

Examen de Matemáticas 4º de ESO

Junio 2006

Problema 1 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 6x - 7}}$$

Solución:

$$(-\infty, -5] \cup (-1, 3] \cup [7, +\infty)$$

Problema 2 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 10x - 21}$$

Solución:

Corte con el eje OY : Hacemos $x = 0 \implies f(0) = 4/7 \implies (0, 12/21)$

Corte con el eje OX : Hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - 4x - 12 = 0 \implies (-2, 0)$ y $(-6, 0)$

Problema 3 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = x + 3, \quad g(x) = \frac{1}{x - 1}$$

Solución:

1. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f((x + 3)) = x + 6$
2. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g((x + 3)) = \frac{1}{x + 3 - 1} + 3 = \frac{1}{x + 2}$
3. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1} + 3 = \frac{3x - 2}{x - 1}$
4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x-1} - 1} = \frac{x - 1}{2 - x}$

Problema 4 Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{2x - 1}{2x - 2}$

Solución:

$$\begin{aligned} y = \frac{2x - 1}{2x - 2} &\implies 2yx - 2y = 2x - 1 \implies 2yx - 2x = 2y - 1 \implies \\ &\implies x = \frac{2y - 1}{2y - 2} \implies f^{-1}(x) = \frac{2x - 1}{2x - 2} \end{aligned}$$

Problema 5 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

2. $g(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

3. $h(x) = \frac{x - 1}{x^2}$

Solución:

1. $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -f(x) \Rightarrow \text{IMPAR}$

2. $g(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^4 + 1} = g(x) \Rightarrow \text{PAR}$

3. $h(-x) = \frac{-x - 1}{(-x)^2} \Rightarrow \text{ni PAR ni IMPAR}$

Problema 6 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x} \right)^{x+1}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{2x + 5}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x - 1} - 3}{x - 2}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x - 8}{x^3 + x - 10}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x} \right)^{x+1} = e^{1/3}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{2x + 5} = \frac{1}{2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x - 1} - 3}{x - 2} = \frac{5}{6}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x - 8}{x^3 + x - 10} = \frac{20}{13}$

Problema 7 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x-1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{2x-2} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{x^2+1}{10} & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.

Solución:

En $x = 0$ hay una discontinuidad evitable, y en $x = 3$ es continua.

Problema 8 Encontrar el valor de k que hace que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3kx^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 - k & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

$$3k - 2 = 2 - k \implies k = 1$$