Problemas de Selectividad de Matemáticas II Aplicadas a las Ciencias Sociales

Comunidad de Madrid

Por materias y resueltos

(2000-2025)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

26 de octubre de 2024

;, www.inusat.net;,

A mi familia,
a mis alumnos,
habéis aguantado estoicamente,
mis ausencias unos,
mis clases otros.
Con unos convivo,
a los otros les añoro.
Un Abrazo muy grande para cada uno.
Isaac Musat Hervás

;; www.imusat.net ;;

www.mnusat.net

Índice general

1. Álgebra **19**

1.1. Año 2000 . . . 19
1.1.1. Modelo . . . 19
1.1.2. Ordinaria . . . 20
1.1.3. Extraordinaria . . . 21
1.2. Año 2001 . . . 21
1.2.1. Modelo . . . 21
1.2.2. Ordinaria . . . 22
1.2.3. Extraordinaria . . . 23
1.3. Año 2002 . . . 24
1.3.1. Modelo . . . 24
1.3.2. Ordinaria . . . 25
1.3.3. Extraordinaria . . . 26
1.4. Año 2003 . . . 26
1.4.1. Ordinaria . . . 26
1.4.2. Extraordinaria . . . 27
1.5. Año 2004 . . . 27
1.5.1. Modelo . . . 27
1.5.2. Ordinaria . . . 28
1.5.3. Extraordinaria . . . 29
1.6. Año 2005 . . . 30
1.6.1. Modelo . . . 30
1.6.2. Ordinaria . . . 31
1.6.3. Extraordinaria . . . 31
1.7. Año 2006 . . . 32
1.7.1. Modelo . . . 32
1.7.2. Ordinaria . . . 33
1.7.3. Extraordinaria . . . 34
1.8. Año 2007 . . . 35
1.8.1. Modelo . . . 35
1.8.2. Ordinaria . . . 35
1.8.3. Extraordinaria . . . 36
1.9. Año 2008 . . . 37
1.9.1. Modelo . . . 37
1.9.2. Ordinaria . . . 37
1.9.3. Extraordinaria . . . 38
1.10. Año 2009 . . . 39

1.10.1. Modelo . . . 39
1.10.2. Ordinaria . . . 40
1.10.3. Extraordinaria . . . 40
1.11. Año 2010 . . . 41
1.11.1. Modelo . . . 41
1.11.2. Ordinaria . . . 42
1.11.3. Extraordinaria . . . 44
1.12. Año 2011 . . . 44
1.12.1. Modelo . . . 44
1.12.2. Ordinaria . . . 45
1.12.3. Extraordinaria . . . 47
1.12.4. Reserva . . . 48
1.13. Año 2012 . . . 49
1.13.1. Modelo . . . 49
1.13.2. Ordinaria . . . 51
1.13.3. Ordinaria-Coincidente . . . 53
1.13.4. Extraordinaria . . . 54
1.14. Año 2013 . . . 55
1.14.1. Modelo . . . 55
1.14.2. Ordinaria . . . 56
1.14.3. Ordinaria-Coincidente . . . 57
1.14.4. Extraordinaria . . . 58
1.14.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 59
1.15. Año 2014 . . . 61
1.15.1. Modelo . . . 61
1.15.2. Ordinaria . . . 62
1.15.3. Ordinaria-Coincidente . . . 64
1.15.4. Extraordinaria . . . 65
1.15.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 66
1.16. Año 2015 . . . 67
1.16.1. Modelo . . . 67
1.16.2. Ordinaria . . . 68
1.16.3. Ordinaria-Coincidente . . . 70
1.16.4. Extraordinaria . . . 71
1.16.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 72
1.17. Año 2016 . . . 73
1.17.1. Modelo . . . 73
1.17.2. Ordinaria . . . 75
1.17.3. Ordinaria-Coincidente . . . 76
1.17.4. Extraordinaria . . . 77
1.18. Año 2017 . . . 78
1.18.1. Ordinaria . . . 78
1.18.2. Ordinaria-Coincidente . . . 80
1.18.3. Extraordinaria . . . 81
1.18.4. Extraordinaria-Coincidente . . . 82
1.19. Año 2018 . . . 83
1.19.1. Modelo . . . 83
1.19.2. Ordinaria . . . 84
1.19.3. Ordinaria-Coincidente . . . 85

1.19.4. Extraordinaria . . . 86
1.20. Año 2019 . . . 88
1.20.1. Modelo . . . 88
1.20.2. Ordinaria . . . 89
1.20.3. Ordinaria-Coincidente . . . 90
1.20.4. Extraordinaria . . . 92
1.20.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 93
1.21. Año 2020 . . . 94
1.21.1. Modelo . . . 94
1.21.2. Ordinaria . . . 96
1.21.3. Ordinaria-Coincidente . . . 98
1.21.4. Extraordinaria . . . 99
1.22. Año 2021 . . . 100
1.22.1. Modelo . . . 100
1.22.2. Ordinaria . . . 102
1.22.3. Ordinaria-Coincidente . . . 103
1.22.4. Extraordinaria . . . 104
1.23. Año 2022 . . . 105
1.23.1. Modelo . . . 105
1.23.2. Ordinaria . . . 106
1.23.3. Ordinaria-Coincidente . . . 107
1.23.4. Extraordinaria . . . 109
1.23.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 110
1.24. Año 2023 . . . 111
1.24.1. Modelo . . . 111
1.24.2. Ordinaria . . . 113
1.24.3. Ordinaria-Coincidente . . . 113
1.24.4. Extraordinaria . . . 114
1.24.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 116
1.25. Año 2024 . . . 118
1.25.1. Modelo . . . 118
1.25.2. Ordinaria . . . 119
1.25.3. Ordinaria-Coincidente . . . 121
1.25.4. Extraordinaria . . . 123
1.25.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 124
1.26. Año 2025 . . . 126
1.26.1. Modelo . . . 126

2. Programación **129**
2.1. Año 2000 . . . 129
2.1.1. Modelo . . . 129
2.1.2. Ordinaria . . . 130
2.1.3. Extraordinaria . . . 131
2.2. Año 2001 . . . 132
2.2.1. Ordinaria . . . 132
2.2.2. Extraordinaria . . . 133
2.3. Año 2002 . . . 134
2.3.1. Modelo . . . 134
2.3.2. Ordinaria . . . 136

2.3.3. Extraordinaria . . . 137
2.4. Año 2003 . . . 138
2.4.1. Ordinaria . . . 138
2.4.2. Extraordinaria . . . 139
2.5. Año 2004 . . . 139
2.5.1. Modelo . . . 139
2.5.2. Ordinaria . . . 140
2.5.3. Extraordinaria . . . 141
2.6. Año 2005 . . . 142
2.6.1. Modelo . . . 142
2.6.2. Ordinaria . . . 143
2.6.3. Extraordinaria . . . 144
2.7. Año 2006 . . . 145
2.7.1. Modelo . . . 145
2.7.2. Ordinaria . . . 146
2.7.3. Extraordinaria . . . 146
2.8. Año 2007 . . . 147
2.8.1. Modelo . . . 147
2.8.2. Ordinaria . . . 147
2.8.3. Extraordinaria . . . 148
2.9. Año 2008 . . . 149
2.9.1. Modelo . . . 149
2.9.2. Ordinaria . . . 150
2.9.3. Extraordinaria . . . 151
2.10. Año 2009 . . . 152
2.10.1. Ordinaria . . . 152
2.10.2. Extraordinaria . . . 153
2.11. Año 2010 . . . 154
2.11.1. Modelo . . . 154
2.11.2. Ordinaria . . . 155
2.11.3. Extraordinaria . . . 156
2.12. Año 2011 . . . 157
2.12.1. Extraordinaria . . . 157
2.13. Año 2012 . . . 158
2.13.1. Ordinaria-Coincidente . . . 158
2.13.2. Extraordinaria . . . 159
2.14. Año 2013 . . . 159
2.14.1. Modelo . . . 159
2.14.2. Ordinaria . . . 160
2.14.3. Ordinaria-Coincidente . . . 161
2.14.4. Extraordinaria . . . 162
2.15. Año 2014 . . . 163
2.15.1. Modelo . . . 163
2.15.2. Ordinaria . . . 163
2.15.3. Ordinaria-Coincidente . . . 164
2.15.4. Extraordinaria . . . 165
2.15.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 166
2.16. Año 2015 . . . 167
2.16.1. Modelo . . . 167

2.16.2. Ordinaria . . . 168
2.16.3. Ordinaria-Coincidente . . . 169
2.16.4. Extraordinaria . . . 170
2.16.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 171
2.17. Año 2016 . . . 171
2.17.1. Ordinaria . . . 171
2.17.2. Ordinaria-Coincidente . . . 172
2.17.3. Extraordinaria . . . 173
2.18. Año 2017 . . . 174
2.18.1. Ordinaria . . . 174
2.18.2. Ordinaria-Coincidente . . . 175
2.18.3. Extraordinaria . . . 176
2.18.4. Extraordinaria-Coincidente . . . 177
2.19. Año 2018 . . . 178
2.19.1. Modelo . . . 178
2.19.2. Ordinaria . . . 179
2.19.3. Ordinaria-Coincidente . . . 180
2.19.4. Extraordinaria . . . 181
2.20. Año 2019 . . . 182
2.20.1. Modelo . . . 182
2.20.2. Ordinaria . . . 183
2.20.3. Ordinaria-Coincidente . . . 184
2.20.4. Extraordinaria . . . 185
2.20.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 186
2.21. Año 2020 . . . 187
2.21.1. Ordinaria . . . 187
2.21.2. Ordinaria-Coincidente . . . 188
2.21.3. Extraordinaria . . . 188
2.22. Año 2021 . . . 189
2.22.1. Modelo . . . 189
2.22.2. Ordinaria . . . 190
2.22.3. Ordinaria-Coincidente . . . 191
2.22.4. Extraordinaria . . . 191
2.23. Año 2022 . . . 192
2.23.1. Modelo . . . 192
2.23.2. Ordinaria . . . 193
2.23.3. Ordinaria-Coincidente . . . 194
2.23.4. Extraordinaria . . . 195
2.23.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 195
2.24. Año 2023 . . . 196
2.24.1. Modelo . . . 196
2.24.2. Ordinaria . . . 197
2.24.3. Ordinaria-Coincidente . . . 198
2.24.4. Extraordinaria . . . 199
2.24.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 200
2.25. Año 2024 . . . 200
2.25.1. Modelo . . . 200
2.25.2. Ordinaria . . . 201
2.25.3. Ordinaria-Coincidente . . . 202

2.25.4. Extraordinaria . . . 203
2.25.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 203
2.26. Año 2025 . . . 204
2.26.1. Modelo . . . 204

3. Análisis **205**
3.1. Año 2000 . . . 205
3.1.1. Modelo . . . 205
3.1.2. Ordinaria . . . 207
3.1.3. Extraordinaria . . . 209
3.2. Año 2001 . . . 211
3.2.1. Modelo . . . 211
3.2.2. Ordinaria . . . 212
3.2.3. Extraordinaria . . . 214
3.3. Año 2002 . . . 216
3.3.1. Modelo . . . 216
3.3.2. Ordinaria . . . 217
3.3.3. Extraordinaria . . . 219
3.4. Año 2003 . . . 220
3.4.1. Ordinaria . . . 220
3.4.2. Extraordinaria . . . 222
3.5. Año 2004 . . . 223
3.5.1. Modelo . . . 223
3.5.2. Ordinaria . . . 226
3.5.3. Extraordinaria . . . 227
3.6. Año 2005 . . . 228
3.6.1. Modelo . . . 228
3.6.2. Ordinaria . . . 230
3.6.3. Extraordinaria . . . 231
3.7. Año 2006 . . . 233
3.7.1. Modelo . . . 233
3.7.2. Ordinaria . . . 234
3.7.3. Extraordinaria . . . 235
3.8. Año 2007 . . . 237
3.8.1. Modelo . . . 237
3.8.2. Ordinaria . . . 237
3.8.3. Extraordinaria . . . 239
3.9. Año 2008 . . . 241
3.9.1. Modelo . . . 241
3.9.2. Ordinaria . . . 244
3.9.3. Extraordinaria . . . 246
3.10. Año 2009 . . . 248
3.10.1. Modelo . . . 248
3.10.2. Ordinaria . . . 252
3.10.3. Extraordinaria . . . 253
3.11. Año 2010 . . . 255
3.11.1. Modelo . . . 255
3.11.2. Ordinaria . . . 257
3.11.3. Extraordinaria . . . 261

3.12. Año 2011 . . . 262
3.12.1. Modelo . . . 262
3.12.2. Ordinaria . . . 265
3.12.3. Extraordinaria . . . 267
3.12.4. Reserva . . . 268
3.13. Año 2012 . . . 270
3.13.1. Modelo . . . 270
3.13.2. Ordinaria . . . 272
3.13.3. Ordinaria-Coincidente . . . 275
3.13.4. Extraordinaria . . . 276
3.14. Año 2013 . . . 279
3.14.1. Modelo . . . 279
3.14.2. Ordinaria . . . 281
3.14.3. Ordinaria-Coincidente . . . 284
3.14.4. Extraordinaria . . . 286
3.14.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 288
3.15. Año 2014 . . . 289
3.15.1. Modelo . . . 289
3.15.2. Ordinaria . . . 292
3.15.3. Ordinaria-Coincidente . . . 293
3.15.4. Extraordinaria . . . 295
3.15.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 297
3.16. Año 2015 . . . 299
3.16.1. Modelo . . . 299
3.16.2. Ordinaria . . . 302
3.16.3. Extraordinaria . . . 305
3.16.4. Extraordinaria-Coincidente . . . 307
3.17. Año 2016 . . . 308
3.17.1. Modelo . . . 308
3.17.2. Ordinaria . . . 310
3.17.3. Ordinaria-Coincidente . . . 312
3.17.4. Extraordinaria . . . 315
3.18. Año 2017 . . . 317
3.18.1. Ordinaria . . . 317
3.18.2. Ordinaria-Coincidente . . . 319
3.18.3. Extraordinaria . . . 321
3.18.4. Extraordinaria-Coincidente . . . 322
3.19. Año 2018 . . . 324
3.19.1. Modelo . . . 324
3.19.2. Ordinaria . . . 326
3.19.3. Ordinaria-Coincidente . . . 329
3.19.4. Extraordinaria . . . 330
3.20. Año 2019 . . . 332
3.20.1. Modelo . . . 332
3.20.2. Ordinaria . . . 334
3.20.3. Ordinaria-Coincidente . . . 336
3.20.4. Extraordinaria . . . 339
3.20.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 341
3.21. Año 2020 . . . 345

3.21.1. Modelo . . . 345
3.21.2. Ordinaria . . . 348
3.21.3. Ordinaria-Coincidente . . . 350
3.21.4. Extraordinaria . . . 352
3.22. Año 2021 . . . 355
3.22.1. Modelo . . . 355
3.22.2. Ordinaria . . . 358
3.22.3. Ordinaria-Coincidente . . . 360
3.22.4. Extraordinaria . . . 363
3.23. Año 2022 . . . 365
3.23.1. Modelo . . . 365
3.23.2. Ordinaria . . . 368
3.23.3. Ordinaria-Coincidente . . . 369
3.23.4. Extraordinaria . . . 372
3.23.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 374
3.24. Año 2023 . . . 376
3.24.1. Modelo . . . 376
3.24.2. Ordinaria . . . 378
3.24.3. Ordinaria-Coincidente . . . 381
3.24.4. Extraordinaria . . . 382
3.24.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 384
3.25. Año 2024 . . . 386
3.25.1. Modelo . . . 386
3.25.2. Ordinaria . . . 389
3.25.3. Ordinaria-Coincidente . . . 391
3.25.4. Extraordinaria . . . 394
3.25.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 396
3.26. Año 2025 . . . 398
3.26.1. Modelo . . . 398

4. Probabilidad **401**
4.1. Año 2000 . . . 401
4.1.1. Modelo . . . 401
4.1.2. Ordinaria . . . 402
4.1.3. Extraordinaria . . . 403
4.2. Año 2001 . . . 404
4.2.1. Modelo . . . 404
4.2.2. Ordinaria . . . 406
4.2.3. Extraordinaria . . . 407
4.3. Año 2002 . . . 408
4.3.1. Modelo . . . 408
4.3.2. Ordinaria . . . 409
4.3.3. Extraordinaria . . . 410
4.4. Año 2003 . . . 412
4.4.1. Ordinaria . . . 412
4.4.2. Extraordinaria . . . 413
4.5. Año 2004 . . . 414
4.5.1. Modelo . . . 414
4.5.2. Ordinaria . . . 415

4.5.3. Extraordinaria . . . 416
4.6. Año 2005 . . . 416
4.6.1. Modelo . . . 416
4.6.2. Ordinaria . . . 417
4.6.3. Extraordinaria . . . 418
4.7. Año 2006 . . . 420
4.7.1. Modelo . . . 420
4.7.2. Ordinaria . . . 420
4.7.3. Extraordinaria . . . 421
4.8. Año 2007 . . . 422
4.8.1. Modelo . . . 422
4.8.2. Ordinaria . . . 422
4.8.3. Extraordinaria . . . 424
4.9. Año 2008 . . . 425
4.9.1. Modelo . . . 425
4.9.2. Ordinaria . . . 427
4.9.3. Extraordinaria . . . 428
4.10. Año 2009 . . . 429
4.10.1. Modelo . . . 429
4.10.2. Ordinaria . . . 431
4.10.3. Extraordinaria . . . 432
4.11. Año 2010 . . . 434
4.11.1. Modelo . . . 434
4.11.2. Ordinaria . . . 435
4.11.3. Extraordinaria . . . 435
4.12. Año 2011 . . . 437
4.12.1. Modelo . . . 437
4.12.2. Ordinaria . . . 438
4.12.3. Extraordinaria . . . 439
4.12.4. Reserva . . . 440
4.13. Año 2012 . . . 441
4.13.1. Modelo . . . 441
4.13.2. Ordinaria . . . 442
4.13.3. Ordinaria-Coincidente . . . 444
4.13.4. Extraordinaria . . . 445
4.14. Año 2013 . . . 446
4.14.1. Modelo . . . 446
4.14.2. Ordinaria . . . 448
4.14.3. Ordinaria-Coincidente . . . 449
4.14.4. Extraordinaria . . . 449
4.14.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 451
4.15. Año 2014 . . . 452
4.15.1. Modelo . . . 452
4.15.2. Ordinaria . . . 453
4.15.3. Ordinaria-Coincidente . . . 454
4.15.4. Extraordinaria . . . 455
4.15.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 456
4.16. Año 2015 . . . 458
4.16.1. Modelo . . . 458

4.16.2. Ordinaria 459
4.16.3. Extraordinaria 461
4.16.4. Extraordinaria-Coincidente 462
4.17. Año 2016 463
4.17.1. Modelo 463
4.17.2. Ordinaria 463
4.17.3. Ordinaria-Coincidente 465
4.17.4. Extraordinaria 466
4.18. Año 2017 467
4.18.1. Ordinaria 467
4.18.2. Ordinaria-Coincidente 468
4.18.3. Extraordinaria 469
4.18.4. Extraordinaria-Coincidente 470
4.19. Año 2018 471
4.19.1. Modelo 471
4.19.2. Ordinaria 472
4.19.3. Ordinaria-Coincidente 473
4.19.4. Extraordinaria 474
4.20. Año 2019 475
4.20.1. Modelo 475
4.20.2. Ordinaria 476
4.20.3. Ordinaria-Coincidente 477
4.20.4. Extraordinaria 479
4.20.5. Extraordinaria-Coincidente 480
4.21. Año 2020 481
4.21.1. Modelo 481
4.21.2. Ordinaria 483
4.21.3. Ordinaria-Coincidente 484
4.21.4. Extraordinaria 485
4.22. Año 2021 487
4.22.1. Modelo 487
4.22.2. Ordinaria 488
4.22.3. Ordinaria-Coincidente 489
4.22.4. Extraordinaria 490
4.23. Año 2022 491
4.23.1. Modelo 491
4.23.2. Ordinaria 492
4.23.3. Ordinaria-Coincidente 493
4.23.4. Extraordinaria 494
4.23.5. Extraordinaria-Coincidente 495
4.24. Año 2023 495
4.24.1. Modelo 495
4.24.2. Ordinaria 496
4.24.3. Ordinaria-Coincidente 497
4.24.4. Extraordinaria 498
4.24.5. Extraordinaria-Coincidente 499
4.25. Año 2024 500
4.25.1. Modelo 500
4.25.2. Ordinaria 501

4.25.3. Ordinaria-Coincidente . . . 502
4.25.4. Extraordinaria . . . 503
4.25.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 504
4.26. Año 2025 . . . 505
4.26.1. Modelo . . . 505

5. Estadística **507**
5.1. Año 2000 . . . 507
5.1.1. Modelo . . . 507
5.1.2. Ordinaria . . . 508
5.1.3. Extraordinaria . . . 509
5.2. Año 2001 . . . 510
5.2.1. Modelo . . . 510
5.2.2. Ordinaria . . . 511
5.2.3. Extraordinaria . . . 512
5.3. Año 2002 . . . 513
5.3.1. Modelo . . . 513
5.3.2. Ordinaria . . . 515
5.3.3. Extraordinaria . . . 516
5.4. Año 2003 . . . 517
5.4.1. Ordinaria . . . 517
5.4.2. Extraordinaria . . . 517
5.5. Año 2004 . . . 518
5.5.1. Modelo . . . 518
5.5.2. Ordinaria . . . 519
5.5.3. Extraordinaria . . . 520
5.6. Año 2005 . . . 521
5.6.1. Modelo . . . 521
5.6.2. Ordinaria . . . 522
5.6.3. Extraordinaria . . . 523
5.7. Año 2006 . . . 524
5.7.1. Modelo . . . 524
5.7.2. Ordinaria . . . 525
5.7.3. Extraordinaria . . . 525
5.8. Año 2007 . . . 526
5.8.1. Modelo . . . 526
5.8.2. Ordinaria . . . 526
5.8.3. Extraordinaria . . . 527
5.9. Año 2008 . . . 528
5.9.1. Modelo . . . 528
5.9.2. Ordinaria . . . 529
5.9.3. Extraordinaria . . . 530
5.10. Año 2009 . . . 531
5.10.1. Modelo . . . 531
5.10.2. Ordinaria . . . 532
5.10.3. Extraordinaria . . . 533
5.11. Año 2010 . . . 534
5.11.1. Modelo . . . 534
5.11.2. Ordinaria . . . 535

5.11.3. Extraordinaria 536
5.12. Año 2011 537
5.12.1. Modelo 537
5.12.2. Ordinaria 538
5.12.3. Extraordinaria 539
5.12.4. Reserva 540
5.13. Año 2012 541
5.13.1. Modelo 541
5.13.2. Ordinaria 542
5.13.3. Ordinaria-Coincidente 543
5.13.4. Extraordinaria 544
5.14. Año 2013 545
5.14.1. Modelo 545
5.14.2. Ordinaria 546
5.14.3. Ordinaria-Coincidente 547
5.14.4. Extraordinaria 548
5.14.5. Extraordinaria-Coincidente 549
5.15. Año 2014 550
5.15.1. Modelo 550
5.15.2. Ordinaria 551
5.15.3. Ordinaria-Coincidente 552
5.15.4. Extraordinaria 553
5.15.5. Extraordinaria-Coincidente 554
5.16. Año 2015 555
5.16.1. Modelo 555
5.16.2. Ordinaria 556
5.16.3. Ordinaria-Coincidente 557
5.16.4. Extraordinaria 558
5.16.5. Extraordinaria-Coincidente 559
5.17. Año 2016 560
5.17.1. Modelo 560
5.17.2. Ordinaria 561
5.17.3. Ordinaria-Coincidente 563
5.17.4. Extraordinaria 564
5.18. Año 2017 565
5.18.1. Ordinaria 565
5.18.2. Ordinaria-Coincidente 566
5.18.3. Extraordinaria 567
5.18.4. Extraordinaria-Coincidente 568
5.19. Año 2018 569
5.19.1. Modelo 569
5.19.2. Ordinaria 571
5.19.3. Ordinaria-Coincidente 572
5.19.4. Extraordinaria 573
5.20. Año 2019 574
5.20.1. Modelo 574
5.20.2. Ordinaria 575
5.20.3. Ordinaria-Coincidente 576
5.20.4. Extraordinaria 578

5.20.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 579
5.21. Año 2020 . . . 580
5.21.1. Modelo . . . 580
5.21.2. Ordinaria . . . 581
5.21.3. Ordinaria-Coincidente . . . 583
5.21.4. Extraordinaria . . . 584
5.22. Año 2021 . . . 585
5.22.1. Modelo . . . 585
5.22.2. Ordinaria . . . 586
5.22.3. Ordinaria-Coincidente . . . 587
5.22.4. Extraordinaria . . . 588
5.23. Año 2022 . . . 589
5.23.1. Modelo . . . 589
5.23.2. Ordinaria . . . 591
5.23.3. Ordinaria-Coincidente . . . 592
5.23.4. Extraordinaria . . . 593
5.23.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 594
5.24. Año 2023 . . . 595
5.24.1. Modelo . . . 595
5.24.2. Ordinaria . . . 596
5.24.3. Ordinaria-Coincidente . . . 597
5.24.4. Extraordinaria . . . 599
5.24.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 600
5.25. Año 2024 . . . 601
5.25.1. Modelo . . . 601
5.25.2. Ordinaria . . . 601
5.25.3. Ordinaria-Coincidente . . . 602
5.25.4. Extraordinaria . . . 603
5.25.5. Extraordinaria-Coincidente . . . 603
5.26. Año 2025 . . . 604
5.26.1. Modelo . . . 604

;; www.inusat.net ;;

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Año 2000

1.1.1. Modelo

Opción A

Problema 1.1.1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{lllll} x- & y & & = & a \\ x+ & & a^2z = & & 2a+1 \\ x- & y+ & a(a-1)z = & & 2a \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real a.

b) Resuélvase dicho sistema para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & a(a-1) & 2a \end{array}\right); \quad |A| = a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución Única).

Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Primera y tercera fila son iguales, por lo que el Rango$(\overline{A}) = 2$, ya que $\left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0$, y por esta última razón Rango$(A) = 2$. En conclusión, Rango$(\overline{A}) =$Rango$(A) = 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

www.matesat.net

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \text{ y } \left|\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right| = -1 \neq 0$$

Por el primer menor tenemos Rango$(A) = 2$ y por el segundo Rango$(\overline{A}) = 3$. Luego Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)

b) Para $a = 3$ nos queda:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x- & y & & = & 3 \\ x+ & & 9z = & 7 \\ x- & y+ & 6z = & 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5/2 \\ y = -1/2 \\ z = 1/2 \end{array}\right.$$

1.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.1.2 *(3 puntos)* Siendo a un número real cualquiera, se define el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y- & az & = 1 \\ - & y+ & z & = 0 \\ ax+ & & z & = a \end{array}\right.$$

a) Discútase dicho sistema en función del valor de a

b) Encuéntrese todas las soluciones para $a = 1$

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & a \end{array}\right); \quad |A| = -a^2 + 2a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución Única).

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Primera y cuarta columna son iguales, por lo que el Rango$(\overline{A}) = 2$, ya que $\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{array}\right| = -1 \neq 0$, y por esta última razón Rango$(A) = 2$. En conclusión, Rango$(\overline{A}) =$Rango$(A) = 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b) Para $a = 1$, despreciamos la última ecuación y nos queda

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y- & z & = 1 \\ - & y+ & z & = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right.$$

1.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.1.3 *(3 puntos)* Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264000 euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del dinero en euros.

Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

Solución:
Llamamos x a la cantidad de euros, y a la cantidad de dólares y z a la cantidad de libras esterlinas. Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{c} x+1,1y+1,5z=264000 \\ x=2,2y \\ 1,5z=x/10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 10x+ & 11y+ & 15z= & 2640000 \\ 10x- & 22y & = & 0 \\ x- & & 15z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=165000 \text{ euros} \\ y=75000 \text{ dolares} \\ z=11000 \text{ libras} \end{array}\right.$$

Opción B

1.2. Año 2001

1.2.1. Modelo

Opción A

Problema 1.2.1 *(3 puntos)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Compruébese que B es la inversa de A.

b) Calcúlese la matriz $(A-2I)^2$.

c) Calcúlese la matriz X tal que $AX=B$.

Solución:

a)
$$A^{-1}=\frac{(Adjt(A))^T}{|A|}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$(A-2I)^2=\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]^2=\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=3I$$

c)
$$AX=B\Longrightarrow X=A^{-1}B=B^2=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.2.2 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{c} mx + my = 6 \\ x + (m-1)y = 3 \end{array}$$

a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real m.

b) Resuélvase dicho sistema para $m = 2$:

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} m & m & 6 \\ 1 & m-1 & 3 \end{array}\right), \ |A| = m(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 0, \ m = 2$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right), \ |A| = 0, \ \left|\begin{array}{cc} 0 & 6 \\ -1 & 3 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow$$

  Rango$(A) = 1$ y Rango$(\overline{A}) = 2 \Longrightarrow$ Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) = 2 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)
- Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

  La segunda fila es igual a la primera multiplicada por dos, luego Rango$(A) = 1 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

b) Para $m = 2$ tenemos la ecuación $x + y = 3 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \end{array}\right.$

1.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.2.3 *(3 puntos)* Considérese el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & z= & 1 \\ x+ & ay+ & z= & a \\ x+ & y+ & az= & a^2 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los valores de a

b) Resuélvase el sistema para $a = -1$

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right); \quad |A| = a^3 - 3a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \quad a = -2$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución Única).

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Las tres filas son iguales, por lo que el Rango$(\overline{A}) = 1 =$Rango$(A) <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.(La solución depende de dos parámetros)

Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A| = 0$ pero $\left|\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Por otro lado el menor

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{array}\right| = 9 \neq 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)

b) Para $a = -1$, como hemos visto, es compatible determinado

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & y+ & z= & 1 \\ x- & y+ & z= & -1 \\ x+ & y- & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

1.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.2.4 *(3 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Determínese si A y B son invertibles y, en su caso, cacúlese la matriz inversa.

b) Resuélvase la ecuación matricial $XA - B = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

c) Calcúlese A^{86}

Solución:

a) $|A| = 1 \Longrightarrow$ la matriz es invertible.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$|B| = 0 \Longrightarrow$ la matriz no es invertible.

b) $XA - B = 2I \Longrightarrow X = (2I + B)A^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A^3 = A^2 A = I, \quad A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{86} = A^2 = A^{-1}$$

$86 = 21 \times 4 + 2$ donde 2 es el resto de dividir 86 entre 4.

1.3. Año 2002

1.3.1. Modelo

Opción A

Problema 1.3.1 *(3 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x- & 4y- & az = & -2 \\ & y- & z = & 0 \\ ax+ & & 2z = & 2 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función de los valores de a.

b) Resolver el sistema para el valor $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -a & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 2 \end{array}\right), \quad |A| = (a+2)^2 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Podemos observar que la cuarta columna es igual a la primera multiplicada por -1, por lo que Rango$(\overline{A}) = 2$ =Rango$(A) <$ nº de incógnitas, es decir, el sistema es compatible indeterminado, admite infinitas soluciones.

b) Cuando $a = 2$, resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{16} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{16} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{16} = \frac{1}{2}$$

1.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.3.2 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = (2, 1, -1), \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular las matrices $M = AB$ y $N = BA$.

b) Calcular P^{-1}, siendo $P = (N - I)$, donde I representa la matriz identidad.

c) Resolver el sistema $PX = C$.

Solución:

a)

$$M = AB = (2, 1, -1) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$N = BA = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (2, 1, -1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

.

b)

$$P = (N - I) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

c)

$$PX = C \Longrightarrow X = P^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

.

1.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.3.3 *(3 puntos)* Encontrar todas las matrices X tal que $AX = XA$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 4a + 2c & 4b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b & 2b \\ c + 4d & 2d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = a + 4b \\ b = 2b \\ 4a + 2c = c + 4d \\ 4b + 2d = 2d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = 4d - 4a \\ d = d \end{cases} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 4d - 4a & d \end{pmatrix}$$

1.4. Año 2003

1.4.1. Ordinaria

Opción A

Problema 1.4.1 *(3 puntos)* Estudiar y resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ & 2y & +z = & 0 \\ -x- & y & = & 1 \\ & -y & -z = & -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right), \quad |A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango($\overline{A}$) = 2 =Rango(A) <nº de incógnitas, es decir, el sistema es compatible indeterminado.

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & 2y & +z = & 0 \\ -x- & y & = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & 2y & = & -z \\ -x- & y & = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2+t \\ y = 1-t \\ z = t \end{array} \right.$$

1.4.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.4.2 *(3 puntos)* Calcular los valores de a para los cuales la inversa de la matriz

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$$

coincide con su transpuesta.

Solución:

$$A^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix}$$

Si $A^T = A^{-1} \Longrightarrow A \cdot A^T = I \Longrightarrow$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} a^2+16 & 0 \\ 0 & a^2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{a^2+16}{25} = 1 \Longrightarrow a = \pm 3$$

Opción B

1.5. Año 2004

1.5.1. Modelo

Opción A

Problema 1.5.1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro m:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & y- & z = & 2 \\ x+ & y+ & 2z = & 5 \\ -x+ & & (m+2)z = & 3 \end{array} \right.$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de m.

b) Resolver el sistema para $m = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & m+2 & 3 \end{array}\right), \quad |A| = m - 1 = 0 \Longrightarrow m = 1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.
Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Podemos observar que la tercera fila es la resta de la segunda menos la primera, por lo que Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas, es decir, el sistema es compatible indeterminado, admite infinitas soluciones.

b) Cuando $m = 3$, resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{array}\right|}{2} = -3$$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{array}\right|}{2} = 8$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{array}\right|}{2} = 0$$

1.5.2. Ordinaria

Opción B

Problema 1.5.2 *(3 puntos)* Hallar todas las matrices

$$X = \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & c \end{array}\right); \quad a, b, c \in R$$

que satisfacen la ecuación matricial

$$X^2 = 2X$$

Solución:

$$X^2 = X \cdot X = \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & c \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ b & c \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a^2 & 0 \\ ab + cb & c^2 \end{array}\right)$$

$$2X = \left(\begin{array}{cc} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{array}\right)$$

Igualando las expresiones

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+cb & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 = 2a \\ ab+cb = 2b \\ c^2 = 2c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0, \quad a = 2 \\ ab+cb = 2b \\ c = 0, \quad c = 2 \end{cases}$$

Tendremos las siguientes posibles soluciones:

- Si $a = 0,\ c = 0 \Longrightarrow 2b = 0 \Longrightarrow b = 0$, luego $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Si $a = 2,\ c = 0 \Longrightarrow b = b \Longrightarrow b$ puede ser cualquier valor, luego $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$
- Si $a = 0,\ c = 2 \Longrightarrow b = b \Longrightarrow b$ puede ser cualquier valor, luego $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$
- Si $a = 2,\ c = 2 \Longrightarrow 2b + 2b = 2b \Longrightarrow b = 0$, luego $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.5.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real m:

$$\begin{cases} mx+ & y- & 3z = & 5 \\ -x+ & y+ & z = & -4 \\ x+ & my- & mz = & 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.

b) Resuélvase el sistema para $m = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & m & -m & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -2m^2 + 2m + 4 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

- Si $m \neq -1$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
- Si $m = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos $|A| = 0$ y que $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Y tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$. Luego en este caso Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

☛ Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Observamos que la tercera fila es la suma de las dos primeras y por tanto Rango$(\overline{A}) = 2$. Como $|A| = 0$ y que $\left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego en este caso Rango$(A) =$ Rango$(\overline{A}) <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b) Cuando $m = 2$ el sistema es Compatible Indeterminado, luego tendrá infinitas soluciones. Para resolverlo eliminamos la tercera ecuación, que es combinación lineal de las dos primeras.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y- & 3z = & 5 \\ -x+ & y+ & z = & -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y = & 5+ & 3z \\ -x+ & y = & -4- & z \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3 + \dfrac{4}{3}t \\ y = -1 + \dfrac{1}{3}t \\ z = t \end{array}\right.$$

1.6. Año 2005

1.6.1. Modelo

Opción A

Problema 1.6.1 *(3 puntos)* Se dice que una matriz cuadrada es ortogonal si $AA^T = I$

a) Estudiar si la matriz A es ortogonal

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

b) Siendo A la matriz del apartado anterior, resolver el sistema

$$A \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right)$$

Nota: La notación A^T significa matriz traspuesta de A.
Solución:

a)

$$AA^T = \left(\begin{array}{ccc} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc} 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego es ortogonal $A^{-1} = A^T$

b)

$$A^{-1}A \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = A^{-1} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 7/5 \\ -1 \\ 1/5 \end{array}\right)$$

1.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.6.2 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 3y+ & z= & 0 \\ x- & ky- & 3z= & 0 \\ 5x+ & 2y- & z= & 0 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) Discutir el sistema para los distintos valores de k.

b) Resolver el sistema en los casos en los que sea posible.

Solución:

a) Se trata de un sistema homogéneo

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad |A|=7k+56=0 \Longrightarrow k=-8$$

Si $k\neq -8 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3 \Longrightarrow$ sistema compatible determinado.
Si $k=8$:

$$A=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}=-13\neq 0$$

Luego el Rango$(A)=2 \Longrightarrow$ el sistema sería compatible indeterminado.

b) Cuando $k\neq 0$ el sistema era compatible determinado, y como se trata de un sistema homogéneo, la única solución sería $x=y=z=0$, es decir, la solución trivial.
Cuando $k=-8$ el sistema será compatible indeterminado con un grado de libertad, es decir, tendrá infinitas soluciones que dependerán de como varíe un parámetro.

Por el menor que escogimos en el apartado anterior para el estudio del rango, en este caso, podemos despreciar la tercera ecuación con lo que nos queda el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 3y+ & z= & 0 \\ x+ & 8y- & 3z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 3y= & -z \\ x+ & 8y= & 3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{19}t \\ \\ y=\dfrac{7}{19}t \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

1.6.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 1.6.3 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones que depende del parámetro real p

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 0 \\ -x+ & 2y+ & pz= & -3 \\ x- & 2y- & z= & p \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema según los distintos valores de p.

b) Resolver el sistema para $p = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & p & -3 \\ 1 & -2 & -1 & p \end{array}\right)$$

$$|A| = 3p - 3 = 0 \Longrightarrow p = 1$$

Si $p \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

Si $p = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right| = 2 \Longrightarrow \text{ Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A)$$

Luego en este caso el sistema es incompatible.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 0 \\ -x+ & 2y+ & 2z= & -3 \\ x- & 2y- & z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{c} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 \\ \mathrm{F}_3 - \mathrm{F}_1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 0 \\ & 3y+ & 3z= & -3 \\ & -3y- & 2z= & 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{c} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2 \\ \mathrm{F}_3 - \mathrm{F}_2 \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 0 \\ & 3y+ & 3z= & -3 \\ & & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

1.7. Año 2006

1.7.1. Modelo

Opción A

Problema 1.7.1 *(3 puntos)* Sea el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & (a+1)z= & 9 \\ 3x- & 2y+ & z= & 20a \\ x+ & y+ & 2az= & 9 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

c) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20a \\ 1 & 1 & 2a & 9 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -5a + 5 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) =$Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $a = 1$ tenemos que el Rango$(A) = 2$, ya que $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{array}\right| = -5 \neq 0$, y observamos que en la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

la primera y la tercera fila son iguales, luego Rango$(\overline{A}) = 2$.

En este caso Rango$(A) =$Rango$(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible indeterminado.

b) Hay que resolver el sistema para $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 9 \\ 3x- & 2y+ & z = & 20 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{38}{5} - \lambda \\ \\ y = \dfrac{7}{5} - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) Hay que resolver el sistema para $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 3z = & 9 \\ 3x- & 2y+ & z = & 40 \\ x+ & y+ & 4z = & 9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{58}{5} \\ \\ y = -\dfrac{13}{5} \\ \\ z = 0 \end{array}\right.$$

1.7.2. Ordinaria

Opción B

Problema 1.7.2 *(3 puntos)* Encontrar todas las matrices X cuadradas 2×2 que satisfacen la igualdad

$$XA = AX$$

en cada uno de los casos siguientes:

a) $A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{array}\right)$

b) $A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{array}\right)$

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} b = 3b \Longrightarrow b = 0 \\ 3c = c \Longrightarrow c = 0 \\ a = a \Longrightarrow a \text{ cualquiera} \\ 3d = 3d \Longrightarrow d \text{ cualquiera} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3b & a \\ 3d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 3a & 3b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} c = 3b \\ d = a \\ 3a = 3d \Longrightarrow a = d \\ 3b = c \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$$

1.7.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 1.7.3 (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = 2 \\ -2x+ & 3y+ & z = 1 \\ -x+ & ay+ & 3z = 3 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 3 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 20 - 5a = 0 \Longrightarrow a = 4$$

Si $a \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado

Si $a = 4 \Longrightarrow |A| = 0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{array}\right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A)=2.

Como las dos últimas columnas de $\overline{A}$ son iguales, el Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & 2z = 2 & \\ -2x+ & 3y+ & z = 1 & \Longrightarrow \\ -x+ & 2y+ & 3z = 3 & \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

1.8. Año 2007

1.8.1. Modelo

Opción A

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

Opción B

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

1.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.8.1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & 2y+ & z = & 0 \\ 3x+ & 2y- & 2z = & 3 \\ 2x+ & 2y+ & az = & 8 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 4$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 8a + 14 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{7}{4}$$

Si $a \neq -\frac{7}{4} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) =$Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $a = -\frac{7}{4}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -7/4 & 8 \end{array}\right)$$

tenemos que el Rango$(A) = 2$, ya que $\left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{array}\right| = 8 \neq 0$, pero

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{array}\right| = 46 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

En este caso Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A})$, luego el sistema será incompatible.

b) Si $a = 4$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z = & 0 \\ 3x+ & 2y- & 2z = & 3 \\ 2x+ & 2y+ & 4z = & 8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

1.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.8.2 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ay+ & z = & 1 \\ & 2y+ & az = & 2 \\ x+ & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 3$ y $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a^2 - a = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $a = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $a = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La primera fila y la tercera son iguales y como $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = $2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a = 3$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y+ & z = & 1 \\ & 2y+ & 3z = & 2 \\ x+ & y+ & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 0 \\ z = 2/3 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 1 \\ & 2y+ & z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2}\lambda \\ \\ y = 1 - \frac{1}{2}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

1.9. Año 2008

1.9.1. Modelo

Opción A

Problema 1.9.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de n para los que la matriz A tiene inversa.

b) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$ para $n = 3$

Solución:

a)

$$|A| = n - 2 \Longrightarrow n = 2$$

Si $n \neq 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

Si $n = 2 \Longrightarrow$ No existe A^{-1}

b) $A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.9.2 *(3 puntos)* Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno de barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los

www.matbat.net

cultivos y cuántas están en barbecho?

Solución:

x: hectáreas de barbecho

y: hectáreas de trigo

z: hectáreas de cebada

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=10 \\ y=z+2 \\ x=y+z-6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \\ z=3 \end{array}\right.$$

1.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.9.3 *(3 puntos)* Una empresa instala casas prefabricadas de tres tipos A, B y C. Cada casa de tipo A necesita 10 horas de albañilería, 2 de fontanería y 2 de electricista. Cada casa de tipo B necesita 15 horas de albañilería, 4 de fontanería y 3 de electricista. Cada casa de tipo C necesita 20 horas de albañilería, 6 de fontanería y 5 de electricista. La empresa emplea exactamente 270 horas de trabajo al mes de albañilería, 68 de fontanería y 58 de electricista. ¿Cuántas casas de cada tipo instala la empresa en un mes?

Solución:

x: nº de casas tipo A

y: nº de casas tipo B

z: nº de casas tipo C

	albañilería	fontanería	electricidad
A	10	2	2
B	15	4	3
C	20	6	5
totales	270	68	58

$$\left\{\begin{array}{c} 10x+15y+20z=270 \\ 2x+4y+6z=68 \\ 2x+3y+5z=58 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=10 \\ y=6 \\ z=4 \end{array}\right.$$

1.10. Año 2009

1.10.1. Modelo

Opción A

Problema 1.10.1 *(3 puntos)* Se considera la matriz dependiente del parámetro real k:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$$

a) Determínese los valores de k para los cuales A tiene inversa.

b) Para $k = 2$, calcúlese (si existe) A^{-1}.

c) Para $k = 1$, calcúlese $(A - 2A^T)^2$.

Nota: La notificación A^T representa a la matriz transpuesta de A.

Solución:

a)

$$|A| = k^2 - k \Longrightarrow k = 1,\ k = 0$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

Si $k = 0$ o $k = 1 \Longrightarrow$ No existe A^{-1}

b) Si $k = 2$ la inversa existe:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Si $k = 1$:

$$(A - 2A^T)^2 = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.10.2 *(3 puntos)* Un hotel adquirió un total de 200 unidades entre almohadas, mantas y edredones, gastando para ello un total de 7500 euros. El precio de una almohada es de 16 euros, el de una manta 50 euros y el de un edredón 80 euros. Además, el número de almohadas compradas es igual al número de mantas más el número de edredones. ¿Cuántas almohadas, mantas y edredones ha comprado el hotel?

Solución:

Llamamos x al nº de almohadas, y al nº de mantas y z al nº de edredones.

$$\begin{cases} x+ & y+ & z= & 200 \\ 16x+ & 50y+ & 80z= & 7500 \\ x- & y- & z= & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 70 \\ z = 30 \end{cases}$$

1.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.10.3 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & kz= & 4 \\ 2x- & y+ & 2z= & 5 \\ -x+ & 3y- & z= & 0 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores del parámetro k.

b) Resuélvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & k & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 5k - 5 = 0 \Longrightarrow k = 1$$

Si $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) =$Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Luego el sistema es Compatible Indeterminado.

b) Si $k = 1$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 4 \\ 2x- & y+ & 2z= & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) Si $k = 0$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & = & 4 \\ 2x- & y+ & 2z= & 5 \\ -x+ & 3y- & z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

1.10.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 1.10.4 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependientes del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 3 \\ x+ & ky+ & z= & 3 \\ kx- & & 3z= & 6 \end{array}\right.$$

www.matesat.net

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

Solución:

a)
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ k & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -k^2 - 2k + 3 = 0 \Longrightarrow k = 1,\ k = -3$$

Si $k \neq 1$ y $k \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 =$Rango$(A) = $ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $k = 1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Dos filas son iguales y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Si $k = -3$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \end{array}\right| = -60 \neq 0$$

en este caso Rango$(A) = 2$ y como hay un menor de orden 3 distinto de cero el Rango$\overline{A} = 3$ y el sistema, en este caso, es incompatible.

b) $k = 1$:
$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z= & 3 \\ x- & & 3z= & 6 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 3\lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) $k = 3$:
$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z= & 3 \\ x+ & 3y+ & z= & 3 \\ 3x- & & 3z= & 6 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 5/2 \\ y = 0 \\ z = 1/2 \end{array}\right.$$

1.11. Año 2010

1.11.1. Modelo

Opción A

Problema 1.11.1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:
$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & ky+ & z= & 1 \\ & 2y+ & kz= & 2 \\ x+ & y+ & z= & 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores de k.

b) Resuélvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = k^2 - k = 0 \Longrightarrow k = 0,\ \ k = 1$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.
Si $k = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.
Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La primera fila y la tercera son iguales y como $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = $2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z= & 1 \\ & 2y+ & z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ y = 1 - \dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) Si $k = 3$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 3y+ & z= & 1 \\ & 2y+ & 3z= & 2 \\ x+ & y+ & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 0 \\ z = 2/3 \end{array}\right.$$

1.11.2. Ordinaria

Opción B

Problema 1.11.2 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} kx- & 2y+ & 7z= & 8 \\ x- & y+ & kz= & 2 \\ -x+ & y+ & z= & 2 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores de k.

b) Resuélvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -k^2 + k + 2 = 0 \Longrightarrow k = -1,\ \ k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left|\begin{array}{cc} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.
Si $k = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que : $|C_1C_2C_3| = |C_1C_3C_4| = |C_1C_2C_4| = |C_2C_3C_4| = 0$

$\left|\begin{array}{cc} -2 & 7 \\ -1 & 2 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & 2z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} + \lambda \\ \\ y = \lambda \\ \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

c) Si $k = 0$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} - & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y & = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 12 \\ y = 10 \\ z = 4 \end{array}\right.$$

1.11.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.11.3 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente de un parámetro real a:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

b) Resuélvase el sistema para el valor de a para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $a = 0$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z= & 22 \\ x- & 4y+ & az= & 7a \end{array} \right.$$

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & a & 7a \end{array} \right), \quad |A| = 15 - 5a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & 3 & 21 \end{array} \right), \quad |A| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{array} \right| = -5 \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

Claramente se observa que $F_3 = F_2 - F_1$, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z= & 22 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + (1/5)\lambda \\ y = -4 + (4/5)\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.12. Año 2011

1.12.1. Modelo

Opción A

Problema 1.12.1 *(3 puntos)* Un estudiante ha gastado un total de 48 euros en la compra de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la sexta parte, el del

bolígrafo a la tercera parte y el del libro a la séptima parte de sus respectivos precios iniciales, el estudiante pagaría un total de 8 euros por ellos. Calcular el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que la mochila cuesta lo mismo que el total del bolígrafo y el libro.

