

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2006

Problema 1 (2 puntos) Sea $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x - 2$ obtenemos de resto 1, y es divisible por $x + 1$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(2) = 1 \implies 8a + 2b - 10 = 0 \\ P(-1) = 0 \implies -a - b - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 8/3 \\ b = -17/3 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{17}{3}x - 1$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$
2. $Q(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$
3. $R(x) = 3x^4 - 13x^3 + 19x^2 - 11x + 2$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = (x - 1)^2(x - 2)(x + 1)$
2. $Q(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = (x - 3)^2(x - 2)$
3. $R(x) = 3x^4 - 13x^3 + 19x^2 - 11x + 2 = (x - 1)^2(x - 2)(3x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$
2. $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x$, $Q(x) = 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 3x^2 + 2x = x(x - 1)^2(x + 2) \\ Q(x) &= x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x + 1)^2(x - 1) \end{aligned}$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x - 1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^2(x - 1)^2(x + 2)$$

$$2. P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x, Q(x) = 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1$$

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x = x(x-1)^2(2x+1)$$

$$Q(x) = 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1 = (x-1)^3(x+1)(2x+1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x-1)^2(2x+1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x-1)^3(x+1)(2x+1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 5x - 30}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$$

$$2. \frac{x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$$

Solución:

$$1. \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 5x - 30}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{x^2 + 5}{x + 1}$$

$$2. \frac{x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = x + 5$$

Problema 5 (1 puntos) Calcular:

$$1. \left(\frac{3x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \right) : \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} \right)$$

$$2. \frac{18x^2}{x-2} \cdot \frac{3}{3x}$$

Solución:

$$1. \left(\frac{3x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \right) : \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} \right) = \frac{2(2-x)}{x-3}$$

$$2. \frac{18x^2}{x-2} \cdot \frac{3}{2x} = \frac{27x}{x-2}$$

Problema 6 (1 puntos) Si $P(x) = (x+3)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 + 3x = x(x+3)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = 2(x+3)^2x^2(x-1)$$

Solución:

$$P(x) = 2x(x+3)(x-1) = 2x^3 + 4x^2 - 6x$$