor y del eje menor.

**Problema 444** Dada una elipse, que tiene  $0,4$  de excentricidad, y su semieje menor mide  $4\text{cm}$ , calcular las dimensiones del eje mayor y la semidistancia focal.

### 2.4.3. Hipérbola

**Problema 445** Dada una hipérbola de excentricidad  $1,5$  y cuyo eje principal mide  $4\text{cm}$ , calcular el eje secundario y la distancia focal.

**Problema 446** Dada la hipérbola de cuyo eje secundario mide  $6\text{cm}$  y tiene de semidistancia focal  $9\text{cm}$ , calcular el eje principal y su excentricidad.

**Problema 447** Si la distancia desde un punto cualquiera de la hipérbola hasta los dos focos es de  $28$  y  $14\text{cm}$  respectivamente, y su excentricidad es de  $1,8$ , calcular la distancia focal y el semieje secundario.

## Capítulo 3

# Problemas de Análisis

### 3.1. Sucesiones

#### 3.1.1. Términos de una sucesión

**Problema 448** Se pide:

1. Calcular el término primero y noveno de las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = 2n^2 + 3$

b)  $b_n = \frac{2n + 5}{n + 1}$

c)  $c_n = (-1)^n \cdot 2^n$

2. Ahora calcular los términos segundo y séptimo de las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = n^3 - 1$

b)  $b_n = \frac{2n^2 - 1}{2n - 1}$

c)  $c_n = (-1)^n \cdot n^n$

3. Comprobar si los números 1, 6, 5,  $\frac{9}{4}$ ,  $\frac{18}{5}$ , 4 y  $\frac{7}{2}$  son términos de la

sucesión  $a_n = \frac{3n + 6}{n}$

4. Hallar el término general de las siguientes sucesiones:

a) 4, 9, 14, 19, 24,...

b) 5, 11, 17, 23, 29,...

c)  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$

$$d) 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$$

$$e) 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, \dots$$

$$f) -3, 9, -27, 81, -243, \dots$$

### 3.1.2. Sucesiones crecientes y acotadas:

**Problema 449** Se pide:

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son monótonas crecientes o decrecientes y cuyos términos generales son:

$$a) a_n = \frac{2n+1}{n}$$

$$b) b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$c) c_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

$$d) d_n = 7$$

$$e) e_n = n - 3^n$$

2. Indicar si están acotadas las siguientes sucesiones, que tienen por término general:

$$a) a_n = 3n - 2$$

$$b) b_n = \frac{3n-1}{n+1}$$

$$c) c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3n}$$

$$d) d_n = (-1)^{n+1}(n+3)$$

### 3.1.3. Progresiones aritméticas

**Problema 450** Se pide:

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son aritméticas

$$a) 1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$$

$$b) 1, 4, 8, 13, 19, 26, \dots$$

$$c) -2, -5, -8, -11, -14, \dots$$

$$d) 1, -2, 3, -4, 5, \dots$$

$$e) 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots$$

2. Escribir los cuatro primeros términos de las sucesiones siguientes, y calcular en cada una de ellas el término que ocupa el lugar 10 y el término general.
  - a) El primero es -2 y la diferencia es  $d = \frac{1}{5}$
  - b) El segundo vale -4 y la diferencia es  $d = 3$ .
  - c) El primero vale 16 y el segundo 12.
3. En las siguientes progresiones aritméticas, hallar el primer término, la diferencia, el término general y el término  $a_{12}$ 
  - a) El tercer término es -5 y el cuarto -9
  - b) El cuarto término es  $\sqrt{2}$  y el noveno  $3 + \sqrt{2}$ .
4. Calcular el término  $a_{13}$  de las siguientes progresiones aritméticas:
  - a) La diferencia es igual al cuarto término, y el noveno vale 8.
  - b) El quinto término es  $-\frac{1}{2}$  y el décimo es 5.
5. Calcular el término  $a_{15}$  de las siguientes progresiones aritméticas.
  - a) La diferencia es igual al segundo término y el término octavo vale -6.
  - b) El tercer término es  $-\frac{1}{3}$  y el noveno es 9.

**Problema 451** Las edades de cinco hermanos están en progresión aritmética y suman 40 años. Si la edad del mayor es cinco veces la del pequeño, ¿cuál es la edad de cada uno de ellos?.

**Problema 452** Hallar la suma de los 30 primeros términos de la progresión aritmética 2, 8, 14, 20, ...

**Problema 453** Calcular la suma de los 50 primeros números pares.

**Problema 454** En una progresión aritmética en la que  $a_4 = 12$  y  $d = \frac{1}{2}$ . Calcular la suma de los primeros 20 primeros números.

**Problema 455** En una progresión aritmética sea  $a_4 = \frac{3}{8}$  y  $a_7 = 6$ . Calcular la suma de los 20 primeros términos.

**Problema 456** ¿Cuántos términos hay que sumar a la progresión 38, 35, 32, 29, ... para obtener como resultado 245.

**Problema 457** Dada la progresión  $3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots$

1. Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.
2. Calcular en término  $a_{20}$ , y  $r$  o  $d$  si procede.
3. Calcular la suma de los veinte primeros términos.

**Problema 458** Dada la progresión  $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots$

1. Calcular en término  $a_{10}$ , y  $d$ .
2. Calcular la suma de los diez primeros términos.

**Problema 459** Dada la progresión  $3, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots$

1. Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.
2. Calcular en término  $a_{20}$ , y  $r$  o  $d$  si procede.
3. Calcular la suma de los veinte primeros términos.