Solución:

Sea x : precio de la mochila, y : precio del bolígrafo y z : precio del libro.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=48\\ \dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{7}z=8\\ x=y+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=48\\ 7x+14y+6z=336\\ x-y-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=24\\ y=3\\ z=21 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.12.2 *(3 puntos)* Se consideran las matrices

$$A=\left(\begin{array}{rrr} a & 1 & 1\\ -1 & a & 0\\ 0 & -6 & -1 \end{array}\right);\quad B=\left(\begin{array}{r} -2\\ 1\\ -1 \end{array}\right)$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Para $a=2$, calcúlese la matriz inversa A^{-1}.

c) Para $a=2$, calcúlese, si existe, la matriz X que satisface $AX=B$.

Solución:

a) $|A|=5-a^2=0\Longrightarrow a=\pm\sqrt{5}$:

Si $a=\pm\sqrt{5}\Longrightarrow |A|=0\Longrightarrow A$ no tiene inversa.

Si $a\neq\pm\sqrt{5}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow A$ si tiene inversa.

b) Para $a=2$:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -6 & -1 \end{array}\right)\Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{rrr} -2 & -5 & -2\\ -1 & -2 & -1\\ 6 & 12 & 5 \end{array}\right)$$

c) $AX=B\Longrightarrow X=A^{-1}B$:

$$X=\left(\begin{array}{rrr} -2 & -5 & -2\\ -1 & -2 & -1\\ 6 & 12 & 5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{r} -2\\ 1\\ -1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{r} 1\\ 1\\ -5 \end{array}\right)$$

1.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.12.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax+ & y+ & z= & a\\ & ay+ & z= & 1\\ ax+ & y+ & az= & a \end{array}\right.$$

www.musat.net

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $a = 3$

Solución:

a)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a & a \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = a^2(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ \ a = 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$ =Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas, luego en estos casos el sistema es compatible determinado.

Si a=1:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene dos filas iguales, claramente el sistema es compatible indeterminado.

Si a=0:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

El Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A})$ por lo que el sistema es incompatible

b) Cuando $a = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 1 \\ & y+ & z= & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c) Cuando $a = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 3x+ & y+ & z= & 3 \\ & 3y+ & z= & 1 \\ 3x+ & y+ & 3z= & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 8/9 \\ y = 1/3 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.12.4 *(3 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix};\ \ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de k para los cuales la matriz A no es invertible.

b) Para $k = 0$, calcúlese la matriz inversa A^{-1}.

c) Para $k = 0$, resuélvase la ecuación matricial $AX = B$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{vmatrix} = k^2 - 4k + 3 = 0 \Longrightarrow k = 1,\ k = 3$$

Si $k = 1$ o $k = 3 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ No existe A^{-1}.

Si $k \neq 1$ y $k \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Si existe A^{-1}.

b) Si $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.12.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 1.12.5 *(3 puntos).* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix};\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense a, b para que se verifique la igualdad $AB = BA$.

b) Calcúlense c, d para que se verifique la igualdad $A^2 + cA + dI = O$.

c) Calcúlense todas las soluciones del sistema lineal:

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

b) $A^2 + cA + dI = O$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ c+1 & c+d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ d = 0 \end{cases}$$

c)

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \end{cases}$$

1.12.4. Reserva

Opción A

Problema 1.12.6 *(3 puntos).* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{r} 4x+3y+5z=5 \\ x+y+3z=1 \\ 2x+ay+(a^2-2)z=3 \end{array}\right.$$

a) Escríbase el sistema en forma matricial.

b) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

c) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & a^2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & a^2-2 \end{vmatrix}=a^2-7a+6=0\Longrightarrow a=1,\ \ a=6$$

- Si $a\neq 1$ y $a\neq 6\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD. Sistema compatible determinado.
- Si $a=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)\ F_3=F_1-2F_2\Longrightarrow \text{SCI}$$

  El sistema es compatible indeterminado.

- Si $a=6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 34 & 3 \end{array}\right)\ \text{y}\ \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}=5\neq 0\Longrightarrow \text{SI}$$

  El sistema es incompatible.

c)

$$\left\{\begin{array}{r} 4x+3y+5z=5 \\ x+y+3z=1 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=2+4\lambda \\ y=-1-7\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.12.7 *(3 puntos).* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $A^{-1}A^T$.- **Nota**.- La notación A^T representa a la matriz transpuesta de A.

b) Resuélvase la ecuación matricial: $\frac{1}{4}A^2 - AX = B$.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\frac{1}{4}A^2 - AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)$$

$$\frac{1}{4}A^2 - B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.13. Año 2012

1.13.1. Modelo

Opción A

Problema 1.13.1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} x + ky + kz = k \\ x + y + z = k \\ ky + 2z = k \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para k = 4.

Solución:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k & k \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k & 2 & k \end{array}\right);\ |A| = k^2 - 3k + 2 = 0 \Longrightarrow k = 1,\ k = 2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$ =Rango$(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right);\ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right);\ F_1 = F_2 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$ =Rango$(\overline{A}) < \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

b)

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{c} x + 4y + 4z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ 4y + 2z = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.13.2 *(3 puntos)* Se considera la matriz $A = \left(\begin{array}{cc} a & 1 \\ 3 & a \end{array}\right)$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Para $a = 2$, calcúlese la matriz $B = (A^{-1}A^T)^2$.

c) Para $a = 2$, calcúlese la matriz X que satisface la ecuación matricial:

$$AX - A^2 = A^T$$

www.yoquieroaprobar.es

Nota.- A^T representa a la matriz traspuesta de A.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 3 = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

Si $a = \pm\sqrt{3} \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $a \neq \pm\sqrt{3} \Longrightarrow \exists\, A^{-1}$.

b) Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

c) Con $a = 2$:

$$AX - A^2 = A^T \Longrightarrow X = A^{-1}(A^T + A^2)$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2\right] = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.13.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x+ & ay- & 7z = & 4a-1 \\ x+ & (1+a)y- & (a+6)z = & 3a+1 \\ & ay- & 6z = & 3a-2 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso en el que tiene infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema en el caso a = -3.

Solución:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -7 & 4a-1 \\ 1 & 1+a & -(a+6) & 3a+1 \\ 0 & a & -6 & 3a-2 \end{array}\right); \ |A| = a^2 - a - 6 = 0 \Longrightarrow a = 3,\ a = -2$$

☛ Si $a \neq 3$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

☛ Si $a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 1 & 4 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{array}\right);\ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{array}\right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

☛ Si $a = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{array}\right);\ |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$ =Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

b)

$$\left\{\begin{array}{c} x - y - 4z = -5 \\ 2y - 6z = -8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) $a = -3$

$$\left\{\begin{array}{c} x - 3y - 7z = -13 \\ x - 2y - 3z = -8 \\ -3y - 6z = -11 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -4/3 \\ y = 7/3 \\ z = 2/3 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.13.4 *(3 puntos)* Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:

a) No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.

b) Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no son socios.

c) Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

Solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 72000 \\ \dfrac{x+y}{13} = \dfrac{z}{3} \\ x + 6500 = y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x + y + z = 72000 \\ 3x + 3y - 13z = 0 \\ x - y = -6500 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 26000 \\ y = 32500 \\ z = 13500 \end{array}\right.$$

1.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.13.5 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Para $k = 4$, calcúlese el determinante de la matriz $3A^2$.

b) Para $k = 2$, calcúlese (si existe) la matriz inversa A^{-1}.

c) Discútase la existencia de solución del sistema lineal $AX = B$ según los diferentes valores del parámetro k.

Solución:

$$|A| = 2k - 6$$

a) Si $k = 4$: $|3A^2| = 3^3 \cdot |A|^2 = 108$

b) Si $k = 2$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 4 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k & 1 \end{array}\right), \ |A| = 2k - 6 = 0 \Longrightarrow k = 3$$

- Si $k \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $k = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right), \ |A| = 0, \ \left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{array}\right| = 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right| = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

En este caso Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema en Incompa-tible.

1.13.4. Extraordinaria

Opción B

Problema 1.13.6 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z= & 2 \\ x+ & ky+ & 2z= & 5 \\ kx+ & y+ & z= & 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema para $k = 0$.

c) Resuélvase el sistema para $k = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 2 & 5 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = -k^2 + 3k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1, \ \ k = 2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \ |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

b) $k = 0$

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 2 \\ x + 2z = 5 \\ y + z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

c) $k = 2$

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

www.yoquieroaprobar.es

1.14. Año 2013

1.14.1. Modelo

Opción A

Problema 1.14.1 *(2 puntos)* Discútase el sistema siguiente en función del parámetro $a \in R$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x- & y & & = & a \\ x+ & & az & = & 0 \\ 2x- & y+ & a^2z & = & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 2 & -1 & a^2 & 1 \end{array}\right);\ |A| = a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ a = 1$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $a = 0$:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right);\ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

  Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right);\ F_3 = F_1 + F_2 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

  Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

Opción B

Problema 1.14.2 *(2 puntos)* Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Obténgase A^{2007}.

b) Hállese la matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Longrightarrow A^n \left\{\begin{array}{lll} A & \text{si} & n \text{ es impar} \\ I & \text{si} & n \text{ es par} \end{array}\right. \Longrightarrow A^{2007} = A$$

www.yoquieroaprobar.es

b) $A \cdot B = C \Longrightarrow B = A^{-1}C$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.14.3 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese A^{-1}

b) Resuélvase el sistema de ecuaciones dado por $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.14.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax- & 2y & = & 2 \\ 3x- & y- & z= & -1 \\ x+ & 3y+ & z= & 1 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 2a + 8 = 0 \Longrightarrow a = -4$$

a) Si $a \neq -4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

b) Si $a = -4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right);\ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} -4 & -2 \\ 3 & -1 \end{array}\right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} -4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right| = 20 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

c) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax- & 2y & = & 2 \\ 3x- & y- & z = & -1 \\ x+ & 3y+ & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2/5 \\ y = -4/5 \\ z = 3 \end{array}\right.$$

1.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.14.5 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = -2 \\ x + ay = -2a - 1 \\ 4x + y + 5z = -1 \end{array}\right.$$

a) Resuélvase en el caso $a = 1$.

b) Discútase en función del parámetro $a \in R$.

Solución:

a) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{r} x + 2y + 3z = -2 \\ x + y = -3 \\ 4x + y + 5z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

b)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & a & 0 & -2a - 1 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right);\ |A| = -7a - 7 = 0 \Longrightarrow a = -1$$

- Si $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right);\ |A| = 0,\ \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $|C_1, C_2, C_3| = |C_1, C_2, C_4| = |C_1, C_3, C_4| = |C_2, C_3, C_4| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$. Como $\text{Rango}(A) = 2 \text{Rango}(\overline{A}) < \text{nº de incógnitas} \Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Opción B

Problema 1.14.6 *(2 puntos)* Encuéntrese la matriz X que verifica

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX = BX + C \Longrightarrow X = (A-B)^{-1}C$$

$$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

1.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.14.7 *(2 puntos)* Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese la matriz inversa de A

b) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B - I$; donde I es la matriz identidad.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$AX = B - I \Longrightarrow X = A^{-1}(B-I) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.14.8 *(2 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro k :

$$\begin{cases} kx+ & y & = & 0 \\ x+ & ky- & 2z = & 1 \\ kx- & 3y+ & kz = & 0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema para $k = 1$.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & -2 & 1 \\ k & -3 & k & 0 \end{array}\right); \ |A| = k(k^2-9) = 0 \Longrightarrow k = 0; \ k = \pm 3$$

a) Si $k \neq 0$ y $k \neq \pm 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) = $ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

b) Si $k = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right);\ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = -3F_1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y se trata de un sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones.

c) Si $k = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right);\ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}\right| = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

d) Si $k = -3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right);\ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{array}\right| = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right| = -12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

e) Si $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x+ & y & = & 0 \\ x+ & y- & 2z = & 1 \\ x- & 3y+ & z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/8 \\ y = -1/8 \\ z = -1/2 \end{array}\right.$$

1.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.14.9 *(2 puntos)* Hemos ido tres días seguidos al bar de la Universidad. El primer día tomamos 3 cafés, 2 refrescos de cola y 3 batidos de cacao, el precio fue de 7 euros. El segundo día tomamos 1 café, 2 refrescos de cola y 2 batidos de cacao, el precio total fue de 5 euros. Por último, el tercer día tomamos 2 cafés y un batido de cacao, el precio fue de 2 euros. Justifíquese razonadamente si con estos datos podemos determinar o no el precio de un café, de un refresco de cola y de un batido de cacao, suponiendo que estos precios no han variado en los tres días.

Solución:
Llamamos x al precio de un café, y al de un refresco de cola y z al del batido.

$$\left\{\begin{array}{c} 3x+2y+3z=7 \\ x+2y+2z=5 \\ 2x+z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right); \text{pero } F_3=F_1-F_2$$

Luego en sistema es compatible indeterminado y admite infinitas soluciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x=1-1/2\lambda \\ y=2-3/4\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.14.10 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{c} 2x-2ay+z=1 \\ x+(2+a)y+z=0 \\ 3x+a^2y+2z=a \end{array}\right.$$

a) Discútase, en función del parámetro real a.

b) Resuélvase el sistema para $a=0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2a & 1 & 1 \\ 1 & 2+a & 1 & 0 \\ 3 & a^2 & 2 & a \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=-a^2-a+2=0 \Longrightarrow a=-2,\ \ a=1$$

Si $a\neq -2$ y $a\neq 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})=$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
Si $a=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+z=1 \\ x+2y+z=0 \\ 3x+2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=1/2 \\ z=-3 \end{array}\right.$$

Problema 1.14.11 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$

a) Calcúlese A^2, A^3, A^{20}.

b) Hállese la matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{30} = \begin{pmatrix} 1 & 30 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

1.15. Año 2014

1.15.1. Modelo

Opción A

Problema 1.15.1 *(2 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Hállense los valores de a y b para los que se cumple $A + B + AB = C$.

b) Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 2$, determínese la matriz X que verifica $BX - A = I$; donde I es la matriz identidad.

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 4b \\ -a & ab - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = -1, \ b = 1$$

b) Si $a = 1$ y $b = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$BX - A = I \Longrightarrow X = B^{-1}(I + A)$

$$I + A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

www.musat.net

Opción B

Problema 1.15.2 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x+3y+z=1 \\ 2x+6y+z=0 \\ -x+ay+4z=1 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a=0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & a & 4 & 1 \end{array}\right);\ \ |A|=a+3=0 \Longrightarrow a=-3$$

- Si $a \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right);\ |A|=0,\ \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right|=-1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$|A_1|=|A_2|=0,\ \ |A_3|=8\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Como Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+3y+z=1 \\ 2x+6y+z=0 \\ -x+4z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7 \\ y=-8/3 \\ z=2 \end{array}\right.$$

1.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.15.3 *(2 puntos)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese $(A^tB)^{-1}$, donde A^t denota a la traspuesta de la matriz A.

b) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Solución:

a)

$$A^tB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^tB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x = -1 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Opción B

Problema 1.15.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = F_2 - F_1 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$. Como Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})$ < nº de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a = -1$:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = -1 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

1.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.15.5 *(2 puntos)* Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Determínese la matriz X tal que $AX = A^{-1}$

Solución:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $AX = A^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.15.6 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y = 1 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

a) Discútase para los diferentes valores de $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 12a - 12 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y = 1 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/4 \\ z = 3/2 \end{cases}$$

www.matematicas.net

1.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.15.7 *(2 puntos)* Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real λ:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & \lambda y+ & z= & -\lambda \\ 4x- & 2\lambda y+ & 2z= & \lambda-3 \end{array}\right.$$

a) Determínense los valores del parámetro real λ que hacen que el sistema sea incompatible.

b) Resuélvase el sistema para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & -2\lambda & 2 & \lambda-3 \end{array}\right) \Longrightarrow |A_1| = \left|\begin{array}{cc} 2 & -\lambda \\ 4 & -2\lambda \end{array}\right| = 0;\ |A_2| = \left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{array}\right| = 0;$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{cc} 2 & -\lambda \\ 4 & \lambda-3 \end{array}\right| = 3\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1;\ |A_4| = \left|\begin{array}{cc} -\lambda & 1 \\ -2\lambda & 2 \end{array}\right| = 0;$$

$$|A_5| = \left|\begin{array}{cc} -\lambda & -\lambda \\ -2\lambda & \lambda-3 \end{array}\right| = 3\lambda(1-\lambda) \Longrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 1;$$

$$|A_6| = \left|\begin{array}{cc} 1 & -\lambda \\ 2 & \lambda-3 \end{array}\right| = 3\lambda - 3 \Longrightarrow \lambda = 1$$

Si $\lambda \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) = 1 \Longrightarrow$ sistema es incompatible.

Si $\lambda = 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 1 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\left\{\ 2x - y + z = -1 \right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \mu \\ y = 1 + 2\mu + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.15.8 *(2 puntos)* Considérese la matriz

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

a) Calcúlese $(A \cdot A^T)^{200}$.

b) Calcúlese $(A \cdot A^T - 3I)^{-1}$.

Nota: A^T denota a la traspuesta de la matriz A. I es la matriz identidad de orden 3.
Solución:

a)

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^T)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot A^T$$

Luego

$$(A \cdot A^T)^{200} = A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A \cdot A^T - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^T - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

1.15.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.15.9 *(2 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese B^{31}.

b) Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1} \cdot B$.

Solución:

a)

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = B \Longrightarrow B^{31} = B$$

b) $\left|A^{-1} \cdot B\right| = \left|A^{-1}\right| \cdot |B| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+2\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|A^{-1} \cdot B\right| = 0$$

Opción B

Problema 1.15.10 *(2 puntos)* Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 2x-ay=4 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a=1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -a & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -a \end{array}\right|=0 \Longrightarrow -a-2=0 \Longrightarrow a=-2$$

Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})=$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
Si $a=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $a=1$:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$$

1.16. Año 2015

1.16.1. Modelo

Opción A

Problema 1.16.1 *(2 puntos)* Se considera $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Calcúlese $A^T \cdot A$.

Nota: A^T denota la traspuesta de la matriz A.

Solución:

a)

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^T A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$$

www.yoquieroaprobar.es

Opción B

Problema 1.16.2 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+z=1 \\ x+ay+az=1 \\ x+4ay+z=2a \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a=-1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 4a & 1 & 2a \end{array}\right);\ \ |A|=-4a^2+6a-2=0\Longrightarrow a=1/2,\ \ a=1$$

- Si $a\neq 1/2$ y $a\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=1/2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right);\ \ F_1=F_3\Longrightarrow$$

el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right);\ \ |A|=0\ \text{ y }\ \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

como $\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3\Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a=-1$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+z=1 \\ x-y-z=1 \\ x-4y+z=-2 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=3/4 \\ y=1/2 \\ z=-3/4 \end{array}\right.$$

1.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.16.3 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x+y-z=8 \\ 2x+az=3 \\ x+y+z=2 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = -2a - 4 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

- Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \; |A| = 0, \; \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución)

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + y - z = 8 \\ 2x + z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.16.4 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{array}\right)$$

a) Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro real k.

b) Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para $k = 3$.

Solución:

a) $|A| = 0 \Longrightarrow 8 - 4k = 0 \Longrightarrow k = 2$.
Si $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.
Si $k = 2$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{array}\right); |A| = 0, \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b) $k = 3$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -3/4 & 2 & -3/2 \end{array}\right)$$

www.yoquieroaprobar.es

1.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.16.5 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=a \\ ax+y+z=1 \\ x+ay+2z=1 \end{array}\right.$$

a) Discútase para los diferentes valores de $a \in R$.

b) Resuélvase para $a=1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=a^2-3a+2=0 \Longrightarrow a=1,\ \ a=2$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})=$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)=\left[\ F_1=F_2\ \right] \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=0 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.16.6 *(2 puntos)* Se consideran las matrices dependientes del parámetro real a

$$A=\left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \text{ y } B=\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

a) Determínense los valores de a para los que la matriz $A \cdot B$ admite inversa.

b) Para $a = 0$, resuélvase la ecuación matricial $(A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ 2a+4 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A \cdot B| = 2(a^2 - a - 2) = 0 \Longrightarrow a = 2, \ \ a = -1$$

Cuando se cumple que $a \neq 2$ y $a \neq -1$ la matriz $|A \cdot B|$ tiene inversa.

b) Para $a = 0$: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(AB)X = C \Longrightarrow X = (AB)^{-1}C = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.16.7 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \ \text{y} \ \ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{15} e indíquese si la matriz A tiene inversa.

b) Calcúlese el determinante de la matriz $(B \cdot A^t \cdot B^{-1} - 2 \cdot Id)^3$.

Nota: A^t denota la matriz traspuesta de A. Id es la matriz identidad de orden 2.
Solución:

a) $A^2 = A \Longrightarrow A^{15} = A$ y $|A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

b)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \ \text{y} \ \ C = B \cdot A^t \cdot B^{-1} - 2 \cdot I =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|C| = 2 \Longrightarrow |C^3| = |C|^3 = 8$$

Opción B

Problema 1.16.8 *(2 puntos)* Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = a + 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + az = a \end{cases}$$

a) Discútase el sistema en función de los valores de a.

b) Resuélvase el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a+1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \end{array}\right); \quad |A| = a^3 - a^2 - a + 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$
$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$
Como Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución)
- Si $a = -1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right); \; |A| = 0, \; \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$
Como $F_3 = -F_2 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a = 2$:
$$\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

1.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.16.9 *(2 puntos)* Considérense las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.

b) Determínese la matriz X tal que $B \cdot A \cdot X = C$.

Solución:

a) $A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4/15 & 7/15 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/15 & 19/15 \\ 1/5 & -4/15 \end{pmatrix}$
$\left|A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}\right| = -\dfrac{1}{9}$
De otra manera:
$\left|A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}\right| = \left|A^{-1}\right| \cdot |B| \cdot \left|C^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} \cdot |B| \cdot \dfrac{1}{|C|} = \dfrac{1}{3} \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{-15} = -\dfrac{1}{9}$

b) $B \cdot A \cdot X = C \Longrightarrow X = (BA)^{-1}C$

$$X = \begin{pmatrix} 19/15 & -16/15 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 23/5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.16.10 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - z = 3 \\ x + 3y - 2z = a \end{cases}$$

a) Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & a \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & a-2 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} == \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $a \neq 1$ el sistema es incompatible.

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 4 - 7\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

1.17. Año 2016

1.17.1. Modelo

Opción A

Problema 1.17.1 *(2 puntos)* Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$

a) Determínese para qué valores de $a \in R$ es invertible A.

b) Resuélvase para $a = 0$ el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = a^2 + 10a - 24 = 0 \Longrightarrow a = -12 \;\; a = 2$ La matriz será invertible para cualquier valor de a diferente de éstos.

b) Para $a = 0$ la matriz es invertible y, como se trata de un sistema homogéneo, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial $x = y = z = 0$.

Problema 1.17.2 *(2 puntos)* Determínese la matriz X que verifica

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$$

Solución:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right] \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.17.3 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ 3x + ay - 2z = 5 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & -2 & 5 \end{array}\right); \;\; |A| = a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right); \;\; |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases}$$

1.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.17.4 *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}$.

b) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1}?
Nota: C^T denota la matriz traspuesta de la matriz C.

Solución:

a) $|A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |C| \cdot |C^T| \cdot |A^{-1}| = |C|^2 = 4$
($|C| = |C^T|$ y $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$)

b)

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{pmatrix}$$

No es una matriz cuadrada y, por tanto, $\nexists M^{-1}$.

Opción B

Problema 1.17.5 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{array}\right); \quad |A| = -2a + 4 = 0 \Longrightarrow a = 2$$

- Si $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

como $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A)$ y el sistema es incompatible.

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ x+2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1/4 \\ z=-1/2 \end{array}\right.$$

1.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.17.6 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente de $a \in R$:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x+y+az=a-2 \\ ax-y+z=a-2 \\ x+2y+z=0 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del a.

b) Resuélvase para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & a-2 \\ a & -1 & 1 & a-2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right); \quad |A| = 2a^2 - 8 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$$

- Si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right); \quad |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right| = 32 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

como Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right); \quad |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

como $F_3 = F_1 - F_2 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x+y=-2 \\ -y+z=-2 \\ x+2y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=1 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

www.yoquieroaprobar.es

Opción B

Problema 1.17.7 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo a un número real.

a) Determínese a para que la matriz A admita inversa.

b) Para $a = 1$, determínese la matriz X que verifica $A \cdot X + A = Id$.

Solución:

a) $|A| = a(2-a) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$
Si $a = 0$ o $a = 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.
Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b) $A \cdot X + A = I \Longrightarrow A \cdot X = I - A \Longrightarrow X = A^{-1}(I - A)$:
Para $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.17.8 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$

a) Estúdiese para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene inversa.

b) Determínese, para $k = 1$, la matriz X tal que $XA = Id$.
Nota: Id denota la matriz identidad de tamaño 3×3.

Solución:

a) $|A| = k(k^2 + k - 6) = 0 \Longrightarrow k = 0$, $k = 2$ y $k = -3$
Si $k = 0$ o $k = 2$ o $k = -3 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$
Si $k \neq 0$ y $k \neq 2$ y $k \neq -3 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) $XA = Id \Longrightarrow X = A^{-1}$: Si $k = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -3/2 & -1/4 & 1/4 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

www.musat.net

Opción B

Problema 1.17.9 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c}(a-1)x+y+z=1\\ x+(a-1)y+(a-1)z=1\\ x+az=1\end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los valores del a.

b) Resuélvase el sistema para $a=3$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}a-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a-1 & a-1 & 1\\ 1 & 0 & a & 1\end{array}\right);\ \ |A|=a^2(a-2)=0\Longrightarrow a=0,\ \ a=2$$

- Si $a\neq 0$ y $a\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right);\ \ |A|=0,\ \left|\begin{array}{cc}1 & -1\\ 1 & 0\end{array}\right|=1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$A_2=\left|\begin{array}{ccc}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{array}\right|=2\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

  Luego el sistema es incompatible.
- Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{array}\right);\ \ |A|=0\ \text{ y }\ \left|\begin{array}{cc}1 & 1\\ 1 & 0\end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

  como $F_1=F_2\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=2=$Rango$(A)<\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a=3$:

$$\left\{\begin{array}{c}2x+y+z=1\\ x+2y+2z=1\\ x+3z=1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1/3\\ y=1/9\\ z=2/9\end{array}\right.$$

1.18. Año 2017

1.18.1. Ordinaria

Opción A

Problema 1.18.1 *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A=\left(\begin{array}{ccc}1 & 2 & -k\\ 1 & -2 & 1\\ k & 2 & -1\end{array}\right)\ \text{ y }\ B=\left(\begin{array}{ccc}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{array}\right)$$

a) Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene matriz inversa.

b) Determínese para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B$.

Solución:

a) $|A| = -2k^2 + 2 = 0 \Longrightarrow k = \pm 1$:
Si $k = \pm 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$
Si $k \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) Si $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.18.2 *(2 puntos)* Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ (2-a)x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 3$.

Solución:
Se trata de un sistema Homogéneo

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 2-a & 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad |A| = -6(a^2 - a - 6) = 0 \Longrightarrow a = -2, \ a = 3$$

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única $x = y = z = 0$)
- Si $a = -2$ o $a = 3 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $a = 3$:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 3x - 4y - 4z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

1.18.2. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.18.3 *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese la matriz $D = A^T \cdot B$. ¿Existe la matriz $F = A \cdot B$?

b) Calcúlese la matriz $M = B^{-1}$.

Nota: A^T denota la matriz traspuesta de la matriz A.

Solución:

a) $D = A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 9 & 26 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
Como el número de columnas de A es distinto al número de filas de B la matriz $F = A \cdot B$ no existe.

b) $M = B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.18.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -x + 3y + 3z = 0 \\ -x + 3y + z = 1 \\ -x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array}\right); \quad |A| = 6 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

www.matesat.net

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{c} -x+3y+3z=0 \\ -x+3y+z=1 \\ -x+y+2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-3/4 \\ y=1/4 \\ z=-1/2 \end{array}\right.$$

1.18.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.18.5 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y-z=-2 \\ -2x-az=2 \\ y+az=-2 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 4$.

Solución:

a)

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array}\right);\quad |A| = 2-3a = 0 \Longrightarrow a = 2/3$$

- Si $a \neq 2/3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2/3$:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2/3 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+2F_1 \\ F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -8/3 & -2 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 4F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -8/3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Luego en este caso el sistema es incompatible.

b) $a = 4$:

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y-z=-2 \\ -2x-4z=2 \\ y+4z=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.18.6 *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A=\left(\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{array}\right)\ B=\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{array}\right)\ \text{y}\ C=\left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{array}\right)$$

a) Determínese la matriz C^{40}.

www.matematicas.net

b) Calcúlese la matriz X que verifica $X \cdot A + 3B = C$

Solución:

a) $C^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. $C^{40} = (C^2)^{20} = I^{20} = I$

b) $XA + 3B = C \Longrightarrow XA = C - 3B \Longrightarrow X = (C - 3B)A^{-1}$:

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.18.4. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.18.7 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1+a \\ a & a & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Estúdiese para qué valores del parámetro real a la matriz A tiene inversa.

b) Determínese, para $a = 1$, la matriz X tal que $A \cdot X = Id$, siendo Id la matriz identidad de tamaño 3×3.

Solución:

a) $|A| = a^3 - 2a^2 = a^2(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$ luego $\exists A^{-1} \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$

b) Si $a = 1$ y $A \cdot X = Id \Longrightarrow X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.18.8 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} -x + ay + z = 3 \\ 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = 0$.

Solución:

a)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right); \quad |A| = 2a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

- ☛ Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 0$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego en este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} -x + z = 3 \\ y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

1.19. Año 2018

1.19.1. Modelo

Opción A

Problema 1.19.1 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$

a) Determínese para qué valores de a para los que la matriz A es invertible.

b) Para $a = 1$, despéjese y determínese la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X = A + 2Id$, donde Id representa la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $|A| = 2a^3 = 0 \Longrightarrow a = 0$ La matriz será invertible para cualquier valor de $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

b) Para $a = 1$: $A \cdot X = A + 2Id \Longrightarrow X = A^{-1}(A + 2Id) = Id + 2A^{-1}$:

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.19.2 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 3y + az = a + 4 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & a & a+4 \end{array}\right); \quad |A| = 3 - a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 3y + z = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

1.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.19.3 *(2 puntos)* Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

a) Compruébese que B es la matriz inversa de A.

b) Calculése la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \cdot B = I \Longrightarrow B = A^{-1}$

b) $A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B = B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.19.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rl} x + ay + z &= 1 \\ ax + y + (a-1)z &= a \\ x + y + z &= a + 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right); \quad |A| = 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- ☛ Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -13/2 \\ y = -3/2 \\ z = 12 \end{array}\right.$$

1.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.19.5 *(2 puntos)* Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

a) Determínense los valores de m para los que la matriz A es invertible.

b) Para $m = 0$ considérese la ecuación matricial $A \cdot X = B$. Exprésese X en función de A y B y calcúlese X.

Solución:

a) $|A| = 6 - 2m = 0 \Longrightarrow m = 3$. Luego si $m \neq 3 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) Con $m = 0$: $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ -1 & 3/2 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

www.musat.net

Opción B

Problema 1.19.6 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x+y+z & =1 \\ x+2y+z & =2 \\ x-y+az & =-1 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a=0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right);\ \ |A|=3a=0 \Longrightarrow a=0$$

- Si $a\neq 0 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2-F_1 \\ 2F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado.

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=1 \\ 3y+z=3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{\lambda}{3} \\ \\ y=\dfrac{3-\lambda}{3} \\ \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

1.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.19.7 *(2 puntos)* Considérense las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right)$

a) Calcúlese la matriz $[(A\cdot A^t)^2-2A\cdot A^t]^{11}$.

b) Determínense el número de filas y columnas de la matriz X que verifica que $X\cdot A^t=B^t$. Justifíquese si A^t es una matriz invertible y calcúlese la matriz X.

Nota: M^t denota la matriz traspuesta de la matriz M.

Solución:

a) $[(A\cdot A^t)^2-2A\cdot A^t]^{11} = \left[\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{11} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\underset{a\times b}{X}\cdot\underset{2\times 3}{A^t} = \underset{1\times 3}{B^t} \Longrightarrow a=1$ y $b=2$, luego el grado de X es 1×2.

La matriz A^t no es invertible ya que no es cuadrada.

$(p,q)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (3,2,3) \Longrightarrow (q,p,q) = (3,2,3) \Longrightarrow p=2$ y $q=3 \Longrightarrow X=(2,3)$

Opción B

Problema 1.19.8 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+3y+z &= a \\ 2x+ay-6z &= 8 \\ x-3y-5z &= 4 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuélvase para $a=4$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 2 & a & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right);\quad |A| = -6a-12 = 0 \Longrightarrow a=-2$$

- Si $a\neq -2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & -8 & 12 \\ 0 & -6 & -6 & 6 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 4F_3-3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $a=4$:

$$\begin{cases} x+3y+z &= 4 \\ 2x+4y-6z &= 8 \\ x-3y-5z &= 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

1.20. Año 2019

1.20.1. Modelo

Opción A

Problema 1.20.1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & m \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) Determínese para qué valores de m para los que la matriz A es invertible.

b) Considérese la ecuación matricial $A \cdot X = A \cdot B + B$. Para $m = 5$, exprésese X en función de A y B y calcúlese la matriz X.

Solución:

a) $|A| = 3(m-4) = 0 \Longrightarrow m = 4$
La matriz será invertible para cualquier valor de $m \in \mathbb{R} - \{4\}$.

b) Para $m = 5$: $A \cdot X = A \cdot B + B \Longrightarrow X = A^{-1}(A \cdot B + B) = A^{-1}(A + I)B = (I + A^{-1})B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 13/3 & -5/3 & -7/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I + A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13/3 & -2/3 & -7/3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13/3 & -2/3 & -7/3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 11/3 & 13/3 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.20.2 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} 6x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + z = 2 \\ 5x - y + az = -1 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & a & -1 \end{array}\right); \quad |A| = 16a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

- ☛ Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 6F_2 - F_1 \\ 6F_3 - 5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 5 & 11 \\ 0 & -16 & -5 & -11 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 6x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + z = 2 \\ 5x - y = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{16}\lambda \\ y = \dfrac{11}{16} - \dfrac{5}{16}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

1.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.20.3 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \left(\begin{array}{ccc} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{array}\right) \text{ y } C = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.

b) Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Solución:

a) $A - 2B = \left(\begin{array}{ccc} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$|A - 2B| = 2k - 29 = 0 \Longrightarrow k = \dfrac{29}{2}$

b) Como C no es cuadrada no es invertible.

$$C^T C = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |C^T C| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\exists (C^T C)^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

Opción B

Problema 1.20.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro real m:

$$\left\{\begin{array}{c} -x+y+z=0 \\ x+my-z=0 \\ x-y-mz=0 \end{array}\right.$$

a) Determínense los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x=y=z=0$.

b) Resuélvase para $m=1$.

Solución:
Se trata de un sistema homogéneo.

a)

$$= \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -m \end{array}\right); \;\; |A| = m^2-1=0 \Longrightarrow m=\pm 1$$

- Si $m \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única, la trivial $x=y=z=0$)
- Si $m=\pm 1$ se trata de un sistema compatible indeterminado. Un sistema homogéneo no puede ser incompatible.

b) Si $m=1$ la primera y la segunda ecuación son iguales cambiadas de signo, eliminamos una de ellas y resolvemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

1.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.20.5 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+(a+2)z=1 \\ x+y+az=0 \\ (a-1)x+2z=a+1 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuélvase para $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a-1 & 0 & 2 & a+1 \end{array}\right); \;\; |A| = a^2-3a=0 \Longrightarrow a=0, \;\; a=3$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 4F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible.

b) Si $a = 2$

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y + 4z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 2z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.20.6 *(2 puntos)* Considérense las matrices A, B y C siguientes, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

a) Determínense los valores de a, b y c para que se verifique

$$C \cdot A = B \cdot C \text{ y } |C| = 2$$

Nota: $|C|$ es el determinante de la matriz C.

b) Calcúlese, para los valores $a = b = c = 1$, $C^{-1} \cdot B \cdot C$ y B^{100}.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6+2a & 6+2a \\ -3b+2c & -3b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -c \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 6 + 2a = 0 \\ -3b + 2c = -b \\ -3b + 2c = -c \\ |C| = -2c - ab = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{array}\right.$$

b) $a=b=c=1\Longrightarrow C=\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}$

$$C^{-1}\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/3 & -1/3\\ -2/3 & -2/3\end{pmatrix}$$

$B^1=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B^3=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, luego

$$B^n=\begin{cases}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} & \text{si} \quad n \text{ par}\\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} & \text{si} \quad n \text{ impar}\end{cases}\Longrightarrow B^{100}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

1.20.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.20.7 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 4 & 2\\ 1 & a & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 9\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.

b) Para $a=3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $AX=B$.

Solución:

a) $|A|=a(a-2)=0\Longrightarrow a=0$ y $a=2$. No existe A^{-1} para estos dos valores.

b) Para $a=3$:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\\ -1/3 & 1/3 & 2/3\\ -1/3 & -2/3 & 5/3\end{pmatrix}$$

$$AX=B\Longrightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\\ -1/3 & 1/3 & 2/3\\ -1/3 & -2/3 & 5/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\\ -2/3\\ 4/3\end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.20.8 *(2 puntos)* Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 10\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

www.musat.net

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Calcúlese B^{-1}.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -1/2 \\ 1/3 & 11/6 & -7/6 \\ -1/6 & -23/12 & 13/12 \end{pmatrix}$$

b) Sea $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2}C \Longrightarrow B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}C \Longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}CA =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1.20.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.20.9 *(2 puntos)* Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & -2 & -2 \\ 2+x & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $A \cdot B$ y determínense los valores de x para los cuales $A \cdot B$ es invertible.

b) Calcúlese la inversa de $A \cdot B$ cuando $x = 1$.

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & -2 & -2 \\ 2+x & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$|A \cdot B| = 2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$. Luego $\exists (A \cdot B)^{-1} \ \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$

b) Para $x = 1$:
$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.20.10 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y=1 \\ ax-z=3 \\ 2y+z=2 \end{array}\right.$$

a) Discútase la unicidad de la solución del sistema en función del valor de a.

b) Resuélvase el sistema para $a=1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right);\ \ |A|=2-a=0 \Longrightarrow a=2$$

- Si $a\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-z=3 \\ 2y+z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-3 \\ y=4 \\ z=-6 \end{array}\right.$$

1.21. Año 2020

1.21.1. Modelo

Opción A

Problema 1.21.1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A=\left(\begin{array}{cc} a & 1 \\ b & 2 \end{array}\right),\ \ I=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right),\ \ B=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

a) Calcule los valores de a y de b para que se verifique $A^2=2I$.

b) Para $a=0$ y $b=2$, determine la matriz X tal que $XA=B-X$.

Solución:

a)

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2+b=2 \\ a+2=0 \\ ab+2b=0 \\ b+4=2 \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$$

b) $XA=B-X\Longrightarrow XA+X=B\Longrightarrow X(A+I)=B\Longrightarrow X=B(A+I)^{-1}$

$$A+I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\Longrightarrow (A+I)^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=B(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.21.2 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Proporcione el valor de m para que $A\cdot B=C^t$

b) Para $m=0$ calcule B^{-1}.

Solución:

a) $A\cdot B=C^t\Longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2m-1 & 0 & m+2 \\ m-1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases} 2m-1=3 \\ m+2=4 \\ m-1=1 \end{cases}\Longrightarrow$$

$$m=2$$

b) $m=0\Longrightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Longrightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 1.21.3 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+ay+z= & 6 \\ 2x-y+z= & a-1 \\ -x+y+z= & 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & a-1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = -3a - 1 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

- Si $a \neq -\frac{1}{3} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -\frac{1}{3}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -\frac{4}{3} \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \frac{1}{9}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 6 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ 3F_3 + F_1 \end{array}\right] = \frac{1}{9}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & -1 & -3 & -40 \\ 0 & 2 & 6 & 24 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array}\right] =$$

$$\frac{1}{9}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & -1 & 1 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & -56 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + z = & 6 \\ 2x - y + z = & 1 \\ -x + y + z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

1.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.21.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x + ay = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + ay + (a+1)z = a \end{array}\right.$$

Se pide:

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array}\right)$; $|A| = -a(a+1) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow SCD$: Sistema compatible determinado, solución única.
- Si $a = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow SI$: sistema incompatible, no tiene solución.
- Si $a = 0$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow SCI$: sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.21.5 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.

b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 - 5A = -4I$:

$$\begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 5m & 0 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & m-4 & 10 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 5 & 4-m & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m - 4 = 0 \\ m^2 - 5m = -4 \\ 4 - m = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow m = 4$$

b) Si $m = 1$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 4 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

www.musat.net

1.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.21.6 *(2 puntos)* Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule A^2 y A^{10}.

b) Calcule $(AA - 3I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$,
$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 \end{pmatrix}, \ldots, A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$ Se observa como el término a_{12} de las matrices es cero cuando el exponente es par y 2 cuando es impar.

b) $B = AA - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$(AA - 3I)^{-1} = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.21.7 *(2 puntos)* Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2a \\ 2x + ay + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 4 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 2$$

☛ Si $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{11}{4} \\ \\ y = -\dfrac{7}{2} \\ \\ z = -\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

1.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.21.8 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.

b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

Solución:

a) $A^2 - 5A = -I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 5a^2 - 6 & 0 \\ 0 & 5a^2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = \pm 1$

b) Si $a = -1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.21.9 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \overline{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - ay = 1 \\ ax - 4y - z = 2 \\ 2x + ay - z = a - 4 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{array}\right); \quad |A| = -a^2 + 3a + 4 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ \ a = 4$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - 3y = 1 \\ 3x - 4y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -3/2 \end{array}\right.$$

1.22. Año 2021

1.22.1. Modelo

Opción A

Problema 1.22.1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a, b y c para que se verifique $A^2 = A - B$.

b) Para $a = b = c = 2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ ac+2b & 2c & 1 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ ac+2b & 2c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{cases} 2a = a-1 \\ ac+2b = b-1 \\ 2c = c-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$

b) Para $a = b = c = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.22.2 *(2 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + z = 2a - 1 \\ 2x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ a = 2$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

www.yoquieroaprobar.es

☛ Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = -1 \\ 2x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = -2 \\ z = -1/2 \end{array}\right.$$

1.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.22.3 *(2 puntos)* Se considera la matriz A

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{array}\right)$$

.

a) Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que $A = A^{-1}$.

b) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A.

Solución:

a) $A = A^{-1} \Longrightarrow AA = AA^{-1} \Longrightarrow A^2 = I \Longrightarrow A \cdot A = \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{array}\right) =$

$$\left(\begin{array}{ccc} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & a^2+1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 + 1 = 1 \\ a = 0 \\ b^2 = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = \pm 1 \end{array}\right.$$

b) Para $a = b = 2 \Longrightarrow A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{array}\right)$

Opción B

Problema 1.22.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y - z = -1 \\ x - y + a^2 z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

www.yoquieroaprobar.es

b) Resuelva el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right); \quad |A| = 3(a^2-1) = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

1.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.22.5 *(2 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{array}\right); \quad B = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 2 \end{array}\right)$$

a) Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.

b) Para $a = 1$, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que $AX = B$.

Solución:

a) $|A| = 2(a^2 - 4) = 0 \Longrightarrow a = \pm 2 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$ si $a = \pm 2\}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \left(\begin{array}{ccc} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 7/3 \\ 10/3 \\ -1 \end{array}\right)$$

Opción B

Problema 1.22.6 *(2 puntos)* Se desea rellenar una piñata para un cumpleaños con juguetes de 1, 2 y 5 euros. Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros, por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro. Si para rellenar la piñata se compran juguetes por valor de 228 euros, ¿cuántos juguetes de 1, 2 y 5 euros habría que comprar para introducir en la piñata?

Solución:

Sean x los juguetes de un euro, y los de dos euros y z los de tres euros

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+5z=228 \\ -5y+z=0 \\ 2x-3y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12 \\ y=8 \\ z=40 \end{array}\right.$$

1.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.22.7 *(2 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $a=2$, calcule, si existe, la matriz X que satisface $AX=B$.

Solución:

a) $|A|=-a-1=0 \Longrightarrow a=-1 \Longrightarrow \exists A^{-1} \ \forall a \in \mathbb{R}-\{-1\}$

b) Si $a=2 \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

$$AX=B \Longrightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.22.8 Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2ay+z=0 \\ -x-ay=1 \\ -y-z=-a \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuelva el sistema para $a=3$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right)$, $|A|=1-a=0 \Longrightarrow a=1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 6y + z = 0 \\ -x - 3y = 1 \\ -y - z = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{array} \right.$$

1.23. Año 2022

1.23.1. Modelo

Opción A

Problema 1.23.1 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule, para $a = 0$, la matriz inversa A^{-1}.

Solución:

a) $|A| = 2(a - 2) = 0 \Longrightarrow a = 2 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{2\}$

b) Si $a = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.23.2 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{c} x - y + z = 2 \\ x - y + az = -1 \\ 2x + y + z = 6 \end{array} \right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuelva el sistema para $a = -2$.

Solución:

www.musat.net

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right); \quad |A| = 3(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = -2$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - y + z = 2 \\ x - y - 2z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

1.23.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.23.3 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{array}\right)$.

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

Solución:

a) $|A| = a^2 - 2a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1 \pm \sqrt{3}$
$\exists A^{-1} \ \forall a \in \mathbb{R} - \left\{1 \pm \sqrt{3}\right\}$

b) Si $a = 1$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

Opción B

Problema 1.23.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \overline{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + ay + z = a \\ ax - y - az = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ a & -1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 2a(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ a = 1$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/4 \\ y = 1 \\ z = -1/4 \end{array}\right.$$

1.23.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.23.5 *(2 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

y $B = A + aI$, donde I es la matriz identidad de orden 3 y a es un número real.

a) Calcule $A(A^2 - A^4)$

b) Calcule los valores de a para que las matrices B y AB sean invertibles.

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \ B = A + aI = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) + a\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{array}\right)$$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^3 \cdot A^2 = A \cdot A^2 = A^3 = A$

$A(A^2 - A^4) = A^3 - A^5 = A - A = O$

b) $|B| = a(a^2 - 1) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = \pm 1 \Longrightarrow \exists A^{-1} \ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$

$|AB| = |A||B| = 0 \cdot |B| = 0 \Longrightarrow$ la matriz AB no es invertible, independientemente del valor de a.

En conclusión, no hay valores de a que hagan invertibles a las dos matrices.

Opción B

Problema 1.23.6 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2ax + z = 1 \\ ax - y + z = 0 \\ ay + z = a + 1 \end{cases}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 0 & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & a+1 \end{array}\right) \quad |A| = -a(a+2) = 0 \Longrightarrow$$

$$a = 0, \quad a = -2$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq -2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.

Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\ F_1 = F_3 \ \right] \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} z = 1 \\ -y + z = 0 \\ z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

1.23.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.23.7 *(2 puntos)* Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

a) Determine los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.

b) Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B)X = Y$.

