

Examen de Matemáticas 4º de ESO.
Enero 2012

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + 2$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x + 1$ obtenemos de resto 6, y es divisible por $x - 2$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(-1) = 6 \implies -a - b = 6 \\ P(2) = 0 \implies 4a + b = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ b = -9 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 9x + 2$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$
2. $Q(x) = x^3 - 8x^2 + 13x - 6$
3. $R(x) = 3x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 3x - 2$

Solución:

1. $P(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 = (x - 1)(x + 3)(x - 3)$
2. $Q(x) = x^3 - 8x^2 + 13x - 6 = (x - 6)(x - 1)^2$
3. $R(x) = 3x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = (x - 1)^2(x + 1)^2(3x - 2)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^6 + 4x^5 - 5x^4, \quad Q(x) = 2x^6 + 5x^5 - 21x^4 + 19x^3 - 5x^2$$

Solución:

$$P(x) = x^6 + 4x^5 - 5x^4 = x^4(x - 1)(x + 5)$$

$$Q(x) = 2x^6 + 5x^5 - 21x^4 + 19x^3 - 5x^2 = x^2(x - 1)^2(x + 5)(2x - 1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2(x - 1)(x + 5)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^4(x + 5)(x - 1)^2(2x - 1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

1. $\frac{x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 40x^3 + 25x^2}{x^5 - 3x^4 - 9x^3 - 5x^2}$

$$2. \frac{x^6 - 14x^5 + 69x^4 - 140x^3 + 100x^2}{x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3}$$

Solución:

$$1. \frac{x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 40x^3 + 25x^2}{x^5 - 3x^4 - 9x^3 - 5x^2} = \frac{(x+1)^2(x-5)^2x^2}{(x-5)(x+1)^2x^2} = x-5$$

$$2. \frac{x^6 - 14x^5 + 69x^4 - 140x^3 + 100x^2}{x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3} = \frac{(x-2)^2(x-5)^2x^2}{(x-5)(x-2)^2x^3} = \frac{x-5}{x}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x+7}{x+2} - \frac{5x-3}{x^2+x-2} = \frac{x+6}{x-1}$$

$$2. \left(\frac{x+6}{x^2-x-2} - 2 \right) : \left(\frac{3x}{x-2} - \frac{x}{x+1} \right)$$

$$3. \left(\frac{25x^2}{3(x-2)^2} \right) \cdot \left(\frac{9(x-2)}{10x^2} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x+7}{x+2} - \frac{5x-3}{x^2+x-2} = \frac{x+6}{x-1} \implies x = -\frac{16}{7}$$

$$2. \left(\frac{x+3}{x^2-x-2} - 2 \right) : \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x+1} \right) = -\frac{2x^2-3x-10}{2x^2+5x}$$

$$3. \left(\frac{25x^2}{3(x-2)^2} \right) \cdot \left(\frac{9(x-2)}{10x^2} \right) = \frac{15}{2x-4}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x+9)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 9x = x(x+9)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x+9)^2x^2(x-1)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x+9)(x-1) = x^3 + 8x^2 - 9x$$