**Problema 460** Dada la progresión  $6, 12, 18, 24, 30, \dots$

1. Decidir si la sucesión es una progresión geométrica, aritmética o ninguna de las dos, explicando el porqué.
2. Calcular en término  $a_n$ , y  $r$  o  $d$  si procede.
3. Calcular la suma de los diez primeros términos.

### 3.1.4. Progresiones geométricas

**Problema 461** Se pide:

1. Estudiar si las siguientes sucesiones son geométricas

- a)  $1, 4, 7, 11, 16, 22, \dots$
- b)  $1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots$
- c)  $4^{-3}, 4^{-2}, 4^{-1}, 1, 4, 4^2, \dots$
- d)  $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \dots$
- e)  $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, 5^2, 5^3, \dots$

2. En una progresión geométrica con  $a_2 = \frac{1}{3}$  y  $r = \frac{2}{3}$ , calcular  $a_1$ ,  $a_n$  y  $a_{10}$ .

**Problema 462** Escribe los cinco primeros términos de una progresión geométrica con  $a_1 = 2$  y  $r = \sqrt{2}$ . Halla el término general y el lugar que ocupa el término que vale 64.

**Problema 463** Calcular el término  $a_1$  y la razón de una progresión geométrica si  $a_5 = -\frac{4}{3}$  y  $a_8 = \frac{32}{3}$

**Problema 464** Calcular el término  $a_{12}$  de una progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros términos es 16 y la razón vale 3.

**Problema 465** Calcular el término  $a_9$  de una progresión geométrica creciente sabiendo que la suma de los tres primeros términos es 42 y que el segundo vale 12.

**Problema 466** ¿Cuánto valen los ángulos interiores de un cuadrilátero si están en progresión geométrica y el ángulo mayor es ocho veces el ángulo menor?

**Problema 467** En una progresión geométrica el primer término es 5 y la razón vale -3. Calcular la suma de los diez primeros términos de ella.

**Problema 468** En una progresión geométrica de razón  $-\frac{1}{2}$  el primer término es 8. Calcular el producto de los cinco primeros términos.

**Problema 469** El cuarto término de una progresión geométrica es 4 y el noveno es 128. Calcular:

**Problema 470** El primer día entrenamos 7 minutos y cada día siguiente entrenamos el doble que el día anterior. ¿Cuánto tiempo hemos entrenado después de una semana?

**Problema 471** Hallar la suma de los términos de las siguientes progresiones geométricas ilimitadas.

**Problema 472** Si los términos de una progresión geométrica decreciente suman 12 y el primer término es 2, ¿cuál es la razón?. Escribir seis términos de esta progresión.

**Problema 473** Dada la progresión geométrica cuyo tercer término es 9 y el noveno es 1, calcular

1. El primer término y la razón
2. El término general
3. Estudiar si la sucesión es creciente o decreciente

4. Estudiar si la sucesión está acotada
5. El producto de los nueve primeros términos
6. La suma de los nueve primeros términos
7. La suma total de la progresión

**Problema 474** Dada la progresión  $2, 6, 18, 54, \dots$

1. Calcular  $r$ ,  $a_6$  y su término general  $(a_n)$ .
2. Calcular el producto de los seis primeros términos.
3. Calcular la suma de los seis primeros términos.

**Problema 475** Dada la progresión geométrica cuyo tercer término es 9 y el quinto es 1, calcular

1. El primer término y la razón
2. El término general
3. Estudiar si la sucesión es creciente o decreciente
4. Estudiar si la sucesión está acotada
5. El producto de los nueve primeros términos
6. La suma de los nueve primeros términos
7. La suma total de la progresión

**Problema 476** De una progresión geométrica se conoce el tercer término  $a_3 = 81$ , y el sexto  $a_6 = 3$ .

1. Calcular  $r$ ,  $a_1$  y su término general  $(a_n)$ .
2. Estudiar si la sucesión es creciente o decreciente
3. Estudiar si la sucesión está acotada
4. La suma y producto de los seis primeros términos
5. La suma total de la progresión

## 3.2. Límites de sucesiones

### 3.2.1. Idea intuitiva

**Problema 477** Utiliza la calculadora para comprobar que los términos de la sucesión  $(a_n) = \left(\frac{3n^2 + 3}{n^2}\right)$  se aproximan a 3. Calcular para ello los valores de  $a_1, a_4, a_{10}, a_{40}, a_{100}$  y  $a_{1000}$ .

**Problema 478** Utilizar la calculadora para calcular a que valor se aproximan las siguientes sucesiones. Calcular para ello los valores de  $a_1, a_4, a_{10}, a_{40}, a_{100}$  y  $a_{1000}$

1.  $(a_n) = \left(\frac{n+3}{n^2+1}\right)$
2.  $(a_n) = \left(\frac{3n+4}{3n-1}\right)$
3.  $(a_n) = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{5}, \frac{7}{8}, \frac{9}{11}, \dots\right\}$
4.  $(a_n) = \left(\sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}\right)$

### 3.2.2. Definición

**Problema 479** Averigua a partir de que término de la sucesión  $a_n = \frac{4n-3}{3n}$  se cumple que  $\left|a_n - \frac{4}{3}\right| < \frac{1}{1000}$ .

**Problema 480** La sucesión  $(a_n) = \left(\frac{1}{n+4}\right)$  tiene de límite 0. ¿A partir de que término de esta sucesión todos los siguientes se diferencian del límite menos de una milésima?

**Problema 481** Hallar un término de la sucesión  $(a_n) = \left(\frac{1-3n}{2n+1}\right)$  a partir del cual todos los términos siguientes se diferencien del límite menos de una milésima.