Solución:

a) $|A| = 4a = 0 \Longrightarrow a = 0$
$\exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) Si $a = 1$:

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)X = Y \Longrightarrow X = (A - B)^{-1}Y \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{5}{4}, \quad z = -2$$

Opción B

Problema 1.23.8 *(2 puntos)* Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + ay + z = 2 \\ x - az = 0 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right.$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

www.yoquieroaprobar.es

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ a = 1$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + z = 2 \\ x = 0 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

1.23.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.23.9 *(2 puntos)* Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \left(\begin{array}{ccc} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right), \quad Y = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right)$$

.

a) Determine los valores de a para que A tenga inversa.

b) Calcule los valores de a para que la solución del sistema $(A - B)X = Y$ sea

$$X = \left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right)$$

Solución:

a) $|A| = a(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$
$\exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$

b) Si $a = 1$:

$$A - B = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow 1 - a = 2 \Longrightarrow a = -1$$

Opción B

Problema 1.23.10 *(2 puntos)* Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ ax - z = 0 \\ ay + z = a \end{cases}$$

a) Determine a para que el sistema NO sea compatible determinado.

b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & a \end{array}\right); \quad |A| = a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1$$

Estos valores son los únicos que hacen a este sistema NO compatible determinado.

b)

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - z = 0 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

1.24. Año 2023

1.24.1. Modelo

Opción A

Problema 1.24.1 *(2 puntos)* Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcular A^{-1} para $a = 1$.

Solución:

a) $|A| = a^2 + 2a + 1 = 0 \Longrightarrow a = -1 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Opción A

Problema 1.24.2 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y + az = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

www.yoquieroaprobar.es

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + y + 2z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

1.24.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.24.3 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

b) Determine la matriz X tal que

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

b) $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.24.4 *(2 puntos)* Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.

Solución:

Sean x el número de buñuelos de chocolate, y el número de buñuelos de nata y z el número de buñuelos de crema. Se tiene que

$$\begin{cases} x + y + z = 220 \\ y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 120 \\ z = 60 \end{cases}$$

1.24.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.24.5 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2ª www.yoquieroaprobar.es

a) Calcule $A^2 - A$.

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|A| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.24.6 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + ay = 1 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -1$

- Si $a \in R - \{-1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$número de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- Si $a = -1$:
  $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $a = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ -3y + 2z = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{3}\lambda \\ y = 1 + \dfrac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

1.24.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.24.7 (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

.

a) Determine A^3 y A^{2023}.

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{2023} = (A^3)^{674}A = I \cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = A^2$ ya que $A \cdot A^2 = A^3 = I \Longrightarrow$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.24.8 (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 2 & a & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a^3 - 7a + 6 = 0 \Longrightarrow a = -3, \ \ a = 1, \ \ a = 2$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 3F_2 + F_1 \\ 3F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \\ 0 & 7 & -7 & 4 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 8F_3 + 7F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

☛ Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} y + 2z = 1 \\ x + 2z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 2/3 \\ z = 1/6 \end{array}\right.$$

1.24.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.24.9 (2 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

a) Determine la matriz X tal que, $A \cdot X = B$.

b) Calcule $B \cdot B^t \cdot A^{-1}$, donde B^t denota la matriz transpuesta de B y A^{-1} la matriz inversa de A.

Solución:

a) Como $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot B^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.24.10 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2ax+y+2z=2 \\ x-az=0 \\ 3x-y-z=2a \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2a \end{array}\right);\ \ |A|=-2a^2-3a-1=0 \Longrightarrow$$

$$a=-1,\ \ a=-\frac{1}{2}$$

- Si $a \in \mathbb{R}-\{-1,-\frac{1}{2}\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-\frac{1}{2}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+F_1 \\ F_3+3F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2+F_1 \\ 2F_3+3F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+2z=2 \\ x-z=0 \\ 3x-y-z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2/3 \\ y=-2/3 \\ z=2/3 \end{array}\right.$$

1.25. Año 2024

1.25.1. Modelo

Problema 1.25.1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros $a, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica

$$A \cdot B = 6B$$

b) Para $a = 1$ y $c = -1$, calcule $B^t \cdot A \cdot B$, donde B^t denota la matriz transpuesta de B.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+2 \\ a+c+2 \\ c^2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+c+2=6 \\ c^2+5=6c \end{cases} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a=3 \text{ y } c=1 \\ a=-1 \text{ y } c=5 \end{cases}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$

Problema 1.25.2 *(2 puntos)* Una caja de Lego contiene un total de 50 piezas de tres tipos diferentes (A, B , C). La cantidad de piezas del tipo A más la del tipo B es igual a cuatro veces la cantidad del tipo C. Si a las piezas del tipo A le sumamos el doble de las piezas del tipo B y cuatro veces las del tipo C, el total de piezas de la caja sería de 100. Plantee un sistema de ecuaciones para saber la cantidad de piezas de cada tipo que contendrá la caja.

Solución:

Sean x el número de piezas de A, y las de B y z las de C.

$$\begin{cases} x+y+z=50 \\ x+y=4z \\ x+2y+4z=100 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=50 \\ x+y-4z=0 \\ x+2y+4z=100 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=20 \\ z=10 \end{cases}$$

Hay 20 piezas de A, 20 de B y 10 de C.

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 100 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & -5 & -50 \\ 0 & 1 & 3 & 50 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -5z=-50 \Longrightarrow z=10 \\ y+30=50 \Longrightarrow y=20 \\ x+20+10=50 \Longrightarrow x=20 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=20 \\ z=10 \end{cases}$$

Problema 1.25.3 *(2 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} a^2x - ay = a \\ a^3x - y = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a^2 & -a & a \\ a^3 & -1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a^2(a^2-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = \pm 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x - 2y = 2 \\ 8x - y = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \end{array}\right.$$

1.25.2. Ordinaria

Problema 1.25.4 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{array}\right)$$

a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A.

b) Para $a = -2$ calcule A^{-1}.

Solución:

a) $|A| = -a^3 + a^2 + 2a = 0 \Longrightarrow a = -1$, $a = 0$ y $a = 2 \Longrightarrow \exists A^{-1} \ \ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$

b) Si $a = -2 \Longrightarrow A = \left(\begin{array}{ccc} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{array}\right)$

Problema 1.25.5 *(2 puntos)* Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Solución:

Sean x el número de entradas generales, y de estudiantes y z las de infantiles.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 10x+8y+5z=4900 \\ x=2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 10x+8y+5z=4900 \\ x-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=200 \\ y=300 \\ z=100 \end{array}\right.$$

Se venden 200 entradas generales, 300 de estudiantes y 100 infantiles.

Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 10 & 8 & 5 & 4900 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-10F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & -3 & -600 \\ 0 & -2 & -5 & -1100 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & -3 & -600 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=100 \\ -y-300=-600 \Longrightarrow y=300 \\ x+300+100=600 \Longrightarrow x=200 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=200 \\ y=300 \\ z=100 \end{array}\right.$$

Problema 1.25.6 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=a \\ x+ay+z=a+1 \\ x+y+az=2 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array}\right); \quad |A|=2a(a-1)=0 \Longrightarrow a=0, \;\; a=1$$

- Si $a \in \mathbb{R}-\{0,1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2=\text{Rango}(\overline{A})=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2-F_1 \\ 2F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = -1 & \\ y = 3 - \lambda & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda & \end{array}\right.$$

1.25.3. Ordinaria-Coincidente

Problema 1.25.7 *(2 puntos)* Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $A \cdot B$ y $A^3 \cdot B$.

b) Determine el valor del determinante de la matriz $A - 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 3×3.

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A - 2I| = 0$ ya que la matriz tiene dos filas iguales.

Problema 1.25.8 *(2 puntos)* Alba, Benito y Charo son socios de una empresa de reformas. Por un trabajo realizado recibieron 6200 euros que se repartieron en función del tiempo dedicado. La cantidad percibida por Alba excede en 200 euros al total recibido conjuntamente por los otros dos socios. Por otra parte, se sabe que para que Alba y Benito percibieran lo mismo Alba debería entregar a Benito 600 euros. Plantee un sistema de ecuaciones y determine la cantidad percibida por cada socio.

Solución:

Sean x la cantidad percibida por Alba, y la cantidad percibida por Benito y z la cantidad percibida por Charo.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6200 \\ x - 200 = y + z \\ x - 600 = y + 600 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6200 \\ x - y - z = 200 \\ x - y = 1200 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3200\,€ \\ y = 2000\,€ \\ z = 1000\,€ \end{array}\right.$$

Alba recibe 3200 €, Benito 2000 € y Charo 1000 €

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6200 \\ 1 & -1 & -1 & 200 \\ 1 & -1 & 0 & 1200 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6200 \\ 0 & -2 & -2 & -6000 \\ 0 & -2 & -1 & -5000 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6200 \\ 0 & -2 & -2 & -6000 \\ 0 & 0 & 1 & 1000 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 1000 \\ -2y - 2000 = -6000 \Longrightarrow y = 2000 \\ x + 2000 + 1000 = 6200 \Longrightarrow x = 3200 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3200 \\ y = 2000 \\ z = 1000 \end{array}\right.$$

Problema 1.25.9 *(2 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + az = 2 \\ x + y + z = a \\ -2x + 2ay + 8z = -13 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ -2 & 2a & 8 & -13 \end{array}\right); \quad |A| = 2(a^2 - 1) = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 8 & -13 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -9 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 8 & -13 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 10 & -9 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y = 2 \\ x + y + z = 0 \\ -2x + 8z = -13 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{7}{2} \\ z = -2 \end{array}\right.$$

1.25.4. Extraordinaria

Problema 1.25.10 *(2 puntos)* Se consideran las matrices M, P y N dadas por:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \text{ y } (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N$$

b) Para $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3.

Solución:

a) $M \cdot N = 2N \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2b - a \\ 2 - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$(N^t \cdot M)^t + M \cdot P = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \right]^t + \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$

$\left[\begin{pmatrix} -a + 2c & -b + 2 \end{pmatrix} \right]^t + \begin{pmatrix} -a - 3b \\ -c - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 2c \\ -b + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a - 3b \\ -c - 3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -2a - 3b + 2c \\ -b - c - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Tenemos:

$$\begin{cases} 2b - a = -2 \\ 2 - c = 4 \\ -2a - 3b + 2c = -1 \\ -b - c - 1 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$M + 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Luego $M^2 = M + 2I$.

$M^2 = M + 2I \Longrightarrow M^2 - M = 2I \Longrightarrow \frac{1}{2} M(M - I) = I \Longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) =$

$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$M^3 = MM^2 = M(M + 2I) = M^2 + 2M = M + 2I + 2M = 3M + 2I =$

$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

Problema 1.25.11 *(2 puntos)* En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

Solución:

Sean x el número de guitarras, y de pianos y z de violines.

$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ y + z = x \\ z + 2y + 4x = 180 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 70 \\ x - y - z = 0 \\ 4x + 2y + z = 180 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 5 \\ z = 30 \end{cases}$$

Tienen 35 guitarras, 5 pianos y 30 violines.

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 180 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & -2 & -70 \\ 0 & -2 & -3 & -100 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & -2 & -70 \\ 0 & 0 & -1 & -30 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 30 \\ -2y - 60 = -70 \Longrightarrow y = 5 \\ x + 5 + 30 = 70 \Longrightarrow x = 35 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 35 \\ y = 5 \\ z = 30 \end{array}\right.$$

Problema 1.25.12 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ 8x + ay + 5z = 2 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & a & 5 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 7a - 21 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{3\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + y + 3z = 2 \\ -y - 7z = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = -2 + 2\lambda & \\ y = 6 - 7\lambda & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda & \end{array}\right.$$

1.25.5. Extraordinaria-Coincidente

Problema 1.25.13 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

a) Determine todos los valores de los parámetros a, $b \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $A^2 = O$, donde O denota la matriz nula de tamaño 2×2.

b) Sea $a = 2$ y $b = -2$. Sabiendo que $B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, calcule B^2 y B^{10}.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-4 & -a-b \\ 4a+4b & b^2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a^2-4=0 \Longrightarrow a = \pm 2 \\ -a-b=0 \Longrightarrow a=-b \\ 4a+4b=0 \Longrightarrow a=-b \\ b^2-4=0 \Longrightarrow b=\pm 2 \end{cases} \xrightarrow{a=-b} \begin{cases} a=2 \text{ y } b=-2 \\ a=-2 \text{ y } b=2 \end{cases}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, $B^3 = B \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}, \ldots, B^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & 1-2n \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$B^{10} = \begin{pmatrix} 21 & -10 \\ 40 & -19 \end{pmatrix}$

Problema 1.25.14 *(2 puntos)* De cada 100 libros prestados en una biblioteca, 90 son novelas, biografías y libros de autoayuda. Además, se observa que los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas y el número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas. Plantee el sistema de ecuaciones y calcule el porcentaje de libros prestados de cada tipo.

Solución:

Sean x el número de novelas, y de biografías y z de autoayudas.

$$\begin{cases} x+y+z=90 \\ z=\dfrac{x}{2} \\ y+5=x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=90 \\ x-2z=0 \\ x-y=5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=38\,\% \\ y=33\,\% \\ z=19\,\% \end{cases}$$

Se han prestado 38 % novelas, 33 % biografías y 19 % autoayudas.

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -3 & -90 \\ 0 & -2 & -1 & -85 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -3 & -90 \\ 0 & 0 & 5 & 95 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} 5z=95 \Longrightarrow z=19 \\ -y-57=-90 \Longrightarrow y=33 \\ x+33+19=90 \Longrightarrow x=38 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=38\,\% \\ y=33\,\% \\ z=19\,\% \end{cases}$$

Problema 1.25.15 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x-2y+(a+1)z=1 \\ 2x-az=2 \\ (a+2)x-ay=4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a+1 & 1 \\ 2 & 0 & -a & 2 \\ a+2 & -a & 0 & 4 \end{array}\right); \quad |A| = a(2-a) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 2$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + z = 2 \\ x + y = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -4 \end{array}\right.$$

1.26. Año 2025

1.26.1. Modelo

EJERCICIO 2

(2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**

Problema 1.26.1 (2,5 puntos)

a) Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1,25 puntos) Calcule la matriz D tal que $B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2.
2. (1,25 puntos) La matriz A verifica la igualdad $A^2 = A + 2I$. Calcule A^4.

b) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x-y+z=-1 \\ ax+(-a+2)y=2 \\ 2x-(a+3)y+(a+2)z=-5 \end{array}\right.$$

1. (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
2. (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=1$.

Solución:

a) 1. $B(D^t+A^{-1})B^{-1}=2I \Longrightarrow D^t+A^{-1}=B^{-1}(2I)B=2I \Longrightarrow D^t=2I-A^{-1} \Longrightarrow$
$D=(2I-A^{-1})^t=\left[2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}\right]^t=\left[\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1/2&3/2\\0&-1\end{pmatrix}\right]^t=$
$\begin{pmatrix}3/2&-3/2\\0&3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}3/2&0\\-3/2&3\end{pmatrix}$

2. $A^4=A^2\cdot A^2=(A+2I)(A+2I)=A^2+2A+2A+4I=(A+2I)+4A+4I=5A+6I=$
$5\begin{pmatrix}2&3\\0&-1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&15\\0&1\end{pmatrix}$

b) 1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-1\\a&-a+2&0&2\\2&-(a+3)&a+2&-5\end{array}\right);\ \ |A|=a(1-a)=0\Longrightarrow a=0,\ \ a=1$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{0,1\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-1\\0&2&0&2\\2&-3&2&-5\end{array}\right)=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3-2F_1\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-1\\0&2&0&2\\0&-1&0&-3\end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\2F_3+F_2\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-1\\0&2&0&2\\0&0&0&-4\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-1\\1&1&0&2\\2&-4&3&-5\end{array}\right)=\begin{bmatrix}F_1\\F_2-F_1\\F_3-2F_1\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-1\\0&2&-1&3\\0&-2&1&-3\end{array}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3+F_2\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-1\\0&2&-1&3\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

2. Si $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{c}x-y+z=-1\\x+y=2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2-\lambda\\y=\lambda\\z=-3+2\lambda\end{array}\right.$$

;; www.inusat.net ;;

Capítulo 2

Programación

2.1. Año 2000

2.1.1. Modelo

Opción B

Problema 2.1.1 *(3 puntos)* Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar le lleva dos horas y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer más de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5 euros y por cada pulsera 4 euros. El artesano desea determinar el número de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

a) Exprésese la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Represéntese gráficamente el recinto definido.

c) Obténgase el número de collares y pulseras correspondientes al máximo beneficio.

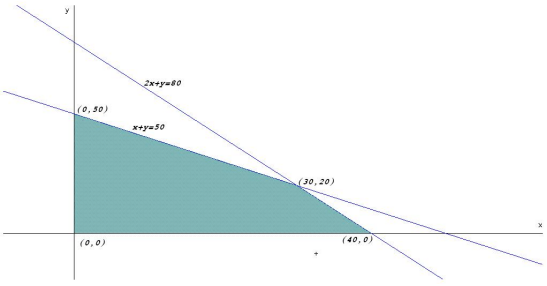
Solución:

a) Llamamos x al nº de collares e y al nº de pulseras. Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \leq 50 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo es: $z(x, y) = 5x + 4y$.

b) El recinto será el siguiente:



c) Los vértices son: $(0, 50)$, $(30, 20)$ y $(40, 0)$

$$z(0, 50) = 200$$
$$z(30, 20) = 230$$
$$z(40, 0) = 200$$

El artesano tiene que fabricar 30 collares y 20 pulseras para obtener el máximo beneficio, que asciende a 230 euros.

2.1.2. Ordinaria

Opción B

Problema 2.1.2 *(3 puntos)* Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casa de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 20 euros y 30 euros, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe de fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose las siguientes restricciones:

El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario.

Cada mesa requiere dos horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.

El material utilizado en cada mesa cuesta 4 euros. El utilizado en cada silla cuesta 2 euros. Cada operario dispone de 12 euros diarios de material.

a) Expresa la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Representa gráficamente la región factible y calcula los vértices de la misma.

c) Razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si esto le conviene a la empresa.

d) Resuelve el problema

Solución:

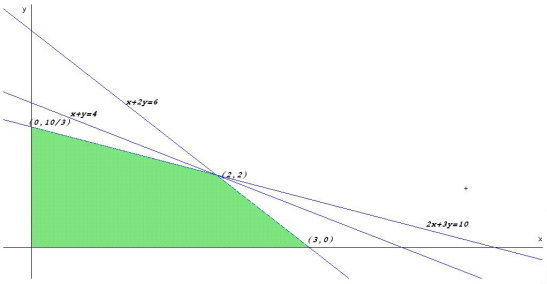
a) Llamamos x al nº de mesas e y al nº de sillas. Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 2x + y \leq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo es: $z(x, y) = 20x + 30y - 4x - 2y$.

Los vértices son: $(0, 10/3)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$:

b) El dibujo es el siguiente:



c) El punto $(1, 1)$ está dentro de la región factible, por lo que si es posible que un operario fabrique una silla y una mesa en un día, pero no es en este punto en el que se obtendría un máximo beneficio y, por tanto, no será del interés de la empresa.

d)

$$z(0, 10/3) = 100$$
$$z(2, 2) = 100$$
$$z(3, 0) = 60$$

Como el número de sillas y mesas producidas tiene que ser un número entero la solución sería dos sillas y dos mesas.

2.1.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.1.3 *(3 puntos).*Una empresa que sirve comidas preparadas tiene que diseñar un menú utilizando dos ingredientes. El ingrediente A contiene 35 g de grasas y 150 Kilocalorías por cada 100 g de ingrediente, mientras que el B contiene 15 g de grasas y 100 Kilocalorías por cada 100 g. El coste es de 1,5 euros por cada 100 g. del ingrediente A y de 1 euros por cada 100 g del ingrediente B.

El menú a diseñar debería contener no más de 30 g de grasas y al menos 110 Kilocalorías por cada 100 g de alimento. Se pide determinar las proporciones de cada ingrediente a emplear en el menú de manera que su coste sea lo más reducido posible.

a) Indíquese la expresión de las restricciones y la función objetivo.

b) Represéntese gráficamente la región delimitada por las restricciones.

c) Calcúlese el porcentaje óptimo de cada ingrediente a incluir en el menú.

Solución:

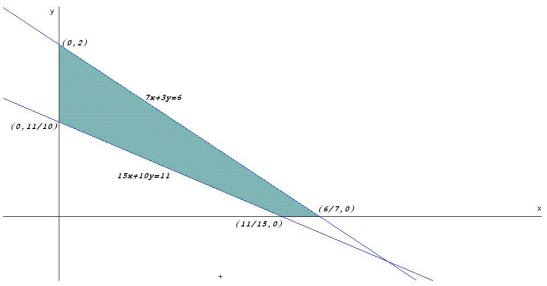
a) Llamamos x a la cantidad de A e y a la cantidad de B. Hacemos la siguiente tabla

	Grasas	Kcal	Coste
A	35	150	$1,5$
B	15	100	2
	≤ 30	≥ 110	

$$\Longrightarrow \begin{cases} 35x + 15y \leq 30 \\ 150x + 100y \geq 110 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7x + 3y \leq 6 \\ 15x + 10y \geq 11 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo es: $z(x, y) = 1,5x + y$.

b) El dibujo es el siguiente:



Los vértices son: $(0, 2)$, $(6/7, 0)$,$(0, 11/10)$ y $(11/15, 0)$:

c)

$$z(0, 2) = 2$$
$$z(6/7, 0) = 1, 28$$
$$z(0, 11/10) = 1, 1$$
$$z(11/15, 0) = 1, 1$$

El valor mínimo es cualquier punto de la recta $15x + 10y = 11$. Para obtener el porcentaje hacemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} 15x + 10y = 11 \\ x + y = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0, 2 \\ y = 0, 8 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 20\,\% \\ y = 80\,\% \end{array} \right.$$

La proporción buscada sería el $20\,\%$ de A y el $80\,\%$ de B.

2.2. Año 2001

2.2.1. Ordinaria

Opción B

Problema 2.2.1 *(3 puntos)* En un depósito se almacenan bidones de petróleo y de gasolina. Para poder atender la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y 20 de gasolina. Siempre debe haber más bidones de gasolina que de petróleo, siendo la capacidad del depósito de 200 bidones. Por razones comerciales, deben mantenerse en inventario al menos 50 bidones. El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 20 céntimos y el de uno de gasolina es de 30 céntimos. Se desea saber cuántos bidones de cada clase han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo.

a) Exprésense la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Represéntese gráficamente la región factible y calcúlense los vértices de la misma.

c) Resuélvase el problema

Solución:

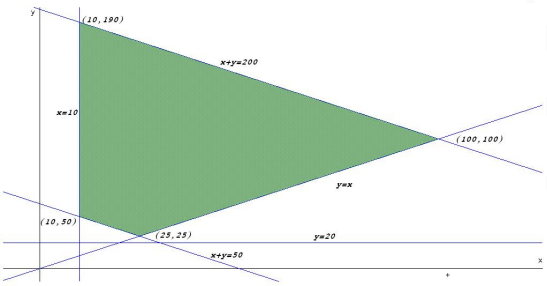
a) Llamamos x al nº de bidones de petróleo e y al nº de bidones de gasolina. Las restricciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 10 \\ y \geq 20 \\ y > x \\ 50 \leq x + y \leq 200 \end{array} \right.$$

La función objetivo es: $z(x, y) = 20x + 30y$.

Los vértices son: $(10, 190)$, $(100, 100)$, $(25, 25)$ y $(10, 40)$:

b) Representación de la región factible



c)

$$z(10, 190) = 5900$$
$$z(100, 100) = 5000$$
$$z(25, 25) = 1250$$
$$z(10, 40) = 1400$$

El mínimo está en el punto $(25, 25)$, pero no es válida, ya que tiene que haber más bidones de gasolina que de petróleo. Buscamos una solución próxima a este punto en el punto $(25, 26)$ en el que $z(25, 26) = 1280$ céntimos que sigue siendo una solución mínima y que corresponde a 25 bidones de petróleo y 26 bidones de gasolina.

2.2.2. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.2.2 *(3 puntos).* Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4 % en un cierto producto A, un 6 % en el producto B y un 5 % en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8 % sobre el precio inicial de A, un 10 % sobre el precio inicial de B y un 6 % sobre el precio inicial de C.

Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros.

Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

Solución:

	A	B	C
Sin Oferta	x	y	z
1 Oferta	$0,96x$	$0,94y$	$0,95z$
2 Oferta	$0,92x$	$0,90y$	$0,94z$

Nos queda el sistema

$$\begin{cases} 0,96x + 1,88y + 2,85z = x + 2y + 3z - 16 \\ 2,76x + 0,90y + 4,70z = 3x + y + 5z - 29 \\ x + y + z = 135 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x + 12y + 15z = 1600 \\ 12x + 5y + 15z = 1450 \\ x + y + z = 135 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 50 \\ z = 60 \end{cases}$$

2.3. Año 2002

2.3.1. Modelo

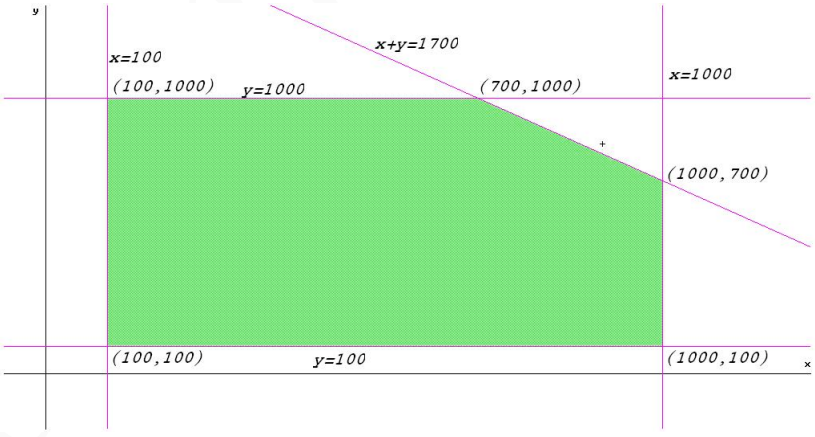
Opción A

Problema 2.3.1 *(3 puntos)* Un fabricante de productos químicos vende fertilizantes, A y B, a razón de 40 y 20 euros el kilogramo, respectivamente. Su producción máxima es de una tonelada de cada fertilizante y su mínimo operativo es de 100 kilogramos de cada fertilizante. Si su producción total es de 1700 kilogramos, ¿cuál es la producción que maximiza sus ingresos? Calcular dichos ingresos máximos.

Solución:
Llamamos x a los kg de fertilizante de A e y a los kg de fertilizante de B. Se trata de resolver el problema de programación lineal:

$$\begin{array}{l} \text{Máximo } z(x,y) = 40x + 20y \\ \text{Sujeto a :} \\ 100 \leq x \leq 1000 \\ 100 \leq y \leq 1000 \\ x + y = 1700 \end{array}$$

La región factible sería la siguiente:



Tendríamos:

$$\begin{cases} z(700,1000) = 48000 \\ z(1000,700) = 54000 \end{cases}$$

Los otros puntos no cumplen $x + y = 1700$.
El máximo beneficio se daría con una producción de 1 tonelada de fertilizante A y 700 kg de fertilizante B. El beneficio máximo que se produciría con estas cantidades sería de 54000 euros.

Opción B

Problema 2.3.2 *(3 puntos)* Considerar el siguiente problema de programación lineal:
Minimizar $z = -3x - 2y$
Sujeto a

$$\begin{array}{l} -2x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \;\; y \geq 0 \end{array}$$

a) Mediante la resolución gráfica del problema, discutir si existen soluciones factibles y si existe solución óptima.

b) Si se añade la restricción:

$$x + y \geq 10$$

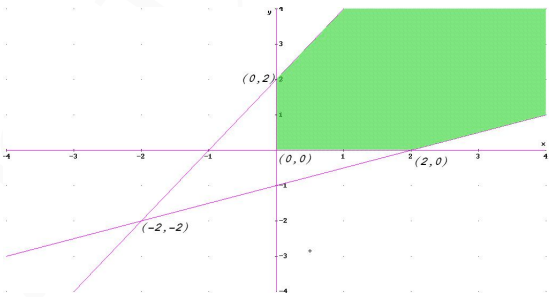
discutir si existe solución óptima y en caso afirmativo calcularla.

Solución:

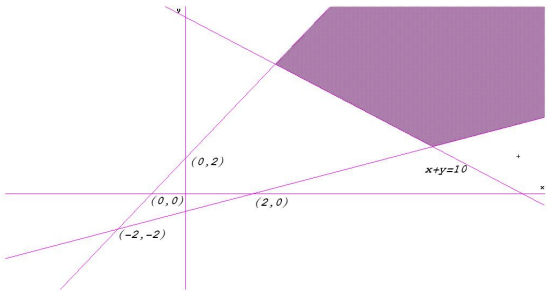
a) Minimizar $z = -3x - 2y$ equivale a Maximizar $z(x, y) = 3x + 2y$ sujeto a

$$\begin{array}{l} -2x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \;\; y \geq 0 \end{array} \Longrightarrow$$

el máximo es imposible obtenerlo, basta observar el recinto de estas inecuaciones:

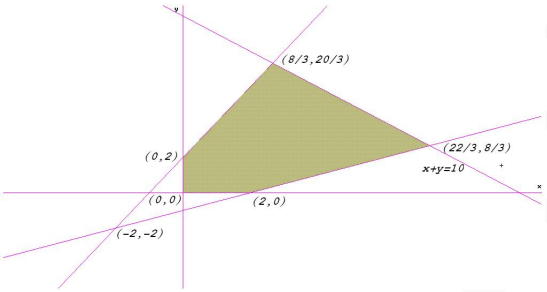


b) Cuando se introduce la restricción $x + y \geq 10$ la situación no mejora, nos encontramos como antes sin solución factible:



La situación cambia considerablemente sin tomamos $x+y \leq 10$. En este caso si que se obtiene solución en los vértices del polígono determinado por las inecuaciones:

$$\begin{cases} -2x+y \leq 2 \\ x-2y \leq 2 \\ x+y \leq 10 \\ x \geq 0 \;\; y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z(0,0)=0 \\ z(2,0)=6 \\ z(0,2)=4 \\ z(8/3,20/3)=64/3 \\ z(22/3,8/3)=82/3 \end{cases}$$



Luego los valores buscados que hacen máxima la función con las restricciones escritas son $x = 22/3$ e $y = 8/3$

2.3.2. Ordinaria

Opción B

Problema 2.3.3 *(3 puntos)* Un proyecto de asfaltado puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: $G1$ y $G2$. Se trata de asfaltar tres zonas: A, B y C. En una semana, el grupo $G1$ es capaz de asfaltar 3 unidades en la zona A, 2 en la zona B y 2 en la zona C. El grupo $G2$ es capaz de asfaltar semanalmente 2 unidades en la zona A, 3 en la zona B y 2 en la zona C. El coste semanal se estima en 33000 euros para $G1$ y en 35000 euros para $G2$. Se necesita asfaltar un mínimo de 6 unidades en la zona A, 12 en la zona B y 10 en la zona C. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

Solución:

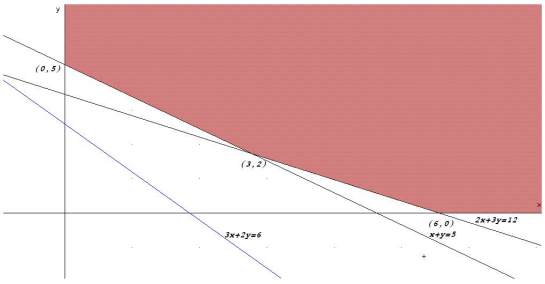
Sea x el número de semanas que trabaja el grupo $G1$.

Sea y el número de semanas que trabaja el grupo $G2$.

	A	B	C	coste
$G1$	3	2	2	33000
$G2$	2	3	2	35000
	6	12	10	

$$z(x,y) = 33000x + 35000y \;\; \text{sujeto a :}$$

$$\begin{cases} 3x+2y \geq 6 \\ 2x+3y \geq 12 \\ x+y \geq 5 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$



$$z(0,5) = 175000$$
$$z(6,0) = 198000$$
$$z(3,2) = 99000 + 70000 = 169000$$

El coste mínimo viene dado cuando el grupo $G1$ trabaja 3 semanas y el grupo $G2$ 2 semanas, con un coste de 169000 euros.

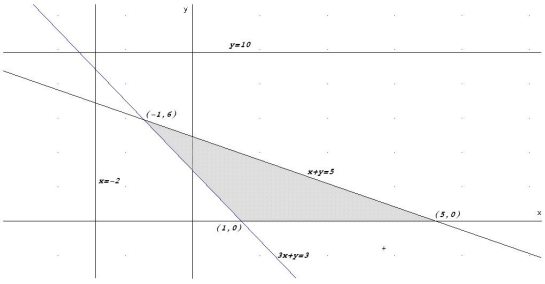
2.3.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.3.4 *(3 puntos)* Determinar los valores máximo y mínimo de la función $z = 3x + 4y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} 3x + y \geq 3 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq -2 \\ y \leq 10 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución:



$$z(1,0) = 3$$
$$z(5,0) = 15$$
$$z(-1,6) = 21$$

El valor máximo corresponde al punto $(-1, 6)$ y es 21.

El valor mínimo corresponde al punto $(1, 3)$ y es 3.

2.4. Año 2003

2.4.1. Ordinaria

Opción B

Problema 2.4.1 *(3 puntos)* Un vendedor quiere dar salida a 400 kg de garbanzos, 300 kg de lentejas y 250 kg de judías. Para ello hace dos tipos de paquetes. Los de tipo A contienen 2 kg de garbanzos, 2 kg de lentejas y 1 kg de judías y los de tipo B contienen 3 kg de garbanzos, 1 kg de lentejas y 2 kg de judías. El precio de venta de cada paquete es de 25 euros para los del tipo A y de 35 euros para los del tipo B. ¿Cuántos paquetes de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?

Solución:

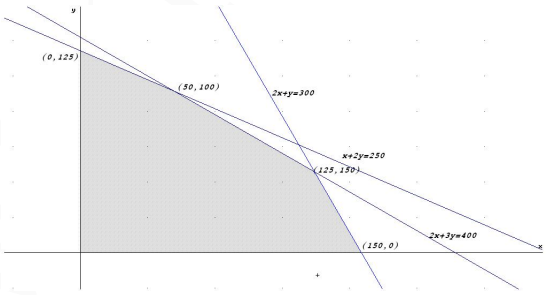
Sea x el número de lotes A.

Sea y el número de lotes B

	garbanzos	lentejas	judías	precio
A	2	2	1	25
B	3	1	2	35
Totales	400	300	250	

$$z(x,y) = 25x + 35y \text{ sujeto a :}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 400 \\ 2x + y \leq 300 \\ x + 2y \leq 250 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$z(0,125) = 4375$$
$$z(50,100) = 4750$$
$$z(125,50) = 4875$$
$$z(150,0) = 3750$$

El beneficio máximo se obtiene con la venta de 125 lotes de A y 50 de B con un beneficio de 4875 euros.

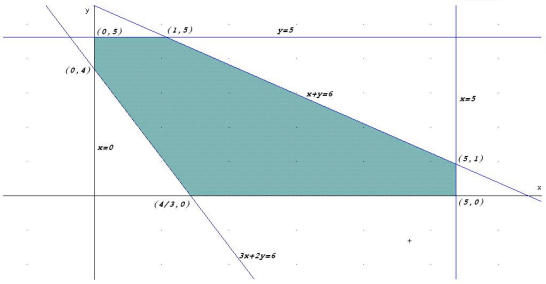
2.4.2. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.4.2 *(3 puntos)* Determinar los valores máximos y mínimos de la función $z = 5x + 3y$ sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} 3x + y \geq 4 \\ x + y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

Solución:



$$z(x, y) = 5x + 3y$$

$$\begin{aligned} z(0, 5) &= 15 \\ z(0, 4) &= 12 \\ z(4/3, 0) &= 20/3 \\ z(5, 0) &= 25 \\ z(5, 1) &= 28 \\ z(1, 5) &= 20 \end{aligned}$$

El máximo se obtiene en el punto $(5, 1)$ con un valor de 28.
El mínimo se obtiene en el punto $(4/3, 0)$ con un valor de $20/3$.

2.5. Año 2004

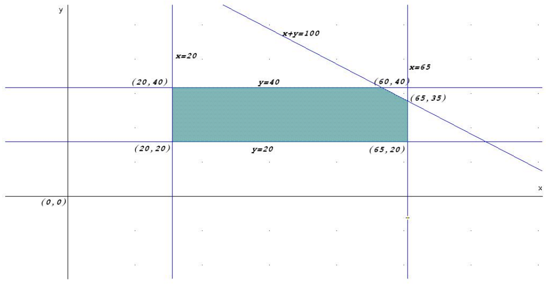
2.5.1. Modelo

Opción B

Problema 2.5.1 *(3 puntos)* Un centro dedicado a la enseñanza personalizada de idiomas tiene dos cursos, uno básico y otro avanzado, para los que dedica distintos recursos. Esta planificación hace que pueda atender entre 20 y 65 estudiantes del curso básico y entre 20 y 40 estudiantes del curso avanzado. El número máximo de estudiantes que en total puede atender es 100. Los beneficios que obtiene por cada estudiante en el curso básico se estiman en 145 euros y en 150 euros por cada estudiante del curso avanzado. Hallar qué número de estudiantes de cada curso proporciona el máximo beneficio.

Solución:

Sea x el número de alumnos en el curso básico.
Sea y el número de alumnos en el curso avanzado.



Máx $z(x,y) = 145x + 150y$ sujeto a

$$\left\{\begin{array}{l} x + y \leq 100 \\ 20 \leq x \leq 65 \\ 20 \leq y \leq 40 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z(20,20) = 5900 \\ z(20,40) = 8900 \\ z(60,40) = 14700 \\ z(65,35) = 14675 \\ z(65,20) = 12425 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

el máximo beneficio se produce cuando hay 60 alumnos en el curso básico y 40 alumnos en el avanzado, y asciende a 14700 euros.

2.5.2. Ordinaria

Opción A

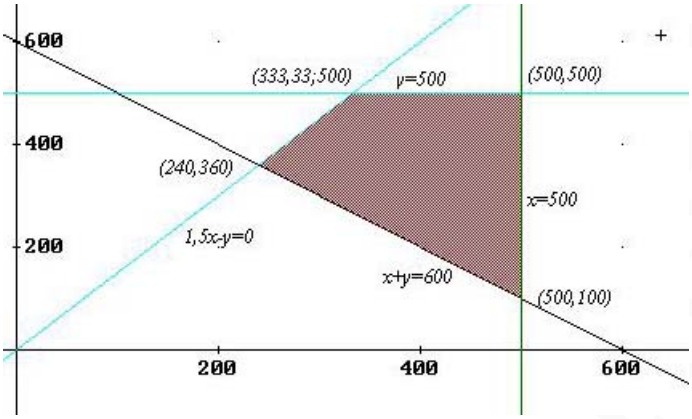
Problema 2.5.2 *(3 puntos)* Un producto se compone de la mezcla de otros dos A y B. Se tienen $500kg$ de A y $500kg$ de B. En la mezcla, el peso de B debe ser menor o igual que $1,5$ veces el de A. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual a $600kg$. Sabiendo que cada kg de A cuesta 5 euros y cada kg de B cuesta 4 euros, calcular los kg de A y B que deben emplearse para hacer una mezcla de coste mínimo, que cumpla los requisitos anteriores. Obtener dicho coste mínimo.

Solución:

Se trata de un problema de optimización. Vamos a llamar x al nº de kg de A, y vamos a llamar y al nº de kg de B. El conjunto de restricciones será el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} x \leq 500 \\ y \leq 500 \\ 1,5x - y \geq 0 \\ x + y \geq 600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$

www.musat.net



$$u(x,y) = 5x + 4y \Longrightarrow \begin{cases} u(240,360) & = 2640 \\ u(333,33;500) & = 3666,67 \\ u(500,500) & = 4500 \\ u(500,100) & = 2900 \end{cases}$$

El coste mínimo sería de 2640 euros que correspondería a $240kg$ de A y $360kg$ de B.

2.5.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.5.3 *(3 puntos)* Un establecimiento de prendas deportivas tiene almacenados 1600 bañadores, 1000 gafas de baño y 800 gorros de baño. Se quiere incentivar la compra de estos productos mediante la oferta de dos tipos de lotes: el lote A, que produce un beneficio de 8 euros, formado por un bañador, un gorro y unas gafas, y el lote B que produce un beneficio de 10 euros y está formado por dos bañadores y unas gafas. Sabiendo que la publicidad de esta oferta tendrá un coste de 1500 euros a deducir de los beneficios, se pide calcular el número de lotes A y B que harán máximo el beneficio y a cuánto asciende éste.

Solución:

	bañadores	gorros	gafas	beneficio
A	1	1	1	8
B	2	0	1	10
	1600	800	1000	

Observando la tabla anterior, si llamamos x al número de lotes vendidos de A y llamamos y al número de lotes vendidos de B, obtenemos las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 1600 \\ x \leq 800 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0 \end{cases}$$

Y la función beneficio será $u(x,y) = 8x + 10y - 1500$, en la que tendremos que encontrar el valor máximo.

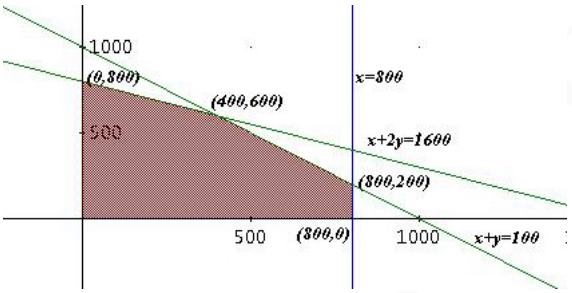
Los puntos de corte de la inecuaciones anteriores son los siguientes:

$$(0,800) \;\; (400,600) \;\; (800,200) \;\; (800,0)$$

Nos producen los siguientes beneficios:

$$\begin{cases} u(0,800) = 6500 \\ u(400,600) = 7700 \\ u(800,200) = 6900 \\ u(800,0) = 4900 \end{cases}$$

Para obtener un beneficio máximo se deberán vender 400 lotes A y 600 lotes B.
Gráficamente sería:



2.6. Año 2005

2.6.1. Modelo

Opción B

Problema 2.6.1 *(3 puntos)* Una compañía naviera dispone de dos barcos A y B para realizar un determinado crucero. El barco A debe hacer tantos viajes o más que el barco B, pero no puede sobrepasar 12 viajes. Entre los dos barcos deben hacer no menos de 6 viajes y no más de 20. La naviera obtiene un beneficio de 18000 euros por cada viaje del barco A y 12000 euros por cada viaje del B. Se desea que las ganancias sean máximas.

a) Expresar la función objetivo.

b) Describir mediante inecuaciones las restricciones del problema y representar gráficamente el recinto definido.

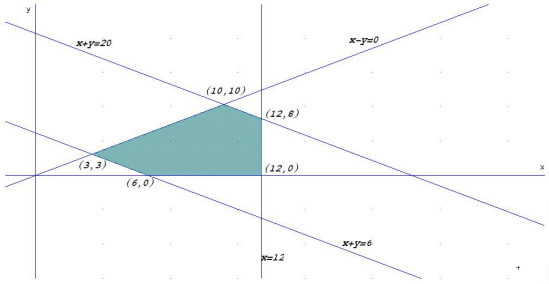
c) Hallar el número de viajes que debe efectuar cada barco para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Solución:
Sea x el nº de viajes del barco A.
Sea y el nº de viajes del barco B.

a) La función objetivo: $z(x,y) = 18000x + 12000y$

b) las restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ x + y \leq 20 \\ x - y \geq 0 \\ x \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



c)

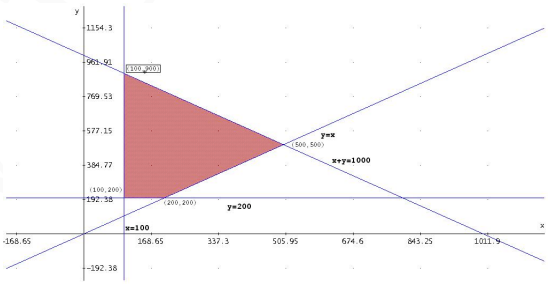
$$\begin{array}{rcl} z(10,10) & = & 300000 \\ z(12,8) & = & 312000 \\ z(6,0) & = & 108000 \\ z(3,3) & = & 90000 \\ z(12,0) & = & 216000 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán hacer 12 cruceros A y 8 cruceros B, con un beneficio de 312000 euros.

2.6.2. Ordinaria

Opción B

Problema 2.6.2 *(3 puntos)* Un mayorista vende productos congelados que presenta en dos envases de dos tamaños: pequeño y grande. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro para cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro para cada envase grande. ¿Qué cantidad de cada tipo de envases proporciona el gasto mínimo de almacenaje?. Obtener dicho mínimo.
Solución:



Si llamamos x al número de envases de tamaño pequeño, y llamamos y al número de envases de tamaño grande, la función objetivo será: $z(x,y) = 10x + 20y$, que tendremos que minimizar con las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} x + y \leq 1000 \\ x \geq 100 \\ y \geq 200 \\ y \geq x \end{cases}$$

La región factible de encuentra representada en el gráfico anterior.

$$\begin{cases} z(100,200) = 10 \cdot 100 + 20 \cdot 200 = 5{,}000 \\ z(200,200) = 10 \cdot 200 + 20 \cdot 200 = 6{,}000 \\ z(500,500) = 10 \cdot 500 + 20 \cdot 500 = 15{,}000 \\ z(100,900) = 10 \cdot 100 + 20 \cdot 900 = 19{,}000 \end{cases}$$

El mínimo gasto de almacenaje corresponde a 100 envases pequeños y 200 grandes y sería de 5.000 céntimos = 50 euros.

2.6.3. Extraordinaria

Opción A

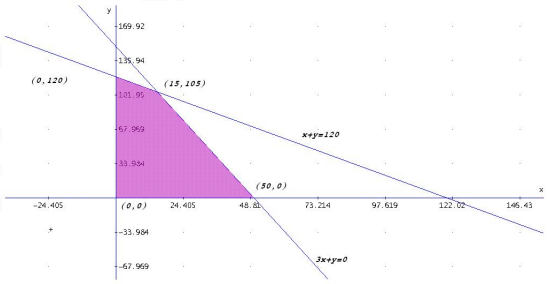
Problema 2.6.3 *(3 puntos)* En una empresa de alimentación se dispone de 24 kg de harina de trigo y 15 kg de harina de maíz, que se utilizan para obtener dos tipos de preparados: A y B. La ración del preparado A contiene 200 gr de harina de trigo y 300 gr de harina de maíz, con 600 cal de valor energético. La ración del preparado B contiene 200 gr de harina de trigo y 100 gr de harina de maíz, con 400 cal de valor energético. ¿Cuántas raciones de cada tipo hay que preparar para obtener el máximo rendimiento energético total? Obtener el rendimiento máximo.

Solución:

	Trigo	Maiz	Energía
A	200	300	600
B	200	100	400

Tenemos que preparar x raciones de A e y raciones de B. El problema sería calcular el Máx$z(x,y) = 600x + 400y$ sujeto a

$$\begin{cases} 200x + 200y < 24000 \\ 300x + 100y < 15000 \\ x > 0, \;\; y > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y < 120 \\ 3x + y < 150 \\ x > 0, \;\; y > 0 \end{cases}$$



$$z(0,120) = 48000$$
$$z(15,105) = 51000$$
$$z(50,0) = 30000$$

Luego el máximo de esta función se encuentra para 15 preparados de A y 105 de B con un rendimiento de 51000 cal.

2.7. Año 2006

2.7.1. Modelo

Opción B

Problema 2.7.1 *(3 puntos)* Un taller dedicado a la confección de prendas de punto fabrica dos tipos de prendas: A y B. Para la confección de la prenda de tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de máquina. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquina. El taller dispone al mes como máximo de 85 horas para el trabajo manual y de 75 horas para el trabajo de máquina y debe de confeccionar al menos 100 prendas. Si los beneficios son de 20 euros por cada prenda de tipo A y de 17 euros por cada prenda de tipo B, ¿cuántas prendas de cada tipo debe de fabricar al mes, para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?

Solución:

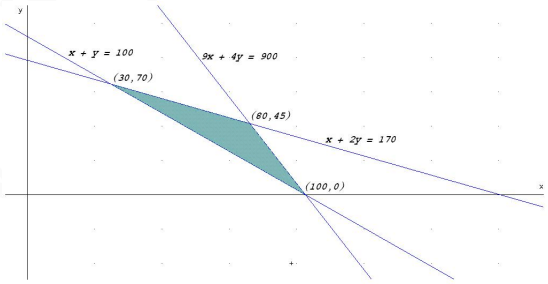
Sea x el nº de prendas del tipo A.
Sea y el nº de prendas del tipo B.

