Examen de Matemáticas 4º de ESO

Mayo 2009

Problema 1 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x - 10}}$$

Solución:

$$(-\infty, -2) \cup [1, 3] \cup (5, \infty)$$

Problema 2 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x - 5}$$

Solución:

Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -\dfrac{3}{5} \Longrightarrow \left(0, -\dfrac{3}{5}\right)$

Corte con el eje OX: Hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow (3, 0)$ el otro punto en $x = 1$ se anula el denominador.

Problema 3 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}, \quad g(x) = 5x - 1$$

Solución:

1. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\dfrac{2x + 3}{x - 1}\right) = \dfrac{2\frac{2x+3}{x-1} + 3}{\frac{2x+3}{x-1} - 1} = \dfrac{7x + 3}{x + 4}$
2. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{2x + 3}{x - 1}\right) = 5\dfrac{2x + 3}{x - 1} - 1 = \dfrac{9x + 16}{x - 1}$
3. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(5x - 1) = \dfrac{2(5x - 1) + 3}{(5x - 1) - 1} = \dfrac{10x + 1}{5x - 2}$
4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(5x - 1) = 5(5x - 1) - 1 = 25x - 6$

Problema 4 Calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x + 2}$

Solución:

$$y = \frac{3x + 1}{x + 2} \Longrightarrow yx + 2y = 3x + 1 \Longrightarrow yx - 3x = -2y + 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1 - 2y}{y - 3} \Longrightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1 - 2x}{x - 3}$$

Problema 5 Comprobar la simetría de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{3x^4 - 2x^2}{x^2 + 1}; \quad g(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 5}; \quad h(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2}$$

Solución:

$f(x) = \dfrac{3x^4 - 2x^2}{x^2 + 1}$ es par

$g(x) = \dfrac{x^3}{2x^2 - 5}$ es impar

$h(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2}$ no es ni par ni impar

Problema 6 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (3x^5 - 2x^3 + x - 1)$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{3x^3 + 2x^2 - x + 1}{-x^2 + x + 3}$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3}$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{5x^2 - x + 7}$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 1}}{x + 2}$
6. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\sqrt{x + 5}}{x - 2}$
7. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1})$

Solución:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (3x^5 - 2x^3 + x - 1) = \infty$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{3x^3 + 2x^2 - x + 1}{-x^2 + x + 3} = -\infty$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3} = 0$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{5x^2 - x + 7} = \dfrac{2}{5}$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 1}}{x + 2} = \sqrt{3}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{x+5}}{x-2} = 0$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = 0$

Problema 7 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x+1}{2x-1}\right)^{2x+7}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2-1}\right)^{\frac{3x+1}{2}}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x}\right)^{x}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x+1}{2x-1}\right)^{2x+7} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2-1}\right)^{\frac{3x+1}{2}} = 0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x}\right)^{x} = e^{-1/2}$