**Problema 482** Dada la sucesión de término general  $a_n = \frac{2n^3-4}{n^3-1}$  calcular el término de esta sucesión, a partir de cual todos los términos difieren del límite en menos de una milésima.

**Problema 483** Dada la sucesión de término general  $a_n = \frac{2n^3-4}{n^3-1}$  calcular el término de esta sucesión, a partir de cual todos los términos difieren del límite en menos de una milésima.

### 3.2.3. Sucesiones que tienden a infinito

**Problema 484** Utiliza la calculadora para averiguar que ocurre con los términos de las siguientes sucesiones al dar valores a  $n$  cada vez mayores.

1.  $(a_n) = (4^{n-1})$
2.  $(b_n) = \left(\frac{1 - n^3}{n}\right)$
3.  $(c_n) = ((-1)^n \cdot (n + 3)^2)$
4. Dado  $k = 121$ , averiguar a partir de que término de la sucesión  $(a_n) = (4n - 3)$  todos los siguientes son mayores que  $k$ . Compruébalo calculando algún término posterior.
5. Dado  $k = -213$ , averiguar a partir de que término de la sucesión  $(a_n) = (3 - 6n)$  todos los siguientes son menores que  $k$ . Compruébalo calculando algún término posterior.

### 3.2.4. Cálculo de Límites de sucesiones

**Problema 485** Dadas las sucesiones  $(a_n) = (n^2 + 2)$  y  $(b_n) = (1 - n^2)$ , calcular los siguientes límites:

1.  $\lim a_n$
2.  $\lim b_n$
3.  $\lim(a_n - b_n)$
4.  $\lim(a_n + b_n)$
5.  $\lim(a_n \cdot b_n)$
6.  $\lim \frac{a_n}{b_n}$

**Problema 486** Calcular los siguientes límites:

1.  $\lim \frac{2n + 1}{4n + 7}$
2.  $\lim \frac{2n^2 + 1}{3n^3 + 2}$
3.  $\lim \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{3n^3 + 2}$

4.  $\lim \frac{2n^3 + 2n^2 + 1}{3n^2 + 1}$

5.  $\lim \frac{2n^3 + 2n^2 + 1}{3n^2 + 1}$

**Problema 487** Calcular los siguientes límites:

1.  $\lim \sqrt{\frac{8n + 1}{2n + 5}}$

2.  $\lim \sqrt{\frac{3n + 1}{n^2 - 1}}$

3.  $\lim \sqrt{\frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 - 2}}$

### 3.2.5. Número e

**Problema 488** Calcular los cinco primeros términos de la sucesión de término general  $a_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}$ . Calcular también los términos  $a_{200}$  y  $a_{1000}$ . Relacionar esta sucesión con el número  $e$ .

**Problema 489** Calcular los siguientes límites:

1.  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$

2.  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$

3.  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$

4.  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n+2}$

### 3.2.6. Varios

**Problema 490** Calcular los siguientes límites

1.  $\lim \frac{2n^2 - n + 1}{3n^3 + 1}$

2.  $\lim \frac{2n^4 - n^2 + 1}{n^3 - 1}$
3.  $\lim \sqrt{\frac{8n^2 - n + 1}{2n^2 - 1}}$
4.  $\lim \left( \frac{n^3 + 1}{n^3 - 1} \right)^{2n^3}$
5.  $\lim \left( \frac{2n^2 + n - 1}{n^2 - 1} \right)^{2n}$

**Problema 491** Calcular los siguientes límites

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 - x^2 + 1}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + 1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - x - 1}{2x^2 - x} \right)^{x^2}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \right)^{2x}$

**Problema 492** Calcular los siguientes límites

1.  $\lim \frac{2n^2 - n + 1}{3n^3 + 1}$
2.  $\lim \frac{2n^4 - n^2 + 1}{n^3 - 1}$
3.  $\lim \sqrt{\frac{8n^2 - n + 1}{2n^2 - 1}}$
4.  $\lim \left( \frac{n^3 + 1}{n^3 - 1} \right)^{2n^3}$
5.  $\lim \left( \frac{2n^2 + n - 1}{n^2 - 1} \right)^{2n}$

### 3.3. Funciones

#### 3.3.1. Concepto de función, Dominio y Recorrido

**Problema 493** Se pide:

1. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones

a)  $f(x) = 3x + 1$

b)  $f(x) = x^2 + 4x$

c)  $f(x) = \sqrt{x + 9}$

d)  $f(x) = -x^2 + 2$

e)  $f(x) = \frac{1}{x + 1}$

f)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$

2. Halla el dominio de las siguientes funciones

a)  $f(x) = x^3 - x + 2$

b)  $f(x) = \frac{1}{2 + x}$

c)  $f(x) = \frac{2x}{x - 4}$

d)  $f(x) = \frac{2}{3x + 6}$

e)  $f(x) = 2 + \sqrt{x + 5}$

3. En las funciones del ejercicio anterior, calcular las imágenes de 0, 4, -2, -5.

**Problema 494** Hallar el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = \sqrt{x - 1}$

2.  $f(x) = x^2$

3.  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

4.  $f(x) = \frac{1}{|x|}$

5.  $f(x) = \frac{|x|}{x}$

6.  $f(x) = \sqrt{1 - x}$

7.  $f(x) = 4 - x^2$

8.  $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

9.  $f(x) = |x - 2|$

10.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

**3.3.2. Funciones definidas a trozos****Problema 495** Se pide:

1. Representar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2. Representar la función
- $f(x) = |x + 1|$
- Tener en cuenta que por la definición de valor absoluto tenemos

$$f(x) = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x + 1 \geq 0 \\ -(x + 1) & \text{si } x + 1 < 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

**3.3.3. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos****Problema 496** Se pide:

1. Calcula la variación de la función
- $f(x) = x^2 - 4$
- en los intervalos que se indican

- a) En el  $[-1, 5]$
- b) En el  $[0, 5]$
- c) En el  $[-6, -1]$

2. Calcula la variación de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 9 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

En los siguientes intervalos.