La función objetivo: $z(x, y) = 20x + 17y$

	Manual	Máquina
A	30	45
B	60	20
Total	5100	4500

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 30x + 60y \leq 5100 \\ 45x + 20y \leq 4500 \\ x + y \geq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 170 \\ 9x + 4y \leq 900 \\ x + y \geq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} z(30, 70) &= 1790 \\ z(80, 45) &= 2365 \\ z(100, 0) &= 2000 \end{aligned}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán fabricar 80 prendas tipo A y 45 prendas tipo B, con un beneficio de 2365 euros.

2.7.2. Ordinaria

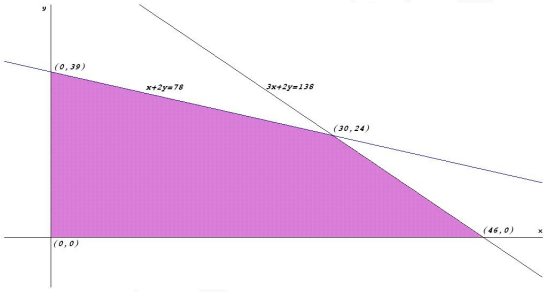
Opción A

Problema 2.7.2 *(3 puntos)* Una papelería quiere liquidar hasta 78 kg de papel reciclado y hasta 138 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes A están formados por 1 kg de papel reciclado y 3 kg de papel normal, y los lotes B por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote A es de 0,9 euros y el de cada lote B es de 1 euro. ¿Cuántos lotes A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos?.
Solución:

	Reciclado	Normal	Precio
A	1	3	$0,9$
B	2	2	1
	78	138	

Hay que calcular Máx $z(x, y) = 0,9x + y$ sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 78 \\ 3x + 2y \leq 138 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} z(0, 39) = 39 \\ z(46, 0) = 41,4 \\ z(30, 24) = 51 \end{cases}$$

Para obtener el máximo beneficio debe de vender 30 lotes de A y 24 del B con un beneficio de 51 euros.

2.7.3. Extraordinaria

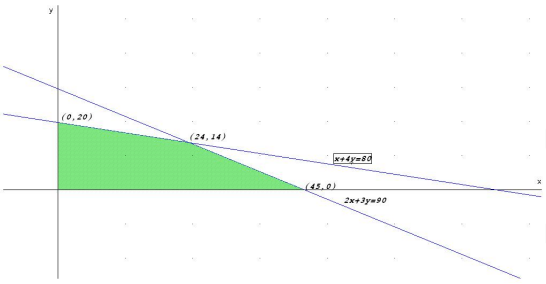
Opción A

Problema 2.7.3 (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores, finas y gruesas, y dispone cada mes de 400 kg de aluminio y 450 horas de trabajo para fabricarlas. Cada m^2 de lámina fina necesita 5 kg de aluminio y 10 horas de trabajo, y deja una ganancia de 45 euros. Cada m^2 de lámina gruesa necesita 20 kg y 15 horas de trabajo, y deja una ganancia de 80 euros. ¿Cuántos m^2 de cada lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima, y a cuánto asciende ésta?

Solución:

	Aluminio	Horas	Beneficio
F	5	10	45
G	20	15	80
	400	450	



Hay que calcular Máx $z(x, y) = 45x + 80y$ sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} 5x + 20y \leq 400 \\ 10x + 15y \leq 450 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 4y \leq 80 \\ 2x + 3y \leq 90 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(0, 20) = 1600 \\ z(45, 0) = 2025 \\ z(24, 14) = 2200 \end{cases}$$

Para obtener el máximo beneficio debe de fabricar 24 láminas finas y 14 láminas gruesas con un beneficio de 2200 euros.

2.8. Año 2007

2.8.1. Modelo

Opción A

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

Opción B

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

2.8.2. Ordinaria

Opción B

Problema 2.8.1 *(3 puntos)* Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 de titanio y 1 de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 de titanio y 1 de aluminio. El beneficio que se obtiene por 100 metros de tipo A es de 1500 euros, y por 100 metros de tipo B, 1000 euros.

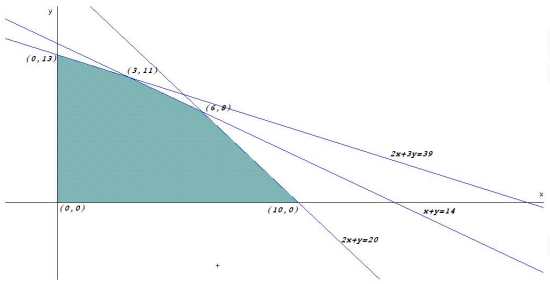
Calcular los metros de cable de cada tipo que hay que fabricar para maximizar el beneficio de

la empresa. Obtener dicho beneficio.

Solución:

Sea x cantidad de cable tipo A.

Sea y cantidad de cable tipo B.



	Cobre	Titánio	Aluminio	Beneficio
A	10	2	1	1500
B	15	1	1	1000
Total	195	20	14	

La función objetivo: $z(x, y) = 1500x + 1000y$

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 10x + 15y \leq 195 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 39 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z(0, 13) &= 13000 \\ z(3, 11) &= 15500 \\ z(6, 8) &= 17000 \\ z(10, 0) &= 15000 \end{aligned}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán fabricar 600 metros del tipo A y 800 metros del tipo B, con un beneficio de 17000 euros.

2.8.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.8.2 *(3 puntos)* Una aerolínea quiere optimizar el número de filas de clase preferente y de clase turista en un avión. La longitud útil del avión para instalar las filas de asientos es de 104 m, necesitándose 2 m para instalar una fila de clase preferente y 1,5 m para las de clase turista. La aerolínea precisa instalar al menos 3 filas de clase preferente y que las filas de clase turista sean como mínimo el triple que las de preferente. Los beneficios por fila de clase turista son de 152 euros

y de 206 euros para la clase preferente.

¿Cuántas filas de clase preferente y cuántas de clase turista se deben instalar para obtener el beneficio máximo?

Solución:

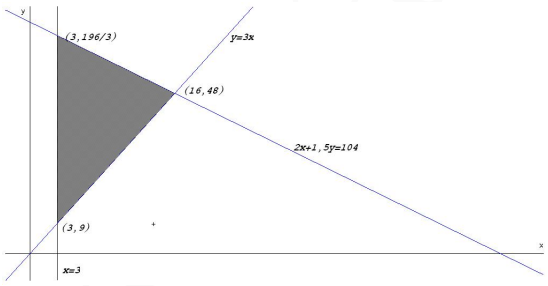
Sea x el número de filas de clase preferente.

Sea y el número de filas de clase turista.

La función objetivo: $z(x, y) = 206x + 152y$

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 2x + 1,5y \leq 104 \\ x \geq 3 \\ y \geq 3x \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 20x + 15y \leq 1040 \\ 3x - y \leq 0 \\ x \geq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{rcr} z(3, 196/3) & = & 10548,6 \\ z(3, 9) & = & 1986 \\ z(16, 48) & = & 10592 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán instalar 16 filas de clase preferente y 48 de clase turista, con un beneficio de 10592 euros.

2.9. Año 2008

2.9.1. Modelo

Opción B

Problema 2.9.1 *(3 puntos)*

a) Representar la región del plano definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

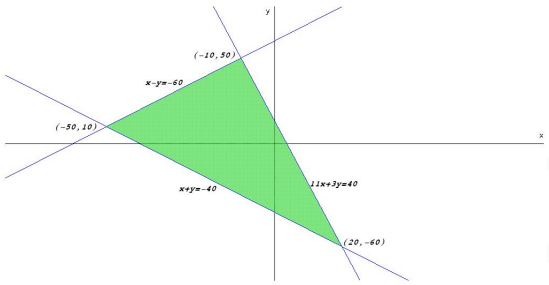
$$\begin{cases} -x+ & y \leq & 60 \\ x+ & y \geq & -40 \\ 11x+ & 3y \leq & 40 \end{cases}$$

b) Maximizar la función $f(x,y) = 10x - y$ en la región obtenida.

c) Minimizar la función $g(x,y) = x - 10y$.

Solución:

a)



$$\left\{\begin{array}{rrr} -x+ & y \leq & 60 \\ x+ & y \geq & -40 \\ 11x+ & 3y \leq & 40 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x- & y \geq & -60 \\ x+ & y \geq & -40 \\ 11x+ & 3y \leq & 40 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} f(-10,50) = -150 \\ f(-50,10) = -510 \\ f(20,-60) = 260 \end{array}\right.$$

El máximo de f en este recinto se encuentra en el punto $(20,-60)$ con un valor de 260.

c)

$$\left\{\begin{array}{l} g(-10,50) = -510 \\ g(-50,10) = -150 \\ g(20,-60) = 620 \end{array}\right.$$

El mínimo de g en este recinto se encuentra en el punto $(-10,50)$ con un valor de -510.

2.9.2. Ordinaria

Opción B

Problema 2.9.2 *(3 puntos)* Un distribuidor de aceite de oliva compra la materia prima a dos almazaras, A y B. Las almazaras A y B venden el aceite a 2000 y 3000 euros por tonelada, respectivamente. Cada almazara le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para atender a su demanda, el distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas. El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara A el doble de aceite que a la almazara B. ¿Qué cantidad de aceite debe comprar el distribuidor a cada almazara para obtener el mínimo coste? Determínese dicho coste mínimo.

Solución:

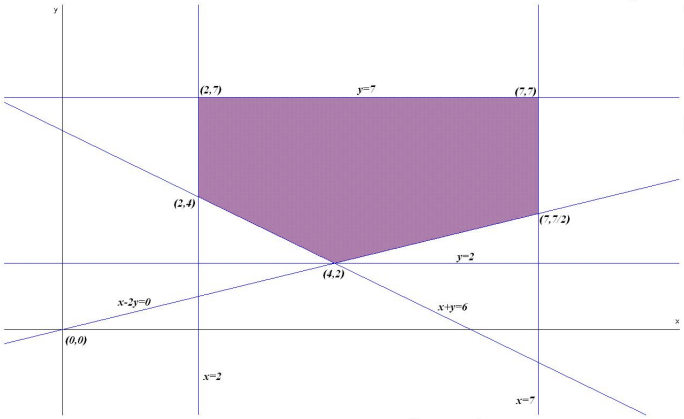
Sea x cantidad de toneladas de A.

Sea y cantidad de toneladas de B.

La función objetivo: $z(x, y) = 2000x + 3000y$

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 7 \\ 2 \leq y \leq 7 \\ x + y \geq 6 \\ x \leq 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 7 \\ 2 \leq y \leq 7 \\ x + y \geq 6 \\ x - 2y \leq 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{rcl} z(4,2) & = & 14000 \\ z(2,4) & = & 16000 \\ z(2,7) & = & 25000 \\ z(7,7) & = & 35000 \\ z(7,7/2) & = & 24500 \end{array}$$

Luego para obtener el mínimo coste se deberá comprar cuatro toneladas a la almazara A y 2 a la almazara B, con un gasto de 14000 euros.

2.9.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.9.3 *(3 puntos)* Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125000 euros, distribuidos entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10 % anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30000 euros y un máximo de 81000 euros. Las del tipo B garantizan una ganancia del 5 % anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25000 euros. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual? Determínese dicha ganancia máxima.

Solución:

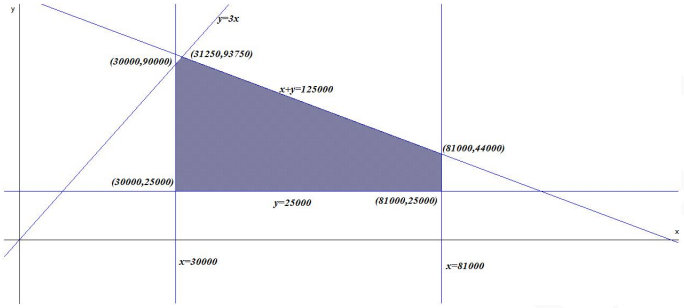
Sea x cantidad invertida en A.

Sea y cantidad invertida en B.

La función objetivo: $z(x, y) = 0,1x + 0,05y$

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} x + y \leq 125000 \\ 30000 \leq x \leq 81000 \\ y \geq 25000 \\ y \leq 3x \end{cases}$$



$$\begin{array}{rcl} z(30000, 25000) & = & 4250 \\ z(81000, 25000) & = & 9350 \\ z(30000, 90000) & = & 7500 \\ z(81000, 44000) & = & 10300 \\ z(31250, 93750) & = & 7812,5 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberá invertir 81000 euros en acciones tipo A y 44000 euros en acciones tipo B con un beneficio máximo esperado de 10300 euros.

2.10. Año 2009

2.10.1. Ordinaria

Opción B

Problema 2.10.1 *(3 puntos)* Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oíl. Por cada tonelada de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oíl. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oíl. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

Solución:

Sea x cantidad de petróleo tipo A.

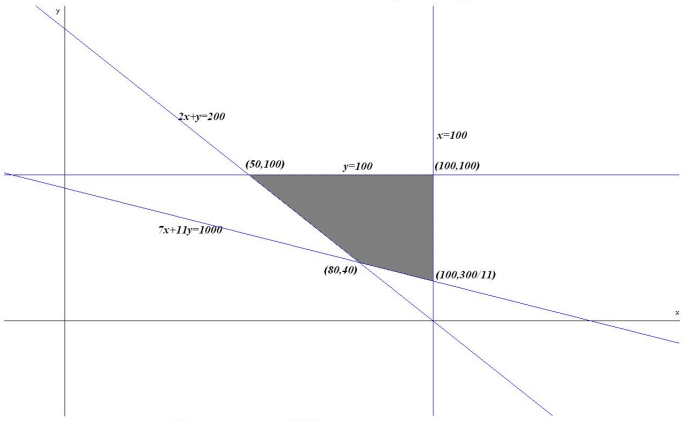
Sea y cantidad de petróleo tipo B.

	Gasolina	Fuel − oil	Coste
A	$0,1$	$0,35$	350
B	$0,05$	$0,55$	400
Total	10	50	

La función objetivo: $z(x,y) = 350x + 400y$

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 0,1x + 0,05y \geq 10 \\ 0,35x + 0,55y \geq 50 \\ x \leq 100 \\ y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y \geq 200 \\ 7x + 11y \geq 1000 \\ x \leq 100 \\ y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{lcr} z(80,40) & = & 44000 \\ z(50,100) & = & 57500 \\ z(100,300/11) & = & 45909,09 \\ z(100,100) & = & 75000 \end{array}$$

Luego para obtener el mínimo coste se deberán comprar 80 toneladas del petróleo tipo A y 40 toneladas del tipo B, con un coste de 44000 euros.

2.10.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.10.2 *(3 puntos)* Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere 0,3 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando un beneficio de 4 euros. Cada m^2 de panel del tipo B requiere 0,2 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 3 euros. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas de taller de fabricación y 200 horas en el taller de barnizado, calcular los m^2 de cada tipo de panel que debe vender semanalmente la carpintería para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Solución:

Sea x m^2 de tipo A.

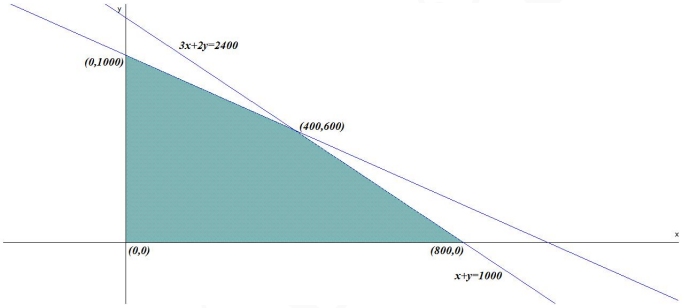
Sea y m^2 de tipo B.

	Fabricación	Barnizado	Beneficio
A	$0,3$	$0,2$	4
B	$0,2$	$0,2$	3
Total	240	200	

La función objetivo: $z(x,y) = 4x + 3y$

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 0,3x + 0,2y \leq 240 \\ 0,2x + 0,2y \leq 200 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 2y \leq 2400 \\ x + y \leq 1000 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{rcl} z(0,1000) & = & 3000 \\ z(400,600) & = & 3400 \\ z(800,0) & = & 3200 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán vender 400 m^2 del tipo A y 600 del tipo B. El benficio de esta venta es de 3400 euros.

2.11. Año 2010

2.11.1. Modelo

Opción B

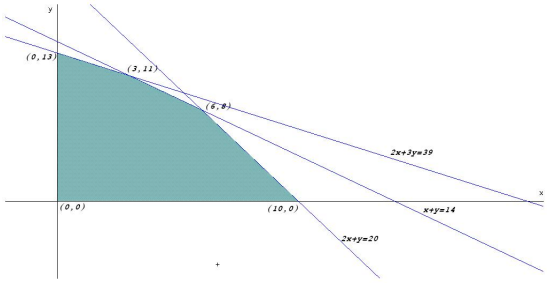
Problema 2.11.1 *(3 puntos)* Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio. El beneficio que obtiene la empresa por cada 100 metros de cable de tipo A fabricados es igual a 1500 euros, y por cada 100 metros de cable de tipo B es igual a 1000 euros. Calcúlese los metros de cable de cada tipo que han de fabricarse para

maximizar el beneficio y determínese dicho beneficio máximo.
Solución:
Sea x cantidad de cable tipo A.
Sea y cantidad de cable tipo B.

	Cobre	Titánio	Aluminio	Beneficio
A	10	2	1	1500
B	15	1	1	1000
Total	195	20	14	

La función objetivo: $z(x, y) = 1500x + 1000y$
Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 10x + 15y \leq 195 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 39 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} z(0,13) &= 13000 \\ z(3,11) &= 15500 \\ z(6,8) &= 17000 \\ z(10,0) &= 15000 \end{aligned}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán fabricar 600 metros del tipo A y 800 metros del tipo B, con un beneficio de 17000 euros.

2.11.2. Ordinaria

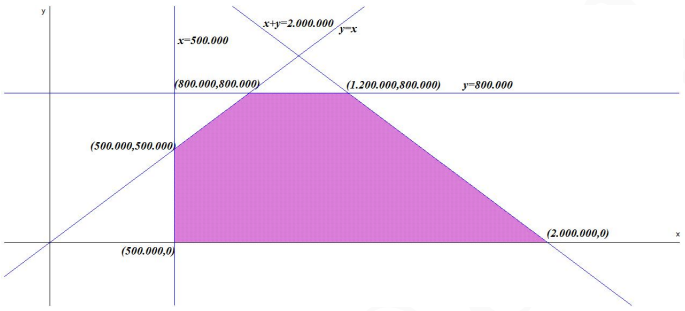
Opción A

Problema 2.11.2 *(3 puntos)* Un club de fútbol dispone de un máximo de 2 millones de euros para fichajes de futbolistas españoles y extranjeros. Se estima que el importe total de las camisetas vendidas por el club con el nombre de futbolistas españoles es igual al 10 % de la cantidad total invertida por el club en fichajes españoles, mientras que el importe total de las camisetas vendidas con el nombre de futbolistas extranjeros es igual al 15 % de la cantidad total invertida por el club en fichajes extranjeros. Los estatutos del club limitan a un máximo de 800000 euros la inversión total en jugadores extranjeros y exigen que la cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser como mínimo de 500000 euros. Además, la cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser mayor o igual que la invertida en fichajes extranjeros. ¿Qué cantidad debe invertir el club en cada tipo de fichajes para que el importe de las camisetas vendidas sea máximo? Calcúlese dicho importe máximo. Justifíquese.

Solución:
Sea x cantidad invertida en españoles.
Sea y cantidad invertida en extranjeros.

La función objetivo: $z(x, y) = 0,1x + 0,15y$
Las restricciones serán:

$$\begin{cases} x + y \leq 2000000 \\ y \leq 800000 \\ x \geq 500000 \\ x \geq y \\ y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{lcr} z(800000, 800000) & = & 200000 \\ z(1200000, 800000) & = & 240000 \\ z(500000, 500000) & = & 125000 \\ z(500000, 0) & = & 50000 \\ z(2000000, 0) & = & 200000 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán invertir 1.200.000 euros en fichajes españoles y 800.000 euros en fichajes extranjeros. El beneficio de esta operación sería de 270.000 euros.

2.11.3. Extraordinaria

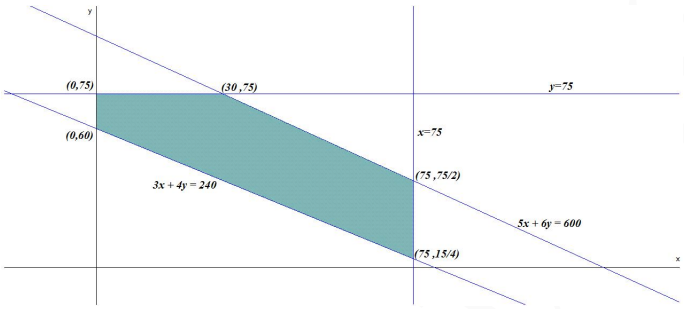
Opción B

Problema 2.11.3 *(3 puntos)* Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m^2. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de $6m^2$ por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 m^2 por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de 75 kg y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.
Solución:
Llamamos x al número de kg de pintura comprados al proveedor A y, llamamos y al número de kg de pintura comprados al proveedor B.

Proveedor	Rendimiento	Precio
A	6	1
B	8	1,2

Función Objetivo: Mín $z(x,y) = x + 1,2y$
Sujeto a:

$$\begin{cases} 6x + 8y \geq 480 \\ x + 1,2y \leq 120 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 4y \geq 240 \\ 5x + 6y \leq 600 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Tenemos:

$$\begin{cases} z(0,75) = 90 \\ z(0,60) = 72 \\ z(30,75) = 120 \\ z(75,75/2) = 120 \\ z(75,15/4) = 79,5 \end{cases}$$

El mínimo coste, de 72 euros, corresponde a la compra de 0 kg del proveedor A y 60 kg del proveedor B.

2.12. Año 2011

2.12.1. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.12.1 *(3 puntos).* Se considera la región S acotada plana definida por las cinco condiciones siguientes:

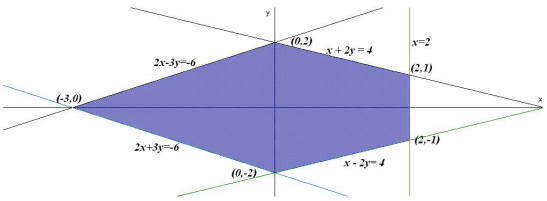
$$x + 2y \leq 4;\ \ x - 2y \leq 4;\ \ 2x - 3y \geq -6;\ \ 2x + 3y \geq -6;\ \ x \leq 2$$

a) Dibújese S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = 2x + y$ en la región S y especifíquense los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región S sería:



b) $f(x,y) = 2x + y$:

$$\begin{cases} f(-3,0) = -6 \\ f(0,2) = 2 \\ f(0,-2) = -2 \\ f(2,1) = 5 \\ f(2,-1) = 3 \end{cases}$$

El valor mínimo se encuentra en el punto $(-3,0)$ vale -6. El valor máximo se encuentra en el punto $(2,1)$ y vale 5.

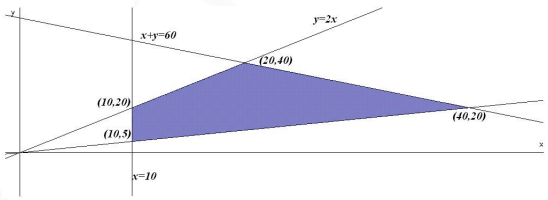
2.13. Año 2012

2.13.1. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 2.13.1 *(3 puntos)* Una compañía aérea oferta hasta un máximo de 60 plazas en sus vuelos diarios entre Madrid y Lisboa. Las plazas de clase turista se ofrecen a 40 euros, mientras que las de primera clase tienen un precio de venta de 75 euros. Por normativa internacional, el número de plazas ofertadas de primera clase debe ser inferior o igual al doble de las plazas de clase turista y superior o igual a la mitad de las plazas de dicha clase turista. Además, por motivos de estrategia empresarial, la compañía tiene que ofrecer como mínimo 10 plazas de clase turista.
¿Qué número de plazas de cada clase se deben ofertar diariamente con el objetivo de maximizar los ingresos de la aerolínea? Determínese dicho ingreso máximo.

Solución:



Sean: x : plazas en clase turista. y : plazas en primera clase. Hay que maximizar $z(x,y) = 40x + 75y$ sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} y \leq 2x \\ y \geq x/2 \\ x + y \leq 60 \\ x \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(20,40) = 3800 \\ z(40,20) = 3100 \\ z(10,5) = 775 \\ z(10,20) = 1900 \end{cases}$$

El ingreso máximo se obtiene ofreciendo 20 plazas de turista y 40 de primera clase, con un total de 3800 euros.

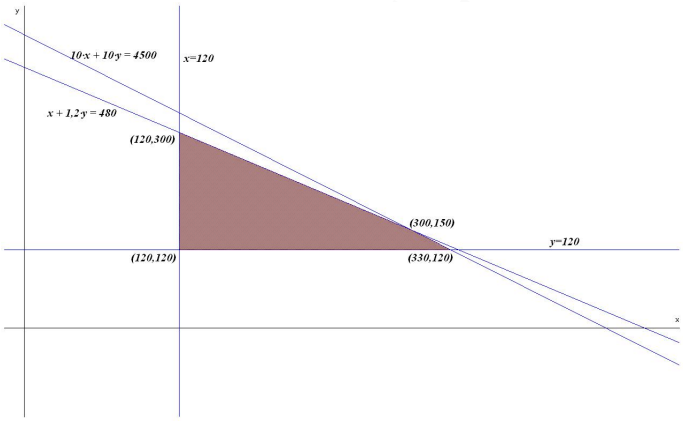
2.13.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.13.2 *(3 puntos)* Un pintor dispone de dos tipos de pintura para realizar su trabajo. El primer tipo de pintura tiene un rendimiento de 3 m^2 por litro, con un coste de 1 euro por litro. El segundo tipo de pintura tiene un rendimiento de 4 m^2 por litro, con un coste de 1,2 euros por litro. Con ambos tipos de pintura se puede pintar a un ritmo de 1 litro cada 10 minutos. El pintor dispone de un presupuesto de 480 euros y no puede pintar durante más de 75 horas. Además, debe utilizar al menos 120 litros de cada tipo de pintura. Determínese la cantidad de pintura que debe utilizar de cada tipo si su objetivo es pintar la máxima superficie posible. Indíquese cuál es esa superficie máxima.

Solución:

Llamamos x al nº de litros de pintura del primer tipo e y al nº de litros de pintura del segundo tipo.



Función objetivo: $z(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x + 1,2y \leq 480 \\ 10x + 10y \leq 4500 \\ x, y \geq 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(120, 120) = 840 \\ z(120, 300) = 1560 \\ z(300, 150) = 1500 \\ z(330, 120) = 1470 \end{cases}$$

La cantidad óptima a utilizar sería: 120 litros de pintura del primer tipo y 300 de pintura del segundo tipo 2. Podrían pintarse 1560 m^2.

2.14. Año 2013

2.14.1. Modelo

Opción B

Problema 2.14.1 *(2 puntos)*

a) Determínense los valores de a y b para que la función objetivo $F(x,y) = 3x + y$ alcance su valor máximo en el punto $(6,3)$ de la región factible definida por

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + ay \leq 3 \\ 2x + y \leq b \end{cases}$$

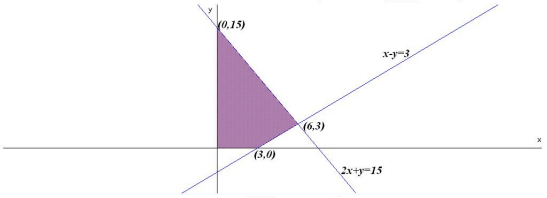
b) Represéntese la región factible para esos valores y calcúlense las coordenadas de todos sus vértices.

Solución:

a)

$$\begin{cases} x + ay = 3 \\ 2x + y = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6 + 3a = 3 \\ 12 + 3 = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 15 \end{cases}$$

b) Representación:



$$\begin{cases} F(3,0) = 9 \\ F(0,15) = 15 \\ F(6,3) = 21 \text{ Máximo} \end{cases}$$

2.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.14.2 *(2 puntos)* Se desea maximizar la función $f(x,y) = 64,8x + 76,5y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$6x + 5y \leq 700, \;\; 2x + 3y \leq 300, \;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0$$

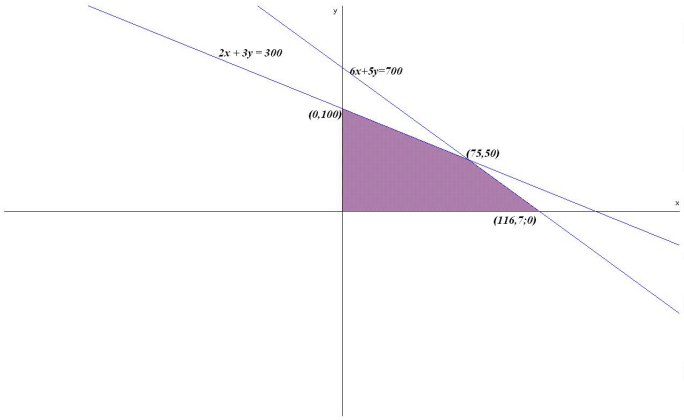
a) Represéntese gráficamente la región de soluciones factibles y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el valor máximo de f sobre la región, indicando el punto donde se alcanza dicho máximo.

Solución:

$f(x,y) = 64,8x + 76,5y$ sujeto a: $\begin{cases} 6x + 5y \leq 700 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0 \end{cases}$

Representación:



$$\begin{cases} f(0,100) = 7650 \\ f(116,7;0) = 7560 \\ f(75,50) = 8685 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El máximo, dentro de la región en estudio, se encuentra en el punto $(75, 50)$ con un valor de 8685.

2.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 2.14.3 *(2 puntos)* Sea C la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones

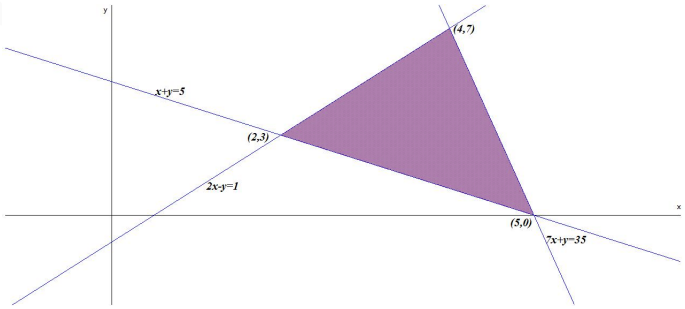
$$S : \begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ x + y \geq 5 \\ 7x + y \leq 35 \end{cases}$$

a) Represéntese la región C y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Calcúlense los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = 3x - 2y$ sobre la región C, determinando los puntos donde se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región C pedida será:



Los vértices a estudiar serán: $(5,0)$, $(2,3)$, y $(4,7)$.

b)

$$\begin{cases} f(5,0) = 15 \text{ Máximo} \\ f(2,3) = 0 \\ f(4,7) = -2 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El mínimo es -2 y se alcanza en el punto $(4,7)$ y el máximo en el $(5,0)$ con 15.

2.14.4. Extraordinaria

Opción A

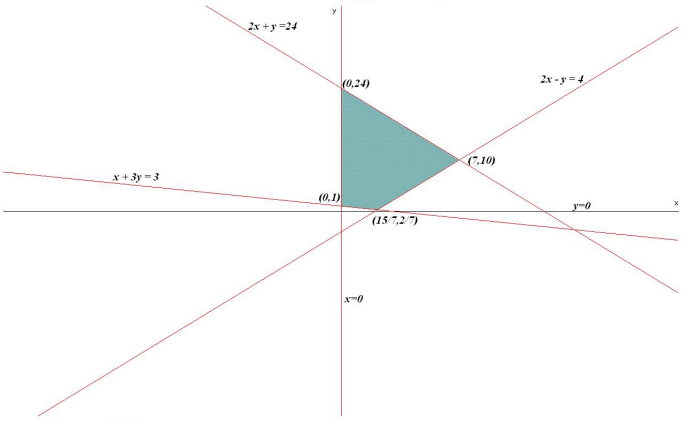
Problema 2.14.4 *(2 puntos)* Sea C la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Represéntese la región C y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el punto de C donde la función $f(x,y) = 3x + y$ alcanza su valor máximo. Calcúlese dicho valor.

Solución:
Representación:



$f(x,y) = 3x + y$ sujeto a: $\begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(0,1) = 1 \\ f(0,24) = 24 \\ f(7,10) = 31 \text{ Máximo} \\ f(15/7, 2/7) = 47/7 \end{cases}$$

El máximo, dentro de la región en estudio, se encuentra en el punto $(7,10)$ con un valor de 31.

2.15. Año 2014

2.15.1. Modelo

Opción A

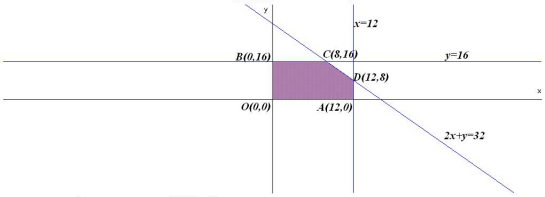
Problema 2.15.1 *(2 puntos)* Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución:
Llamamos x : al nº de pesqueros e y al nº de yates.

$$z(x,y) = 50000x + 10000y$$

sujeto a

$$\begin{cases} 100x + 50y \leq 1600 \\ x \leq 12 \\ y \leq 16 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 32 \\ x \leq 12 \\ y \leq 16 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} z(12,0) = 600000 \\ z(0,16) = 160000 \\ z(12,8) = 680000 \text{ Máximo} \\ z(8,16) = 560000 \end{cases}$$

Hay que reparar 12 pesqueros y 8 yates para que el ingreso sea máximo con un montante de 680000 euros.

2.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.15.2 *(2 puntos)* Se consideran la función $f(x,y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

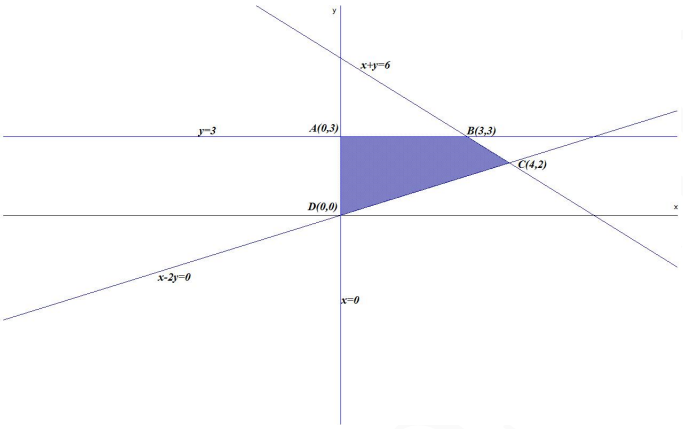
$$x - 2y \leq 0, \;\; x + y \leq 6, \;\; x \geq 0, \;\; y \leq 3$$

a) Represéntese la región S.

b) Calcúlense las coordenadas de los vértices de la región S y obténganse los valores máximo y mínimo de la función f en S indicando los puntos donde se alcanzan.

Solución:

a) La región S pedida será:



b)

$$\begin{cases} z(0,3) = -6 \text{ Mínimo} \\ z(3,3) = 9 \\ z(4,2) = 16 \text{ Máximo} \\ z(0,0) = 0 \end{cases}$$

El máximo es de 16 y se alcanza en el punto $C(4,2)$. El mínimo es de -4 y se alcanza en el punto $A(0,2)$.

2.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.15.3 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

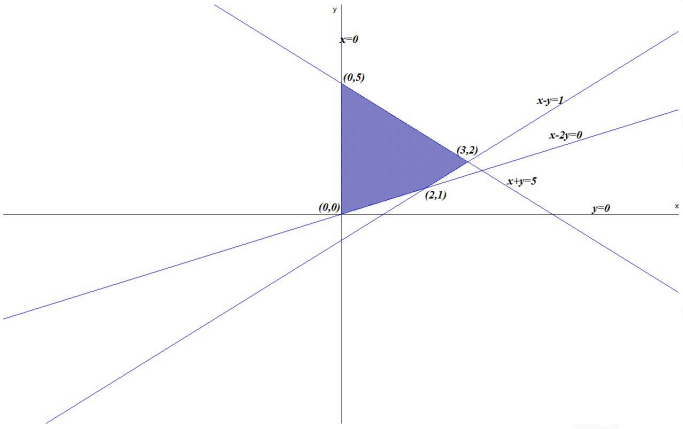
$$x - 2y < 0; \quad x - y < 1; \quad x + y < 5; \quad x > 0; \quad y > 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x - y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región S pedida será:



Los vértices serían: $O(0,0)$, $A(2,1)$ $B(3,2)$, y $C(0,5)$.

b)

$$\begin{cases} f(0,0)=0 \text{ Mínimo} \\ f(2,1)=1 \\ f(3,2)=1 \\ f(0,5)=-5 \end{cases}$$

El mínimo estaría en el punto $C(0,5)$ con un valor de -5 y, el máximo estaría en cualquier punto del segmento que une los puntos A y B con valor 1.

2.15.4. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.15.4 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por

$$y \geq 2x-4; \quad y \leq x-1; \quad 2y \geq x; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

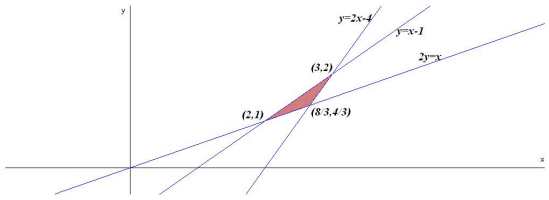
.

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región S pedida será:



Los vértices serían: $(2,1)$, $(3,2)$ y $(8/3,4/3)$.

b)

$$\begin{cases} f(2,1) = -1 \text{ Máximo} \\ f(3,2) = -3 \text{ Mínimo} \\ f(8/3, 4/3) = -4/3 \end{cases}$$

El máximo es de -1 y se alcanza en el punto $(2,1)$. El mínimo es de -3 y se alcanza en el punto $(3,2)$.

2.15.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.15.5 *(2 puntos)* Una industria química elabora plásticos de dos calidades diferentes. Para ello tiene 2 máquinas, A y B. Es necesario que fabrique un mínimo de 20 toneladas de plástico superior y 13 de plástico medio. Cada hora que trabaja la máquina A, fabrica 7 toneladas de plástico superior y 2 de plástico medio, mientras que la máquina B produce 2 y 3 toneladas, respectivamente. Además, la máquina A no puede trabajar más de 9 horas, ni más de 10 horas la máquina B. El coste de funcionamiento de las máquinas es de 800 euros/hora para A y de 600 euros/hora para B. Calcúlese cuántas horas debe funcionar cada máquina para que el coste total de funcionamiento sea mínimo y cuál es ese coste mínimo.

Solución:

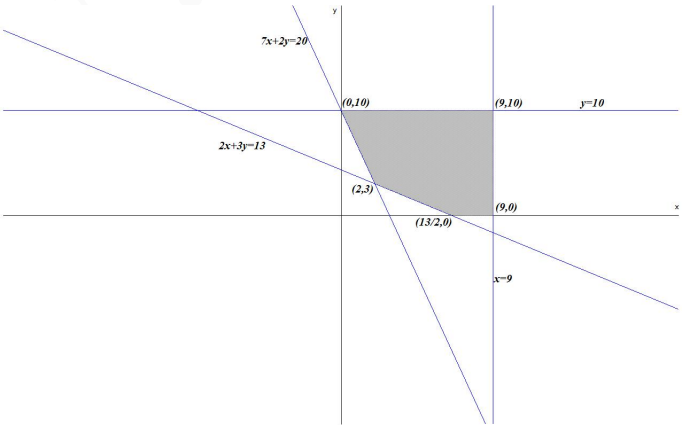
x : número de horas de funcionamiento de la máquina A e y : número de horas de funcionamiento de la máquina B

	Tm plástico superior	Tm plástico medio	coste
A	7	2	800
B	2	3	600
	20	13	

Función Objetivo: $f(x,y) = 800x + 600y$

$$\begin{cases} 7x + 2y \geq 20 \\ 2x + 3y \geq 13 \\ 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

La región S pedida será:



Los vértices serían: $(2,3)$, $(13/2,0)$ $(9,0)$, $(9,10)$ y $(0,10)$.

$$\begin{cases} f(2,3) = 3400 \text{ Mínimo} \\ f(13/2,0) = 5200 \\ f(9,0) = 7200 \\ f(9,10) = 13200 \\ f(0,10) = 6000 \end{cases}$$

El mínimo coste se produce cuando la máquina A trabaja 2 horas y 3 horas la B con un coste de 3400 euros.

2.16. Año 2015

2.16.1. Modelo

Opción A

Problema 2.16.1 *(2 puntos)* Una empresa láctea se plantea la producción de dos nuevas bebidas A y B. Producir un litro de la bebida A cuesta 2 euros, mientras que producir un litro de bebida B cuesta 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6 millones de litros de bebida, aunque del tipo B no podrán producirse (por limitaciones técnicas) más de 5 millones y debido al coste de producción no es posible elaborar más de 8 millones de litros en total de ambas bebidas. Además, se desea producir una cantidad de bebida B mayor o igual que la de bebida A. ¿Cuántos litros habrá que producir de cada tipo de bebida para que el coste de producción sea mínimo? Calcúlese dicho coste. Justifíquense las respuestas.

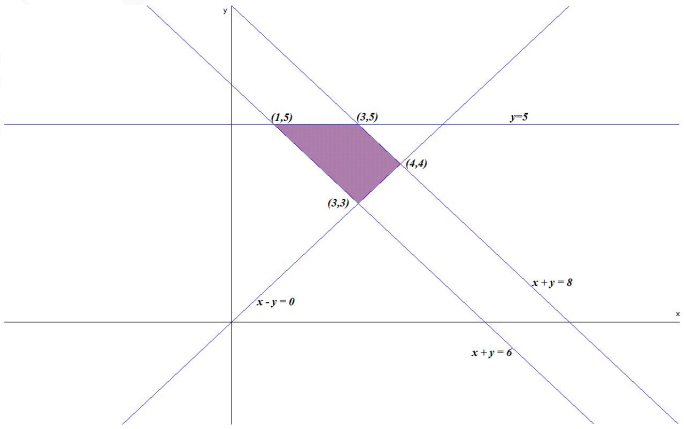
Solución:

Llamamos x : millones de bebida A e y millones de bebida B

$$z(x,y) = 2x + 0,5y$$

sujeto a

$$\begin{cases} x+y \geq 6 \\ y \leq 5 \\ x+y \leq 8 \\ y \geq x \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y \geq 6 \\ y \leq 5 \\ x+y \leq 8 \\ x-y \leq 0 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} z(1,5) = 4,5 \text{ Mínimo} \\ z(3,5) = 8,5 \\ z(3,3) = 7,5 \\ z(4,4) = 10 \end{cases}$$

Hay que producir 1 millón de litros de la bebida A y 5 millones de la B con un coste de 4,5 millones de euros.

2.16.2. Ordinaria

Opción B

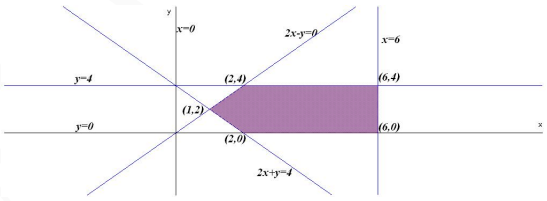
Problema 2.16.2 *(2 puntos)* Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.

Solución:

Llamamos x : toneladas de pienso A e y : toneladas de pienso B. Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $z(x,y) = 1000x + 2000y$ calculando su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq 4 \\ y \leq 2x \Longrightarrow 2x - y \geq 0 \\ 2x + y \geq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

La región S pedida será:



Los vértices a estudiar serán: $(2,0)$, $(6,0)$, $(6,4)$, $(2,4)$ y $(1,2)$:

$$\begin{cases} z(2,0) = 2000 \text{ Mínimo} \\ z(6,0) = 6000 \\ z(6,4) = 14000 \\ z(2,4) = 10000 \\ z(1,2) = 5000 \end{cases}$$

El coste mínimo es de 2000 euros y se alcanza produciendo 2 toneladas de pienso A y ninguna del tipo B.

2.16.3. Ordinaria-Coincidente

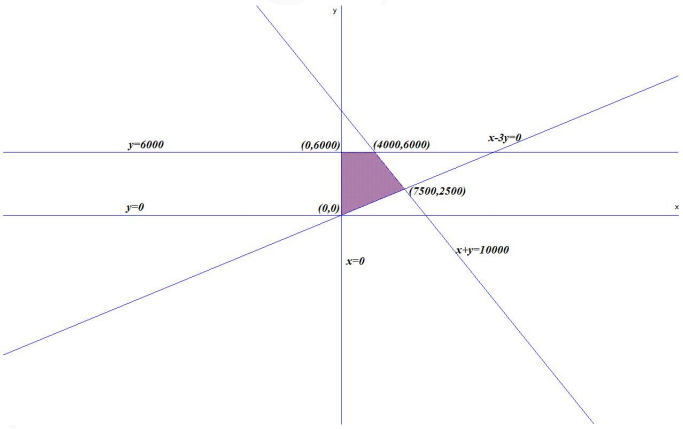
Opción B

Problema 2.16.3 *(2 puntos)* Un banco oferta dos productos financieros, A y B. El banco garantiza para el producto A un beneficio anual del 5 % de la cantidad invertida, y para el producto B un beneficio del 2 % anual de la cantidad invertida. Una persona desea invertir en ambos productos a lo sumo 10.000 euros, con la condición de que la cantidad invertida en el producto A no supere el triple de la cantidad invertida en el producto B y que la inversión en el producto B sea de 6.000 euros como máximo. Determínese qué cantidad debe invertir en cada producto para obtener, al cabo de un año, un beneficio máximo y obténgase este beneficio máximo.

Solución:
x: Cantidad de A e y: Cantidad de B.
Función objetivo: $z(x, y) = 0,05x + 0,02y$
Sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \leq 10000 \\ x \leq 3y \\ y \leq 6000 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 10000 \\ x - 3y \leq 0 \\ y \leq 6000 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

a) La región S pedida será:



Los vértices serían: $O(0, 0)$, $A(7500, 2500)$ $B(4000, 6000)$, y $C(0, 6000)$.

b)

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \text{ Mínimo} \\ f(7500, 2500) = 425 \\ f(4000, 6000) = 320 \\ f(0, 6000) = 120 \end{cases}$$

El máximo beneficio sería de 425 euros invirtiendo 7500 euros en el producto A y 2500 euros en el producto B.

2.16.4. Extraordinaria

Opción A

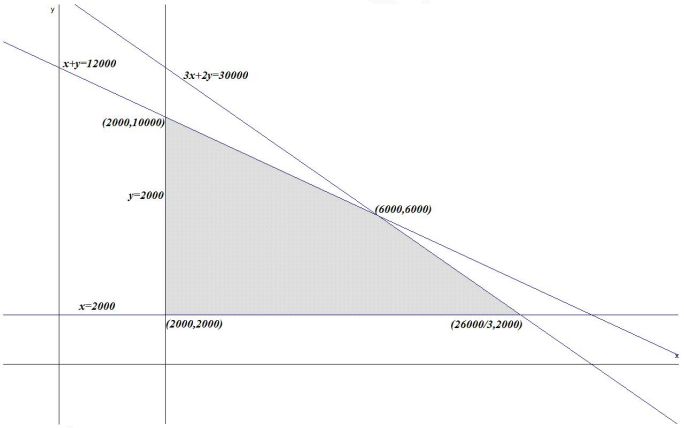
Problema 2.16.4 *(2 puntos)* Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, A y B. La cantidad máxima que puede comprar es de 12.000 litros en total. El aceite de tipo A cuesta 3 euros/litro y el de tipo B cuesta 2 euros/litro. Necesita adquirir al menos 2.000 litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a 30.000 euros. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un 25 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo A y de un 30 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberían adquirir para maximizar el beneficio? Obténgase el valor del beneficio máximo.

Solución:

Llamamos x : litros de aceite A e y : litros de aceite B. Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $z(x, y) = (0,25 \cdot 3)x + (0,3 \cdot 2)y = 0,75x + 0,6y$ calculando su máximo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + y \leq 12000 \\ x \geq 2000 \\ y \geq 2000 \\ 3x + 2y \leq 30000 \end{cases}$$

La región S pedida será:



Los vértices a estudiar serán: $(2000, 2000)$, $(2000, 10000)$, $(26000/3, 2000)$ y $(6000, 6000)$:

$$\begin{cases} z(2000, 2000) = 2700 \\ z(2000, 10000) = 7500 \\ z(26000/3, 2000) = 7700 \\ z(6000, 6000) = 8100 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 8100 euros y se alcanza comprando 6000 litros de aceite A y 6000 del tipo B.

