Examen de Matemáticas 4º de ESO

Junio 2005

Problema 1 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 2}}$$

Solución:

$$(-\infty, -3] \cup [-2, -1] \cup (2, \infty)$$

Problema 2 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 3}$$

Solución:

Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -2 \Longrightarrow (0, -2)$

Corte con el eje OX: Hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Longrightarrow (-2, 0)$ y $(-3, 0)$

Problema 3 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{4x^4 + 1}{x^2 - 2}$
2. $g(x) = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$
3. $h(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x + 3}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{4(-x)^4 + 1}{(-x)^2 - 2} = f(x) \Longrightarrow$PAR
2. $g(-x) = \dfrac{3(-x)^4 + 1}{(-x)^3} = -g(x) \Longrightarrow$IMPAR
3. $h(-x) = \dfrac{2(-x)^2 + 1}{(-x) + 3} \Longrightarrow$ ni PAR ni IMPAR

Problema 4 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{x + 2}{x}, \quad g(x) = x - 2$$

Solución:

1. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = \dfrac{x+2}{x} - 2 = \dfrac{2-x}{x}$

2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-2) = \dfrac{x-2+2}{x-2} = \dfrac{x}{x-2}$

3. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = \dfrac{\frac{x+2}{x}+2}{\frac{x+2}{x}} = \dfrac{3x+2}{x+2}$

4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x-2) = (x-2) - 2 = x - 4$

Problema 5 Calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{x+3}{2-x}$

Solución:

$$y = \frac{x+3}{2-x} \Longrightarrow 2y - xy = x + 3 \Longrightarrow -yx - x = 3 - 2y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{3-2y}{-y-1} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Problema 6 Calcular los siguientes límites

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^3+3x-1}{x^2+2}$

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^3+2x-1}{4x^3+2}$

3. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{5x^2+2x-1}{3x^2+1}\right)^{(x^2+1)/2}$

4. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x/2}$

5. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^4-3x^2+2x-8}{x^3-3x^2+x+2}$

6. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-2}-2}{x-3}$

Solución:

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^3+3x-1}{x^2+2} = \infty$

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^3+2x-1}{4x^3+2} = \frac{3}{4}$

3. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{5x^2+2x-1}{3x^2+1}\right)^{(x^2+1)/2} = \infty$

4. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x/2} = [1^{\infty}] = e^{\lambda} = e^{1/2}$

$$\lambda = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{2} \left(\frac{2x+1}{2x-1} - 1 \right) = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 8}{x^3 - 3x^2 + x + 2} = 22$

5. $\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-2} - 2}{x-3} = \frac{1}{2}$

Problema 7 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si} \quad x < -1 \\ x+4 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ x^2+4 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 3x+8 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

- En $x = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow -1^-} (-3x) = 3 \\ \\ \lim_{x \longrightarrow -1^+} (x+4) = 3 \\ f(-1) = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{continua}$$

- En $x = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow 0^-} (x+4) = 4 \\ \\ \lim_{x \longrightarrow 0^+} (x^2+4) = 4 \\ f(0) \ \text{ no definida} \end{array} \right. \Longrightarrow \text{discontinua evitable}$$

- En $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2+4) = 5 \\ \\ \lim_{x \longrightarrow 1^+} (3x+8) = 11 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{discontinua inevitable}$$

Problema 8 Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} ax^2 + a^2x + 3 & \text{si} & x < 1 \\ 2a^2x + 1 & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

calcular a para que esta función sea continua en $x = 1$.

Solución:

Para que la función sea continua en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 + a^2x + 3) = a + a^2 + 3 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (2a^2x + 1) = a^2 + 1 \end{array} \right. \Longrightarrow a + a^2 + 3 = a^2 + 1 \Longrightarrow a = 2, \ a = -1$$