- a) En el  $[-2, 1]$
- b) En el  $[1, 3]$

**Solución:**

$f(1) = 1$ ,  $f(3) = 9 \implies$  la variación de la función  $f(x)$  en el intervalo es  $f(3) - f(1) = 9 - 1 = 8$

- c) En el  $[4, 7]$

3. Estudia si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en los puntos que se indican utilizando la calculadora.

a)  $f(x) = x^3$  en  $x = 0$

b)  $f(x) = 3 - x^2$  en  $x = 1$

4. Indica en que intervalos son crecientes o decrecientes las siguientes funciones y calcular, si los tienen, sus máximos y mínimos relativos.

a)  $f(x) = -x^3 + 1$

b)  $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c)  $f(x) = x^3 - 3x$

d)  $f(x) = \frac{x - 2}{x}$

e)  $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

f)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + x}$

### 3.3.4. Funciones acotadas. Funciones simétricas. Estudio gráfico de la continuidad. Puntos de corte con los ejes.

**Problema 497** Se pide:

1. Explicar si las siguientes funciones están acotadas y porqué

a)  $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ .

b)  $f(x) = |x - 1|$

c)  $f(x) = \cos x$

2. Estudiar la simetría de las siguientes funciones

a)  $f(x) = 3x^2 - 1$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^6 + 3}$

c)  $f(x) = \frac{|x| - 5}{x}$

d)  $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 5}$

3. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones

a)  $f(x) = 2x^3 - 8x$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^6 + 3}$

$$c) f(x) = \frac{|x| - 5}{x}$$

$$d) f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 5}$$

4. clasifica el tipo de discontinuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = -\frac{1}{|x - 2|}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$c) \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si } x < -1 \\ 9 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

5. Idear cuatro funciones definidas a trozos y calcular su dominio, recorrido, cortes con los ejes, simetrías, continuidad y por último decir si están acotadas.

6. Representar gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos

### 3.3.5. Operaciones con funciones. Funciones recíprocas

**Problema 498** Se pide:

1. Dadas las funciones  $f(x) = x^3 - 2$  y  $g(x) = \sqrt{x + 2}$ , calcular si es posible

$$a) (f + g)(4)$$

$$b) (f + g)(-2)$$

$$c) (3 \cdot f)(-3)$$

$$d) (f \cdot g)(0)$$

$$e) (f \cdot g)(-3)$$

$$f) \left(\frac{f}{g}\right)(4)$$

2. Dadas las funciones  $f(x) = \frac{2}{x - 5}$  y  $g(x) = \frac{1}{x}$

a) Dominio de  $f$

b) Dominio de  $g$

c) Calcular la función  $(2 \cdot f)$  y su dominio.

d) Calcular la función  $(f + g)$  y su dominio.

- e) Calcular  $(f \cdot g)$  y su dominio.
- f) Calcular  $\left(\frac{f}{g}\right)$  y su dominio.
3. Siendo las funciones  $f(x) = x^3 + 1$  y  $g(x) = 2x$ , calcular las funciones compuestas
- a)  $(g \circ g)$
- b)  $(f \circ g)$
- c)  $(g \circ f)$
4. Siendo las funciones  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  y  $g(x) = \frac{1}{x}$ , calcular las funciones compuestas
- a)  $(g \circ g)$
- b)  $(f \circ g)$
- c)  $(g \circ f)$
5. Calcula la función recíproca de
- a)  $f(x) = 5x$
- b)  $f(x) = 3x + 1$
- c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

