

Análisis 2º de Bachillerato(Ciencias de la Naturaleza)

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones

Hay que seguir los siguientes pasos:

1º Dominio	Buscar Puntos Singulares	2º Signo	$f(x) > 0$ o $f(x) < 0$
3º Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4º Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5º Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists y = p \implies$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6ª Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0 \nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0 \searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7ª Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow \searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow \nearrow$ de decreciente a creciente	8ª Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0 \cup$ Convexa : $f''(x) < 0 \cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9ª Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f' dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x $	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f $
Exponencial	$\int e^x dx = e^x$	$\int e^f \cdot f' dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2 x dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f dx = \tan f$
	$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1 + \tan^2 f) dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2 x dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f dx = -\cot f$
	$\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1 + \cot^2 f) dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f} dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2} dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano – Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \ln \pm \arctan x$	Si $\frac{M \neq 0}{ax^2+bx+c}$ irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \implies$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)
- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \implies$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad

Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a , entonces f tiene que ser continua en a .

Teorema de Weierstrass

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.

Teorema de Darboux

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ ($a < b$) y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) . Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del Valor Medio de Lagrange

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) . entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \text{donde } c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)

Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f , es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes

Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a, b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$\int u dv = uv - \int v du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable

Sea g una función con derivada g' continua en $[a, b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

Límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que $\text{Grado}(P(x)) = n$ y $\text{Grado}(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- Si $n > m \implies L = \text{Signo}\left(\frac{A}{B}\right) \cdot \infty$
- Si $n < m \implies L = 0$
- Si $n = m \implies L = \frac{A}{B}$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x)(P(x) - 1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ o } \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right] \implies \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \rightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x \ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \frac{\pi}{2} - x$