Análisis 2º de Bachillerato(Ciencias de la Naturaleza)

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y=k$	$y'=0$	$y=x$	$y'=1$
$y=ax^n$	$y'=nax^{n-1}$	$y=au^n$	$y'=nau^{n-1}u'$
$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$	$y=uv$	$y'=u'v+uv'$
$y=\sqrt[n]{u}$	$y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y=\dfrac{u}{v}$	$y=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$y=\ln u$	$y'=\dfrac{u'}{u}$	$y=\log_a u$	$y'=\dfrac{u'}{u\ln a}$
$y=u^v$	$y'=u^v(v'\ln u)+vu^{v-1}u'$	$y=a^u$	$y'=u'a^u\ln a$
$y=e^u$	$y'=u'e^u$	$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$
$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$	$y=\tan u$	$y'=u'\sec^2 u$
$y=\cot u$	$y'=-u'\csc^2 u$	$y=\csc u$	$y'=-u'\csc u\cot u$
$y=\sec u$	$y'=u'\sec u\tan u$	$y=\arcsin u$	$y'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\mathrm{arc}\cos u$	$y'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y=\arctan u$	$y'=\dfrac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y=f(g(x))$	$y'=g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones
Hay que seguir los siguientes pasos:

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x)>0$ o $f(x)<0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x)=0$ Corte con OY : $x=0$	4 Simetría :	Par : $f(-x)=f(x)$ con OY Impar : $f(-x)=-f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x=p$ $\lim\limits_{x\longrightarrow p} f(x)=\pm\infty$ Horizontales : $y=p$ $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x)=p$ Si $\exists\, y=p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y=mx+n$ $m=\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $n=\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x)>0$ $\nearrow$ Decreciente : $f'(x)<0$ $\searrow$ Si $f'(p)=0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p)<0$ Mínimo si $f''(p)>0$ Pto. Inflexión si $f''(p)=0$ y $f'''(p)\neq 0$
7 Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x)>0$ $\cup$ Convexa : $f''(x)<0$ $\cap$ Si $f''(p)=0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x+T)=f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f'\,dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln\lvert f\rvert$
Exponencial	$\int e^x\,dx = e^x$	$\int e^f \cdot f'\,dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f'\,dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f\,dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f\,dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f\,dx = \tan f$
	$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1+\tan^2 f)\,dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f}\,dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f\,dx = -\cot f$
	$\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1+\cot^2 f)\,dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f}\,dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2}\,dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano − Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$ ax^2+bx+c irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)
- Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad

Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.

Teorema de Weierstrass

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.

Teorema de Darboux

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ $(a < b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abcisas, es decir, $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del Valor Medio de Lagrange

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \ \text{ donde } \ c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)

Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a,b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable
Sea g una función con derivada g' continua en $[a,b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\dfrac{A}{B}\right)\cdot\infty$
- Si $n < m \Longrightarrow L = 0$
- Si $n = m \Longrightarrow L = \dfrac{A}{B}$

Si $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x)-1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \ o \ \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1+x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x\ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \dfrac{\pi}{2} - x$