Examen de Matemáticas 4º de ESO

Junio 2005

Problema 1 Calcular el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 15}}$$

Solución:

$$(-\infty, -3) \cup [-1, 2] \cup (5, \infty)$$

Problema 2 Encontrar los puntos de corte de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 5}$$

Solución:

Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -3 \Longrightarrow (0, -3)$

Corte con el eje OX: Hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Longrightarrow (-3, 0)$ y $(5, 0)$

Problema 3 Calcular la simetría de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^6 + 1}$
2. $g(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 4}$
3. $h(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x^3}$

Solución:

1. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 2}{(-x)^6 + 1} = f(x) \Longrightarrow$PAR
2. $g(-x) = \dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2 + 4} = -g(x) \Longrightarrow$IMPAR
3. $h(-x) = \dfrac{(-x)^5 - 1}{(-x)^3} \Longrightarrow$ ni PAR ni IMPAR

Problema 4 Dadas las funciones f y g calcular $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

$$f(x) = \frac{x + 3}{2x}, \quad g(x) = x - 4$$

Solución:

1. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+3}{2x}\right) = \frac{x+3}{2x} - 4 = \frac{3-7x}{2x}$

2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-4) = \frac{x-4+3}{2(x-4)} = \frac{x-1}{2(x-4)}$

3. $f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x+3}{2x}\right) = \frac{\frac{x+3}{2x}+3}{2\frac{x+3}{2x}} = \frac{7x+3}{2x+6}$

4. $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x-4) = (x-4) - 4 = x - 8$

Problema 5 Calcular la función inversa de $f(x) = \dfrac{2x-1}{2-x}$

Solución:

$$y = \frac{2x-1}{2-x} \Longrightarrow 2y - xy = 2x - 1 \Longrightarrow -yx - 2x = -1 - 2y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1+2y}{y+2} \Longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

Problema 6 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^2+3x-1}{x^3+x+1}$

2. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{5x^3+2x+1}{3x^3+2x^2+1}$

3. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2}{5x^2-1}\right)^{(3x^2+1)/2}$

4. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{x/2}$

5. $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{-5x^4+3x^3+2x^2-x+1}{2x^3+3x^2-4x-1}$

6. $\lim_{x \longrightarrow 4} \frac{\sqrt{5x-4}-4}{x-4}$

Solución:

1. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^2+3x-1}{x^3+x+1} = 0$

2. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{5x^3+2x+1}{3x^3+2x^2+1} = \frac{5}{3}$

3. $\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2}{5x^2-1}\right)^{(3x^2+1)/2} = 0$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{x/2} = [1^{\infty}] = e^{\lambda} = e^{2}$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{2x+3}{2x-5}-1\right) = \frac{8}{4} = 2$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{-5x^4+3x^3+2x^2-x+1}{2x^3+3x^2-4x-1} = -1$$

5. $\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{\sqrt{5x-2}-4}{x-4} = \frac{5}{8}$

Problema 7 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < -1 \\ 3x+1 & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 5x+6 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

- En $x = -1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow -1^-}(2x) = -2 \\ \\ \lim_{x\longrightarrow -1^+}(3x+1) = -2 \\ f(-1) = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{continua}$$

- En $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 0^-}(3x+1) = 1 \\ \\ \lim_{x\longrightarrow 0^+}(x^2+1) = 1 \\ f(0) = \text{ no definida} \end{array}\right. \Longrightarrow \text{discontinua evitable}$$

- En $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 1^-}(x^2+1) = 2 \\ \\ \lim_{x\longrightarrow 1^+}(5x+6) = 11 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{discontinua inevitable}$$

Problema 8 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 - 2ax + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2a^2x - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

calcular a y b para que esta función sea continua en $x = 1$.

Solución:

Para que la función sea continua en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (a^2x^2 - 2ax + 11) = a^2 - 2a + 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (2a^2x - 2) = 2a^2 - 2 \end{array} \right. \Longrightarrow a^2 - 2a + 1 = 2a^2 - 2 \Longrightarrow a = 1, \ a = -3$$