Examen de Matemáticas 4º de ESO

Junio 2005

Problema 1 Calcular el dominio de la función
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-6}{x^2+x-2}}$$

Solución:
$$(-\infty, -3] \cup (-2, 1) \cup [2, \infty)$$

Problema 2 Encontrar los puntos de corte de la función
$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-4}$$

Solución:

Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

Corte con el eje OX: Hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$ y $(-2, 0)$

Problema 3 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{3x^6 - 2}{x^4 - 1}$
2. $g(x) = \dfrac{-2x^3}{x^2 + 1}$
3. $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{3(-x)^6 - 2}{(-x)^4 - 1} = f(x) \Longrightarrow$PAR
2. $g(-x) = \dfrac{-2(-x)^3}{(-x)^2 + 1} = -g(x) \Longrightarrow$IMPAR
3. $h(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 1}{(-x) - 1} \Longrightarrow$ ni PAR ni IMPAR

Problema 4 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.
$$f(x) = \frac{2x+1}{2x}, \quad g(x) = x + 3$$

Solución:

1. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right) = \dfrac{2x+1}{2x} + 3 = \dfrac{8x-1}{2x}$

2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+3) = \dfrac{2(x+3)-1}{2(x+3)} = \dfrac{2x+5}{2x+6}$

3. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right) = \dfrac{2\frac{2x+1}{2x}+1}{\frac{2x+1}{2x}} = \dfrac{x-1}{2x-1}$

4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x+3) = (x+3)+3 = x+6$

Problema 5 Calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$

Solución:

$$y = \frac{2x+1}{x-2} \Longrightarrow yx - 2y = 2x+1 \Longrightarrow yx - 2x = 1 + 2y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{2y+1}{y-2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

Problema 6 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{x^3+2}$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x^2+x-1}{x^2+3}$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2}\right)^{5x^2-1}$

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{2x^2}$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} \dfrac{3x^4-2x^2+2x+1}{x^3+3x^2+5x+3}$

6. $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{x^3+2} = \infty$

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x^2+x-1}{x^2+3} = 2$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^2+1}{3x^2}\right)^{5x^2-1} = 0$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{2x^2} = [1^\infty] = e^\lambda = e^2$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty}(2x^2)\left(\frac{x^2+1}{x^2}-1\right) = 2$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{3x^4-2x^2+2x+1}{x^3+3x^2+5x+3} = -3$$

5. $\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} = \frac{3}{4}$

Problema 7 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{si} \quad x < -1 \\ 3x+1 & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ x+1 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

- En $x = -1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow -1^-}(5x) = -5 \\ \\ \lim_{x\longrightarrow -1^+}(3x+1) = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{discontinua inevitable}$$

- En $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 0^-}(3x+1) = 1 \\ \\ \lim_{x\longrightarrow 0^+}(x+1) = 1 \\ f(0) \text{ no definida} \end{array}\right. \Longrightarrow \text{discontinua evitable}$$

- En $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 1^-}(x+1) = 2 \\ \\ \lim_{x\longrightarrow 1^+}(2x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{continua}$$

Problema 8 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + 3ax - 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ a^2x - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

calcular a para que esta función sea continua en $x = 1$.

Solución:

Para que la función sea continua en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 + 3ax - 2) = 5a - 2 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (a^2x - 2) = a^2 - 2 \end{array} \right. \Longrightarrow 5a - 2 = a^2 - 2 \Longrightarrow a = 0, \ a = 5$$