2.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.16.5 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$y + 2x \geq 7; \quad y - 2x \geq -1; \quad y \leq 5;$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -5x - 5y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

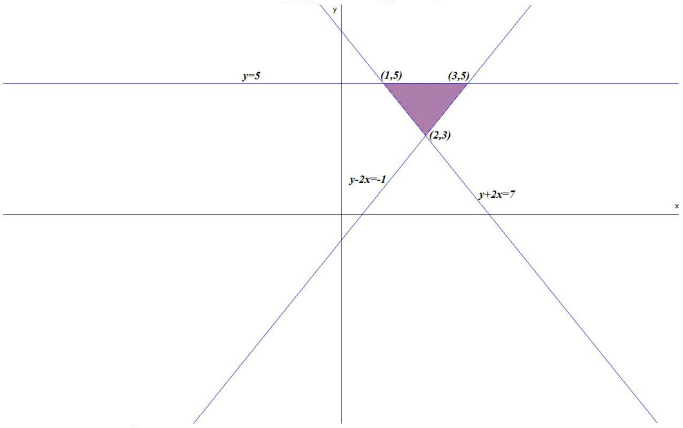
Solución:

a) Los vértices serían: $(1, 5)$, $(3, 5)$ y $(2, 3)$.

b) Función objetivo: $f(x, y) = -5x - 5y$

$$\begin{cases} f(1,5) = -30 \\ f(3,5) = -40 \text{ Mínimo} \\ f(2,3) = -25 \text{ Máximo} \end{cases}$$

La región S pedida será:



2.17. Año 2016

2.17.1. Ordinaria

Opción A

Problema 2.17.1 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$y + x \leq 5; \quad y - x \leq 3; \quad \frac{1}{2}x - y \leq -2$$

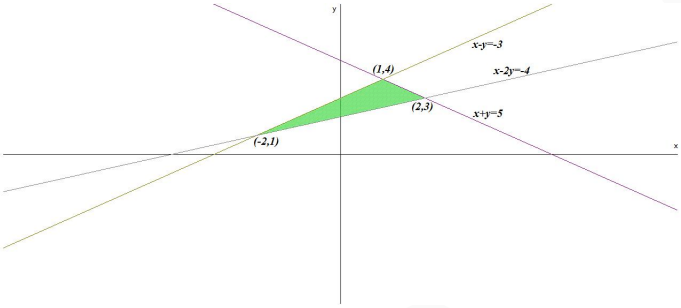
a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 2x + y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} x + y \leq 5 \\ x - y \geq -3 \\ x - 2y \leq -4 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $(-2,1)$, $(1,4)$, y $(2,3)$:

b)

$$\begin{cases} z(-2,1) = -3 \text{ Mínimo} \\ z(1,4) = 6 \\ z(2,3) = 7 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El mínimo es -3 euros y se alcanza en el punto $(-2,1)$ y el máximo es de 7 y se alcanza en el punto $(2,3)$.

2.17.2. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 2.17.2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$y + x \leq 5; \quad 2x - y \geq -2; \quad x \geq 0; \quad y \geq 1$$

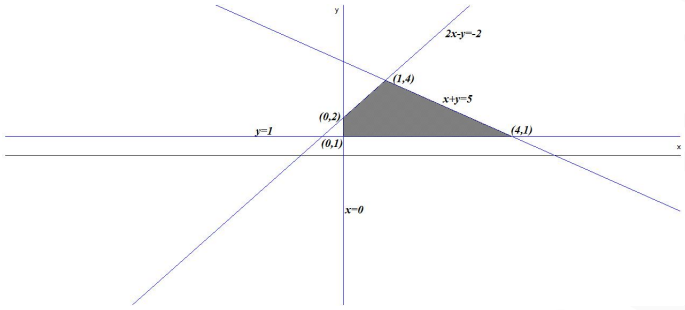
a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = 2x - 3y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 2x - 3y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x - y \geq -2 \\ y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,4)$, y $(4,1)$:

b)

$$\begin{cases} f(0,1) = -3 \\ f(0,2) = -6 \\ f(1,4) = -10 \text{ Mínimo} \\ f(4,1) = 5 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El mínimo es -10 y se alcanza en el punto $(1,4)$ y el máximo es de 5 y se alcanza en el punto $(4,1)$.

2.17.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.17.3 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$2x - y > 1; \quad 2x - 3y < 6; \quad x + 2y > 3; \quad x + y < 8; \quad y < 3$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

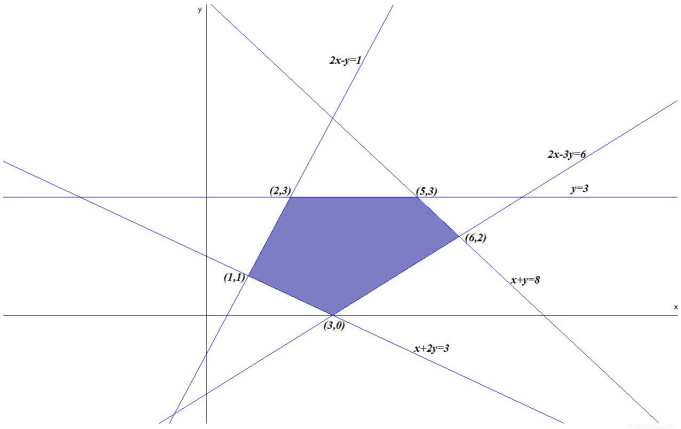
b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = 2x + y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 2x + y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} 2x - y > 1 \\ 2x - 3y < 6 \\ x + 2y > 3 \\ x + y < 8 \\ y < 3 \end{cases}$$

La región S y los vértices a estudiar serán: $(3,0)$, $(1,1)$, $(2,3)$, $(5,3)$ y $(6,2)$:



b)

$$\begin{cases} f(3,0) = 6 \\ f(1,1) = 3 \text{ Mínimo} \\ f(2,3) = 7 \\ f(5,3) = 13 \\ f(6,2) = 14 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El mínimo es 3 y se alcanza en el punto $(1,1)$ y el máximo es de 14 y se alcanza en el punto $(6,2)$.

2.18. Año 2017

2.18.1. Ordinaria

Opción A

Problema 2.18.1 *(2 puntos)* Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 6y \geq 6; \quad 5x - 2y \geq -2; \quad x + 3y \leq 20; \quad 2x - y \leq 12\right\}$$

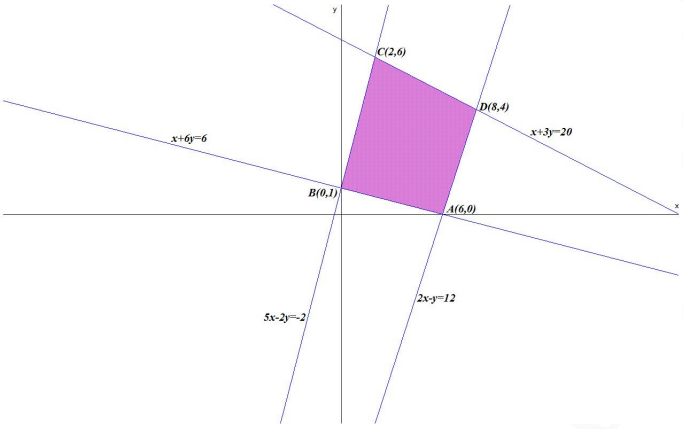
a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínense los puntos en los que la función $f(x,y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de $f(x,y)$ en dichos puntos.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 4x - 3y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + 6y \geq 6 \\ 5x - 2y \geq -2 \\ x + 3y \leq 20 \\ 2x - y \leq 12 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(6,0)$, $B(0,1)$, $C(2,6)$, y $D(8,4)$:

b)

$$\begin{cases} f(6,0) = 24 \text{ Máximo} \\ f(0,1) = -3 \\ f(2,6) = -10 \text{ Mínimo} \\ f(8,4) = 20 \end{cases}$$

El mínimo es -10 y se alcanza en el punto $C(2,6)$ y el máximo es de 24 y se alcanza en el punto $A(6,0)$.

2.18.2. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.18.2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 2; \quad 2x - y \leq 4; \quad 2y - x \leq 4; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

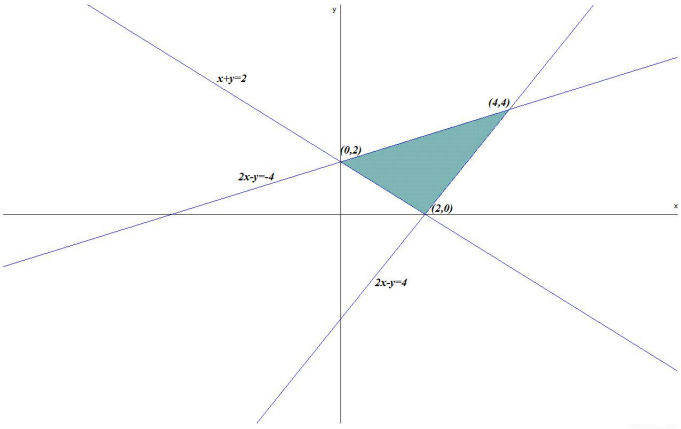
a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = -5x + 3y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = -5x + 3y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2y - x \leq 4 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x - y \leq 4 \\ x - 2y \geq -4 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $(2,0)$, $(4,4)$, y $(0,2)$:

b)

$$\begin{cases} f(0,2) = 6 \text{ Máximo} \\ f(2,0) = -10 \text{ Mínimo} \\ f(4,4) = -8 \end{cases}$$

El mínimo es -10 y se alcanza en el punto $(2,0)$ y el máximo es de 6 y se alcanza en el punto $(0,2)$.

2.18.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.18.3 *(2 puntos)* Se considera la región del plano S definida por:

$$1 \leq x \leq 5; \quad 2 \leq y \leq 6; \quad x - y \geq -4; \quad 3x - y \leq 10.$$

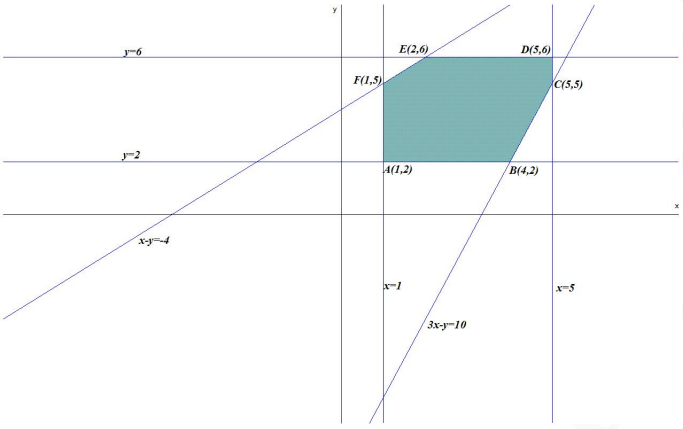
a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Calcúlese los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = -200x + 600y$ en la región S y obténgase los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = -200x + 600y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 6 \\ x - y \geq -4 \\ 3x - y \leq 10 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(1,2)$, $B(4,2)$, $C(5,5)$, $D(5,6)$, $E(2,6)$, $F(1,5)$:

b)

$$\begin{cases} f(1,2) = 1000 \\ f(4,2) = 400 \text{ Mínimo} \\ f(5,5) = 2000 \\ f(5,6) = 2600 \\ f(2,6) = 3200 \text{ Máximo} \\ f(1,5) = 2800 \end{cases}$$

El mínimo es 400 y se alcanza en el punto $B(4,2)$ y el máximo es de 3200 y se alcanza en el punto $E(2,6)$.

2.18.4. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.18.4 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$2x + y \leq 16; \quad x + y \leq 11; \quad x + 2y \geq 6; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

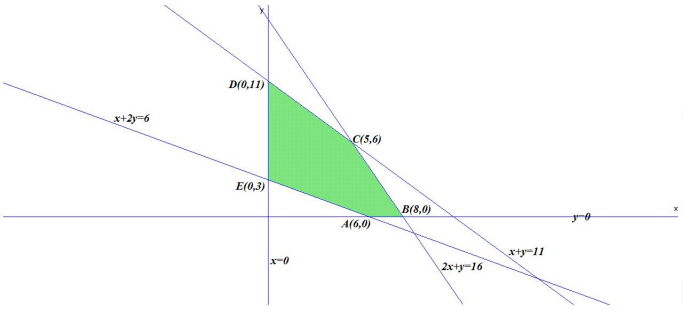
a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices. ¿Pertenece el punto $(4,4)$ a S?

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = 3x + y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 3x + y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} 2x + y \leq 16 \\ x + y \leq 11 \\ x + 2y \geq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(6,0)$, $B(8,0)$, $C(5,6)$, $D(0,11)$ y $E(0,3)$:
El punto $(4,4)$ está dentro de esta región, es decir, cumple todas las restricciones, $(4,4) \in S$.

b)

$$\begin{cases} f(6,0) = 18 \\ f(8,0) = 24 \text{ Máximo} \\ f(5,6) = 21 \\ f(0,11) = 11 \\ f(0,3) = 3 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El mínimo es 3 y se alcanza en el punto $E(0,3)$ y el máximo es de 24 y se alcanza en el punto $B(8,0)$.

2.19. Año 2018

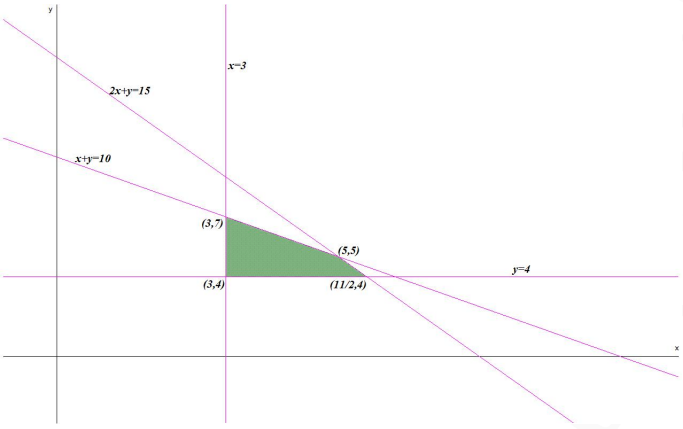
2.19.1. Modelo

Opción A

Problema 2.19.1 *(2 puntos)* Una bodega desea fijar el precio de venta al público de las 250 botellas de vino blanco y de las 500 de vino tinto que tiene en stock. Para no incurrir en pérdidas saben que el precio de venta al público de la botella de vino blanco debe ser como mínimo de 3 euros, de la misma manera el precio de venta al público de la botella de vino tinto debe ser de, como mínimo, 4 euros. Además saben que, para ser competitivos con esos precios de venta al público, el coste de 2 botellas de vino blanco y una de tinto debería ser a lo sumo 15 euros. Por el mismo motivo, el coste total de una botella de vino blanco y una de tinto no debe sobrepasar los 10 euros. Determínense los respectivos precios de venta al público por unidad de las botellas de vino blanco y de las de vino tinto, para que el ingreso total al vender el stock de 250 botellas de vino blanco y 500 de vino tinto sea máximo.
Solución:
Sea x el precio del vino blanco e y el precio del tinto.

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 250x + 500y$ calculando su máximo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 4 \\ 2x + y \leq 15 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $(3,4)$, $(11/2,4)$, $(5,5)$, y $(3,7)$:

b)

$$\begin{cases} f(3,4) = 2750 \\ f(11/2,4) = 3375 \\ f(5,5) = 3750 \\ f(3,7) = 4250 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El máximo beneficio es 4250 euros y se alcanza vendiendo la botella de vino blanco a 3 euros y la de tinto a 7 euros.

2.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.19.2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

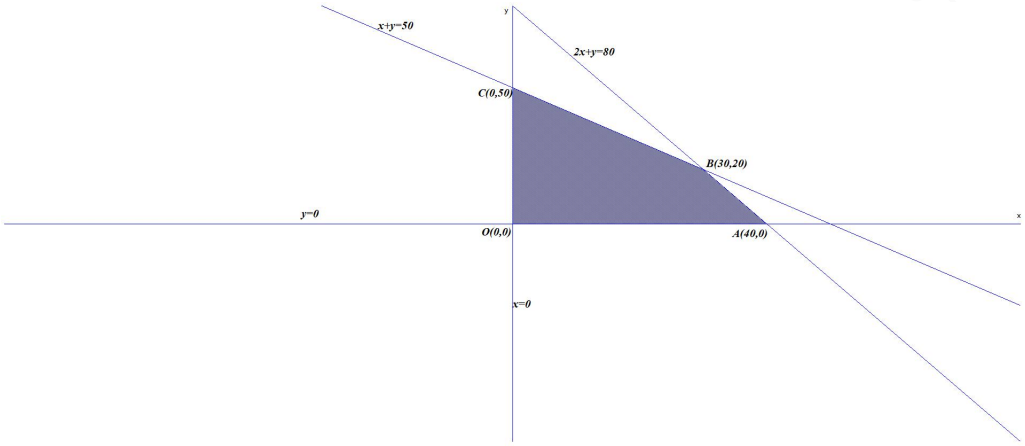
$$x + y \leq 50, \quad 2x + y \leq 80, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténgase el valor máximo de la función $f(x,y) = 5x + 4y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

Solución:

a) $S : \begin{cases} x + y \leq 50 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ La región S y los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(40,0)$, $B(30,20)$, y $C(0,50)$



b) $f(x,y) = 5x + 4y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(40,0) = 200 \\ f(30,20) = 230 \text{ Máximo} \\ f(0,50) = 200 \end{cases}$$

El máximo es 230 y se alcanza en el punto $B(30,20)$.

2.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.19.3 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

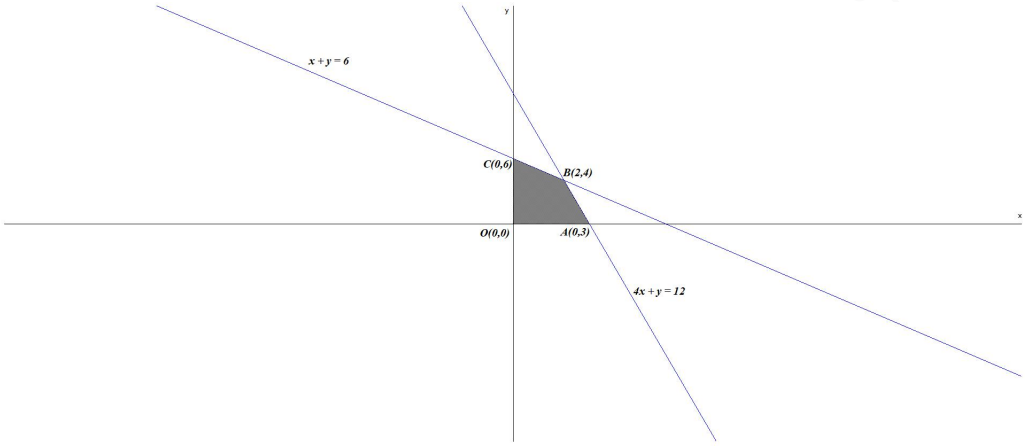
$$x + y \leq 6, \quad 4x + y \leq 12, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = \dfrac{8x+3y}{5}$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) $S: \begin{cases} x + y \leq 6 \\ 4x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$



La región S y los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(2,4)$, y $C(0,6)$

b) $f(x,y) = \dfrac{8x+3y}{5}$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \text{ Mínimo} \\ f(3,0) = 24/5 \\ f(2,4) = 28/5 \text{ Máximo} \\ f(0,6) = 18/5 \end{cases}$$

El máximo es $28/5$ y se alcanza en el punto $B(2,4)$. El mínimo es 0 y se alcanza en el punto $O(0,0)$.

2.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.19.4 *(2 puntos)* Considérese la región del plano S definida por:

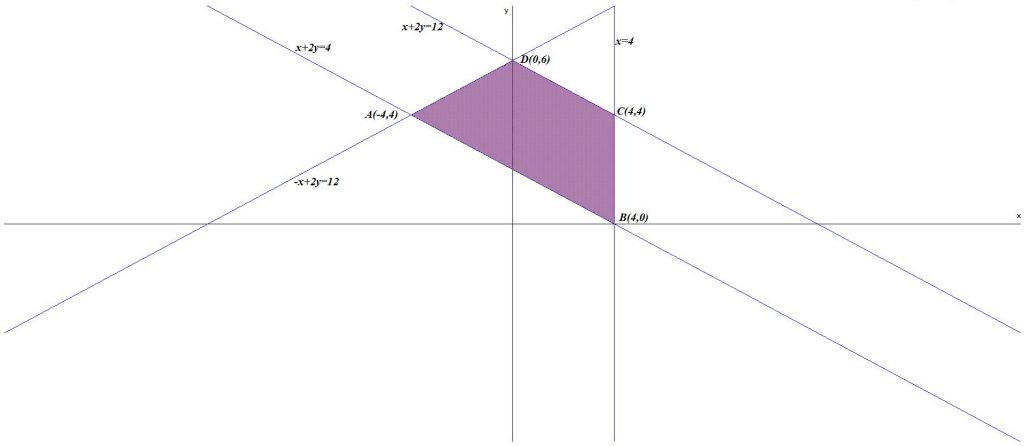
$$S = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ x+2y \geq 4, \ x+2y \leq 12, \ x \leq 4, \ -x+2y \leq 12\right\}.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínense los puntos en los que la función $f(x,y) = 3x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de f en dichos puntos.

Solución:

a) $S : \begin{cases} x+2y \geq 4 \\ x+2y \leq 12 \\ x \leq 4 \\ -x+2y \leq 12 \end{cases}$ La región S y los vértices a estudiar serán: $A(-4,4)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$, y $D(0,6)$



b) $f(x,y) = 3x - y$

$$\begin{cases} f(-4,4) = -16 \text{ Mínimo} \\ f(4,0) = 12 \text{ Máximo} \\ f(4,4) = 8 \\ f(0,6) = -6 \end{cases}$$

El máximo es 12 y se alcanza en el punto $B(4,0)$, mientras que el mínimo se alcanza en el punto $A(-4,4)$ con un valor de -16.

2.20. Año 2019

2.20.1. Modelo

Opción A

Problema 2.20.1 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$-2x + 3y \leq 4; \quad 2x + y \geq 4; \quad 2x - y \leq 4.$$

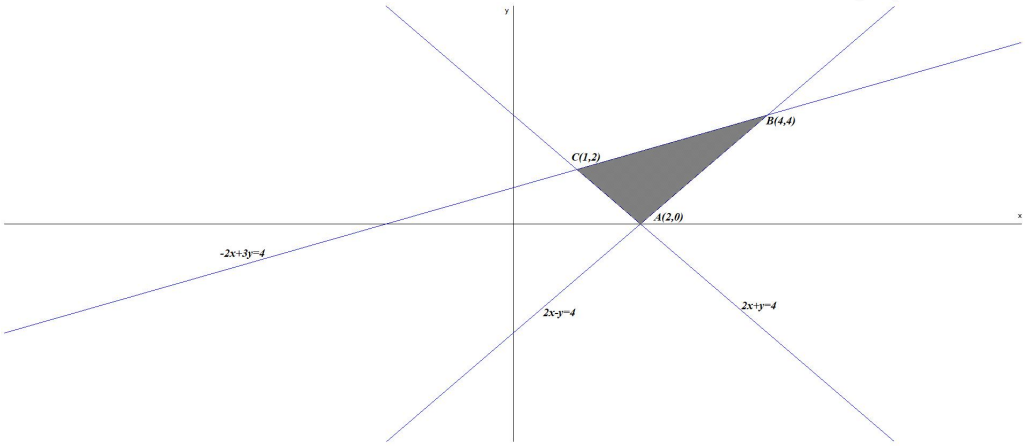
a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = 0,5x + \frac{1}{3}y$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 0,5x + \frac{1}{3}y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} -2x + 3y \leq 4 \\ 2x + y \geq 4 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(2,0)$, $B(4,4)$ y $C(1,2)$:

b)

$$\begin{cases} f(2,0) = 1 \text{ Mínimo} \\ f(4,4) = 10/3 \text{ Máximo} \\ f(1,2) = 7/6 \end{cases}$$

El máximo es $10/3$ y se alcanza en el punto $B(4,4)$ mientras que el mínimo es de 1 y se alcanza en el punto $A(2,0)$.

2.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.20.2 *(2 puntos)* Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

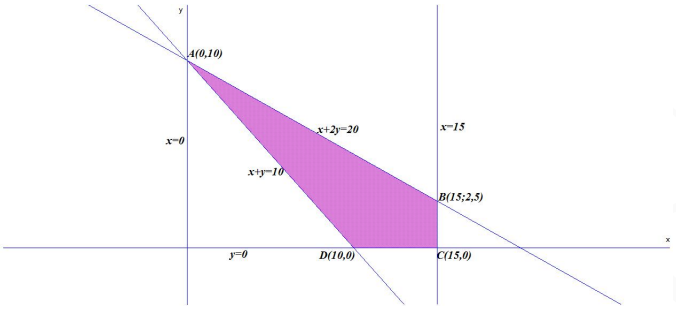
b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Solución:

x: litros de helado e y litros de horchata.

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 25x + 12y$ calculando su máximo,, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} x + y \geq 10 \\ x + 2y \leq 20 \\ x \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(0,10)$, $B(15;5/2)$, $C(15,0)$ y $D(10,0)$:

b)

$$\begin{cases} f(0,10) = 120 \\ f(15;5/2) = 405 \text{ Máximo} \\ f(15,0) = 375 \\ f(10,0) = 250 \end{cases}$$

El máximo es 405 euros y se alcanza en el punto $B(15;5/2)$) lo que supone preparar 15 litros de helado y 2,5 litros de horchata.

2.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 2.20.3 *(2 puntos)* Para el mantenimiento de las piscinas de cierto hotel se quiere utilizar cloro de disolución lenta (CL) y cloro estabilizado (CE). El hotel quiere que la cantidad de cloro que se use en la temporada de verano, sea como mucho 500 kg y la cantidad de cloro de disolución lenta sea mayor que la cantidad de cloro estabilizado al menos en 100 kg. No podrán utilizarse más de 350 kg de cloro de disolución lenta ni menos de 100 kg de cloro estabilizado. Cada kg de cloro de disolución lenta cuesta 30 euros, mientras que cada kg de cloro estabilizado cuesta el doble.

a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

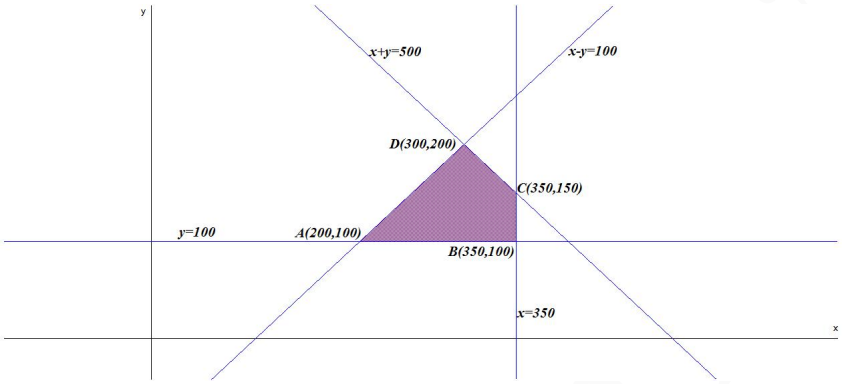
b) Se desea que el gasto, respetando las características anteriores, sea el mínimo posible. Determínense las cantidades de cloro de cada tipo que deben usarse para minimizar los costes. Obténgase el valor del coste mínimo.

Solución:

x: Kg de cloro de disolución lenta (CL) e y kg de cloro estabilizado (CE).

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 30x + 60y$ calculando su mínimo,, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} x + y \leq 500 \\ x \geq y + 100 \\ x \leq 350 \\ y \geq 100 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 500 \\ x - y \geq 100 \\ x \leq 350 \\ y \geq 100 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(200, 100)$, $B(350; 100)$, $C(350, 150)$ y $D(300, 200)$:

b)

$$\begin{cases} f(200, 100) = 12000 \text{ Mínimo} \\ f(350; 100) = 16500 \\ f(350, 150) = 19500 \\ f(300, 200) = 21000 \end{cases}$$

El mínimo gasto es de 12000 euros y se alcanza con el consumo de 200 kg de de disolución lenta (CL) y 100 kg de cloro estabilizado (CE).

2.20.4. Extraordinaria

Opción B

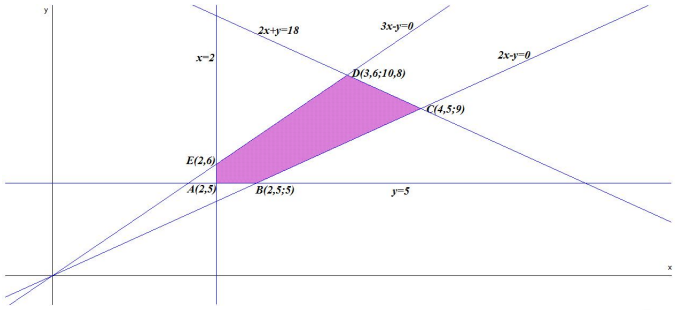
Problema 2.20.4 *(2 puntos)* Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

a) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.

b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

Solución:
Sea x: ancho e y: largo.

$$\begin{cases} 1000x + 500y \leq 9000 \\ y \geq 2x \\ y \leq 3x \\ x \geq 2 \\ y \geq 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 18 \\ 2x - y \leq 0 \\ 3x - y \geq 0 \\ x \geq 2 \\ y \geq 5 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(2,5)$, $B(2,5;5)$, $C(4,5;9)$, $D(3,6;10,8)$ y $E(2,6)$. El mayor ancho lo tiene el punto $C(4,5;9)$ con 4,5 m y un coste de $f(4,5;9) = 9000$ euros. ($f(x,y) = 1000x + 500y$)

2.20.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.20.5 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

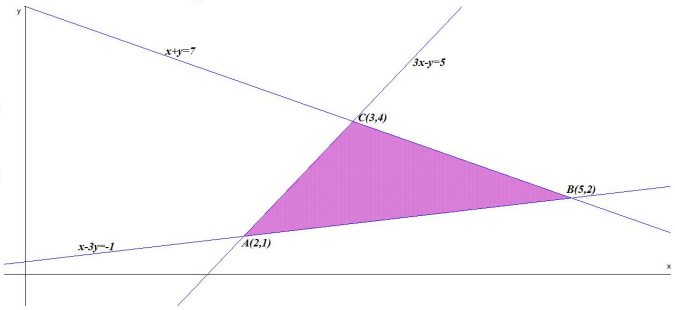
$$3x - y \geq 5, \quad 3y - x \geq 1, \quad y + x \leq 7$$

a) Represéntese S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el valor máximo de la función $f(x,y) = x + 4y$ en S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor.

Solución:

a) Los vértices a estudiar serán: $A(2,1)$, $B(5,2)$ y $C(3,4)$



b) $f(x,y) = x + 4y$ en S: $\begin{cases} f(2,1) = 6 \\ f(5,2) = 13 \\ f(3,4) = 19 \end{cases} \implies$ El valor máximo será de 19 y se alcanza en el punto $C(3,4)$.

2.21. Año 2020

2.21.1. Ordinaria

Opción B

Problema 2.21.1 *(2 puntos)* La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3,\ \ 0 \leq y \leq 15,\ \ y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0,\ \ y - x \leq 10,\ \ y + 20 \geq 2x$$

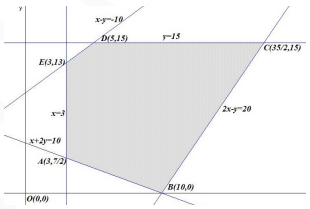
a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

Solución:

a) La región factible S es:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ y - 5 + \dfrac{x}{2} \geq 0 \\ y - x \leq 10 \\ y + 20 \geq 2x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ x + 2y \geq 10 \\ x - y \geq -10 \\ 2x - y \leq 20 \end{cases}$$



Los vértices son: $A\left(3, \dfrac{7}{2}\right)$, $B(10, 0)$, $C\left(\dfrac{35}{2}, 15\right)$, $D(5, 15)$ y $E(3, 13)$.

b) La función objetivo $f(x, y) = x + y$ sobre los vértices da los siguientes resultados:

$$\begin{cases} f\left(3, \dfrac{7}{2}\right) = 6,5 \Longleftarrow \text{Mínimo} \\ f(10, 0) = 10 \\ f\left(\dfrac{35}{2}, 15\right) = 32,5 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(5, 15) = 20 \\ f(3, 13) = 16 \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $C\left(\dfrac{35}{2}, 15\right)$ con un valor de 32,5 y el mínimo en el punto $A\left(3, \dfrac{7}{2}\right)$ con un valor de 6,5.

2.21.2. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.21.2 *(2 puntos)* Considere la región del plano S definida por

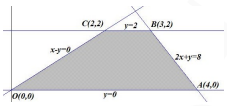
$$x - y \geq 0, \quad y + 2x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq 2$$

a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = 4x - y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores.

Solución:

a) Los vértices a estudiar serán: $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(3, 2)$ y $C(2, 2)$



b) $f(x, y) = 4x - y$ en S: $\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(4,0) = 16 \\ f(3,2) = 10 \\ f(2,2) = 6 \end{cases} \Longrightarrow$ El valor máximo será de 16 y se alcanza en el punto $A(4, 0)$ y el valor mínimo será de 0 y se alcanza en el punto $O(0, 0)$.

2.21.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.21.3 *(2 puntos)* Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

a) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

Sea x número de m^3 de tipo A e y número de m^3 de tipo B.

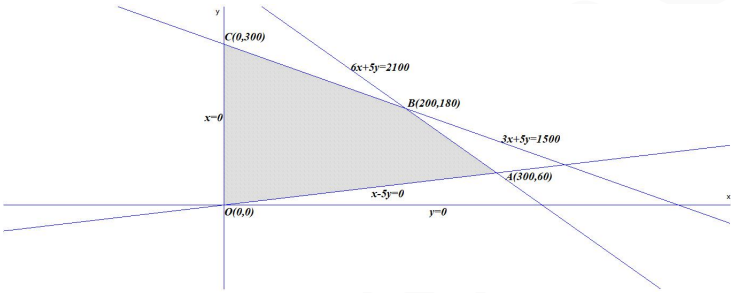
a) Podemos construir la siguiente tabla:

	tierra vegetal	horas de trabajo
A	60	30
B	50	50
Totales	≤ 21000	≤ 15000

La región factible será:

$$\begin{cases} 60x+50y \leq 21000 \\ 30x+50y \leq 15000 \\ x \leq 5y \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x+5y \leq 2100 \\ 3x+5y \leq 1500 \\ x-5y \leq 0 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(300,60)$, $B(200,180)$ y $C(0,300)$



b) $f(x,y) = 50x+60y$ en S: $\begin{cases} f(0,0)=0 \\ f(300,60)=18600 \\ f(200,180)=20800 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(0,300)=18000 \end{cases} \Longrightarrow$ El beneficio máximo será de 20800 € y se alcanza con 200 m^3 de A y 180 m^3 de B.

2.22. Año 2021

2.22.1. Modelo

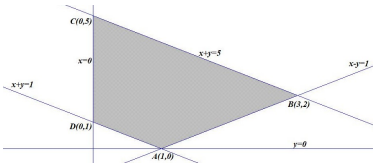
Opción B

Problema 2.22.1 *(2 puntos)* Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

Sea x : nº de Ha de trigo e y : nº de Ha de cebada.
La región factible es:

$$\begin{cases} x+y \leq 5 \\ x+y \geq 1 \\ x-y \leq 1 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(1,0)$, $B(3,2)$, C(0,5) y $D(0,1)$
La función objetivo es $f(x,y) = 200x+60y \Longrightarrow$

$\begin{cases} f(1,0)=200 \\ f(3,2)=720 \\ f(0,5)=300 \\ f(0,1)=60 \end{cases} \Longrightarrow$ El máximo beneficio será de 720 euros que se obtiene plantando 3 Ha de trigo y 2 Ha de cebada.

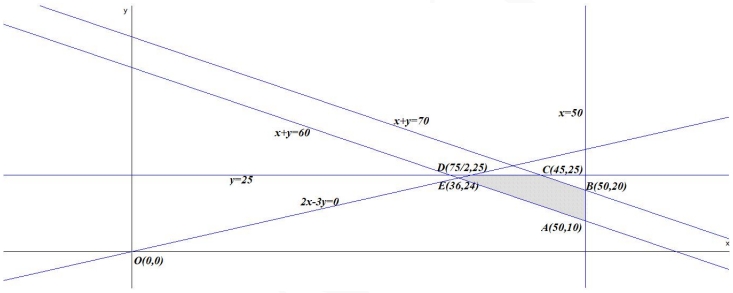
2.22.2. Ordinaria

Opción B

Problema 2.22.2 *(2 puntos)* Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

Solución:
Sea x : nº de kg de almendras e y : nº de kg de avellanas. La región factible es:

$$\begin{cases} x \geq 1,5y \\ x+y \geq 60 \\ x+y \leq 70 \\ x \leq 50 \\ y \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x-3y \geq 0 \\ x+y \geq 60 \\ x+y \leq 70 \\ x \leq 50 \\ y \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



- Los vértices a estudiar serán: $A(50,10)$, $B(50,20)$, $C(45,25)$, $D(75/2,25)$ y $E(36,24)$

- La función objetivo: $f(x,y)=x+2y$ en S:

  $\begin{cases} f(50,10)=70 \\ f(50,20)=90 \\ f(45,25)=95 \text{ Máximo} \\ f(75/2,25)=175/2 \\ f(36,24)=84 \end{cases}$

  El máximo beneficio será de 95 € y se alcanza con 45 kg de almendras y 25 kg de avellanas.

2.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 2.22.3 *(2 puntos)* Se pide

a) Represente la región S del plano delimitada por las inecuaciones

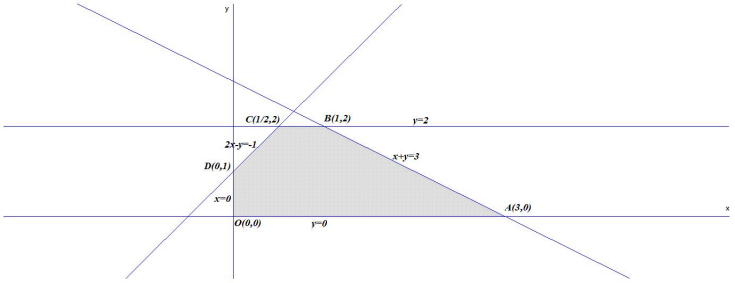
$$-2x + y \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad x + y \leq 3 \quad x \geq 0$$

y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ sobre la región S.

Solución:

a) Los vértices a estudiar serán: $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(1, 2)$, $C(1/2, 2)$ y $D(0, 1)$



b) $f(x, y) = x + y$ en S: $\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(3,0) = 3 \\ f(1,2) = 3 \\ f(1/2,2) = 5/2 \\ f(0,1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow$

El valor máximo será de 3 y se alcanza en cualquier punto del segmento que une los puntos $A(3, 0)$ y $B(1, 2)$ y el valor mínimo será de 0 y se alcanza en el punto $O(0, 0)$.

2.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.22.4 *(2 puntos)* Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros . Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.

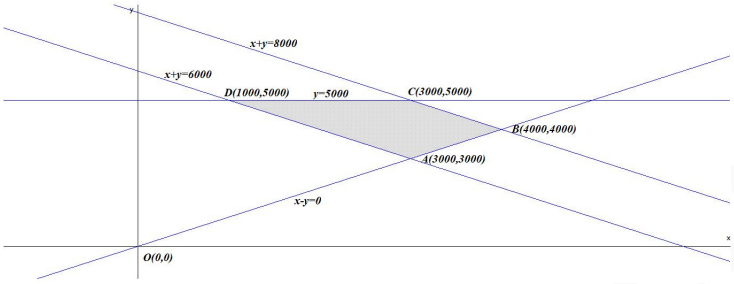
b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

Solución:
Sean x metros del modelo A2020 e y metros del modelo B2020.

a) Región factible:

$$\begin{cases} x+y \geq 6000 \\ y \leq 5000 \\ x+y \leq 8000 \\ y \geq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6000 \leq x+y \leq 8000 \\ x-y \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 5000 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(3000, 3000)$, $B(4000, 4000)$, $C(3000, 5000)$ y $D(1000, 5000)$



b) La función objetivo es $f(x, y) = 2x + 0,5y$ en S:

$$\begin{cases} f(3000, 3000) = 7500 \\ f(4000, 4000) = 10000 \\ f(3000, 5000) = 8500 \\ f(1000, 5000) = 4500 \end{cases} \Longrightarrow$$

El valor mínimo será de 4500€ y se alcanza fabricando 1000 metros del modelo A2020 y 5000 metros del modelo B2020.

2.23. Año 2022

2.23.1. Modelo

Opción A

Problema 2.23.1 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$x+y \geq 3, \quad 2x+y \leq 8, \quad x+2y \leq 10, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

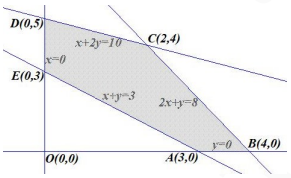
b) Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza el máximo y el valor máximo alcanzado.

Solución:

a) La región factible S es:

$$\begin{cases} x+y \geq 3 \\ 2x+y \leq 8 \\ x+2y \leq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(3,0)$, $B(4,0)$, $C(2,4)$, $D(0,5)$ y $E(0,3)$

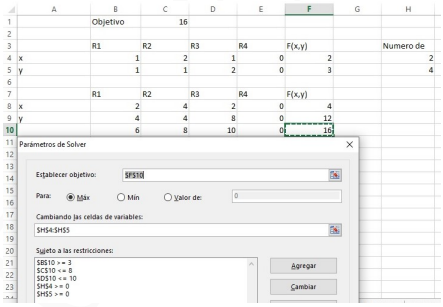


Solución por solver

b) La función objetivo es $f(x,y) = 2x+3y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(3,0) = 6 \\ f(4,0) = 8 \\ f(2,4) = 16 \\ f(0,5) = 15 \\ f(0,3) = 9 \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $C(2,4)$ con un valor de 16.



2.23.2. Ordinaria

Opción A

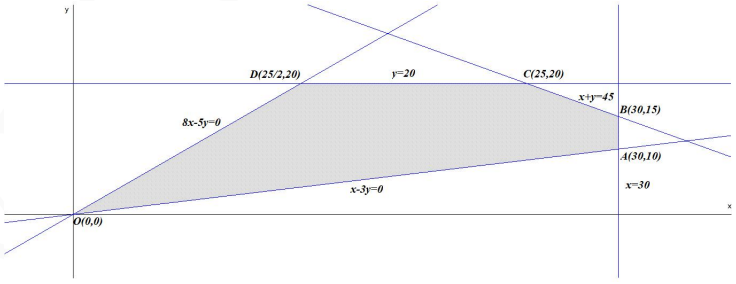
Problema 2.23.2 *(2 puntos)* El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche y dispone para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de 1€ y por cada litro de chocolate un beneficio de 2€. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

Solución:

Sean x la cantidad en litros de leche en la mezcla e y la cantidad en litros de chocolate en la mezcla. $f(x,y) = x+2y$ sujeto a

$$S: \begin{cases} x \leq 3y \\ y \leq 1,6x \\ x+y \leq 45 \\ 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases} \Longrightarrow S: \begin{cases} x-3y \leq 0 \\ 1,6x-y \geq 0 \\ x+y \leq 45 \\ 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases} \Longrightarrow S: \begin{cases} x-3y \leq 0 \\ 8x-5y \geq 0 \\ x+y \leq 45 \\ 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(30,10)$, $B(30,15)$, $C(25,20)$ y $D\left(\frac{25}{2}, 20\right)$.



$f(x,y) = x + 2y$ en S: $\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(30,10) = 50 \\ f(30,15) = 60 \\ f(25,20) = 65 \\ f\left(\dfrac{25}{2}, 20\right) = 52,5 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ El beneficio máximo será de 65€ y se alcanza mezclando 25 litros de leche y 20 litros chocolate.

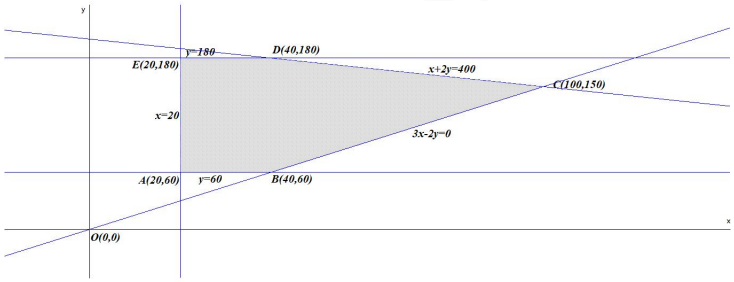
2.23.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.23.3 *(2 puntos)* Un almacén de legumbres al por mayor tiene sacos de dos tipos, con capacidad para 5 kg de peso y con capacidad para 10 kg de peso. Sólo tiene 180 sacos de capacidad 10 kg. Debe poner a la venta como mucho 2000 kg de alubias en sacos de ambos tipos. Por cada 3 sacos de 10 kg puede vender como mucho 2 sacos de 5 kg, y como mínimo tiene que poner a la venta 20 sacos de 5 kg y 60 de 10 kg. Por cada saco de 10 kg obtiene un beneficio de 5 € y por cada saco de 5 kg obtiene un beneficio de 2 €. Determine cuántos sacos de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.
Solución:
Sean x el número de sacos de 5 kg e y el número sacos de 10 kg.
La función objetivo es $f(x,y) = 2x + 5y$ sujeta a las restricciones (región factible):

$$S: \begin{cases} y \leq 180 \\ 5x + 10y \leq 2000 \\ 2y \geq 3x \\ x \geq 20 \\ y \geq 60 \end{cases} \Longrightarrow S: \begin{cases} y \leq 180 \\ x + 2y \leq 400 \\ 3x - 2y \leq 0 \\ x \geq 20 \\ y \geq 60 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(20,60)$, $B(40,60)$, $C(100,150)$, $D(40,180)$ y $E(20,180)$



$f(x,y) = 2x + 5y$ en S: $\begin{cases} f(20,60) = 340 \\ f(40,60) = 380 \\ f(100,150) = 950 \\ f(40,180) = 980 \\ f(20,180) = 940 \end{cases}$
El beneficio máximo será de 980 € y se alcanza con la venta de 40 sacos de 5 kg y 180 de 10 kg.

2.23.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.23.4 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por

$$7y - 8x \leq 3400,\ \ 3x - 8y \leq 2000,\ \ 11x + 14y \geq 9500,\ \ x \leq 1200,\ \ y \leq 1000$$

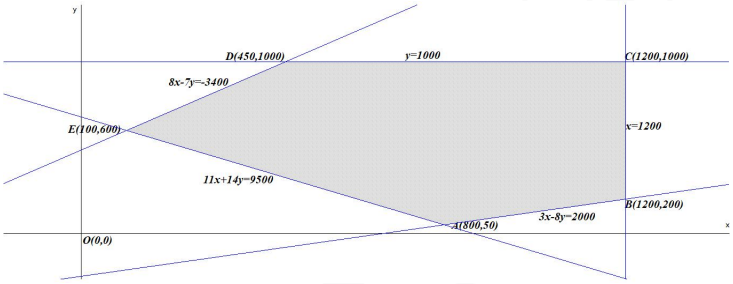
a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

Solución:

a)

$$S: \begin{cases} 7y - 8x \leq 3400 \\ 3x - 8y \leq 2000 \\ 11x + 14y \geq 9500 \\ x \leq 1200 \\ y \leq 1000 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 8x - 7y \geq -3400 \\ 3x - 8y \leq 2000 \\ 11x + 14y \geq 9500 \\ x \leq 1200 \\ y \leq 1000 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(800, 50)$, $B(1200, 200)$, $C(1200, 1000)$, $D(450, 1000)$ y $E(100, 600)$.

b) $f(x, y) = 2x + y$ en S:

$$\begin{cases} f(800, 50) = 1650 \\ f(1200, 200) = 2600 \\ f(1200, 1000) = 3400 \\ f(450, 1000) = 1900 \\ f(100, 600) = 800 \end{cases} \Longrightarrow$$

El valor mínimo de la función en S se alcanza en el punto $E(100, 600)$ con un valor de 800.