### 3.3.6. Puntos de Corte

**Problema 499** Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3}$$

**Problema 500** Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 30}{x^3 - 2}$$

**Problema 501** Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x^3 + 2}$$

**Problema 502** Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 4}$$

**Problema 503** Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 3}$$

**Problema 504** Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 5}$$

### 3.3.7. Simetría

**Problema 505** Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 1}$

2.  $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

**Problema 506** Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

2.  $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

**Problema 507** Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = \frac{x^3}{x^4 - x^2 + 1}$

2.  $g(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^3}$

3.  $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4}$

**Problema 508** Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^3}$

2.  $g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1}$

3.  $h(x) = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^4 - 1}$

**Problema 509** Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

2.  $g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 1}$

3.  $h(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1}$

**Problema 510** Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^3}$

2.  $g(x) = \frac{x^3 + 1}{x^4}$

**Problema 511** Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x}$

2.  $g(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2}$

**Problema 512** Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 2}$

2.  $g(x) = \frac{4x^3 - x + 1}{x^2 + 1}$

3.  $h(x) = \frac{2x^5}{x^2 - 1}$

**Problema 513** Calcular la simetría de las siguientes funciones

1.  $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

2.  $g(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$

3.  $h(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 2}$

**Problema 514** Calcular la simetría de las siguientes funciones

1.  $f(x) = \frac{x^6 - x^2 - 1}{x^4 + 2}$

$$2. g(x) = \frac{2x^2 - 1}{3x^3}$$

$$3. h(x) = \frac{3x + 2}{x + 1}$$

**Problema 515** Calcular la simetría de las siguientes funciones

$$1. f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^6 + x^2 - 1}$$

$$2. g(x) = \frac{3x^5}{x^2 + 4}$$

$$3. h(x) = \frac{2x^2 + x}{x - 1}$$

**Problema 516** Calcular la simetría de las siguientes funciones

$$1. f(x) = \frac{3x^6 - 2}{x^4 - 1}$$

$$2. g(x) = \frac{-2x^3}{x^2 + 1}$$

$$3. h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

**Problema 517** Calcular la simetría de las siguientes funciones

$$1. f(x) = \frac{4x^4 + 1}{x^2 - 2}$$

$$2. g(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$$

$$3. h(x) = \frac{2x^2 + 1}{x + 3}$$

**Problema 518** Calcular la simetría de las siguientes funciones

$$1. f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^6 + 1}$$

$$2. g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 4}$$

$$3. h(x) = \frac{x^5 - 1}{x^3}$$

**Problema 519** Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

$$1. f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x}$$

$$2. g(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2}$$

**3.3.8. Composición de Funciones****Problema 520** Calcular  $f \circ g$  y  $g \circ f$ , siendo

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{x - 1}$$

**Problema 521** Calcular  $f \circ g$  y  $g \circ f$ , siendo

$$f(x) = \frac{x - 1}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

**Problema 522** Calcular  $f \circ g$  y  $g \circ f$ , siendo

$$f(x) = \frac{2x - 1}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

**Problema 523** Calcular  $f \circ g$  y  $g \circ f$ , siendo

$$f(x) = \sqrt{x - 1} \text{ y } g(x) = \frac{1}{x^2}$$

**Problema 524** Dadas las funciones  $f$  y  $g$  calcular  $g \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$ .

$$f(x) = \frac{2x}{x - 1}, \quad g(x) = x - 1$$

**Problema 525** Dadas las funciones  $f$  y  $g$  calcular  $g \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$ .

$$f(x) = \frac{x - 1}{2x}, \quad g(x) = x + 2$$

**Problema 526** Dadas las funciones  $f$  y  $g$  calcular  $g \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$ .

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad g(x) = x + 1$$

**Problema 527** Dadas las funciones  $f$  y  $g$  calcular  $g \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$ .

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2x}, \quad g(x) = x + 3$$

**Problema 528** Dadas las funciones  $f$  y  $g$  calcular  $g \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$ .

$$f(x) = \frac{x + 2}{x}, \quad g(x) = x - 2$$

**Problema 529** Dadas las funciones  $f$  y  $g$  calcular  $g \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$ .

$$f(x) = \frac{x + 3}{2x}, \quad g(x) = x - 4$$

**3.3.9. Función Inversa**

**Problema 530** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

**Problema 531** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

**Problema 532** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{2x+2}{3x+2}$

**Problema 533** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

**Problema 534** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

**Problema 535** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

**Problema 536** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$

**Problema 537** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{x+3}{3x-1}$

**Problema 538** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

**Problema 539** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

**Problema 540** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{x+3}{2-x}$

**Problema 541** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{2x-1}{2-x}$

**Problema 542** Calcular la función inversa de  $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

**3.3.10. Monotonía**

**Problema 543** Comprobar si la función  $f(x) = 10^{-x}$  es creciente o decreciente en  $x = 2$

**Problema 544** Comprobar si la función  $f(x) = 3^x$  es creciente o decreciente en  $x = 2$

**Problema 545** Comprobar si la función  $f(x) = x^x$  es creciente o decreciente en  $x = 2$

### 3.4. Límites de funciones

#### 3.4.1. Límite de una función en un punto

**Problema 546** Se pide:

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calcular:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
  - b)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
  - c)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
2. Utilizar la calculadora para calcular a que valores se acercan las siguientes funciones en los puntos indicados:

- a)  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  en  $x = 3$

- b)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$  en  $x = -3$

**Problema 547** Calcular los siguientes límites

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

#### 3.4.2. Límite de una función en el infinito

**Problema 548** Se pide:

1. Para las siguientes funciones, calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

- a)  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3}$

- b)  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 5}$

- c)  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$

$$d) f(x) = 3^x$$

2. Calcular los límites de las siguientes funciones polinómicas:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4x - 1)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x - 1)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 1)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 1)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5 - 7)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 - 7)$$

### 3.4.3. Cálculo de límites de funciones racionales

**Problema 549** Se pide:

1. Calcular los siguientes límites y, en caso de que no existan, calcular los laterales.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 5}{x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2}{x + 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 1}{x - 3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 1}{x + 2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - x}{x - 3}$$

2. Calcular los siguientes límites simplificando fracciones:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{3x^4 - x^3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 - 3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 14x + 49}{x^2 - 49}$$

3. Calcular los siguientes límites

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 3} \\
 b) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x - 2}{3x^4 + 1} \\
 c) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x - 1}{x^2 + 2}
 \end{aligned}$$

### 3.5. Continuidad

#### 3.5.1. Continuidad en un punto y en un intervalo

**Problema 550** Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

1.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x}{2} + 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ x & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x = -1, \text{ y en } x = 2$$

4.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

5. Estudia si la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } -8 < x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

es continua en el intervalo  $(-8, 5]$ .

