

Examen de Matemáticas 4º de ESO.

Enero 2006

Problema 1 (2 puntos) Sea $P(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$ un polinomio que cuando lo dividimos por $x + 1$ obtenemos de resto 2, y es divisible por $x - 2$. Calcular a y b , completando con estos resultados el polinomio.

Solución:

Por el teorema del resto tenemos:

$$\begin{cases} P(-1) = 2 \implies -a - b - 5 = 0 \\ P(2) = 0 \implies 8a + 2b - 9 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 19/6 \\ b = -49/6 \end{cases}$$

El polinomio buscado será: $P(x) = \frac{19}{6}x^3 - 2x^2 - \frac{49}{6}x - 1$

Problema 2 (2 puntos) Factoriza los siguientes polinomios:

1. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$
2. $Q(x) = x^3 - 11x^2 + 35x - 25$
3. $R(x) = 3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = (x - 2)^2(x - 1)(x + 1)$
2. $Q(x) = x^3 - 11x^2 + 35x - 25 = (x - 5)^2(x - 1)$
3. $R(x) = 3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = (x + 1)^2(x - 3)(3x - 1)$

Problema 3 (2 puntos) Calcular el MCD y el mcm de:

1. $P(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x$, $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$
2. $P(x) = 3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + x$, $Q(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x - 1$

Solución:

1. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x$, $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x = x(x - 1)^2(x - 5) \\ Q(x) &= x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x + 1)^2(x - 1) \end{aligned}$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = x(x - 1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x^2(x + 1)^2(x - 1)^2(x - 5)$$

$$2. P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x, Q(x) = 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x - 1$$

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x = x(x+1)^2(3x+1)$$

$$Q(x) = 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x - 1 = (x+1)^3(x-1)(3x+1)$$

$$\text{MCD}(P(x), Q(x)) = (x+1)^2(3x+1)$$

$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = x(x+1)^3(x-1)(3x+1)$$

Problema 4 (2 puntos) Simplificar:

$$1. \frac{2x^3 + 3x^2 - 12x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

$$2. \frac{3x^3 - 20x^2 + 43x - 30}{x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36}$$

Solución:

$$1. \frac{2x^3 + 3x^2 - 12x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x + 2}$$

$$2. \frac{3x^3 - 20x^2 + 43x - 30}{x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36} = \frac{3x - 5}{x^2 - 5x + 6}$$

Problema 5 (1 puntos) Calcular:

$$1. \left(\frac{2x}{x+1} + \frac{x}{x-1} \right) : \left(\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} \right)$$

$$2. \frac{4x^2}{x+3} \cdot \frac{3}{2x}$$

Solución:

$$1. \left(\frac{2x}{x+1} + \frac{x}{x-1} \right) : \left(\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+1} \right) = \frac{3x-1}{x+5}$$

$$2. \frac{4x^2}{x+3} \cdot \frac{3}{2x} = \frac{6x}{x+3}$$

Problema 6 (1 puntos) Si $P(x) = (x+2)^2x^2$, busca un polinomio de tercer grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$1. \text{MCD}(P(x), Q(x)) = x^2 - x = x(x+2)$$

$$2. \text{mcm}(P(x); Q(x)) = 2(x+2)^2x^2(x+1)$$

Solución:

$$Q(x) = 2x(x+1)(x+2) = 2x^3 + 6x^2 + 4x$$