Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2008

Problema 1 *(1 punto)* Sea $P(x) = ax^3 - bx^2 + x - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x-1$ obtenemos de resto 1, y es divisible por $x+1$. Calcular a y b, completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} P(1) = 1 \Longrightarrow a - b = 1 \\ P(-1) = 0 \Longrightarrow -a - b = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1/2 \\ b = -3/2 \end{array}\right.$$

El polinomio buscado será: $P(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + x - 1$

Problema 2 *(2 puntos)* Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5$
2. $Q(x) = x^3 - 4x^2 - 11x - 6$
3. $R(x) = 3x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 2x + 5$

Solución:

1. $P(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5 = (x-1)^2(x+5)(x+1)$
2. $Q(x) = x^3 - 4x^2 - 11x - 6 = (x+1)^2(x-6)$
3. $R(x) = 3x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2(x-1)(3x-5)$

Problema 3 *(2 puntos)* Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2$, $Q(x) = x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 20x$
2. $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x$, $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$

Solución:

1. $P(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2$, $Q(x) = x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 20x$

   $P(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2 = x^2(x+1)^2(x-2)$
   $Q(x) = x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 20x = x(x-2)^2(x-5)$

   $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x-2)$

   $\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x+1)^2(x-2)^2(x-5)$

2. $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x$, $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$

   $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x = x(x+1)^2(2x+1)$
   $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x+1)(x-1)^2(2x+1)$

   $\mathrm{MCD}(P(x), Q(x)) = (x+1)(2x+1)$

   $\mathrm{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x+1)^2(x-1)^2(2x+1)$

Problema 4 *(2 puntos)*Simplificar:

1. $\dfrac{x^5 - 3x^3 + 2x^2}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}$

2. $\dfrac{x^6 - 5x^5 - 3x^4 + 17x^3 - 10x^2}{x^4 + x^3 - 2x^2}$

Solución:

1. $\dfrac{x^5 - 3x^3 + 2x^2}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x} = \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$

2. $\dfrac{x^6 - 5x^5 - 3x^4 + 17x^3 - 10x^2}{x^4 + x^3 - 2x^2} = x^2 - 6x + 5$

Problema 5 *(2 puntos)*Resolver y simplificar:

1. $$\frac{x}{x-2} - \frac{x-1}{x^2 - x - 2} + \frac{x-2}{x+1}$$

2. $$\left(\frac{x+2}{x^2 - 7x + 10} - 1\right) : \left(\frac{x+2}{x-5} - \frac{1}{x-2}\right)$$

3. $$\left(\frac{16(x+1)}{x}\right) \cdot \left(\frac{x^3}{12(x+1)}\right)$$

Solución:

1. $$\frac{x}{x-2} - \frac{x-1}{x^2 - x - 2} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - x - 2}$$

2. $$\left(\frac{x+2}{x^2 - 7x + 10} - 1\right) : \left(\frac{x+2}{x-5} - \frac{1}{x-2}\right) = -\frac{x^2 - 8x - 8}{x^2 - x + 1}$$

3.
$$\left(\frac{16(x+1)}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{12(x+1)}\right)=\frac{4x^2}{3}$$

Problema 6 *(1 punto)* Si $P(x)=(x-4)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\mathrm{MCD}(P(x),Q(x))=x^2-4x=x(x-4)$
2. $\mathrm{mcm}(P(x);Q(x))=(x-4)^2x^2(x+3)$

Solución:
$$Q(x)=x(x+3)(x-4)=x^3-x^2-12x$$