6. Calcular el valor de  $k$  para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq 3 \\ kx - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 3$$

7. Calcular cuánto deben valer  $a$  y  $b$  para que la función siguiente sea continua en todo su dominio.

$$\begin{cases} x^2 + a & \text{si } x < 2 \\ ax + b & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

### 3.5.2. Tipos de discontinuidad

**Problema 551** Se pide:

1. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones e indica de que tipo son:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -8 < x < -2 \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 6 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2. Calcular el verdadero valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a)

$$\begin{cases} x^3 - 2 & \text{si } 2 > x \\ 3x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} \quad \text{en } x = -2$$

**3.5.3. Continuidad y Operaciones:****Problema 552** Se pide:

1. Dadas las funciones  $f(x) = x^2 + 3x$  y  $g(x) = x^2 - 9$ , estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a)  $f + g$

b)  $f \cdot g$

c)  $\frac{f}{g}$

d)  $\frac{g}{f - g}$

2. Estudia la continuidad de la función  $f(x) = \frac{x^2 + 9x + 14}{x + 2}$  y, si es posible, complétala para que sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

**3.5.4. Problemas de Continuidad****Problema 553** 1. Encuentra los valores de  $k$  para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - k & \text{si } x < 1 \\ kx & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ es continua en todo } \mathbb{R}$$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x}{2} + 3 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de  $f(x)$ .

**Problema 554** 1. Encuentra los valores de  $k$  para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - k & \text{si } x < 1 \\ kx & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ es continua en todo } \mathbb{R}$$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x}{2} + 3 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de  $f(x)$ .

**Problema 555** Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 8 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 1, \text{ y en } x = 3$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de  $f(x)$ .

**Problema 556** 1. Encuentra los valores de  $k$  para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3kx^2 - 2k & \text{si } x < 2 \\ kx - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{es continua en todo } R$$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} + 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ \frac{x^2 + 1}{3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 1, \text{ y en } x = 3$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de  $f(x)$ .

**Problema 557** Encuentra los valores de  $k$  para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 3kx + 1 & \text{si } x < 1 \\ kx^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{es continua en todo } R$$

**Problema 558** Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } -1 < x < 5 \\ \frac{x^2 + 1}{2} & \text{si } x \geq 5 \end{cases} \quad \text{en } x = -1, \text{ y en } x = 5$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de  $f(x)$ .

**Problema 559** Se pide:

1. Encuentra los valores de  $k$  para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 3 & \text{si } x < 3 \\ (k + 1)x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{es continua en todo } R$$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-2}{2} & \text{si } 0 \leq x < 6 \\ x-4 & \text{si } x > 6 \end{cases} \quad \text{en } x=0, \text{ y en } x=6$$

En caso de exista alguna discontinuidad, decidir de que tipo es, y escribir, si procede, la extensión por continuidad de  $f(x)$ .

**Problema 560** Encuentra los valores de  $k$  para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2kx - 1 & \text{si } x < 3 \\ x + 2k & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{es continua en todo } R$$

**Problema 561** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ x + 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

1. Dibujar la gráfica de la función.
2. Estudiar la continuidad en los puntos  $x = 1$  y  $x = 3$ .

**Problema 562** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x - 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

1. Dibujar la gráfica de la función.
2. Estudiar la continuidad en los puntos  $x = 1$  y  $x = 3$ .

**Problema 563** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x + 5 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

1. Dibujar la gráfica de la función.
2. Estudiar la continuidad en los puntos  $x = 1$  y  $x = 3$ .

**Problema 564** Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } x < -1 \\ 3x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ .

**Problema 565** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + 3ax - 2 & \text{si } x < 1 \\ a^2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

calcular  $a$  para que esta función sea continua en  $x = 1$ .

**Problema 566** Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x < -1 \\ x + 4 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 4 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ .

**Problema 567** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + a^2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2a^2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

calcular  $a$  para que esta función sea continua en  $x = 1$ .

**Problema 568** Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -1 \\ 3x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 5x + 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ .

**Problema 569** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 - 2ax + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2a^2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

calcular  $a$  y  $b$  para que esta función sea continua en  $x = 1$ .

**Problema 570** Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

en  $x = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = 2$ .

**Problema 571** Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3x - 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

en  $x = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = 2$ .

### 3.6. Asíntotas de una función

**Problema 572** Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

**Problema 573** Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

**Problema 574** Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

**Problema 575** Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

**Problema 576** Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

**Problema 577** Calcular las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

y dibuja aproximadamente la gráfica de la función.

### 3.7. Problemas de Límites

**Problema 578** Calcular los siguientes límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 2x + 1)$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3 + x - 1)$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x - 1}{x^2 + 3x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$$

**Problema 579** Calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{2x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x - 1} \right)^{2x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x} \right)^{x+1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 1}{x - 1} \right)^{2x-2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + x}{x^2 - 1} \right)^{2x^2-1}$$

**Problema 580** Calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 - x + 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^3 + x + 1)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 1}{5x^2 + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 3x - 1}{x^2 + 2x - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 2}$$

**Problema 581** Calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \right)^{2x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 1} \right)^{2x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{3x^2 + x - 1} \right)^{x^2+1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{4x-1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^5 + 2x + 1}{x^5 - 1} \right)^{x^2-1}$$

**Problema 582** Calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 5x + 3)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 5x + 2)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 3x - 2}{5x^2 + 3x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 + 2x + 3}{3x^2 - 2x - 4}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^5 + 2x}$$

**Problema 583** Calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^4 - x^3 - 1}{2x^4 - 1} \right)^{3x-1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x^5 + 2x^2 - 1}{x^5 - 2x + 1} \right)^{x^3-1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^4 + 1}{5x^4 + 3x^3 - 1} \right)^{2x^3+1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^3 - x - 1}{3x^3 + 2} \right)^{x^2-1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^7 + x^4 - x + 1}{3x^7 - x^2 + 1} \right)^{7x-1}$$

**Problema 584** Calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 - 3x - 3)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^4 + 3x - 2)$$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 3x + 1}{5x^3 + 3x - 1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^4 - 2x + 3}{5x^2 - 2x - 4}$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{x^5 - x}$

