

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2007

Problema 1 (1 puntos) Sea $P(x) = ax^4 - 2x^2 - bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 1$ obtenemos de resto 2, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(1) = 2 \implies a - b - 5 = 0 \\ P(-1) = 0 \implies a + b - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = 4x^4 - 2x^2 + x - 1$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$

2. $Q(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

3. $R(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

Solución:

1. $P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(x + 2)(x + 1)^2$

2. $Q(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 3)(x - 2)^2$

3. $R(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (x - 1)(x - 2)(2x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$, $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$

2. $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x$, $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1$

Solución:

1. $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$, $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x = x(x + 1)^2(x + 2)$$
$$Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x + 1)^2(x - 1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x + 1)^2$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^2(x - 1)(x + 2)$$

$$2. P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x, Q(x) = 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1$$

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x = x(x+1)^2(2x+1)$$

$$Q(x) = 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1 = (x-1)^3(x+1)(2x+1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x+1)(2x+1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x-1)^3(x+1)^2(2x+1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{2x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 8x + 12}$$

$$2. \frac{x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$$

Solución:

$$1. \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{2x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 8x + 12} = \frac{x-1}{x+2}$$

$$2. \frac{x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \frac{x^2 + 3x + 2}{x-3}$$

Problema 5 (2 puntos) Resolver y simplificar:

$$1. \frac{x}{x-3} - \frac{x-1}{x^2-2x-3} + \frac{x+3}{x+1}$$

$$2. \left(\frac{x+2}{x^2+x-2} - 1 \right) : \left(\frac{x+5}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$3. \left(\frac{3x^3}{x+2} \right) \cdot \left(\frac{x+2}{9x^4} \right)$$

Solución:

$$1. \frac{x}{x-3} - \frac{x-1}{x^2-2x-3} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{2(x^2-4)}{x^2-2x-3}$$

$$2. \left(\frac{x+2}{x^2+x-2} - 1 \right) : \left(\frac{x+5}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) = -\frac{x^2-4}{x^2+6x+11}$$

$$3. \left(\frac{3x^3}{x+2} \right) \cdot \left(\frac{x+2}{9x^4} \right) = \frac{1}{3x}$$

Problema 6 (1 puntos) Si $P(x) = (x-3)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

1. $\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - 3x = x(x-3)$

2. $\text{mcm}(P(x); Q(x)) = 2(x-3)^2x^2(x-1)$

Solución:

$$Q(x) = 2x(x-3)(x-1) = 2x^3 - 8x^2 + 6x$$