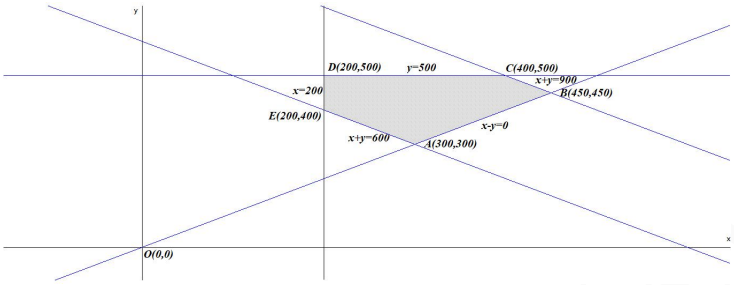
2.23.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.23.5 *(2 puntos)* La plataforma digital *Plusfix* va a lanzar un nuevo canal de cine y deporte y tiene que elaborar una propuesta piloto de contenidos, teniendo en cuenta que el tiempo dedicado al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte. La propuesta piloto debe tener una duración entre 600 y 900 minutos, debe tener al menos 200 minutos de cine y como mucho 500 minutos de deporte. Además, con la emisión de la propuesta la plataforma obtiene 15€ de beneficio por cada minuto de emisión de cine y 10€ de beneficio por cada minuto de emisión de deporte. Determine cuántos minutos de cine y cuántos de deporte debe tener la propuesta para obtener el máximo beneficio y obtenga el beneficio que obtiene la plataforma con dicha propuesta.

Solución:
Sean x el tiempo de cine e y el tiempo de deporte.

☛
$$S:\begin{cases} x \leq y \\ 600 \leq x+y \leq 900 \\ x \geq 200 \\ y \leq 500 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-y \leq 0 \\ x+y \leq 900 \\ x+y \geq 600 \\ x \geq 200 \\ y \leq 500 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(300,300)$, $B(450,450)$, $C(400,500)$, $D(200,500)$ y $E(200,400)$.

☛ $f(x,y)=15x+10y$ en S:
$$\begin{cases} f(300,300)=7500 \\ f(450,450)=11250 \\ f(400,500)=11000 \\ f(200,500)=8000 \\ f(200,400)=7000 \end{cases} \Longrightarrow$$
El beneficio máximo de la propuesta se obtiene con 450 minutos de cine y 450 minutos de deporte y es de 11250€.

2.24. Año 2023

2.24.1. Modelo

Opción A

Problema 2.24.1 *(2 puntos)* Una empresa de transportes ha comprado dos furgonetas, una grande y otra mediana. La normativa vigente solo permite circular un máximo de 400000 km a la grande, 250000 km a la mediana y un total de 600000 km entre ambas. Por las rutas que establece la empresa, por cada kilómetro que recorre la furgoneta grande, la mediana circula como máximo 2 km; y por cada kilómetro que recorre la furgoneta mediana, la grande hace un máximo de 4 km. Por cada kilómetro de circulación de la furgoneta grande se obtiene un beneficio de 10 céntimos y por cada kilómetro de circulación de la mediana un beneficio de 5 céntimos.
Determine el máximo beneficio posible y el número de kilómetros que debe recorrer cada una de las furgonetas para obtenerlo.

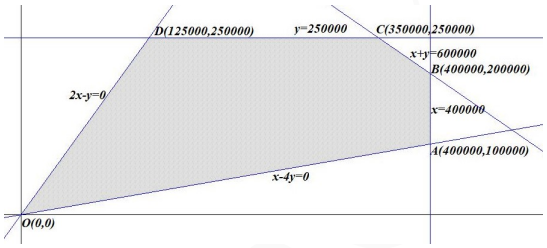
Solución:
Sean x el número de kilómetros recorridos por la furgoneta grande e y los de la mediana.

yoquieroaprobar.es

- La región factible S es:

$$\begin{cases} x \leq 400000 \\ y \leq 250000 \\ x + y \leq 600000 \\ 2x - y \geq 0 \\ x - 4y \leq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(400000, 100000)$, $B(400000, 200000)$, $C(350000, 250000)$ y $D(125000, 250000)$

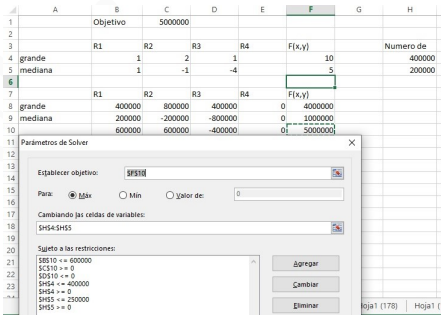


- La función objetivo es $f(x, y) = 10x + 5y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(400000, 100000) = 4500000 \\ f(400000, 200000) = 5000000 \\ f(350000, 250000) = 4750000 \\ f(125000, 250000) = 2500000 \end{cases}$$

El máximo beneficio se obtiene cuando la furgoneta grande hace 400000 kms y la mediana 200000 kms, siendo este beneficio de 5000000 céntimos, es decir, 50000€

Solución por solver



2.24.2. Ordinaria

Opción B

Problema 2.24.2 *(2 puntos)* Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 litros de azul y 0,7 litros de amarillo, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita 0,5 litros de azul y 0,5 litros de amarillo. Actualmente se dispone de 20 l de azul y 28 de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de 1 euro, y por litro de pintura VERDE2 es de 1,2 euros. No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?

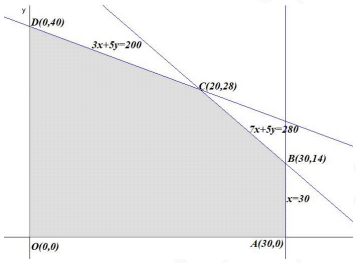
Solución:

Sean x litros de pintura VERDE1 e y litros de pintura VERDE2.

	azul	amarillo	beneficio
VERDE1	$0,3$	$0,7$	1
VERDE2	$0,5$	$0,5$	$1,2$
	20	28	

Región factible:

$$\begin{cases} 0,3x+0,5y \leq 20 \\ 0,7x+0,5y \leq 28 \\ x \leq 30 \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+5y \leq 200 \\ 7x+5y \leq 280 \\ x \leq 30 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son $O(0,0)$, $A(30,0)$, $B(30,14)$, $C(20,28)$ y $D(0,40)$
La función objetivo es $f(x,y) = x + 1,2y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(30,0) = 30 \\ f(30,14) = 46,8 \\ f(20,28) = 53,6 \\ f(0,40) = 48 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 53,6€ vendiendo 20 l de VERDE1 y 28 l de VERDE2.

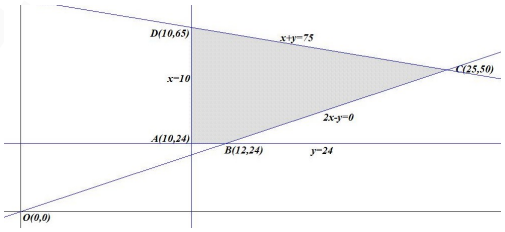
2.24.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.24.3 *(2 puntos)* En una cooperativa se produce aceite de girasol y de oliva. Hay que producir al día como mínimo 10 litros de aceite de girasol y 24 litros de aceite de oliva. Además, los litros de aceite de oliva producidos deben ser al menos el doble de los litros de aceite de girasol y no hay capacidad para producir en total más de 75 litros al día. Sabiendo que un litro de aceite de girasol da un beneficio de 1 euro y que un litro de aceite de oliva da un beneficio de 3 euros, ¿cuántos litros de aceite de cada tipo habrá que producir para maximizar el beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?
Solución:
Sean x litros de aceite de girasol e y litros de aceite de oliva.

Región factible:

$$\begin{cases} x+y \leq 75 \\ y \geq 2x \\ x \geq 10 \\ y \geq 24 \end{cases}$$



Los vértices son $A(10,24)$, $B(12,24)$, $C(25,50)$ y $D(10,65)$
La función objetivo es $f(x,y) = x + 3y$

$$\begin{cases} f(10,24) = 82 \\ f(12,24) = 84 \\ f(25,50) = 175 \\ f(10,65) = 205 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 205€ vendiendo 10 l de girasol y 65 l de oliva.

2.24.4. Extraordinaria

Opción B

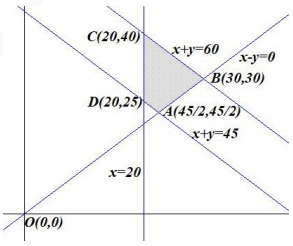
Problema 2.24.4 (2 puntos) Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

Solución:

Sean x tiempo de entrenamiento de fuerza e y tiempo de entrenamiento cardiovascular.

a) La región factible:

$$S:\begin{cases} 45 \leq x+y \leq 60 \\ x \leq y \\ x \geq 20 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y \leq 60 \\ x+y \geq 45 \\ x \leq y \\ x \geq 20 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A\left(\frac{45}{2},\frac{45}{2}\right)$, $B(30,30)$, $C(20,40)$ y $D(20,25)$.

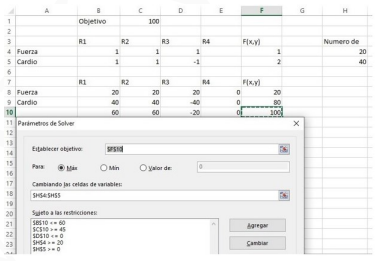
b) $f(x,y)=x+2y$ en S:

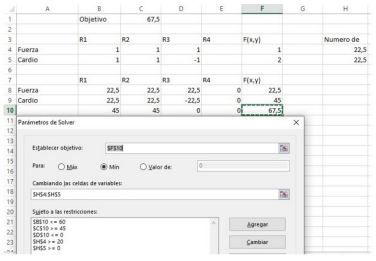
$$\begin{cases} f\left(\frac{45}{2},\frac{45}{2}\right)=\frac{135}{2}=67,5 \\ f(30,30)=90 \\ f(20,40)=100 \\ f(20,25)=70 \end{cases} \Longrightarrow$$

El entrenamiento más beneficioso sería con 20 minutos de fuerza y 40 de cardiovascular, con una duración de 100 totales.

El entrenamiento menos beneficioso sería con 22,5 minutos de fuerza y 22,5 de cardiovascular, con una duración de 67,5 totales.

Solución por solver





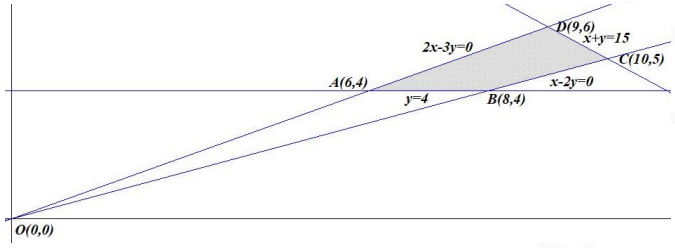
2.24.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.24.5 (2 puntos) Una familia acaba de comprar una parcela y desea construir en ella una piscina rectangular. Tiene que decidir el largo y el ancho de la piscina sabiendo que el largo no puede ser más de 2 veces el ancho, y que 3 veces el ancho no puede sobrepasar a 2 veces el largo. Además, el perímetro debe tener 30 metros como máximo y quieren que la piscina tenga al menos 4 metros de ancho. ¿Qué dimensiones deben elegir si quieren una piscina lo más larga posible?
Solución:
Sean x largo de la piscina e y ancho de la piscina.

a) La región factible:

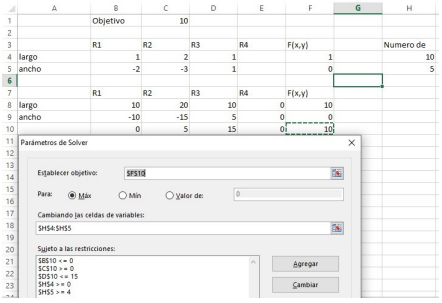
$$S: \begin{cases} x \leq 2y \\ 3y \leq 2x \\ 2x+2y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-2y \leq 0 \\ 2x-3y \geq 0 \\ x+y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 4 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A\,(6,4)$, $B(8,4)$, $C(10,5)$ y $D(9,6)$.

b) $f(x,y)=x$ en S:

Solución por solver



$$\begin{cases} f\,(6,4)=6 \\ f(8,4)=8 \\ f(10,5)=10 \\ f(9,6)=9 \end{cases} \Longrightarrow$$

El máximo largo es de 10 m con un ancho de 5 m.

2.25. Año 2024

2.25.1. Modelo

Problema 2.25.1 *(2 puntos)* Se desea vender batido de chocolate y batido de fresa en una fiesta escolar para recaudar fondos para el viaje de fin de curso. Con la leche de la que se dispone

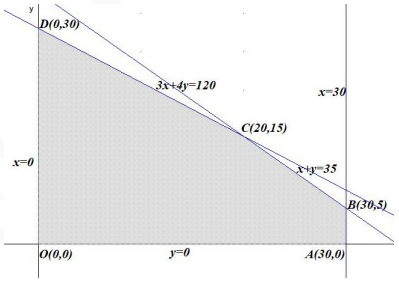
se pueden elaborar 35 litros de batido, y hay cacao en polvo para 30 litros de batido de chocolate como máximo. Se necesitan 15 minutos de preparación por litro de batido de chocolate y 20 minutos por litro de batido de fresa para que tengan la textura correcta. Los batidos tienen que estar listos en 10 horas. Solo hay una batidora y el beneficio que se obtendrá por litro de batido de chocolate es de 10 euros, y por litro de batido de fresa de 11 euros. ¿Cuántos litros de cada tipo de batido se deben producir para maximizar los beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución:
Sean x litros de batido de chocolate e y los de fresa.

- La región factible S es:

$$\begin{cases} x+y \leq 35 \\ x \leq 30 \\ 15x+20y \leq 600 \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y \leq 35 \\ x \leq 30 \\ 3x+4y \leq 120 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(30,0)$, $B(30,5)$, $C(20,15)$ y $D(0,30)$

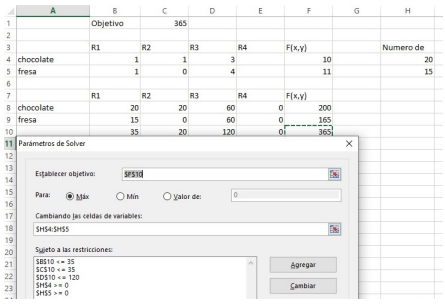


- La función objetivo es $f(x,y) = 10x + 11y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(30,0) = 300 \\ f(30,5) = 355 \\ f(20,15) = 365 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(0,30) = 330 \end{cases}$$

El máximo beneficio se obtiene cuando se elaboran 20 litros de batido de chocolate y 15 de fresa, siendo este beneficio de 365€.

Solución por solver



2.25.2. Ordinaria

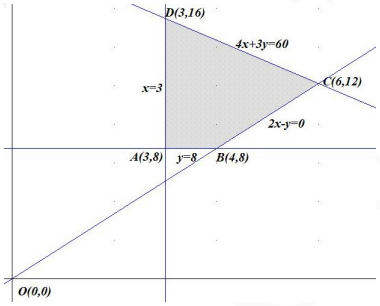
Problema 2.25.2 *(2 puntos)* Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución:
Sean x tabletas de 4 gramos e y tabletas de 3 gramos.

- La región factible S es:

$$\begin{cases} 4x+3y \leq 60 \\ x \geq 3 \\ y \geq 8 \\ 2x \leq y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x+3y \leq 60 \\ 2x-y \leq 0 \\ x \geq 3 \\ y \geq 8 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán:
$A(3,8)$, $B(4,8)$, $C(6,12)$ y $D(3,16)$

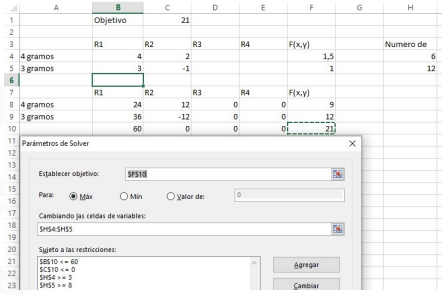


- La función objetivo es $f(x,y) = 1,5x + y \Longrightarrow$

Solución por solver

$$\begin{cases} f(3,8) = 12,5 \\ f(4,8) = 14 \\ f(6,12) = 21 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(3,16) = 20,5 \end{cases}$$

El máximo beneficio se obtiene cuando se elaboran 6 tabletas de 4 gramos y 12 tabletas de 3 gramos, siendo este beneficio de 21€.



2.25.3. Ordinaria-Coincidente

Problema 2.25.3 *(2 puntos)* Se desea vender limonada y naranjada caseras en una verbena popular. Además de agua, de la que disponemos sin limitaciones, cada litro de limonada necesita 4 limones y 80 gramos de azúcar. Cada litro de naranjada necesita 6 naranjas, 1 limón y 50 gramos de azúcar. Se dispone de 80 limones, 72 naranjas y 1720 gramos de azúcar para la elaboración. Cada litro de limonada se venderá a 2 euros y cada litro de naranjada a 2,5 euros. Determine los litros que se deben elaborar de cada una de las dos bebidas para maximizar los ingresos de la venta.

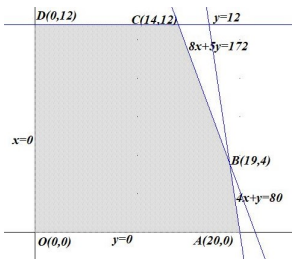
Solución:
Sean x litros de limonada e y litros de naranjada.

	naranjas	limones	azucar	venta
limonada	0	4	80	2€
naranjada	6	1	50	2,5€
existencias	≤ 72	≤ 80	≤ 1720	

- La región factible S es:

$$\begin{cases} 0x+6y \leq 72 \\ 4x+y \leq 80 \\ 80x+50y \leq 1720 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y \leq 12 \\ 4x+y \leq 80 \\ 8x+5y \leq 172 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$,
$A(20,0)$, $B(19,4)$,
$C(14,12)$ y $D(0,12)$

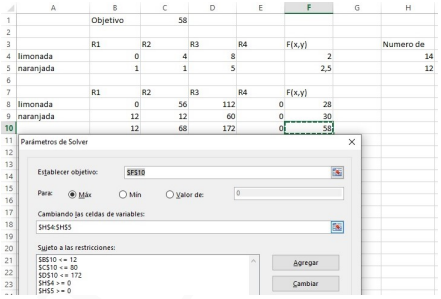


- La función objetivo es $f(x,y) = 2x + 2,5y \Longrightarrow$

Solución por solver

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(20,0) = 40 \\ f(19,4) = 48 \\ f(14,12) = 58 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(0,12) = 30 \end{cases}$$

La máxima venta se obtiene cuando se elaboran 14 litros de limonada y 12 de naranjada, siendo ésta de 58€.



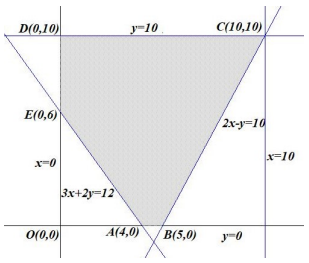
2.25.4. Extraordinaria

Problema 2.25.4 *(2 puntos)* De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales que 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?
Solución:
Sean x el primer número e y el segundo.

- La región factible S es:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ 2x - y \leq 10 \\ 3x + 2y \geq 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y \leq 10 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \leq 10 \\ y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán:
$A(4,0)$, $B(5,0)$, $C(10,10)$, $D(0,10)$ y $E(0,6)$

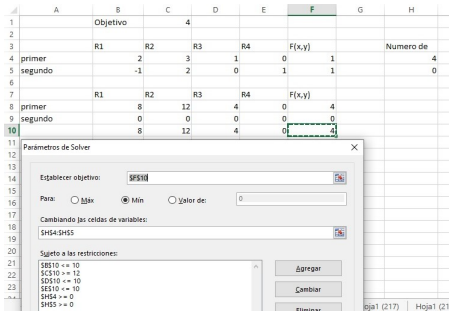


- La función objetivo es $f(x,y) = x + y \Longrightarrow$

Solución por solver

$$\begin{cases} f(4,0) = 4 \Longleftarrow \text{Mínimo} \\ f(5,0) = 5 \\ f(10,10) = 20 \\ f(0,10) = 10 \\ f(0,6) = 6 \end{cases}$$

La mínima suma se obtiene cuando el primer número es 4 y el segundo es 0 con una suma de 4.



2.25.5. Extraordinaria-Coincidente

Problema 2.25.5 *(2 puntos)* Una fábrica de piensos produce 2 tipos de pienso para ganado, $P1$ y $P2$. Cada kg de $P1$ contiene 500 gramos de cereales, 300 de leguminosas y 200 de otros com-

ponentes adicionales. Cada kg de P2 contiene 600 gramos de cereales, 200 de leguminosas y 200 de otros componentes. Se dispone de 30 kg de cereales y 12 kg de leguminosas. Los componentes adicionales no están restringidos. Un kg de pienso $P1$ le da un beneficio de 1 euro y un kg de pienso $P2$ de 2 euros. ¿Cuántos kg de pienso de cada tipo debe fabricar para maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

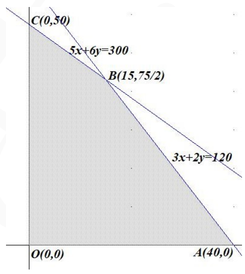
Solución:

Sean x kg de pienso $P1$ e y kg de pienso $P2$.

	cereales	leguminosas	adicionales	beneficio
$P1$	500	300	200	1 €
$P2$	600	200	200	2 €
	≤ 30000	≤ 12000	≥ 0	

Los componentes adicionales no aportan restricción alguna.

- La región factible S es:

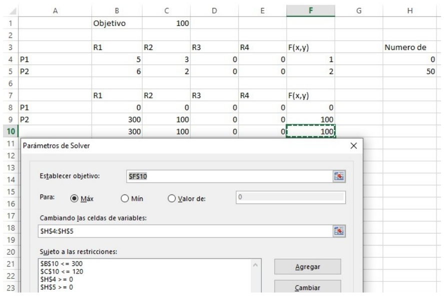


$$\begin{cases} 500x + 600y \leq 30000 \\ 300x + 200y \leq 12000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x + 6y \leq 300 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán:
$O(0,0)$, $A(40,0)$, $B(15,75/2)$y $C(0,50)$.

- La función objetivo es $f(x,y) = x + 2y \Longrightarrow$

Solución por solver



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(40,0) = 40 \\ f(15,75/2) = 90 \\ f(0,50) = 100 \Longleftarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

El máximo beneficio se alcanza con 0 kg de pienso $P1$ y 50 kg de $P2$ y es de 100 €.

2.26. Año 2025

2.26.1. Modelo

Sin problema de programación.

Capítulo 3

Análisis

3.1. Año 2000

3.1.1. Modelo

Opción A

Problema 3.1.1 *(3 puntos)*

a) Calcúlense p y q de modo que la curva $y = x^2 + px + q$ contenga al punto $(-2, 1)$ y presente un mínimo en $x = -3$.

b) Hállese el área del recinto acotado delimitado por la curva $y = x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$.

Solución:

a) $f(x) = x^2 + px + q$ y $f'(x) = 2x + p$

$$\begin{cases} f(-2) = 1 \Longrightarrow 4 - 2p + q = 1 \\ f'(-3) = 0 \Longrightarrow -6 + p = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} q = 9 \\ p = 6 \end{cases}$$

La función es $f(x) = x^2 + 6x + 9$

b) Calculamos las abscisas de los puntos de corte de la curvas:

$$x^2 + 4x + 5 = 5 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = -4$$

Luego el área será:

$$S = \left| \int_{-4}^{0} (f(x) - g(x))dx \right| = |F(0) - F(-4)|$$

$$F(x) = \int (x^2 + 4x)dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2$$

$$S = |F(0) - F(-4)| = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3}\, u^2$$

www.yoquieroaprobar.es

Opción B

Problema 3.1.2 *(3 puntos)* El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función:

$$P(t) = \frac{15 + t^2}{(t+1)^2}$$

donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$.
Calcúlese:

a) La población inicial.

b) El año en que se alcanzará la mínima población. ¿Cuál será el tamaño de ésta?

c) ¿Cuál será el tamaño de la población a largo plazo?

Solución:

a) Si $t = 0 \Longrightarrow P(0) = 15$ millones de individuos.

b)

$$P'(t) = \frac{2(t-15)}{(t+1)^3} = 0 \Longrightarrow t = 15$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 15)$	$(15, \infty)$
$P'(t)$	$+$	$-$	$+$
$P(t)$	Creciente	Decreciente	Creciente

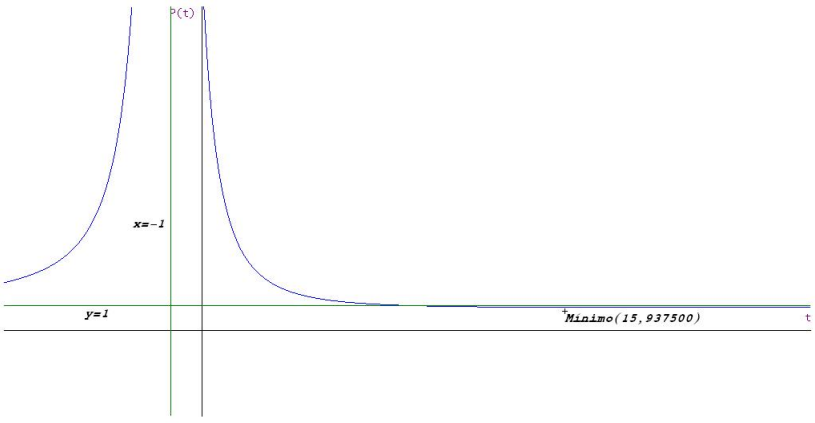
En el punto $t = -1$ no hay ni máximo ni mínimo por dos razones, en ese punto se anula el denominador (posible asíntota vertical), y además en ese punto no se anula la primera derivada. El único extremo está en el punto de abscisa $t = 15$, donde la función pasa de decrecer a crecer y, por tanto, se trata de un mínimo. Podemos asegurar que el mínimo de población se alcanza transcurridos 15 años. Esa cantidad mínima de individuos será

$$f(15) = 0,9375 \Longrightarrow 937500 \,\text{individuos}$$

c) Esta claro que, lo que nos piden analizar es si existe alguna asíntota horizontal:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{15 + t^2}{(t+1)^2} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

A largo plazo la cantidad de población se estabilizará en torno a millón de individuos. Veamos una gráfica de la función:



3.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.1.3 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 3$.

c) Calcúlense sus asíntotas oblicuas.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-1} = 4$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{3x^2-2x}{x+2} = 2$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x = 2$ (hay un salto).

b)

$$\text{Si } x = 3 \Longrightarrow f(x) = \frac{3x^2-2x}{x+2} \Longrightarrow f(3) = \frac{21}{5}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2+12x-4}{(x+2)^2} \Longrightarrow f'(3) = \frac{59}{25}$$

La recta tangente será:

$$y - \frac{21}{5} = \frac{59}{25}(x-3)$$

c) Cuando $x > 2$: La ecuación es $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2-2x}{x^2+2x} = 3$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-8x}{x+2} = -8$$

Luego en esta rama la recta $y = 3x - 8$ es una asíntota oblicua.

Cuando $x \le 2$:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$$

luego tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

www.musat.net

Opción B

Problema 3.1.4 *(3 puntos)* Sea la función dependiente de los parámetros a y b.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ bx - 5 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Halla los valores de a y b para que la función sea continua en el conjunto R de los números reales.

b) Representa gráficamente para los valores $a = 0$ y $b = 3$.

c) Para los valores $a = 0$ y $b = 3$, halla el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

a)

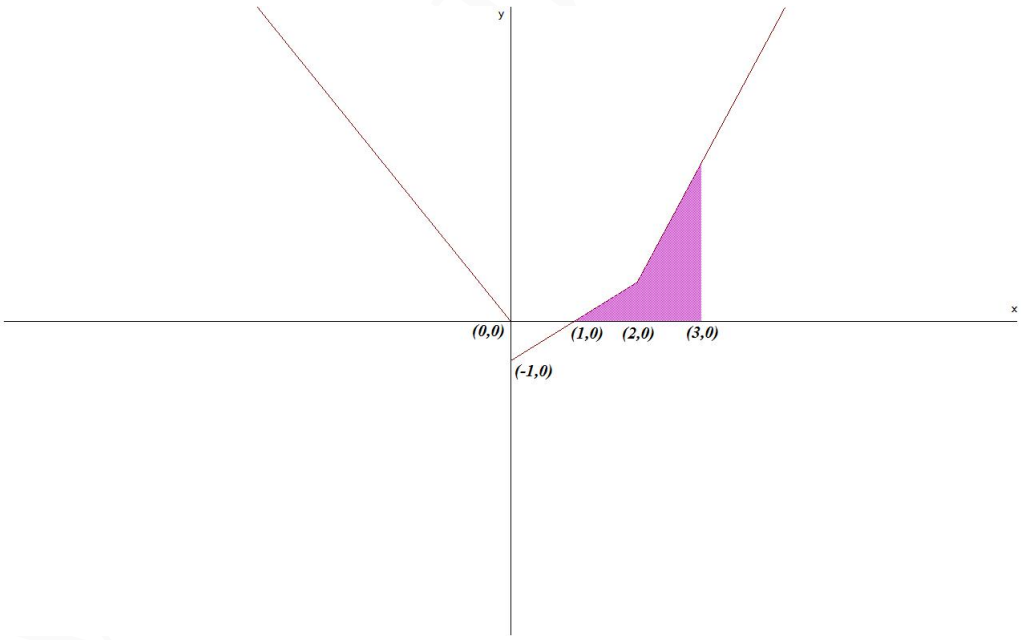
- En $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (-2x - a) = -a \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (x - 1) = -1 \end{cases} \Longrightarrow a = 1$$

- En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} (x - 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} (bx - 5) = 2b - 5 \end{cases} \Longrightarrow b = 3$$

b) La representación sería:



Para $a = 0$ y $b = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

c)

$$S = \int_1^2 (x-1)\,dx + \int_2^3 (3x-5)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 5x\right]_2^3 = 3\ u^2$$

3.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.1.5 *(3 puntos)* Dada la función definida en los números reales salvo en $x = 0$

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$$

Calcular

a) Las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) El área de la región plana acotada limitada por la gráfica de $f(x)$ y el semieje OX.

Solución:

a)

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

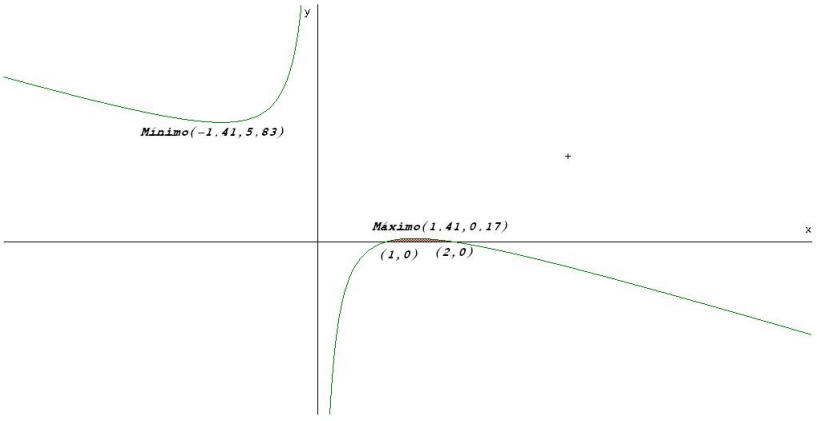
Luego en $(-\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ hay un mínimo y en $(-\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$ hay un máximo.

b) La función corta con el eje de abscisas en los puntos:

$$3 - x - \frac{2}{x} = 0 \Longrightarrow x = 1, \quad x = 2$$

Los límites de integración serán los extremos del intervalo $(1, 2)$.

$$S = \int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln|x|\right]_1^2 = \frac{3}{2} - 2\ln 2$$



Opción B

Problema 3.1.6 *(3 puntos)* Dada la función

$$s(t) = \frac{340 + 330t - 10t^2}{t+2}$$

definida en los reales, salvo en $t = -2$

a) El valor positivo de t en el que se hace cero la función

b) El valor positivo de t en el que $s(t)$ se hace máximo.

c) Las asíntotas de $s(t)$.

Solución:

a)

$$\frac{340 + 330t - 10t^2}{t+2} = 0 \Longrightarrow t = -1, \;\; t = 34$$

El valor pedido es $t = 34$.

b)

$$s'(t) = -\frac{10(t^2 + 4t - 32)}{(t+2)^2} = 0 \Longrightarrow t = -8, \;\; t = 4$$

El valor positivo sería t=4, pero hay que comprobar si es máximo:

	$(-\infty, -8)$	$(-8, 4)$	$(4, \infty)$
$s'(x)$	$-$	$+$	$-$
$s(x)$	decrece	crece	decrece

En el punto $t = 4$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, estamos ante un máximo.

c)
- Verticales en $t = -2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t \longrightarrow -2^-} \dfrac{340 + 330t - 10t^2}{t+2} = \left[\dfrac{-360}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{t \longrightarrow -2^+} \dfrac{340 + 330t - 10t^2}{t+2} = \left[\dfrac{-360}{0^+}\right] = -\infty \end{array} \right.$$

- Horizontales no hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{340 + 330t - 10t^2}{t+2} = \infty$$

- Oblicuas $y = mt + n$

$$m = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{340 + 330t - 10t^2}{t^2 + 2t} = -10$$

$$n = \lim_{t \longrightarrow \infty} \left(\frac{340 + 330t - 10t^2}{t+2} + 10t \right) = 350$$

$$y = -10t + 350$$

3.2. Año 2001

3.2.1. Modelo

Opción A

Problema 3.2.1 *(3 puntos)* El número total de bacterias (en miles) presentes en un cultivo después de t horas viene dado por $N(t) = 2t(t-10)^2 + 50$.

a) Calcúlense la función derivada $N'(t)$.

b) Durante las 10 primeras horas, ¿en qué instantes se alcanzan la población máxima y mínima?

c) Esbócese la gráfica de $N(t)$ en el intervalo $[0, 10]$.

Solución:

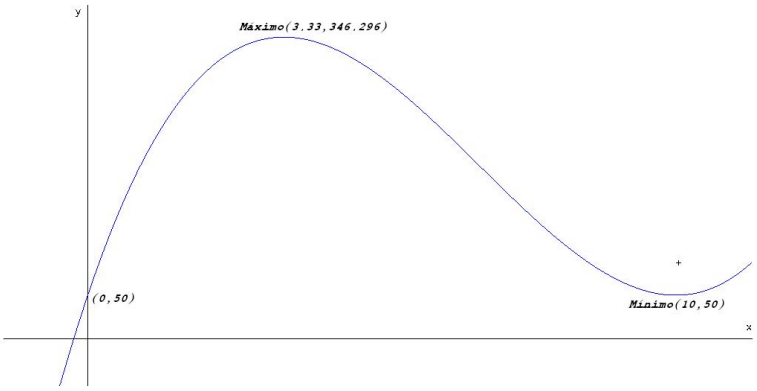
a) $N'(t) = 2(3t^2 - 40t + 100)$

b) $N'(t) = 2(3t^2 - 40t + 100) = 0 \Longrightarrow t = 10$ y $t = 10/3$:

	$(0, 10/3)$	$(10/3, 10)$	$(10, \infty)$
$N'(t)$	$+$	$-$	$+$
$N(t)$	Crece	Decrece	Crece

Luego la función tiene un máximo en el punto (3,33, 346,296) y un mínimo en el punto $(10, 50)$.

c) La representación gráfica es



Opción B

Problema 3.2.2 *(3 puntos)* La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ satisface las siguientes propiedades:

- Pasa por $(0, 0)$
- Tiene mínimo local en $(1, -1)$

a) Obténgase el valor de los coeficientes a, b y c.

b) Hállese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de $g(x) = x^3 - 4x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$ y $x = 4$.

Solución:

a) Tenemos $f(x) = ax^3 + bx + c$ y $f'(x) = 3ax^2 + b$

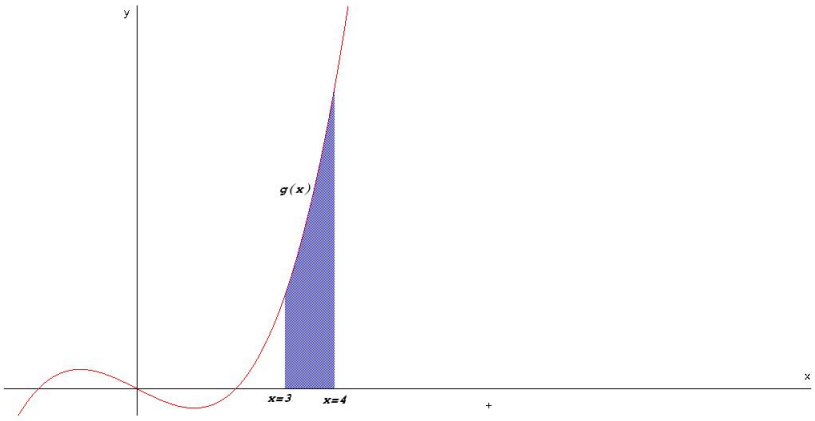
- ☛ Pasa por $(0,0) \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow c = 0$
- ☛ Tiene mínimo local en $(1,-1)$:
  - Pasa por $(1,-1) \Longrightarrow f(1) = -1 \Longrightarrow a + b + c = -1$
  - Tiene mínimo local en $x = 1 \Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + b = 0$

Luego

$$\left\{\begin{array}{c} c = 0 \\ a + b + c = -1 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} c = 0 \\ a = 1/2 \\ b = -3/2 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

b) Primero encontramos los puntos de corte de g en el intervalo $[3,4]$: $g(x) = x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = \pm 2 \Longrightarrow$ No hay ninguno. Luego

$$S = \left|\int_3^4 (x^3 - 4x)dx\right| = \left|\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_3^4\Bigg| = \left|\frac{119}{4}\right| = \frac{119}{4}\, u^2$$

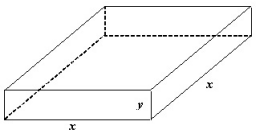


3.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.2.3 *(3 puntos)* Una empresa fabrica cajas de latón sin tapa de volumen 500 cm^3, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen base cuadrada. Hállense la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada en fabricarlas sea la mínima posible.

Solución:



$$V = x^2 y = 500 \Longrightarrow y = \frac{500}{x^2}$$

$$S(x,y) = x^2 + 4xy \Longrightarrow S(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$$

$$S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 10$$

Comprobamos que es un mínimo por la segunda derivada

$$S''(x) = 2 - \frac{4000}{x^3} \Longrightarrow S''(10) = 6 > 0$$

Luego se trata de un mínimo en $x = 10$. Las cajas tendrán de dimensiones: $x = 10\,cm$ e $y = 5\,cm$.

Opción B

Problema 3.2.4 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

a) Determínense sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcúlense sus puntos de inflexión.

c) Esbócese su gráfica.

Solución:

a)

$$f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -2$$

$$f''(x) = 2x + 1 \Longrightarrow \begin{cases} f''(1) = 3 > 0 \Longrightarrow \Longrightarrow \text{Mínimo } \left(1, -\dfrac{1}{6}\right) \\ \\ f''(-2) = -3 < 0 \Longrightarrow \Longrightarrow \text{Máximo } \left(-2, \dfrac{13}{3}\right) \end{cases}$$

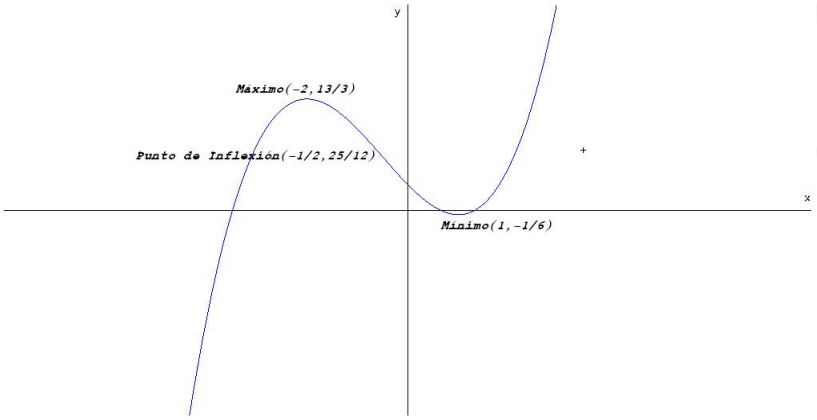
b)

$$f''(x) = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = 2 \Longrightarrow f'''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \neq 0$$

Luego la función tiene un punto de inflexión en el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{25}{12}\right)$

c) la gráfica es



3.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.2.5 *(3 puntos)* Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = -x^2 + c$.

a) Determínese a, b y c, sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos $(-2, -3)$ y $(1, 0)$.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto $(-2, -3)$.

c) Calcúlese el área de la región limitada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

a) $f(-2) = -3 \Longrightarrow 4 - 2a + b = -3$, $f(1) = 0 \Longrightarrow 1 + a + b = 0$, de estas dos ecuaciones obtenemos que $a = 2$ y $b = -3$.

$g(1) = 0 \Longrightarrow -1 + c = 0 \Longrightarrow c = 1$

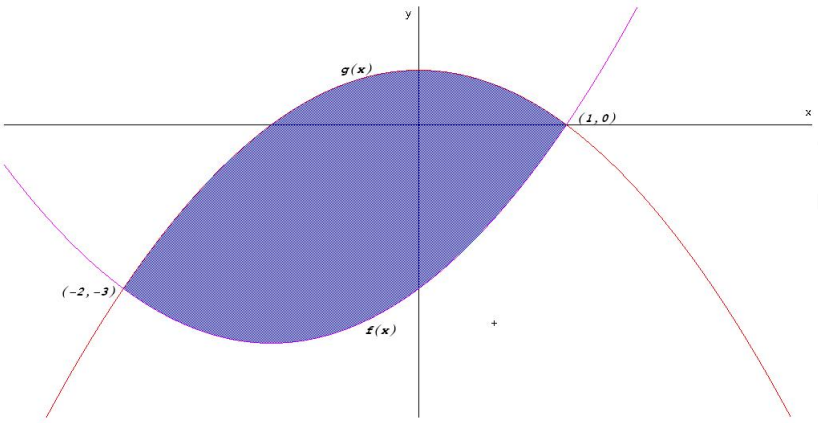
Las funciones son

$$f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad g(x) = -x^2 + 1$$

b) $g'(x) = -2x \Longrightarrow m = g'(-2) = 4$, $g(-2) = -3$. Luego:

$$y + 3 = 4(x + 2) \text{ Recta Tangente}$$

c) Los puntos de corte están en las abscisas $x = -2$ y $x = 1$, que serán los límites de integración:



$$S = |\int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx|$$

$$\int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2x - 3 + x^2 - 1)\, dx = \int_{-2}^{1} (2x^2 + 2x - 4)\, dx =$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x\right]_{-2}^{1} = -9$$

$$S = |-9| = 9\ u^2$$

El motivo por el que sale negativa la integral es porque la gráfica de la función g está por encima de la de f.

Opción B

Problema 3.2.6 *(3 puntos)* Sea la función

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

Calcúlese

a) Los intervalos donde es creciente y decreciente.

b) Las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

c) El valor de x para el que es máxima la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$.

Solución:

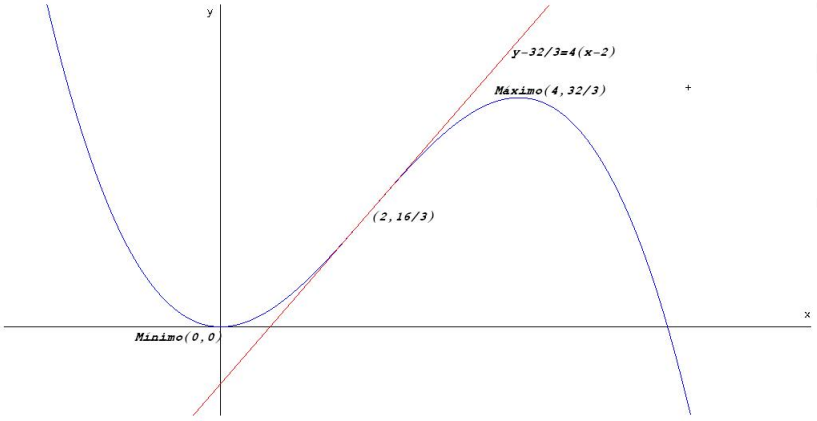
a)

$$f'(x) = 4x - x^2 = 0 \Longrightarrow\ x = 0,\ \ x = 4$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente

b) Tiene un Mínimo en el punto $(0, 0)$ y un Máximo en el punto $(4, 32/3)$.

c) La representación gráfica sería



Llamamos función pendiente a $m(x) = 4x - x^2 \Longrightarrow m'(x) = 4 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 2$

$$m''(x) = -2 \Longrightarrow m''(2) = -2 < 0$$

Luego en $x = 2$ la función pendiente es máxima, que corresponde al punto $(2, 16/3)$.

3.3. Año 2002

3.3.1. Modelo

Opción B

Problema 3.3.1 *(3 puntos)*

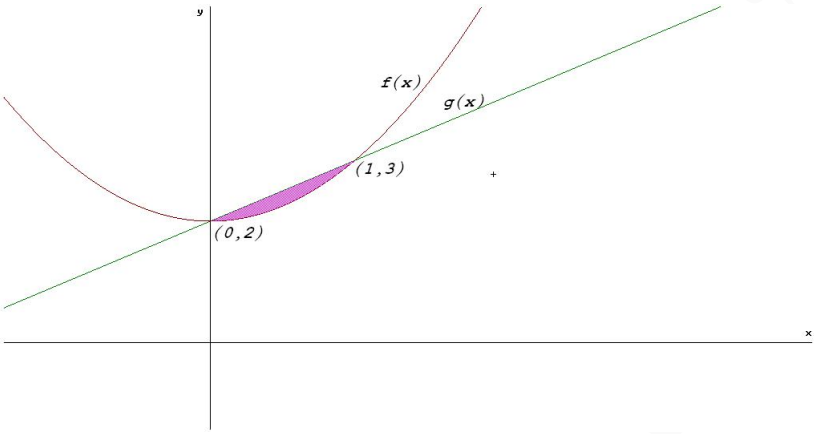
a) Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las siguientes curvas:

$$f(x) = x^2 + 2$$
$$g(x) = x + 2$$
$$\text{siendo } 0 \leq x \leq 2$$

b) Calcular el área de dicho reciento anterior.

Solución:

a) El recinto es el siguiente:



b) El área está encerrada en el intervalo $[0, 1]$:

$$S = \left| \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx \right| = \left| \int_0^1 (x^2 - x)\, dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6}\ u^2$$

3.3.2. Ordinaria

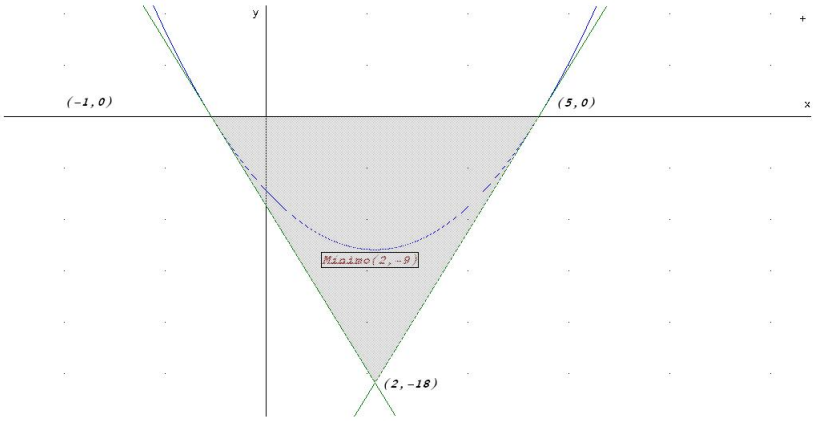
Opción A

Problema 3.3.2 *(3 puntos)*

a) Hallar las coordenadas del mínimo de la curva $y = x^2 - 4x - 5$.

b) Calcular el área del triángulo limitado por el eje OX y las tangentes a la curva dada en los puntos de intersección de dicha curva con el eje OX.

Solución:



a) $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$, como $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(2) = 2 > 0$ luego en $x = 2$ hay un mínimo.

b) Los puntos de corte de la curva con el eje OX son:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Longrightarrow x = -1, \quad x = 5 \Longrightarrow (-1, 0),\ (5, 0)$$

Calculamos las rectas tangentes a la curva en esos puntos:

En el punto $(-1, 0)$:

$$m = f'(-1) = -6 \Longrightarrow y = -6(x + 1)$$
$$m = f'(5) = 6 \Longrightarrow y = 6(x - 5)$$

Estas dos rectas se cortan en el punto

$$\begin{cases} y = -6(x + 1) \\ y = 6(x - 5) \end{cases} \Longrightarrow (2, -18)$$

La base del triángulo mide 6 y la altura 18, luego su área será

$$Área = \frac{6 \cdot 18}{2} = 54\ u^2$$

Opción B

Problema 3.3.3 *(3 puntos)* Se considera la curva de ecuación

$$y = x^3 - 4x$$

a) Hallar las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados y de sus máximos y mínimos relativos, si existen.

b) Representar gráficamente la curva.

c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la curva y el eje OX.