**Problema 585** Calcular los siguientes límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1} \right)^{2x^2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^4 + x^2 - 1}{x^4 + x + 1} \right)^{2x^3 - 1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^6 + x^3 - 1}{3x^6 - x^3 - 1} \right)^{2x + 1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - x + 1}{x^3 + 2} \right)^{x^2 - 1}$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x^4 + x^3 - x^2 + 1}{3x^4 - x^2 + 1} \right)^{7x - 1}$

**Problema 586** Calcular los siguientes límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 10x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - \sqrt{x + 14}}{x - 2}$

**Problema 587** Calcular los siguientes límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 - 2x + 1)$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^4 + x - 2)$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{5x^3 + 2x - 1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 + 2x^2 + 3}{5x^2 + 2x - 4}$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x^5 - x}$

**Problema 588** Calcular los siguientes límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^3 - 3}{3x^3} \right)^{2x^3}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^5 + x^3 - 1}{x^5 - x + 1} \right)^{x^3+1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^7 - x^3 - 1}{5x^7 + 2x^3 - 1} \right)^{x+1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - x + 1}{x^3 + 2} \right)^{x^2-1}$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x^4 + x^3 - x^2 + 1}{3x^4 - x^2 + 1} \right)^{7x-1}$

**Problema 589** Calcular los siguientes límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - \sqrt{x+20}}{x-5}$

**Problema 590** Calcular los siguientes límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \right)^{5x^2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{3x^2 + x - 1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{4x-1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^5 + 2x + 1}{x^5 - 1} \right)^{x^2-1}$

**Problema 591** Calcular los siguientes límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 1}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$

**Problema 592** Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

**Problema 593** Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 3x + 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 2x - 1)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 2x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 - 3}{x^3 + 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 2}$$

**Problema 594** Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 2}{x} \right)^{x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x - 1}{2x^2 - 1} \right)^{3x^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^2/2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 2} \right)^{x^2}$$

**Problema 595** Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (6x^5 - 3x^2 - 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^3 + 2x + 1)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^3 + 3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 3x^2 - 2}{x^4 + 2x - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 2x^3 + 3}{5x^5 + 3}$$

**Problema 596** Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^3 - x - 1}{2x^2 + 1} \right)^{x+1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - x - 1} \right)^{2x^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2/2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 3}{3x - 1} \right)^{x/2}$$

**Problema 597** Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 + 2x - 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^2 + x - 1)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^3 + x^2 + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 3x + 2}{x^5 - x^4 + 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x - 1}{2x^3 + 1}$$

**Problema 598** Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{2x^3 + 3} \right)^{3x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^5 - 3x - 1}{3x^5 + 1} \right)^{x^3/2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2}{2x^2 + 5} \right)^{x^2/2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x-1} \right)^{3x}$$

**Problema 599** Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 + 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 1}{3x^2} \right)^{5x^2 - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{2x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^4 - 2x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2}$$

**Problema 600** Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x - 1}{x^2 + 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x - 1}{4x^3 + 2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x^2 + 2x - 1}{3x^2 + 1} \right)^{(x^2+1)/2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x/2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 8}{x^3 - 3x^2 + x + 2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-2} - 2}{x-3}$$

**Problema 601** Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 + x + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x + 1}{3x^3 + 2x^2 + 1}$$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 2}{5x^2 - 1} \right)^{(3x^2+1)/2}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{2x - 5} \right)^{x/2}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5x - 4} - 4}{x - 4}$

**Problema 602** Calcular los siguientes límites

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x + 1}{5x} \right)^{2x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 8}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5x - 4} - 4}{x - 4}$

**Problema 603** Calcular los siguientes límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$
4.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$
5.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$
11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$
12.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{5-x^2} - 2}$
13.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x-2}$
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x}$
15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{5x}$
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x \sec x}$
18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \tan x}{x}$
19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$
20.  $\lim_{x \rightarrow \pi} x \sec x$
21.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cot x}$
22.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
23.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$ . (Ayuda:  $(\frac{\operatorname{sen} t}{t})^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$ )
24.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3t}{t}$ . (Ayuda:  $\frac{\operatorname{sen} 3t}{t} = 3(\frac{\operatorname{sen} 3t}{3t})$ )
25.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 3t}$ . (Ayuda:  $\frac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 3t} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2t}{2t} \cdot \frac{3t}{\operatorname{sen} 3t}$ )
26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x}$
27.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos h)^2}{h}$

**Problema 604** Calcular los límites siguientes:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x + 2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 1}{10x^3 - 3x^2 + 7}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{10} - 11}{10x^{11} - 3}$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x + 3}$
6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 3x + 2}$
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)$
8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 3)^{-2}$
9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{x - 1} + \frac{3x}{x + 1}\right)$
10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x - 1} + \frac{3x}{x + 1}\right)$
11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 + 3})$
12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 1})$
13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$
14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x + \sqrt{9x^2 - x})$
15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$
16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - x}}$
18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 + x}}$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x + \operatorname{sen} x}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x}$$

**Problema 605** Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2}\right)^{3x^2}$$

**Problema 606** Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{7x}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 1}\right)^{5x^2}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 1}\right)^{2x}$$

**Problema 607** Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x + 2}$$

**Problema 608** Calcular:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 2x - 1}{3x^3 - 1} \right)^{2x}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right)^{2x^3}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{6x} \right)^{8x}$$

**Problema 609** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5}$$

**Problema 610** Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^{7x}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} \right)^{5x^2}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 1} \right)^{2x}$$

**Problema 611** Calcular los siguientes límites:

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{4 - \sqrt{x^2 - 9}}{x + 5}$$

