

Examen de Matemáticas 4º de ESO.
Enero 2010

Problema 1 (1 punto) Sea $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 2$ obtenemos de resto 2, y es divisible por $x - 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \implies a - b = -1 \\ P(2) = 2 \implies 2a - b = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^3 - 3x - 2$
2. $Q(x) = x^3 - 3x + 2$
3. $R(x) = 2x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 11x^2 + 4x - 4$

Solución:

1. $P(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$
2. $Q(x) = x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)^2$
3. $R(x) = 2x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 11x^2 + 4x - 4 = (x + 1)^2(x - 2)^2(2x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

$$P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3, \quad Q(x) = 3x^5 + 8x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 4x$$

Solución:

$$P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x - 1)(x + 2)$$

$$Q(x) = 3x^5 + 8x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 4x = x(x + 2)^2(x - 1)(3x - 1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x - 1)(x + 2)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^3(x - 1)(x + 2)^2(3x - 1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

1. $\frac{x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 4x}{x^5 - 3x^3 + 2x^2}$

$$2. \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2}$$

Solución:

$$1. \frac{x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 4x}{x^5 - 3x^3 + 2x^2} = \frac{(x+2)^2(x-1)^2x}{(x+2)(x-1)^2x^2} = \frac{x+2}{x}$$

$$2. \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2} = \frac{(x+1)^2(x-2)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-1}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x-1}{x+2} - \frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$2. \left(\frac{x+1}{x^2-x-2} - 1 \right) : \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x+1} \right)$$

$$3. \left(\frac{4x^3}{3(x-1)^2} \right) \cdot \left(\frac{3(x-1)}{4x^2} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x-1}{x+2} - \frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{x+1}{x-1} \implies x=0$$

$$2. \left(\frac{x+1}{x^2-x-2} - 1 \right) : \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x+1} \right) = \frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-1}$$

$$3. \left(\frac{4x^3}{3(x-1)^2} \right) \cdot \left(\frac{3(x-1)}{4x^2} \right) = \frac{x}{x-1}$$

Problema 6 (1 punto) Si $P(x) = (x-5)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 5x = x(x-5)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = (x-5)^2x^2(x+1)$$

Solución:

$$Q(x) = x(x-5)(x+1) = x^3 - 4x^2 - 5x$$