Solución:

a) Puntos de corte con el eje OX, hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad x = \pm 2$.

Puntos de corte con el eje OY, hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 0$.

Los puntos de corte son: (0,0), (-2,0) y (2,0).

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

.

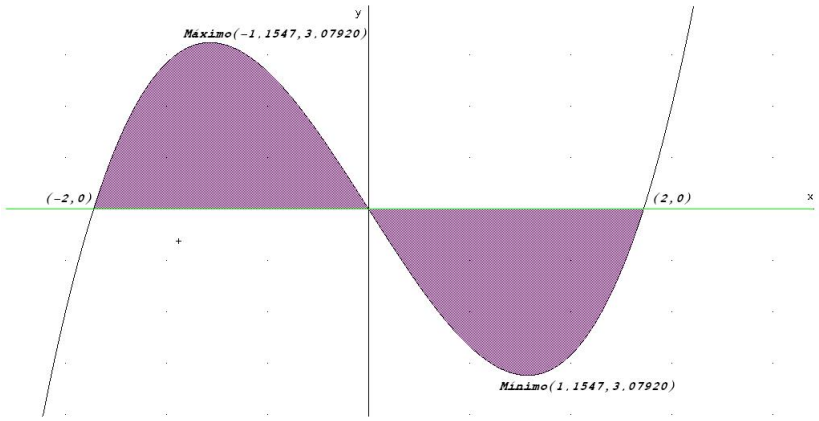
	$\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

En $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{16\sqrt{3}}{3}\right)$ la función pasa de crecer a decrecer, luego es un máximo.

En $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego es un mínimo.

www.yoquieroaprobar.es

b) Representación gráfica:



c) Como la curva es simétrica

$$\acute{A}rea = 2\left|\int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx\right| = 2\left|\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_0^2\right| = 2|-4| = 8\,u^2$$

3.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.3.4 *(3 puntos)* Para cada valor de a se considera la función

$$f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x+2}$$

a) Calcular el valor de a para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

b) Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$ para $a = 3$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 12x - 2a}{(x+2)^2}$, como $f'(2) = 0 \Longrightarrow a = 18 \Longrightarrow f''(2) = 96/64 > 0 \Longrightarrow$ hay un mínimo.

b) Con $a = 3$ tenemos

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x+2}$$

Verticales: En $x = -2$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{3x^2 - 3x}{x+2} = \left[\frac{18}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{3x^2 - 3x}{x+2} = \left[\frac{18}{0^+}\right] = +\infty$$

Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x}{x+2} = \infty$$

Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3x}{x^2 + 2x} = 3$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 3x}{x + 2} - 3x \right) = -9$$

$$y = 3x - 9$$

Opción B

Problema 3.3.5 *(3 puntos)* Calcular el valor de $a > 0$ en los siguientes casos:

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = a$

b) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+1}\,dx = 3$

c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+a}\,dx = 5$

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = a \Longrightarrow a = 2\ln 2$

b) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+1}\,dx = 3 \Longrightarrow \ln(a+1) = 3 \Longrightarrow a = e^3 - 1$

c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+a}\,dx = 5 \Longrightarrow \ln\left(\frac{a+3}{a}\right) = 5 \Longrightarrow a = \frac{3}{e^5 - 1}$

3.4. Año 2003

3.4.1. Ordinaria

Opción A

Problema 3.4.1 *(3 puntos)* Sean las funciones $f(x) = x^2 - 9$ y $g(x) = x^2 - x - 6$.
Calcular:

a) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) Los extremos relativos de $g(x)$, si existen.

c) El área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 3$, $x = 6$.

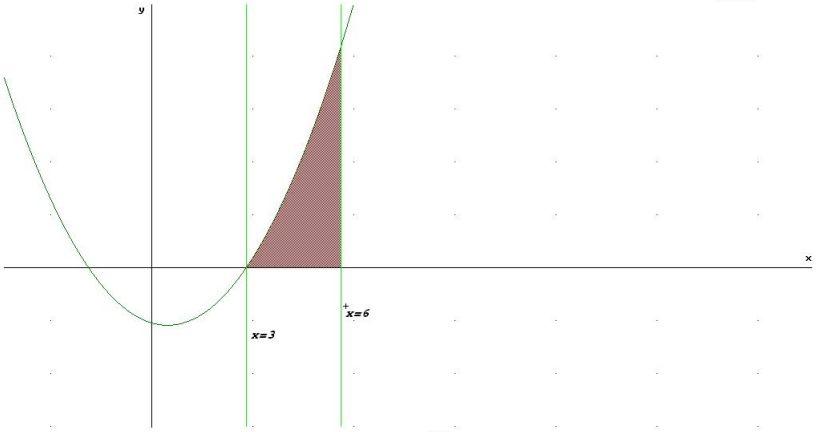
Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$

www.inisat.net

b) $g'(x) = 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ $g''(x) = 2$ luego $g''(1/2) = 2 > 0 \Longrightarrow$ en $(1/2, -25/4)$ la función tiene un mínimo.

c) El área sería



$$Área = \int_3^6 (x^2 - 9)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_3^6 = 36\ u^2$$

Opción B

Problema 3.4.2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular sus asíntotas.

c) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.

Solución:

a) La función es creciente en todo el dominio de f, es decir, en $R - \{-1, 1\}$.

b) Verticales:
En $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x}{1 - x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x}{1 - x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

En $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x}{1 - x^2} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = \infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x}{1 - x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{1 - x^2} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Oblicuas: No hay

c) $f(0) = 0$, $m = f'(0) = 1 \Longrightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Longrightarrow y = x$

3.4.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.4.3 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{x^2}$.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

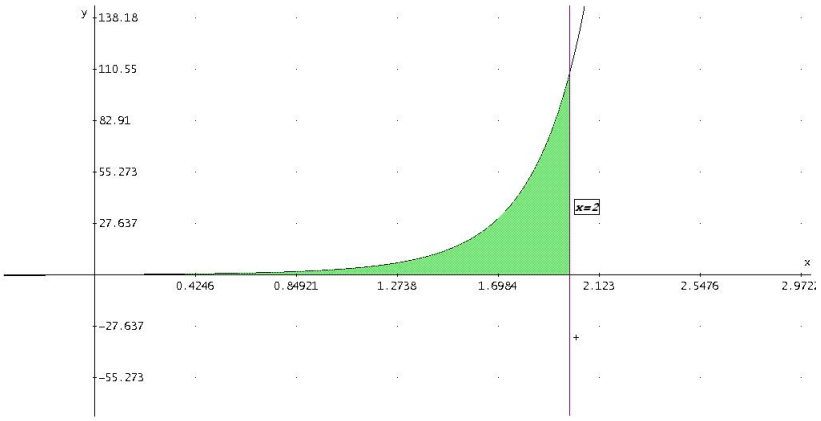
b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)$ para $x \geq 0$, el eje OX y la recta $x = 2$.

Solución:

a) $f(1) = e$, $f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} \implies f'(1) = 3e$

$$y - e = 3e(x - 1)$$

b) El dibujo sería



$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{e^{x^2}}{2}\Big]_0^2 = \frac{e^4 - 1}{2}$$

Opción B

Problema 3.4.4 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{2x^2 + 2x - 12}$
Se pide:

a) Especificar su dominio de definición.

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular sus asíntotas si las hubiera.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = R - \{-3, 2\}$

b) En $x = -3$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^-} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = \left[\frac{-8}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = \left[\frac{-8}{0^-}\right] = +\infty$$

Discontinua inevitable, hay un salto, es una asíntota. En $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} -x^2+12x^2+2x-12 = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty$$

Discontinua inevitable, hay un salto, es una asíntota. La función es continua en el todo el dominio de f, es decir, en $R - \{-3, 2\}$.

c) Verticales: Por el apartado anterior, hay dos asíntotas en $x = 2$ y en $x = -3$.

Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Oblicuas: No hay

3.5. Año 2004

3.5.1. Modelo

Opción A

Problema 3.5.1 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \;\; x \neq 0$$

a) Hallar las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) Esbozar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a)

$$Dom(f) = R - \{0\}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego la función crece en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Luego la función decrece en el intervalo $(-1,0)\cup(0,1)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-1,-2)$ y tiene un mínimo en el punto $(1,2)$.

b)

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}\neq 0$$

Como $f''(x)\neq 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

c) Para dibujar la gráfica vamos a calcular las asíntotas:

- Verticales: $x=0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^2+1}{x}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x^2+1}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{x^2+1}{x}=-\infty$$

- Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{x^2+1}{x}=\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

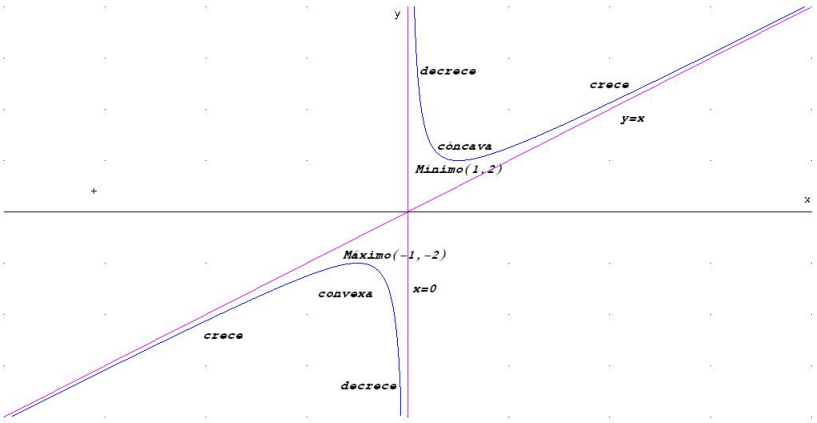
- Oblicuas: $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow \infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=0$$

La ecuación de la asíntota es $y=x$

d) Representación gráfica:



Opción B

Problema 3.5.2 *(3 puntos)* Para cada valor de a se considera la función

$$f(x) = 2x + ax^2 - 4\ln x$$

a) Calcular el valor del parámetro real a sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$. Clasificar el extremo.

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento para $a = 3$.

c) Hallar las asíntotas.

Observación: La notación ln representa logaritmo neperiano.

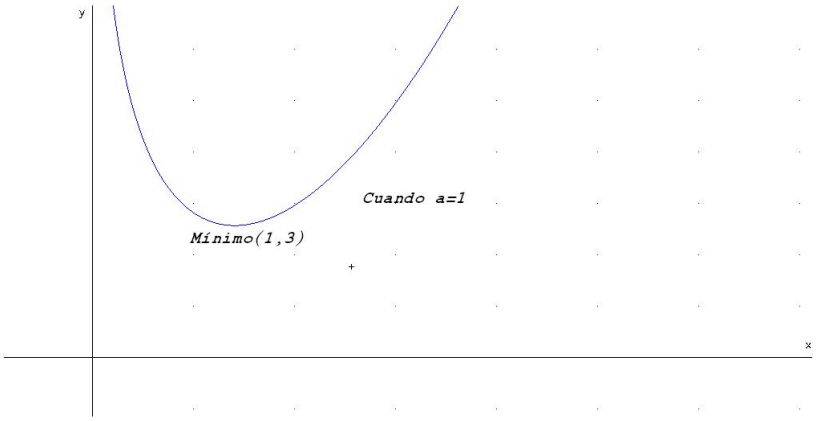
Solución:

a)

$$f'(x) = 2 + 2ax - \frac{4}{x}, \quad \text{como } f'(1) = 0 \Longrightarrow 2 + 2a - 4 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

$$f'(x) = 2 + 2x - \frac{4}{x} = 0 \Longrightarrow x = 1, \ \ x = -2$$

Como $x = -2$ no pertenece al $Dom(f)$ no es extremo. En $x = 1$:



	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

Luego la función crece en el intervalo $(1, \infty))$.
Luego la función decrece en el intervalo $(0, 1)$.
La función tiene un mínimo en el punto $(1, 3)$.

b) Si $a = 3 \Longrightarrow f(x) = 2x + 3x^2 - 4\ln x$

$$f'(x) = 2 + 6x - \frac{4}{x} = 0 \Longrightarrow x = -1, \ \ x = \frac{2}{3}$$

Como $x = -1$ no pertenece al $Dom(f)$ no es extremo. En $x = 2/3$:

	$(0, 2/3)$	$(2/3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

Luego la función crece en el intervalo $(2/3, \infty))$.
Luego la función decrece en el intervalo $(0, 2/3)$.

c) Ásíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0}(2x + 3x^2 - 4\ln x) = \infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+}(2x + 3x^2 - 4\ln x) = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow 0^-}(2x + 3x^2 - 4\ln x) = \text{No existe}$$

- Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty}(2x + 3x^2 - 4\ln x) = \infty$$

No hay asíntotas horizontales.

- Oblicuas: $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x + 3x^2 - 4\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \infty$$

No hay asíntotas oblicuas.

3.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.5.3 *(3 puntos)* Calcular la integral definida

$$\int_{-1}^{1} (|x| + x + 1)\, dx$$

Nota.- La notación $|x|$ representa el valor absoluto de x.
Solución:

$$\int_{-1}^{1} (|x| + x + 1)\, dx = \int_{-1}^{0} (-x + x + 1)\, dx + \int_{0}^{1} (x + x + 1)\, dx =$$

$$\int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} (2x + 1)\, dx = x]_{-1}^{0} + x^2 + x]_{0}^{1} = 1 + 2 = 3$$

Opción B

Problema 3.5.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$$

a) Determinar su dominio de definición.

www.yoquieroaprobar.es

b) Obtener sus asíntotas.

Solución:

a) Por ser una raiz, tiene que ser

$$\frac{x^2-4}{x^2-1}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}\geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-4}{x^2-1}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego $Domf=(-\infty,-2]\cup(-1,1)\cup[2,\infty)$

b) **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}=\left[\sqrt{\frac{-3}{0^-}}\right]=+\infty\Longrightarrow x=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}=\left[\sqrt{\frac{-3}{0^-}}\right]=+\infty\Longrightarrow x=-1$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}=1\Longrightarrow y=1$$

Asíntotas oblicuas: No hay, ya que hemos encontrado horizontales.

3.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.5.5 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^3}{a}-ax^2+5x+10,\quad a\neq 0$$

a) Obtener los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x=1$.

b) Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para $a=3$ y representar la función.

Solución:

a) $f'(x)=\frac{3x^2}{a}-2ax+5\Longrightarrow f'(1)=\frac{3}{a}-2a+5=0\Longrightarrow a=3,\ \ a=-\frac{1}{2}$

b) $f(x)=\frac{3x^2}{3}-6x+5\Longrightarrow f'(x)=x^2-6x+5=0\Longrightarrow x=5,\quad x=1$

$$f''(x)=2x-6\Longrightarrow\begin{cases} f''(5)=4>0\Longrightarrow\left(5,\frac{5}{3}\right)\ \text{Mínimo}\\ f''(1)=-4<0\Longrightarrow\left(1,\frac{37}{3}\right)\ \text{Máximo}\end{cases}$$

Opción B

Problema 3.5.6 *(3 puntos)* Sean las funciones

$$f(x) = x^2 - 2x - 8; \quad g(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 4$$

a) Calcular

$$\lim_{x \longrightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)}$$

b) Calcular el recinto acotado limitado por las curvas $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{-\frac{x^2}{2} + x + 4} = \lim_{x \longrightarrow 4} \frac{2(x^2 - 2x - 8)}{-x^2 + 2x + 8} = -2$$

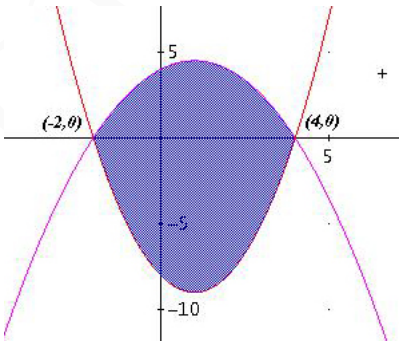
b)

$$x^2 - 2x - 8 = -\frac{x^2}{2} + x + 4 \Longrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 4, \;\; x = -2$$

$$\int_{-2}^{4} \left[x^2 - 2x - 8 - \left(-\frac{x^2}{2} + x + 4 \right) \right] dx = \int_{-2}^{4} \frac{3(x^2 - 2x - 8)}{2} \, dx =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x \right) \Big]_{-2}^{4} = -54$$

$$S = |-54| = 54 \, u^2$$



3.6. Año 2005

3.6.1. Modelo

Opción A

Problema 3.6.1 *(3 puntos)* Sea la función: $f(x) = x^3 - 3x$

a) Calcular sus extremos y sus puntos de inflexión.

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = -1$, $x = \dfrac{1}{2}$.

Solución:

a)

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1,\ \ x = 1$$

$$f''(x) = 6x \Longrightarrow \begin{cases} f''(-1) = -6 < 0 \Longrightarrow \text{Máximo en } x = -1 \\ f''(1) = 6 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo en } x = 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Como $f'''(x) = 6 \Longrightarrow f''(0) = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ hay un punto de inflexión en $x = 0$

b)

$$x^3 - 3x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = -\sqrt{3},\ \ x = \sqrt{3}$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\Big]_{-1}^{0} = \frac{5}{4}$$

$$I_2 = \int_{0}^{1/2} (x^3 - 3x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\Big]_{0}^{1/2} = -\frac{23}{64}$$

$$S = |I_1| + |I_2| = \frac{5}{4} + \frac{23}{64} = \frac{103}{64}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.6.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$.

b) Esbozar su gráfica.

c) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en $x = 1$.

Solución:

a)

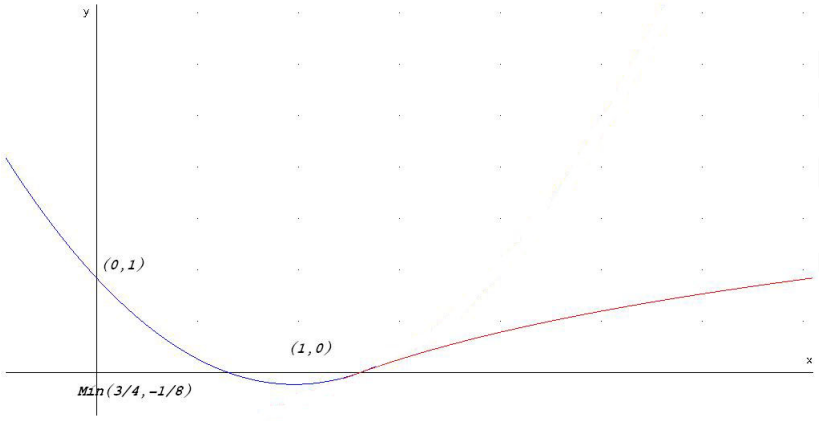
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \ln x = 0 \qquad\qquad \Longrightarrow f \text{ es continua en } x = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

b)

$$f'(x) = 4x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$f''(x) = 4 \Longrightarrow f''(3/4) = 4 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

Luego hay un mínimo en el punto $\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{8}\right)$



Hay puntos de corte en:

Con el eje OX, hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (1, 0)$ y $(1/2, 0)$.
Con el eje OX, hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 1)$.

c) En $x = 1 \Longrightarrow f(1) = 0$.

$$f'(x) = 4x - 3 \Longrightarrow m = f'(1) = -3$$

$$y = -3(x - 1) \Longrightarrow 3x + y - 3 = 0$$

3.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.6.3 *(3 puntos)* La función:

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x}$$

representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el número de artículos vendidos. Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

Solución:
Calculamos la primera derivada para obtener los puntos extremos

$$B'(x) = \frac{16 - x^2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 4$$

Calculamos la segunda derivada para decidir que valor es máximo o mínimo

$$B''(x) = -\frac{32}{x^3} \Longrightarrow \begin{cases} B''(4) = -\dfrac{32}{4^3} < 0 \Longrightarrow \text{Máximo} \\ \\ B''(-4) = -\dfrac{32}{(-4)^3} > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

En $x = 4$ hay un máximo que nos determina un beneficio

$$B(4) = \frac{-4^2 + 9 \cdot 4 - 16}{4} = 1$$

El máximo serían 4 artículos con un beneficio de 1.000 euros.

Opción B

Problema 3.6.4 *(3 puntos)*

a) Hallar la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^{2-x}$ en el punto donde ésta corta al eje de ordenadas.

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x$, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 4$.

Solución:

a) Primero calculamos el punto de corte con el eje OY (de ordenadas), y para eso hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = e^2 \Longrightarrow (0, e^2)$.
Ahora calculamos la pendiente de la recta

$$f'(x) = -e^{2-x}, \quad m = f'(0) = -e^2$$

La recta será

$$y - e^2 = -e^2 x \Longrightarrow e^2 x + y - e^2 = 0$$

b) Primero tenemos que comprobar si la gráfica de esta función corta al eje de abscisas en el itervalo $[-1, 4]$, para ello hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ x = 4$. Esto quiere decir que, tenemos un punto de corte en ese intervalo en $x = 0$. Calculamos:

$$\int_{-1}^{0} (x^2 - 4x)dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 \Big]_{-1}^{0} = \frac{7}{3}$$

$$\int_{0}^{4} (x^2 - 4x)dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 \Big]_{0}^{4} = -\frac{32}{3}$$

El área pedida será:

$$S = \left|\frac{7}{3}\right| + \left|-\frac{32}{3}\right| = 13u^2$$

3.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.6.5 *(3 puntos)* Se considera la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$. Se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Hallar las asíntotas de la curva.

Solución:

a)

$$y' = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1) = 1 \\ f(1) = \dfrac{1}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow y - \frac{1}{2} = 1(x-1) \Longrightarrow 2x - 2y + 1 = 0$$

b) Verticales no tiene, el denominador no se anula nunca.

Horizontales tampoco

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \infty$$

Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = 0$$

La asíntota es $y = x$.

Opción B

Problema 3.6.6 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$$

a) Hallar sus asíntotas.

b) Calcular sus máximos y sus mínimos relativos, si existen.

Solución:

a) Verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{x^2}{x^2-9} = +\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \dfrac{x^2}{x^2-9} = -\infty \end{array} \right\} \Longrightarrow x = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -3^+} \dfrac{x^2}{x^2-9} = -\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} \dfrac{x^2}{x^2-9} = +\infty \end{array} \right\} \Longrightarrow x = -3$$

Las asíntotas verticales son $x = 3$, y $x = -3$.

Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-9} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$

Oblicuas: No hay por tener horizontales.

www.matesat.net

b)

$$f'(x) = \frac{-18x}{(x^2-9)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

En el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, es un máximo.

3.7. Año 2006

3.7.1. Modelo

Opción A

Problema 3.7.1 *(3 puntos)* Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$$

y el eje OX.

Solución:

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = -4,\ x = -2,\ x = 1$$

$$S = \left| \int_{-4}^{-2} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{-2}^{1} f(x)\,dx \right|$$

$$\int f(x)\,dx = \int (x^3 + 5x^2 + 2x - 8)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + x^2 - 8x + C$$

$$\left| \int_{-4}^{-2} f(x)\,dx \right| = \left| \frac{16}{3} \right| = \frac{16}{3}$$

$$\left| \int_{-2}^{1} f(x)\,dx \right| = \left| -\frac{63}{4} \right| = \frac{63}{4}$$

$$Área = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}$$

Opción B

Problema 3.7.2 *(3 puntos)* Calcular el valor de $a > 0$ para que el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las curvas $y = x^3$, $y = ax$, sea igual a 4.

Solución:

$$x^3 = ax \Longrightarrow x = 0,\ \ x = -\sqrt{a},\ \ x = \sqrt{a}$$

$$S = \left| \int_{-\sqrt{a}}^{0} (f(x) - g(x))\,dx \right| + \left| \int_{0}^{\sqrt{a}} (f(x) - g(x))\,dx \right|$$

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^3 - ax)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{ax^2}{2} + C$$

$$\left|\int_{-\sqrt{a}}^{0}(f(x)-g(x))\,dx\right| = \left|\frac{a^2}{4}\right| = \frac{a^2}{4}$$

$$\left|\int_{0}^{\sqrt{a}}(f(x)-g(x))\,dx\right| = \left|-\frac{a^2}{4}\right| = \frac{a^2}{4}$$

$$Área = \frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} = 4 \Longrightarrow a^2 = 8 \Longrightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$$

Como $a > 0$ la solución válida es $a = 2\sqrt{2}$.

3.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.7.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

Se pide:

a) Calcular sus máximos y mínimos relativos, si existen.

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a)

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{3},\ \ x = \sqrt{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

En el punto $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ hay un Máximo.

En el punto $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ hay un Mínimo.

b)

$$x^3 - 9x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = 3,\ \ x = -3$$

$$\int_{-3}^{0}(x^3-9x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\Big]_{-3}^{0} = \frac{81}{4}$$

$$\int_{0}^{3}(x^3-9x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\Big]_{0}^{3} = -\frac{81}{4}$$

$$Área = \frac{81}{4}+\frac{81}{4} = \frac{81}{2}\ u^2$$

www.yoquieroaprobar.es

Opción B

Problema 3.7.4 *(3 puntos)* Se considera la curva de ecuación cartesiana:

$$y = x^2 + 8x$$

Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta

$$y = 2x$$

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación cartesiana

$$y = x + 8$$

Solución:

a)

$$f'(x) = 2x + 8 \Longrightarrow f'(a) = 2a + 8 = 2 \Longrightarrow a = -3,\ \ f(-3) = -15 \Longrightarrow$$

$$(-3, -15)$$

b)

$$x^2 + 8x = x + 8 \Longrightarrow\ x = 1,\ x = -8$$

$$\int_{-8}^{1} (x^2 + 7x - 8)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} - 8x\Big]_{-8}^{1} = -\frac{243}{2}$$

$$\acute{A}rea = \frac{243}{2}\ u^2$$

3.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.7.5 (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$$

Se pide:

a) Encontrar las asíntotas de la función.

b) Especificar el signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.

Solución:

a) Verticales: $x = 2$ y $x = -2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \left[\frac{-12}{0^-}\right] = +\infty \quad \lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \left[\frac{-12}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \left[\frac{-12}{0^+}\right] = -\infty \quad \lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \left[\frac{-12}{0^-}\right] = +\infty$$

Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2-16}{x^2-4} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) Signo de $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+2)(x-2)}$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

La función es positiva en $(-\infty,-4) \cup (-2,2) \cup (4,\infty)$

La función es negativa en $(-4,-2) \cup (2,4)$

Opción B

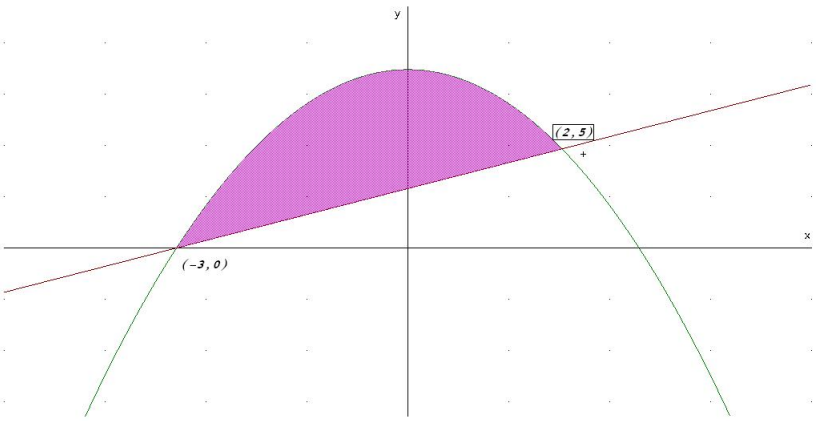
Problema 3.7.6 (Puntuación máxima: 3 puntos)

Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 9 - x^2, \quad g(x) = 3 + x$$

y obtener su área.

Solución:



Los puntos de corte de las dos gráficas son:

$$9-x^2=3+x \Longrightarrow x=-3,\ \ x=2$$

$$\left|\int_{-3}^{2}(6-x^2-x)\,dx\right|=\left|6x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2}\Bigg|=\frac{125}{6}$$

3.8. Año 2007

3.8.1. Modelo

Opción A

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

Opción B

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

3.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.8.1 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{(x-3)^2}{x+3}$$

a) Determinar las asíntotas de la función.

b) Calcular sus máximos y sus mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: $x=-3$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -3^-}\frac{(x-3)^2}{x+3}=\left[\frac{36}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -3^+}\frac{(x-3)^2}{x+3}=\left[\frac{36}{0^+}\right]=+\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x)=\infty$$

- Oblicuas: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(x-3)^2}{x^2+3x}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{(x-3)^2}{x+3}-x\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-9x+9}{x+3}=-9$$

$$y=x-9$$

www.matgat.net

b)

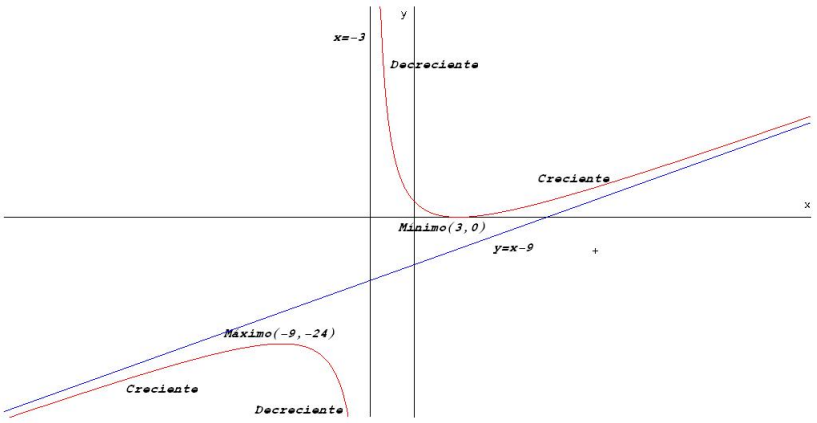
$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x - 27}{(x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 3, \;\; x = -9$$

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo: $(-\infty, -9) \cup (3, \infty)$

La función decrece en el intervalo: $(-9, -3) \cup (-3, 3)$

Presenta un máximo en el punto $(-9, -24)$ y un mínimo en $(3, 0)$



Opción B

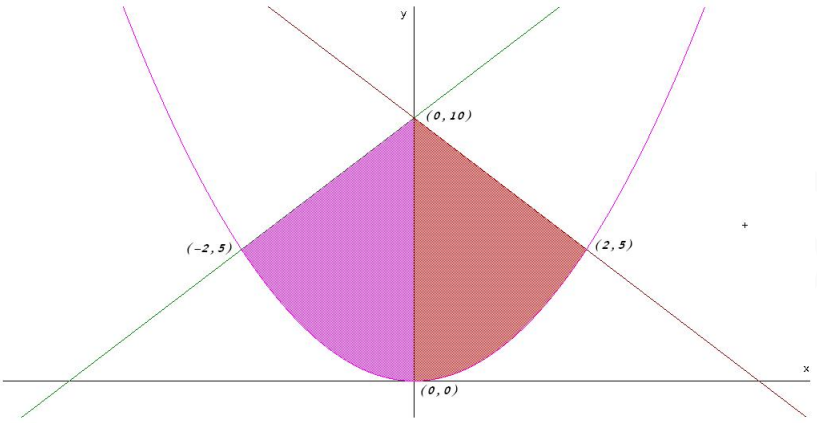
Problema 3.8.2 *(3 puntos)* Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{5}{4}x^2, \quad g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20), \quad h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$$

y obtener su área.

Solución:

Dibujamos las gráficas de f que es una parábola con vértice en el punto $(0, 0)$ y de las rectas g y h:



Igualando funciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) = h(x)$ obtenemos los límites de integración. Por observación del recinto vemos que es simétrico, bastaría calcular el área encerrada entre $x = 0$ y $x = 2$ y multiplicarla por 2:

$$\int_0^2 (h(x) - f(x))\, dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}(-5x + 20) - \frac{5}{4}x^2\right) dx =$$

$$= \left[-5\frac{x^3}{12} + 5\frac{x^2}{4} + 10x\right]_0^2 = \frac{65}{3} \Longrightarrow S = \frac{130}{3}\ u^2$$

3.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.8.3 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

a) Especificar el dominio de definición.

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular sus asíntotas si las hubiera.

Solución:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 2,\ x = 1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = R - \{1, 2\}$

b) En $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = -1$$

Pero $f(1)$ no existe y por tanto se trata de una discontinuidad evitable. (La función tiene un agujero)

En $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty$$

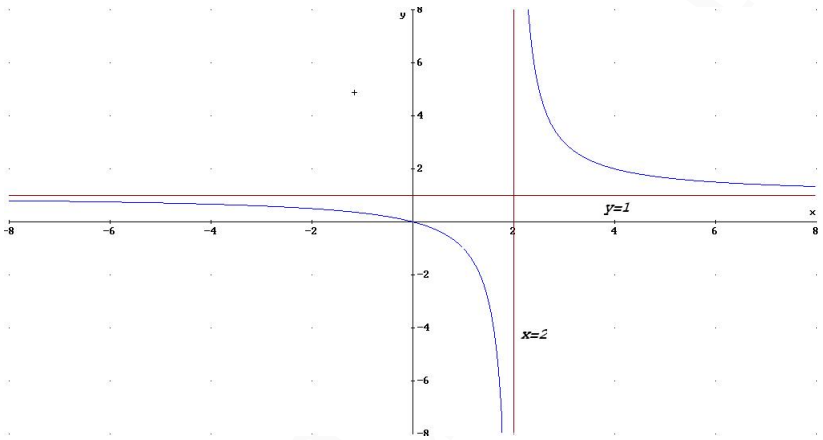
La discontinuidad en este caso es inevitable. (La función pega un salto)

c) Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = 2$ por lo visto anteriormente
- ☛ Horizontales: En $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = 1$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales



Opción B

Problema 3.8.4 *(3 puntos)* La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ satisface las siguientes propiedades:

- ☛ Pasa por el punto $(0, 0)$.
- ☛ Tiene un máximo local en el punto $(1, 2)$.

Se pide:

a) Obtener el valor de los coeficientes a, b y c.

b) Hallar el área de la región acotada del plano limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$, el eje OX y la recta $x = 1$.

Solución:

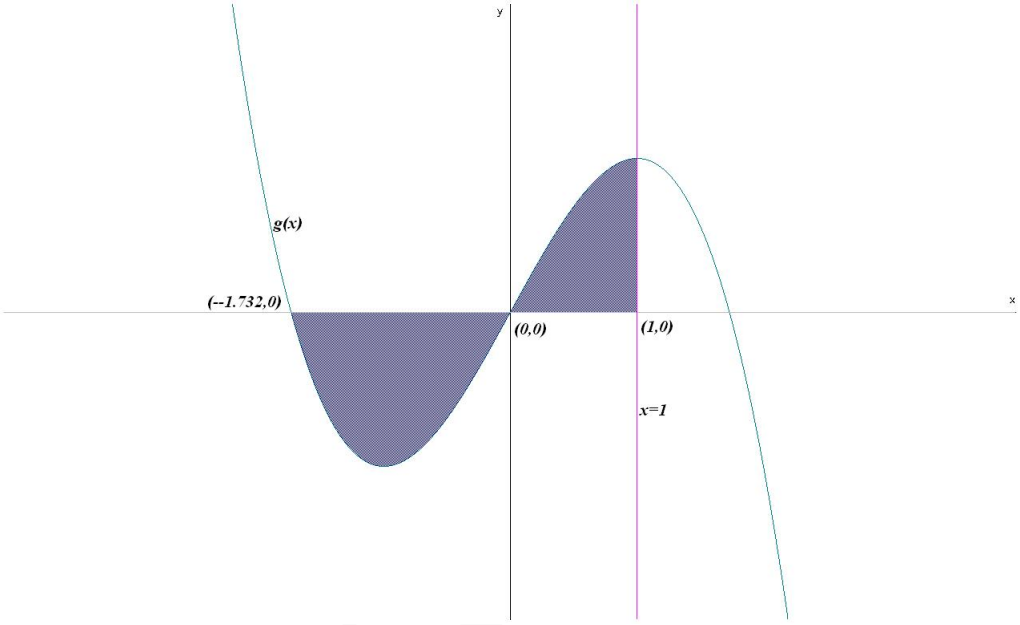
a) Tenemos:

- ☞ Pasa por el punto $(0, 0) \Longrightarrow f(0) = c = 0$
- ☞ Tiene un máximo local en el punto $(1, 2) \Longrightarrow f'(1) = 0$ y $f(1) = 2$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Longrightarrow 3a + 2b = 0, \text{ y } a + b + c = 2$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=2 \\ 3a+2b=0 \\ c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-4 \\ b=6 \\ c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x)=-4x^3+6x^2$$

b) El recinto sería:



Calculamos los puntos de corte de la función g con el eje $OX \Longrightarrow -x^3+3x=0 \Longrightarrow x=0$, $x=-\sqrt{3}$ y $x=\sqrt{3}$. Luego los límites de integración serían los intervalos $[-\sqrt{3},0]$ donde la función es negativa y $[0,1]$ donde es positiva:

$$F(x)=\int(-x^3+3x)\,dx=-\frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}$$

$$S=|F(0)-F(-\sqrt{3})|+|F(1)-F(0)|=\left|-\frac{9}{4}\right|+\left|\frac{5}{4}\right|=\frac{7}{2}\ u^2$$

3.9. Año 2008

3.9.1. Modelo

Opción A

Problema 3.9.1 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2-4}$$

a) Calcular sus asíntotas y esbozar su gráfica.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=0$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: Las únicas posibles son $x = \pm 2$

  En $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{3x^2}{x^2-4} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{3x^2}{x^2-4} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = \infty$$

  En $x = -2$:

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{3x^2}{x^2-4} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = \infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{3x^2}{x^2-4} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty$$

- Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2-4} = 3 \Longrightarrow y = 3$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontalesa

Para representar la función calculamos:

- Puntos de Corte: $(0, 0)$
- Monotonía:

$$f'(x) = -\frac{24x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

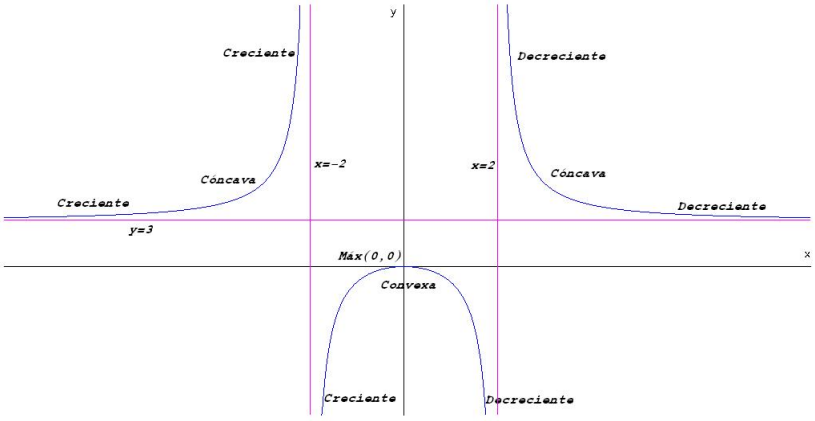
  Luego la función presenta un máximo en el punto $(0, 0)$.

- Curvatura:

$$f'(x) = \frac{24(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay puntos de Inflexión}$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

- Representación gráfica:



b) El punto de tangencia es el $(0,0)$ donde la función presenta un máximo y, por tanto, la tangente coincide con el eje de abscisas $y = 0$.

Opción B

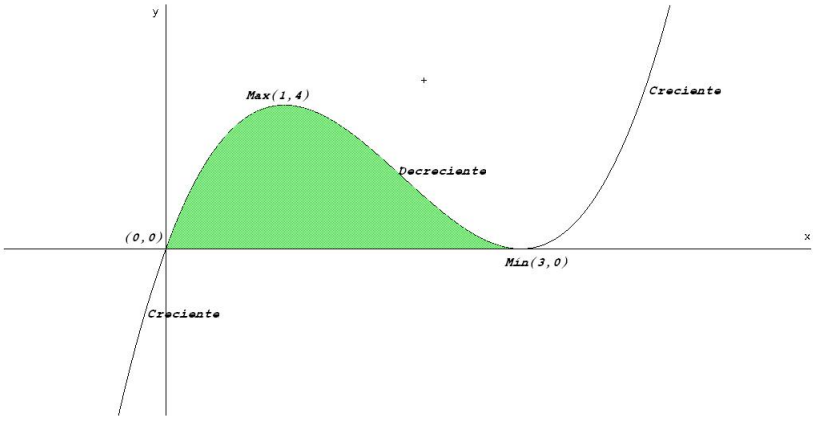
Problema 3.9.2 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, se pide determinar:

a) Los puntos en los que la gráfica de f corta a los ejes de coordenadas.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) El área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función y el eje OX.

Solución:



a) Puntos de Corte:

- Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3 \Longrightarrow$ los puntos son $(0,0)$ y $(3,0)$.
- Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow$ el punto es el $(0,0)$.

b) Monotonía:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ \ x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

La función tiene un máximo en $(1, 4)$ y un mínimo en $(3, 0)$

c) El área encerrada se encuentra entre los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 3$:

$$S = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 9\frac{x^2}{2}\Big]_0^3 = \frac{27}{4}\, u^2$$

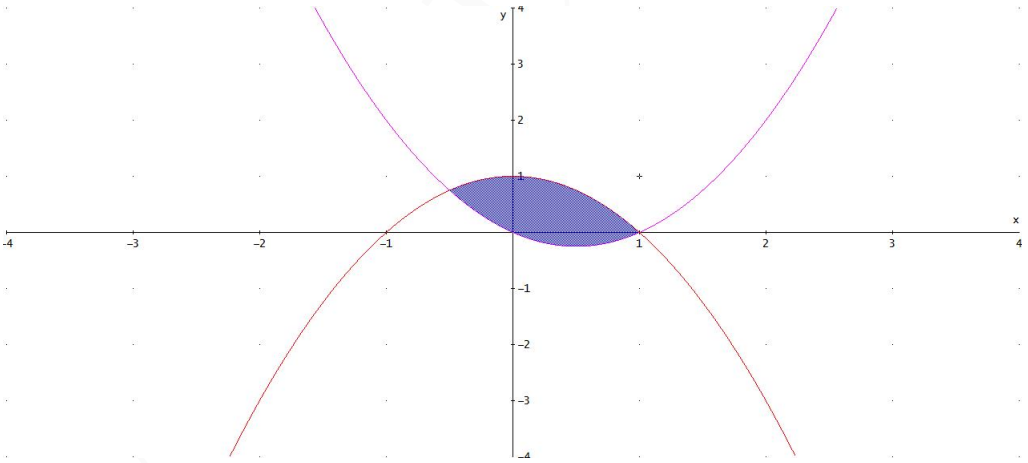
3.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.9.3 *(3 puntos)* Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real

$$f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = 1 - x^2$$

Solución:



Buscamos los puntos de corte entre ambas gráficas

$$x^2 - x = 1 - x^2 \Longrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2},\ \ x = 1$$

$$S = \left| \int_{-1/2}^{1} (2x^2 - x - 1)\, dx \right| = \left| \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \Big]_{-1/2}^{1} \right| = \frac{9}{8}\, u^2$$

Opción B

Problema 3.9.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x}, \quad x \neq 0$$

a) Determínense las asíntotas de f.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.

c) Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 2}{x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2 + x + 2}{x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No Hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 2}{x} = \infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 2}{x} - x\right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x + 2}{x} = 1$$

$$y = x + 1$$

b)

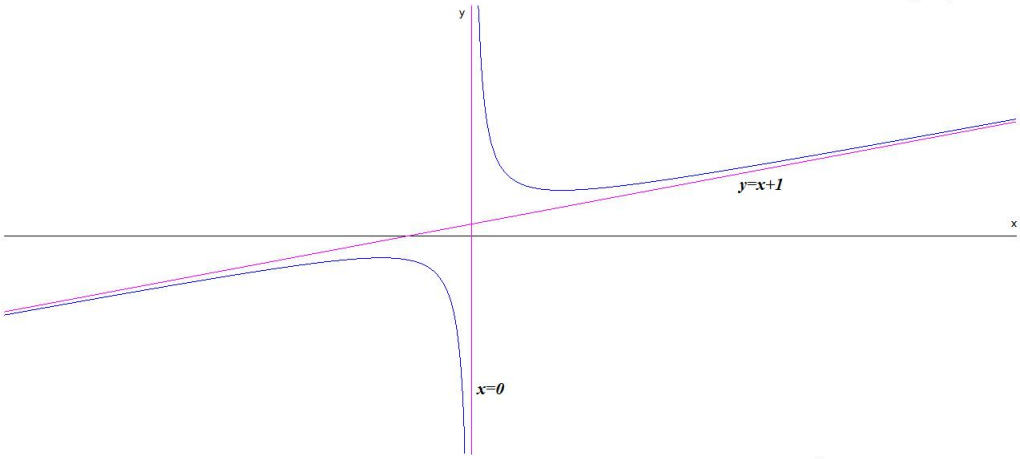
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{2}, \ x = \sqrt{2}$$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

La función decrece en el intervalo: $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$

Presenta un máximo en el punto $(-\sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2})$ y un mínimo en $(\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})$



c)

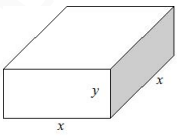
$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^2+x+2}{x}\,dx = 2\ln(x) + \frac{x^2}{2} + x\Big]_1^2 = \frac{5}{2} + 2\ln 2$$

3.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.9.5 *(3 puntos)* Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa, de capacidad 500 dm^3. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben ser sus medidas para minimizar la superficie total del cristal empleado?

Solución:



$$V = x^2 y = 500 \Longrightarrow y = \frac{500}{x^2}$$

$$S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{2000}{x^2}$$

$$S(x) = x^2 + \frac{2000}{x^2} \Longrightarrow S'(x) = \frac{2x^3 - 2000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 10$$

	$(-\infty, 10)$	$(10, \infty)$
$S'(x)$	$-$	$+$
$S(x)$	decrece	crece

Las dimensiones son $x = 10$ dm e $y = 5$ dm.