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5}$$

Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x + 2}$$

Calcular:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 2x - 1}{3x^3 - 1} \right)^{2x}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right)^{2x^3}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{6x} \right)^{8x}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x^3 + 2x - 1}{x^3 - 1} \right)^{x^3}$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + 2} \right)^{5x}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1} \right)^{3x^2}$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^{5x}$$

**Problema 612** Calcular los siguientes límites

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x-2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} \right)^{2x}$

**Problema 613** Calcular los siguientes límites

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 1}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 1}{2x^2 - x - 1} \right)^{2x}$

**Problema 614** Calcular los siguientes límites

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 18}$

**Problema 615** Calcular los siguientes límites

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x-1}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - x}$

**Problema 616** Calcular los siguientes límites

1.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x+2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9x + 20}$

**Problema 617** Calcular los siguientes límites

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x - 3}{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4}$$

**Problema 618** Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2 + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2/2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^5 + 3x - 1}{5x^5 + 1} \right)^{2x + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 1}{3x + 2} \right)^{3x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 6x - 16}{x^4 + 2x^3 + x^2 + x - 2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3}{3x^3 + 2x^2 - 4x - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 + 2x^3 - 2x^2}{x^3 + x^2 + x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^4 - 2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 11} - 4}{x - 3}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{13 - x^2} - 3}{x - 2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\sin x}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{\ln(1 + \sin x)}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} xe^x, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x$$

### 3.8. Problemas Varios

#### 3.8.1. Problemas de Dominio

**Problema 619** Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{x - 4}$$

**Problema 620** Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}{x - 6}$$

**Problema 621** Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}{x - 8}$$

**Problema 622** Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 15}}{x - 7}$$

**Problema 623** Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x - 14}}{x - 5}$$

**Problema 624** Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}{x - 3}$$

**Problema 625** Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x - 1}}$$

**Problema 626** Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}}$$

**Problema 627** Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}}$$

**Problema 628** Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + x - 2}}$$

**Problema 629** Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 2}}$$

**Problema 630** Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 15}}$$

**Problema 631** Calcular el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x - 3}}$

### 3.8.2. Varios

**Problema 632** Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x - 2}{(x + 2)\sqrt{x - 1}}$$

2. Si  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  y  $g(x) = 2x$  calcular  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$

3. Sea  $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$  en el dominio  $R - \{1\}$ , calcular  $f^{-1}(x)$

4. Estudiar la simetría de la función  $f(x) = \frac{3x^3}{2x^2 - 1}$

**Problema 633** Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x - 3}{(x + 2)\sqrt{x + 1}}$$

2. Si  $f(x) = x^3 - 3$  y  $g(x) = |x|$  calcular  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$

3. Sea  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  en el dominio  $D = (-1, +\infty)$ , calcular  $f^{-1}(x)$

**Problema 634** Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x - 4}{(x + 3)\sqrt{x + 2}}$$

2. Si  $f(x) = x^2 - 2$  y  $g(x) = |x|$  calcular  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$

3. Sea  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$  en el dominio  $D = (-1, +\infty)$ , calcular  $f^{-1}(x)$

**Problema 635** Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x - 4)\sqrt{x + 2}}{x + 3}$$

2. Si  $f(x) = x^2 - 2$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  calcular  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$

3. Sea  $f(x) = \frac{x}{2x+1}$  en el dominio  $D = (-1/2, +\infty)$ , calcular  $f^{-1}(x)$

**Problema 636** Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x - 4)\sqrt{x + 2}}{x + 3}$$

2. Si  $f(x) = x^2 - 2$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  calcular  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$

3. Sea  $f(x) = \frac{x}{2x+1}$  en el dominio  $D = (-1/2, +\infty)$ , calcular  $f^{-1}(x)$

**Problema 637** Resolver:

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x + 5)\sqrt{x - 2}}{x - 2}$$

2. Si  $f(x) = x^2 + 1$  y  $g(x) = \sqrt{x - 1}$  calcular  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$

3. Sea  $f(x) = \frac{3x}{x-1}$  en el dominio  $D = (1, +\infty)$ , calcular  $f^{-1}(x)$

**Problema 638** Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x + 8)\sqrt{x - 2}}{(x - 2)}$$

2. Si  $f(x) = x - 2$  y  $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  calcular  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$

3. Sea  $f(x) = \frac{3x}{x-3}$  en el dominio  $R^+ - \{3\}$ , calcular  $f^{-1}(x)$

4. Estudiar la simetría de la función  $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^4 + 1}$

**Problema 639** Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{(x-1)}{(x+1)\sqrt{x}}$$

2. Si  $f(x) = x^2 - 3$  y  $g(x) = \sqrt{x-1}$  calcular  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$

3. Sea  $f(x) = \frac{5x-2}{x+1}$  en el dominio  $R^+ - \{-1\}$ , calcular  $f^{-1}(x)$

4. Estudiar la simetría de la función  $f(x) = \frac{3x^3}{x^2+8}$

**Problema 640** Resolver

1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x-6}{(x+3)\sqrt{x-2}}$$

2. Si  $f(x) = \sqrt{x^2-3}$  y  $g(x) = x-1$  calcular  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$

3. Sea  $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$  en el dominio  $R - \{1/2\}$ , calcular  $f^{-1}(x)$

4. Estudiar la simetría de la función  $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{2x^2 + 5}$

**Problema 641** 1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x-5}{(x+3)\sqrt{x-2}}$$

2. Si  $f(x) = x^2 - 2$  y  $g(x) = \sqrt{x}$  calcular  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$

3. Sea  $f(x) = \frac{2x-1}{3x}$  en el dominio  $D = (0, +\infty)$ , calcular  $f^{-1}(x)$

4. Estudiar la simetría de la función  $f(x) = \frac{3x^4 - 1}{2x}$