Opción B

Problema 3.9.6 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}, \quad x \neq 2$$

a) Determínense las asíntotas de f.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.

c) Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_3^5 (x^2-4)f(x)\,dx$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales: $x = 2$ y $x = -2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$

☛ Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x^2-4} = 1$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontalesa

b)

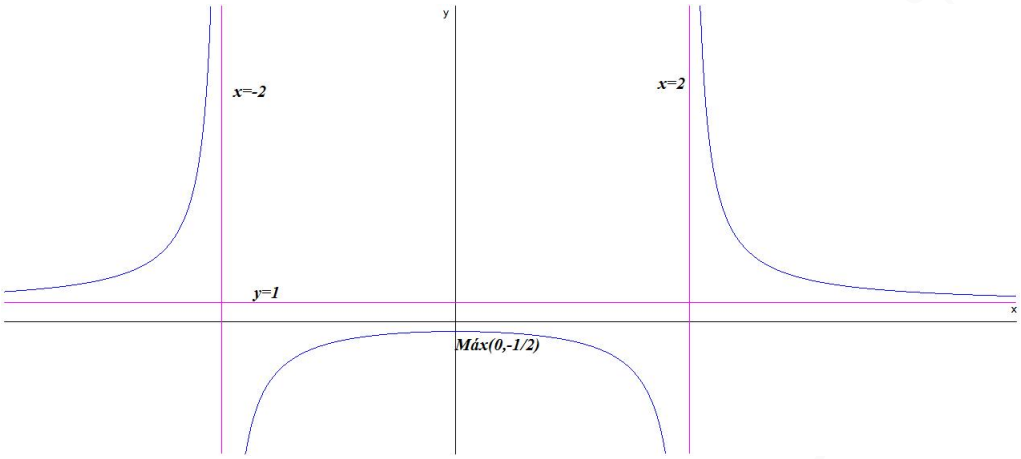
$$f'(x) = -\frac{12x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo: $(-\infty, 0)$

La función decrece en el intervalo: $(0, +\infty)$

Presenta un máximo en el punto $(0, -1/2)$



c)

$$\int_3^5 (x^2-4)f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2+2)\,dx = \frac{x^3}{3}+2x\Big]_3^5 = \frac{110}{3}$$

3.10. Año 2009

3.10.1. Modelo

Opción A

Problema 3.10.1 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx; \quad a, b \in R$$

a) ¿Qué valores deben tomar a y b para que f tenga un máximo relativo en el punto $P(1,4)$?

b) Para $a=-2,\ b=-8$, determínense los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y determínense los puntos de inflexión de dicha gráfica.

c) Para $a=-2,\ b=-8$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ para que f tenga un máximo relativo en $P(1,4)$ tiene que ocurrir:

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a+b+3=0 \\ f(1) = 4 \Longrightarrow a+b-3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=9 \end{cases}$$

La función es: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) Si $a=-2$ y $b=-8 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

☛ Puntos de corte:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0) \\ f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 2x^2 - 8x = 0 \Longrightarrow (0,0),\ (4,0),\ (-2,0) \end{cases}$$

☛ Puntos de Inflexión:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 8, \quad f''(x) = 6x - 4 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Como $f''(x) = 6 \Longrightarrow f''(2/3) = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ el punto$(2/3, -160/27)$ es un punto de inflexión. Otra manera de comprobarlo es:

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

En el punto de abscisa $x = 2/3$ la función pasa de ser convexa a ser cóncava y además hay continuidad en ese punto, lo que quiere decir que, se trata de un punto de Inflexión.

c) Si $a = -2$ y $b = -8 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

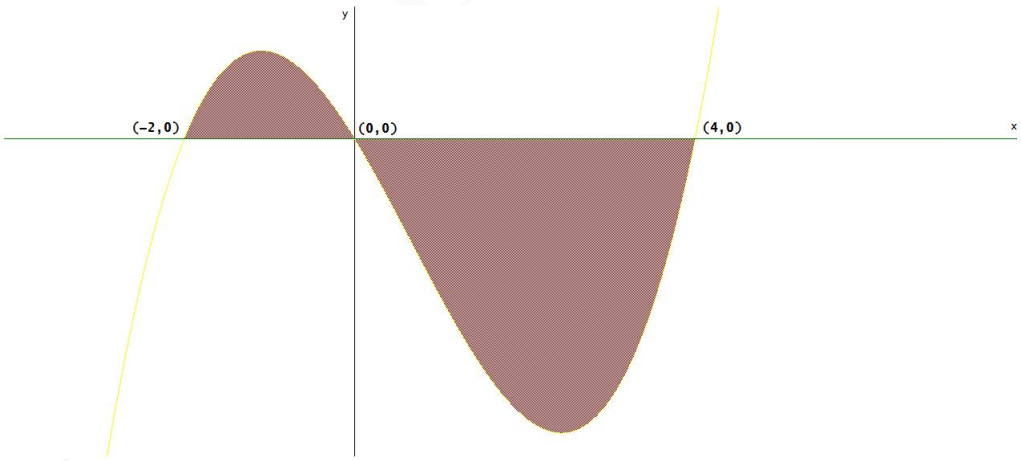
$$x^3 - 2x^2 - 8x = 0 \Longrightarrow x = -2, \ \ x = 0, \ \ x = 4$$

Los límites de integración serán de $x = -2$ a $x = 0$ y de $x = 0$ a $x = 4$.

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 2x^2 - 8x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\Big]_{-2}^{0} = \frac{20}{3}$$

$$S_2 = \int_{0}^{4} (x^3 - 2x^2 - 8x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\Big]_{0}^{4} = -\frac{128}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{148}{3}\, u^2$$



Opción B

Problema 3.10.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x + a & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 5 \\ -x^2 + 5x + b & \text{si} \quad x > 5 \end{cases} \qquad (a, b \in R)$$

a) Calcúlense los valores de a y b para que la f se continua en $x = 2$ y en $x = 5$.

b) Para $a = 1$ y $b = 6$, calcúlense las derivadas $f'(1)$ y $f'(7)$.

c) Para $a = 1$ y $b = 6$, calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_3^6 f(x)dx$

Solución:

a) ☛ En $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} (x + a) = 2 + a$$

Luego $4 = 2 + a \Longrightarrow a = 2$.

☛ En $x = 5$

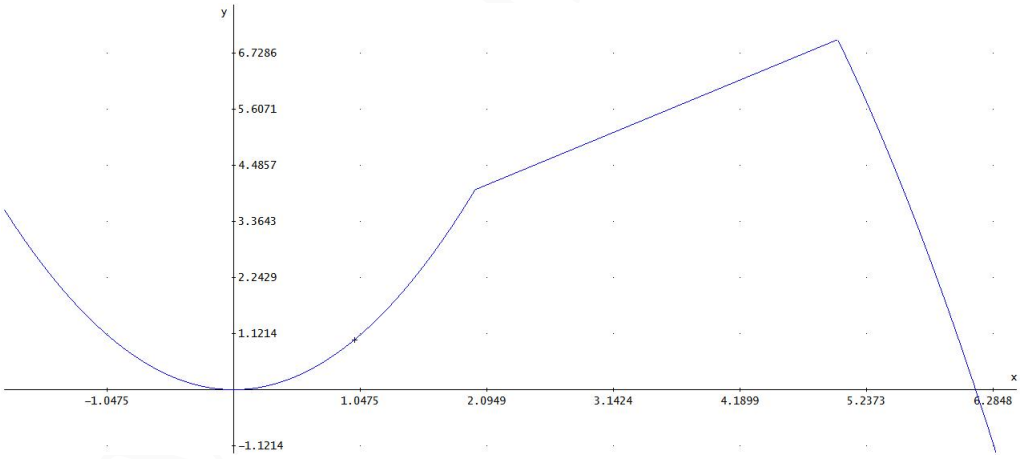
$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5} (x + a) = 5 + a$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5} (-x^2 + 5x + b) = b$$

Luego $5 + a = b \Longrightarrow a - b = -5$.

☛

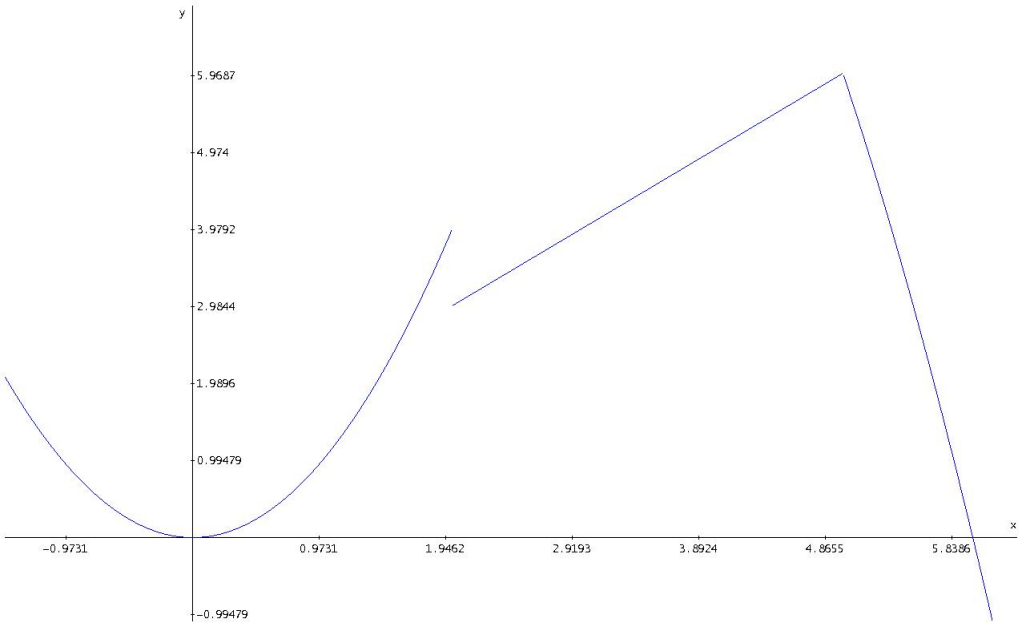
$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ a - b = -5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 7 \end{array} \right.$$



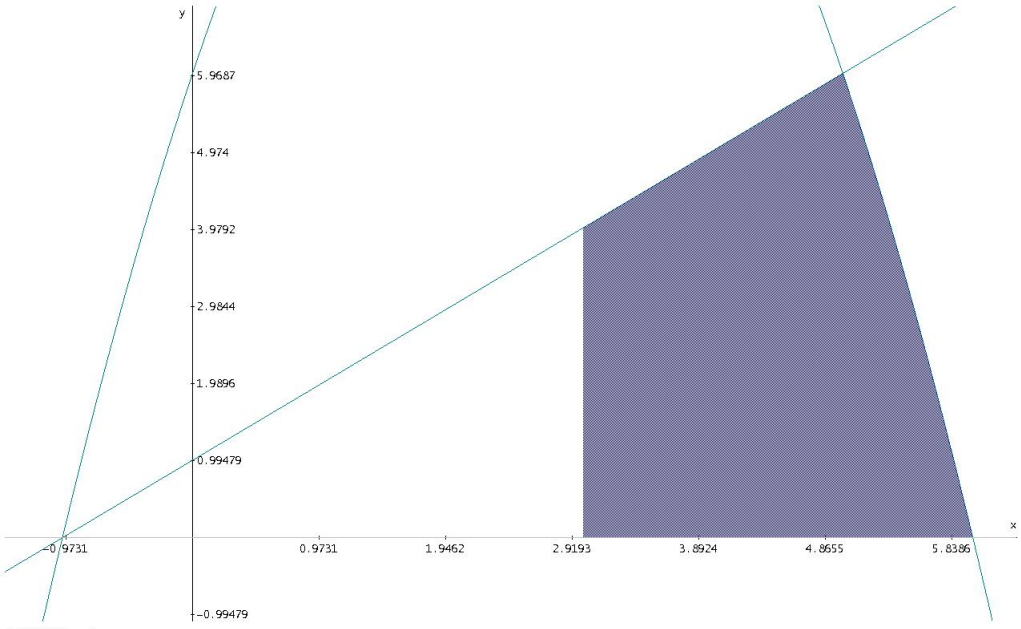
b) Si $a = 1$ y $b = 6$ tenemos:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 & \text{si} & x < 2 \\ x + 1 & \text{si} & 2 \leq x \leq 5 \\ -x^2 + 5x + 6 & \text{si} & x > 5 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x & \text{si} & x < 2 \\ 1 & \text{si} & 2 \leq x \leq 5 \\ -2x + 5 & \text{si} & x > 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(1) = 2 \\ f'(7) = -9 \end{array} \right.$$



c) Si $a = 1$ y $b = 6$



$$\int_3^6 f(x) = \int_3^5 f(x) + \int_5^6 f(x) = \int_3^5 (x-1)\,dx + \int_5^6 (-x^2+5x+6)\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2} - x\Big]_3^5 + \frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\Big]_5^6 = \frac{55}{6}$$

3.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.10.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = (x^2 - 1)^2$$

a) Determínense los extremos relativos de f.

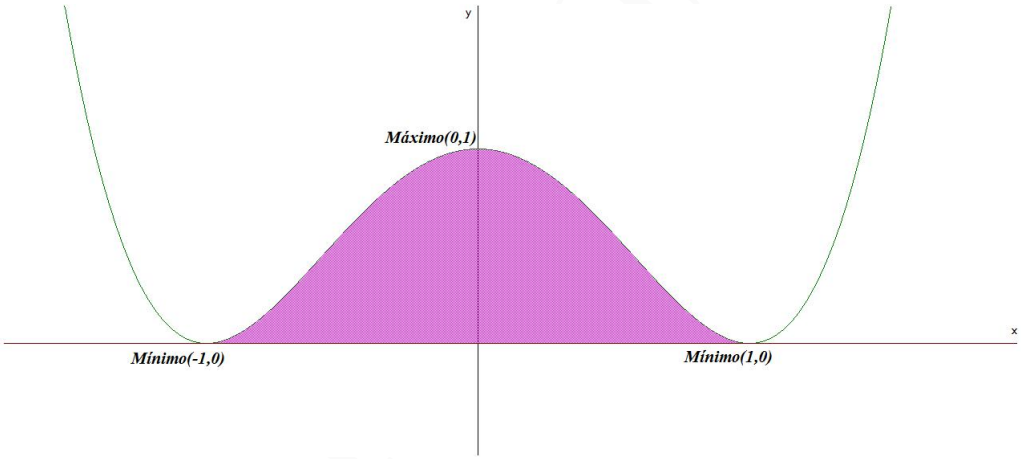
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de f y el eje OX.

Solución:

a) $f'(x) = 4x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente



La función es creciente en el intervalo $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

La función presenta un máximo en el punto $(0, 1)$ y dos mínimos en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

b) $a = 3 \Longrightarrow f(3) = 64$, $m = f'(3) = 96$. La ecuación de la recta tangente pedida es:

$$y - 64 = 96(x - 3) \Longrightarrow 96x - y - 224 = 0$$

$$S_1 = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}\ u^2$$

$$S = |S_1| = \frac{16}{15}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.10.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-a}$$

a) Determínense las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.

b) Para $a = -1$, calcúlense los valores reales de b para los cuales se verifica que $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx = 0$

Solución:

a) Para que f tenga asíntotas verticales $x^2 - x - a = 0 \Longrightarrow$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

- Si $a = -1/4$ la única asíntota vertical que hay es $x = \dfrac{1}{2}$
- Si $a < -1/4 \Longrightarrow 1 + 4a < 0 \Longrightarrow$ no hay asíntotas verticales.
- Si $a > -1/4 \Longrightarrow 1 + 4a > 0 \Longrightarrow$ hay dos asíntotas verticales:

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad x = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$$

b)

$$\int_0^b \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = \ln|x^2-x+1|\,]_0^b = \ln(b^2-b+1) = 0 \Longrightarrow$$

$$b^2 - b + 1 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

3.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.10.5 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$\begin{cases} 2x+24 & \text{si} \quad x \leq -3 \\ x^2+9 & \text{si} \quad -3 < x \leq 2 \\ -x+15 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

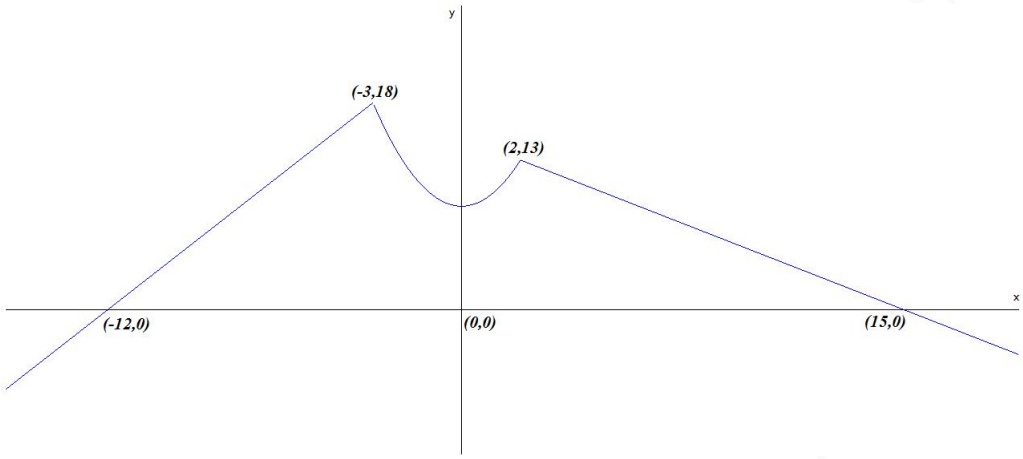
a) Represéntese gráficamente la función f.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a) La representación gráfica es:



b) En $x = 1$ la función es $f(x) = x^2 + 9 \Longrightarrow f'(x) = 2x$ tenemos $f(1) = 10$ y $m = f'(1) = 2 \Longrightarrow y - 10 = 2(x - 1) \Longrightarrow y = 2x + 8$

c) Cálculo del área:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 + \int_{-3}^{2} (x^2 + 9)\, dx + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 13 = 81 + \left[\frac{x^3}{3} + 9x\right]_{-3}^{2} + \frac{169}{2} = \frac{1333}{6}\, u^2$$

Opción B

Problema 3.10.6 *(3 puntos)* El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada está determinado por la función:

$$B(x) = -x^2 + 7x - 10$$

en la que x representa los hectolitros de leche desnatada producidos en una semana.

a) Represéntese gráficamente la función $B(x)$ con $x \geq 0$.

b) Calcúlense los hectolitros de leche desnatada que debe producir cada semana la central lechera para maximizar su beneficio. Calcúlese dicho beneficio máximo.

c) Calcúlense las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera cada semana para no incurrir en pérdidas (es decir, beneficio negativo).

Solución:

a) para ello calculamos:

☞ Puntos de corte:

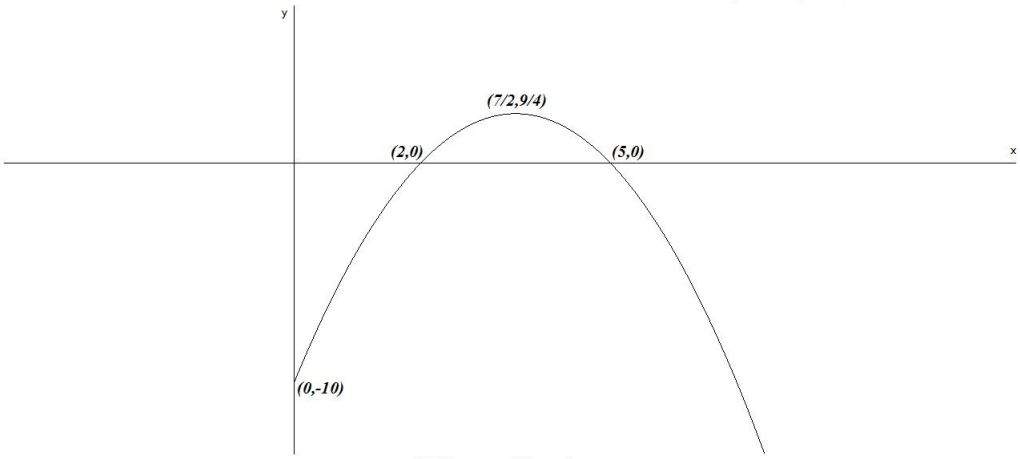
Con el eje de abscisas hacemos $x = 0 \Longrightarrow B(0) = -10 \Longrightarrow (0, -10)$

Con el eje de ordenadas hacemos $B(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5 \Longrightarrow (2, 0)$ y $(5, 0)$

☞ Máximos y mínimos:

$$B'(x) = -2x + 7 = 0 \Longrightarrow x = \frac{7}{2} \Longrightarrow \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

$$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(7/2) = -2 < 0 \Longrightarrow \text{Máximo}$$



b) El beneficio máximo es $B(7/2) = 9/4 \Longrightarrow$ 2250 euros con una producción de $7/2$ hectolitros.

c) La producción debe de estar comprendida entre 2 y 5 hectolitros semanales.

3.11. Año 2010

3.11.1. Modelo

Opción A

Problema 3.11.1 *(3 puntos)* Se considera la curva de ecuación cartesiana:

$$y = x^2$$

a) Calcúlense las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva propuesta es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva propuesta, la recta tangente a dicha curva en el punto $P(1, 1)$ y el eje OX.

Solución:

a) $y = x \Longrightarrow m = 1$:

$$y = x^2 \Longrightarrow y' = 2x = 1 \Longrightarrow 2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

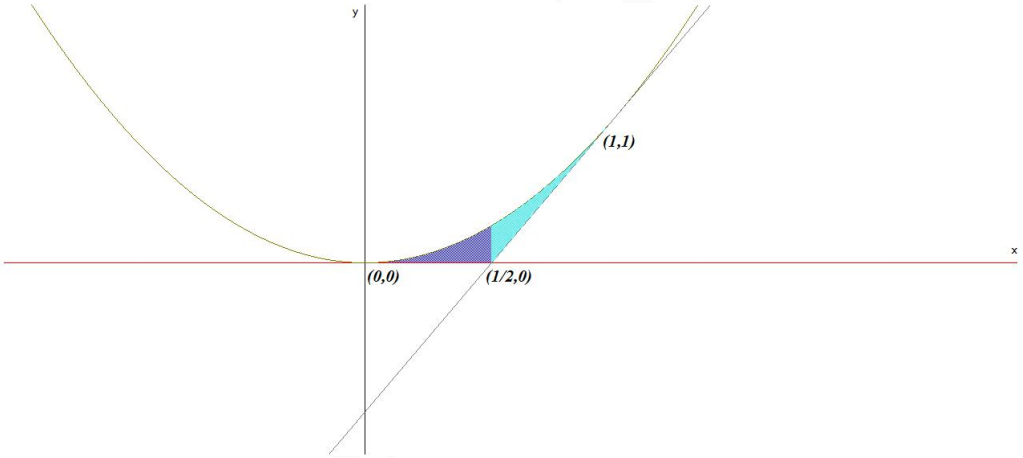
El punto es el $(a, f(a)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

b) Calculamos la recta tangente a la curva en el punto $(a, b) = (1, 1)$:

$$m = f'(1) = 2 \Longrightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Longrightarrow 2x - y - 1 = 0$$

Como se puede apreciar en la figura el área buscada consta de dos partes, por un lado será el área entre la función y el eje de abscisas en el intervalo $(0, 1/2)$ y por otra parte el área encerrada por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x - 1$ en el intervalo $(1/2, 1)$

- $$S_1 = \int_0^{1/2} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{24}\ u^2$$
- $$S_1 = \int_{1/2}^{1} (x^2 - 2x + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{24}\ u^2$$
- $$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{12}\ u^2$$



Opción B

Problema 3.11.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

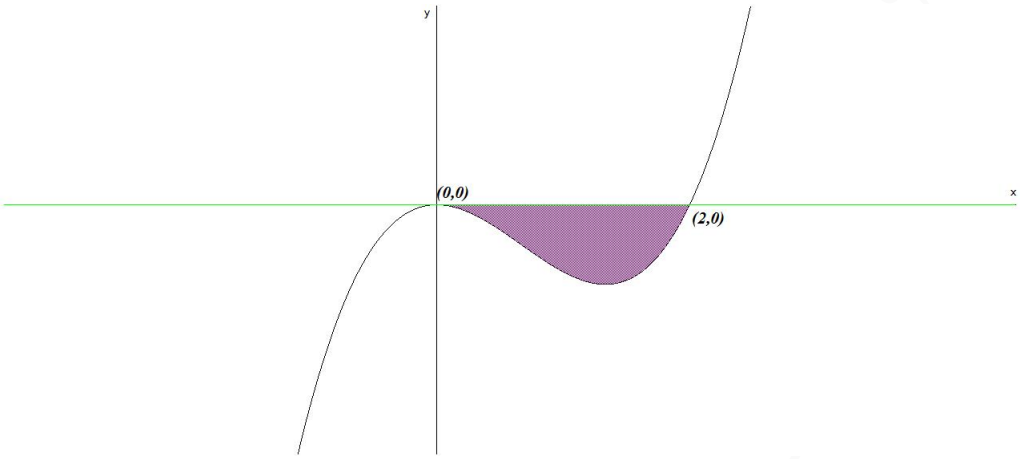
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c, \quad a, b, c \in R$$

a) ¿Qué valores deben tomar a, b y c para que la gráfica de f pase por el punto $(0, 0)$ y además tenga un máximo relativo en el punto $(1, 2)$?

b) Para $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$, determínense los puntos de corte de f con los ejes de coordenadas.

c) Para $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f y el eje OX.

Solución:



a) Tenemos:

- ☛ Pasa por el punto $(0,0) \Longrightarrow f(0) = c = 0$
- ☛ Tiene un máximo relativo en el punto $(1,2) \Longrightarrow f'(1) = 0$ y $f(1) = 2$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Longrightarrow 3a + 2b = 0, \text{ y } a + b + c = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b+c=2 \\ 3a+2b=0 \\ c=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=-4 \\ b=6 \\ c=0 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = -4x^3 + 6x^2$$

b) Tenemos que $f(x) = x^3 - 2x^2$

Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2 \Longrightarrow (0,0),\ (2,0)$.

Con el eje OY : $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0,\ (0,0)$

c) Luego los límites de integración serían los intervalos $[0,2]$:

$$F(x) = \int (x^3 - 2x^2)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3}$$

$$S = |F(2) - F(0)| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}\ u^2$$

3.11.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.11.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) Determínense su asíntotas.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales. Esbócese la gráfica de f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las rectas verticales $x = 2$, $x = 3$, la gráfica de f y la recta de ecuación $y = x + 1$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: La única posible es $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

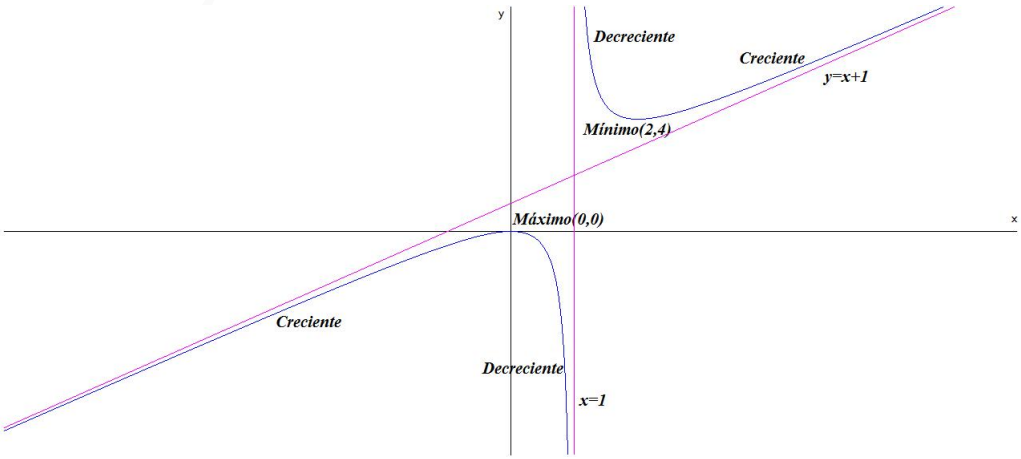
$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

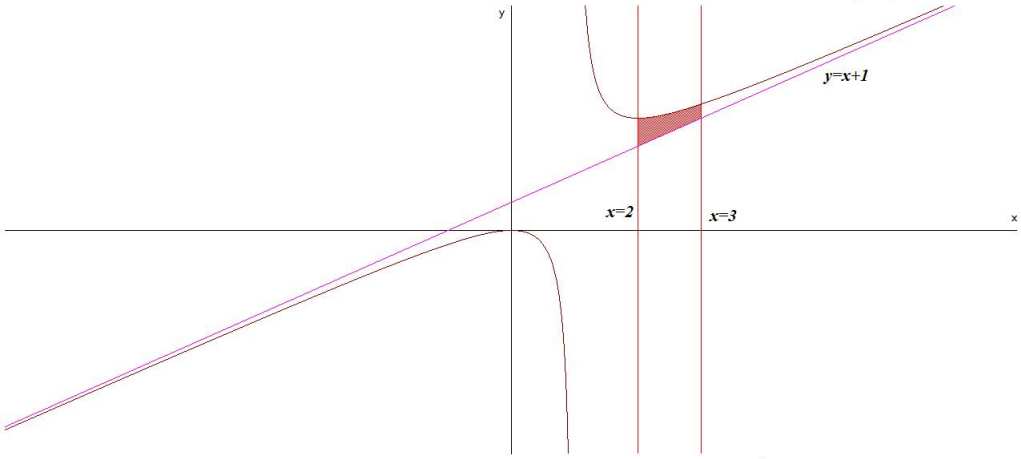
$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = 1$$

La asíntota oblicua es $y = x + 1$

b)

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = 2$$





	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, 2)$.

La función tiene un Máximo en el punto $(0, 0)$ y un Mínimo en el punto $(2, 4)$.

c)

$$S = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{x-1} - x - 1 \right) dx = \int_2^3 \frac{x^2}{x-1}\, dx = \ln|x-1|]_2^3 = \ln 2 \ u^2$$

Opción B

Problema 3.11.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + a & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{3}{bx} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcúlense los valores de a, b, para que f sea continua y derivable en todos los puntos.

b) Para $a = 6$, $b = 3/4$, determínense los puntos de corte de la gráfica f con los ejes de coordenadas.

c) Para $a = 6$, $b = 3/4$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f, el eje OX y la recta vertical $x = 2$.

Solución:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -\dfrac{3}{bx^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Tenemos:

- Continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = -2 + a, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{b} \Longrightarrow$$

$$-2 + a = \frac{3}{b} \Longrightarrow -2b + ab = 3$$

- Derivable en $x = 1$:

$$f'(1^-) = -3, \quad f'(1^+) = -\frac{3}{b} \Longrightarrow -3 = -\frac{3}{b} \Longrightarrow b = 1$$

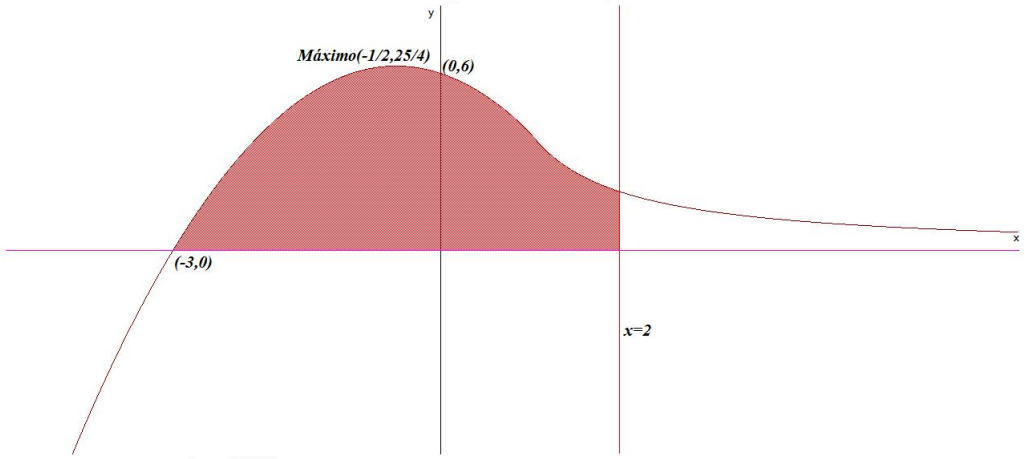
- Continua y derivable en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{c} -2b + ab = 3 \\ b = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 5 \\ b = 1 \end{array} \right.$$

b) Si $a = 6$, $b = 3/4$:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} -x^2 - x + 6 & \text{si} & x \leq 1 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si} & x > 1 \end{array} \right.$$

- Corte con el eje OY: hacemos $x = 0$, que estaría en la primera rama y tendríamos el punto $(0, 6)$.
- Corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0$ y tendríamos en la primera rama $-x^2 - x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 2$ pero esta última solución no es válida al no estar en la primera rama. Tendríamos el punto $(-3, 0)$



Para dibujar la gráfica observamos que cuando $x \longrightarrow +\infty$: $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4}{x} = 0 \Longrightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal. Si, por el contrario, cuando $x \longrightarrow -\infty$: $\lim_{x \longrightarrow -\infty} (-x^2 - x + 6) = \infty$ no habría asíntotas. Para calcular los extremos, observamos que la derivada de la segunda rama no puede ser nula y, por el contrario, la derivada de la primera rama se anularía en el punto $x = -1/2$ donde presentaría un máximo.

c)

$$S = \int_{-3}^{1} (-x^2 - x + 6)\, dx + \int_{1}^{2} \frac{4}{x}\, dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \Big]_{-3}^{1} + 4 \ln x]_1^2 = \frac{56}{3} + 4 \ln 2 \ u^2$$

3.11.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.11.5 *(3 puntos)* El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2. Calcúlense las dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.

Solución:

Llamamos x a la longitud del lado horizontal e y a la longitud del lado vertical.

$$x \cdot y = 2 \Longrightarrow y = \frac{2}{x}, \;\; p(x,y) = 2x + 2y$$

$$C(x,y) = 50(x+2y) \Longrightarrow C(x) = 50\left(x + \frac{4}{x}\right) = \frac{50(x^2+4)}{x}$$

$$C'(x) = \frac{50(x^2-4)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 2, \;\; x = -2$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
$C'(x)$	$+$	$-$	$+$
$C(x)$	creciente	decreciente	creciente

El mínimo estaría en el punto $x = 2$, es decir, el coste mínimo sería de 200 euros y correspondería a unas dimensiones de 2 metros de lado horizontal y 1 metro de lado vertical.

Opción B

Problema 3.11.6 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - a & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -3x^2 + b & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \log x + a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcúlese a, b, para que f sea continua en todos los puntos.

b) Para $a = 0$, $b = 3$, represéntese gráficamente la función f.

c) Para $a = 0$, $b = 3$, calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Nota.- La notación log representa logaritmo neperiano.

Solución:

a) En $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} (2x^2 - a) = 2 - a, \quad \lim_{x \longrightarrow -1^+} (-3x^2 + b) = -3 + b \Longrightarrow a + b = 5$$

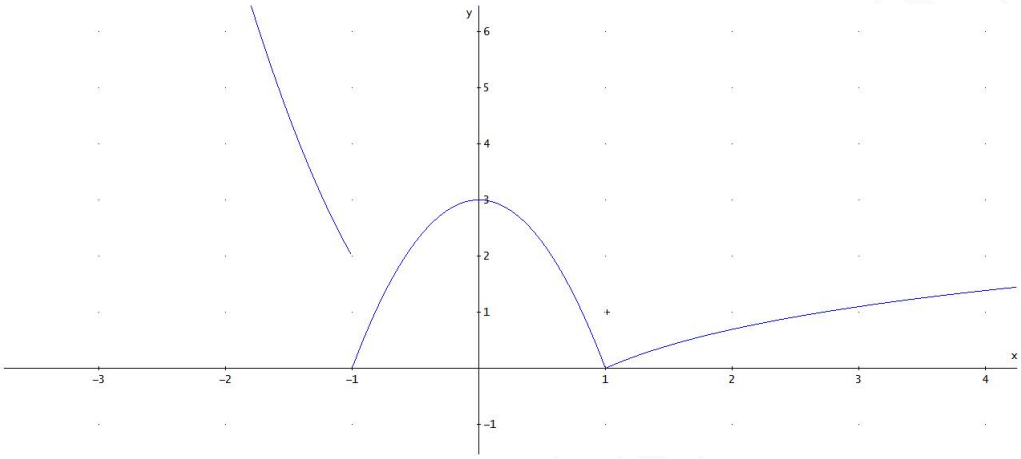
En $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} (-3x^2 + b) = -3 + b, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^+} (\log x + a) = a \Longrightarrow a - b = -3$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

b) Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -3x^2 + 3 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \log x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$



c)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)\,dx = -x^3 + 3x\Big]_{-1}^{1} = 4$$

.

3.12. Año 2011

3.12.1. Modelo

Opción A

Problema 3.12.1 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$$

a) Calcúlense a y b para que la función f tenga un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 2$

b) Para $a = b = 0$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y la recta de ecuación $y = 8x - 6$.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$.

f tenga un máximo relativo en $x = 1 \Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b = -6$

f tenga un mínimo relativo en $x = 2 \Longrightarrow f'(2) = 0 \Longrightarrow 4a + b = -24$

$$\begin{cases} 2a + b = -6 \\ 4a + b = -24 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 12 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

b) $a = b = 0 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - 6$ y $g(x) = 8x - 6$:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x^3 - 6 = 8x - 6 \Longrightarrow 2x^3 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = \pm 2$$

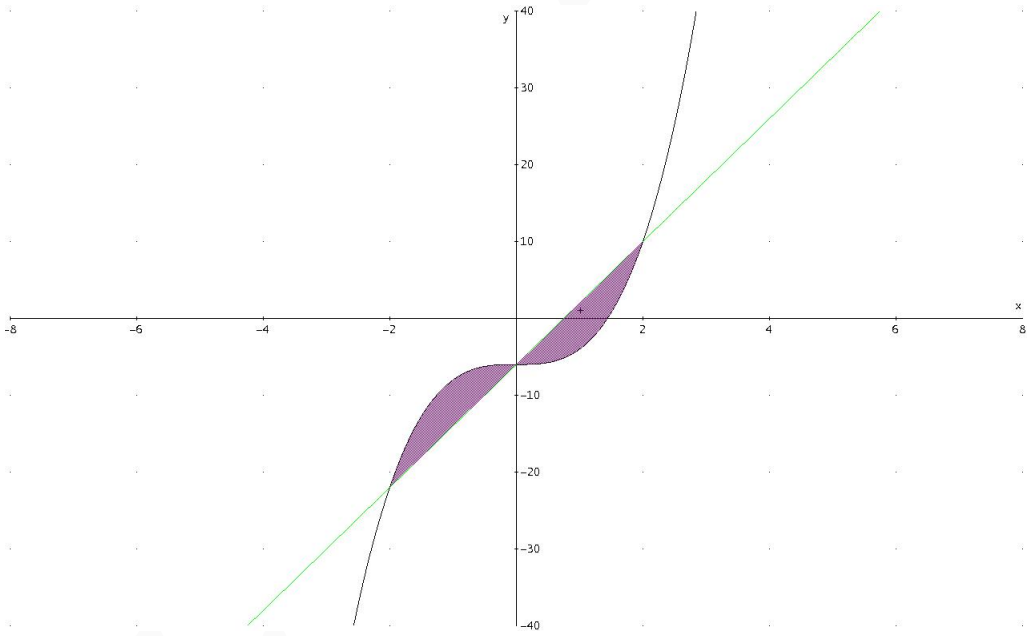
Límites de integración: $[-2, 0]$, $[0, 2]$

$$F(x) = \int (2x^3 - 8x)\, dx = \frac{x^4}{2} - 4x^2$$

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (2x^3 - 8x)\, dx = F(0) - F(-2) = 8$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} (2x^3 - 8x)\, dx = F(2) - F(0) = -8$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 16 \; u^2$$



Opción B

Problema 3.12.2 *(3 puntos)* Una empresa produce cable de fibra óptica, que vende a un precio de x euros por metro. Se estima que la venta diaria de cable (en miles de metros) se expresa en términos del precio mediante la función:

$$D(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$$

a) Obténgase la función $I(x)$ que determina los ingresos diarios de la empresa en función del precio x.

b) Calcúlese el precio x que ha de fijarse para que el ingreso diario sea máximo y calcúlese dicho ingreso máximo.

c) Determínense las asíntotas de $I(x)$ y esbócese la gráfica de la función $I(x)$.

Solución:

a)

$$I(x) = \frac{6000x}{x^2+1}$$

b)

$$I'(x) = \frac{6000(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$I'(x)$	$-$	$+$	$-$
$I(x)$	decreciente	creciente	decreciente

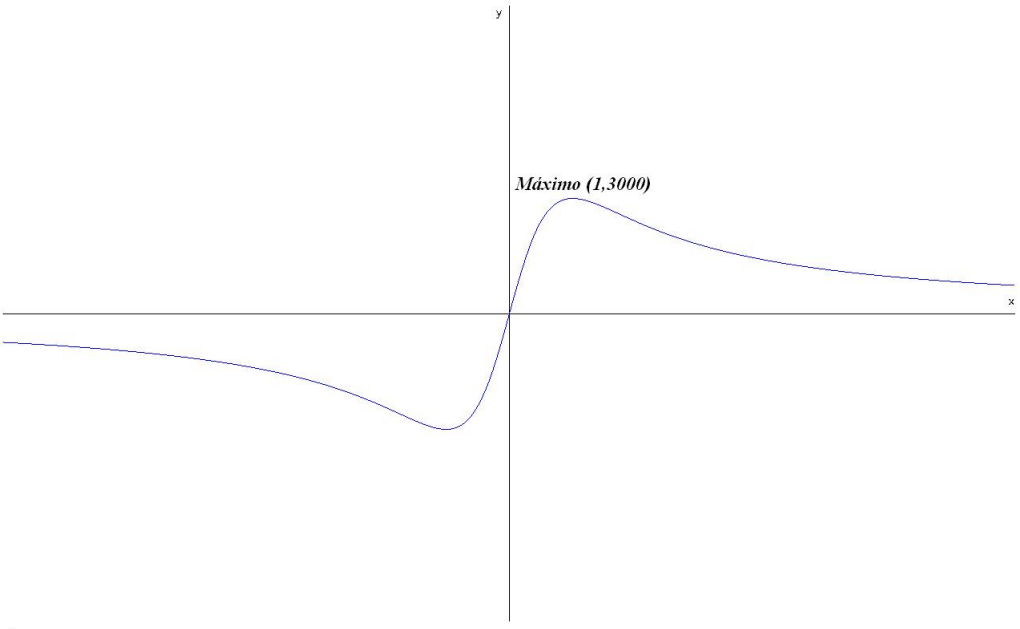
La función presenta un máximo en el punto de abscisa $x = 1$ lo que supone un ingreso máximo: $I(1) = 3000$ euros.

c) Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{6000x}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontalesa



3.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.12.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-2}$

a) Especifíquese su dominio de definición y los puntos de corte de la gráfica con los ejes coordenados. Determínense las asíntotas de f.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

c) Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = R - \{\pm\sqrt{2}\}$y el único punto de corte es $(0,0)$.

Asíntotas:

- Verticales: $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$

$$\lim_{x \longrightarrow -\sqrt{2}^-} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{-3\sqrt{2}}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\sqrt{2}^+} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{-3\sqrt{2}}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow \sqrt{2}^-} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow \sqrt{2}^+} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x}{x^2-2} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f(1) = -3$ $f'(x) = -\dfrac{3(x^2+2)}{(x^2-2)^2} \Longrightarrow f'(1) = -9$

$$y + 3 = -9(x-1) \Longrightarrow 9x + y - 6 = 0$$

c)

$$\int_2^3 \frac{3x}{x^2-2}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2-2|\Big]_2^3 = \frac{3}{2}\ln\frac{7}{2} = 1,879$$

Opción B

Problema 3.12.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{x^2-b}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) Calcúlese a, b para que f sea continua y derivable en $x = -1$

b) Para $a = 1$, $b = 3$, represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese el valor b para que $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 6$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{x^2-b}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a}{x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

Por la continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1-} \frac{a}{x} = -a$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1+} \frac{x^2-b}{4} = \frac{1-b}{4}$$

$$-a = \frac{1-b}{4} \Longrightarrow 4a - b = -1$$

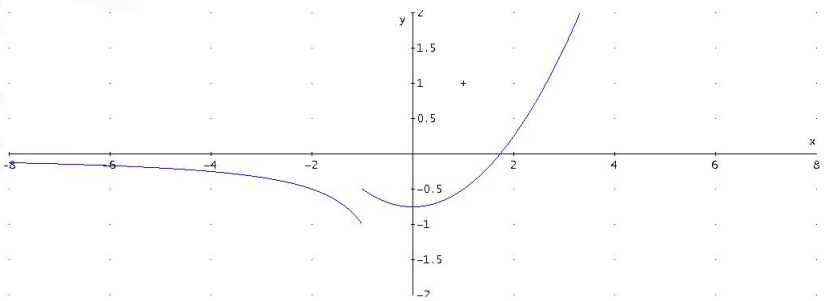
Por la derivabilidad en $x = -1$:

$$f'(-1^-) = -a, \quad f'(-1^+) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Luego $b = 3$ y $a = 1/2$.

b) Para $a = 1$, $b = 3$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{x^2-3}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$



c)

$$\int_0^3 \frac{x^2-b}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - bx\right)\Big]_0^3 = \frac{1}{4}(9-3b) = 6 \Longrightarrow b = -5$$

3.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.12.5 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

a) Determínense las asíntotas de f. Calcúlense los extremos relativos de f.

b) Represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta horizontal $y = 1$, la recta vertical $x = 1$.

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$:

- Asíntotas verticales no hay ya que el denominador no se anula nunca. Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

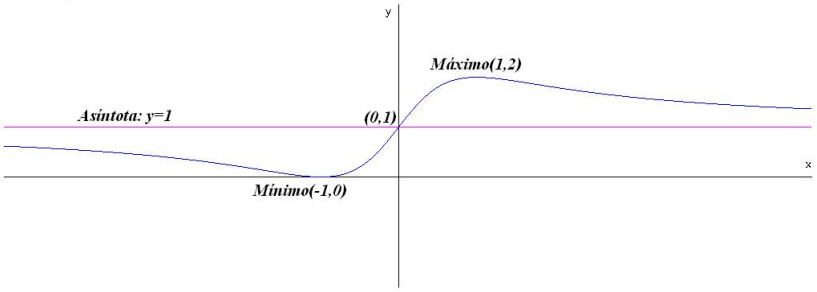
Oblicuas no hay por haber horizontalesa

- $f'(x) = -\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

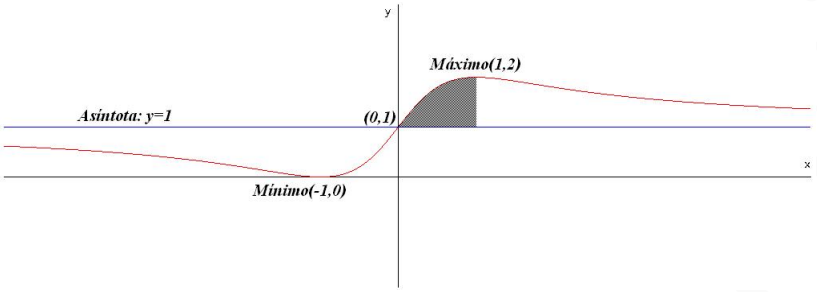
La función presenta un mínimo en el punto $(-1,0)$ y un máximo en el punto $(1,2)$.

b) La función tiene un punto de corte con los ejes en $(0,1)$:



c)

$$S = \int_0^1 \left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1\right) dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \ln|x^2+1|\Big]_0^1 = \ln 2 \ u^2$$



Opción B

Problema 3.12.6 *(3 puntos).* Se considera un rectángulo R de lados x, y.

a) Si el perímetro de R es igual a 12 m, calcúlense x, y para que el área de R sea máxima y calcúlese el valor de dicha área máxima.

b) Si el área de R es igual a 36 m^2 , calcúlense x, y para que el perímetro de R sea mínimo y calcúlese el valor de dicho perímetro mínimo.

Solución:

a) El perímetro $2x + 2y = 12 \Longrightarrow x + y = 6 \Longrightarrow y = 6 - x$. Hay que optimizar la función $S(x, y) = x \cdot y \Longrightarrow S(x) = x(6 - x) = -x^2 + 6x$:

$$S'(x) = -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$$

	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego la función presenta un máximo en $x = 3\,m$, luego $y = 3\,m$ lo que corresponde a un área de $9\,m^2$.

b) Ahora sabemos que $R = x \cdot y = 36 \Longrightarrow y = 36/x$ y queremos optimizar el perímetro $P(x, y) = 2x + 2y \Longrightarrow P(x) = 2x + 72/x$:

$$P(x) = \frac{2x^2 + 72}{x} \Longrightarrow P'(x) = \frac{2x^2 - 72}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 6$$

	$(-\infty, -6)$	$(-6, 6)$	$(6, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego la función presenta un mínimo en $x = 6\,m$ y, por tanto, $y = 6\,m$.

3.12.4. Reserva

Opción A

Problema 3.12.7 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = 2(x - 1)^2(x + 3)$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcúlense sus extremos relativos.

b) Calcúlense los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX. Esbócese la gráfica de f.

c) Calcúlese el valor del área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a)

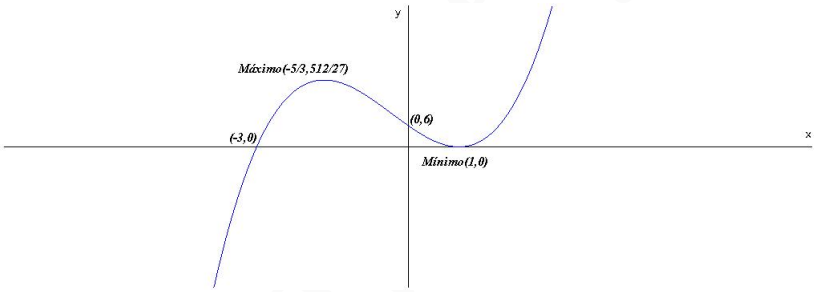
$$f'(x) = 2(x-1)(3x+5) = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -5/3$$

	$(-\infty, -5/3)$	$(-5/3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -5/3) \cup (1, \infty)$ y es decreciente en $(-5/3, 1)$.

La función presenta un máximo en el punto $(-5/3, 512/27)$ y un mínimo en $(1, 0)$.

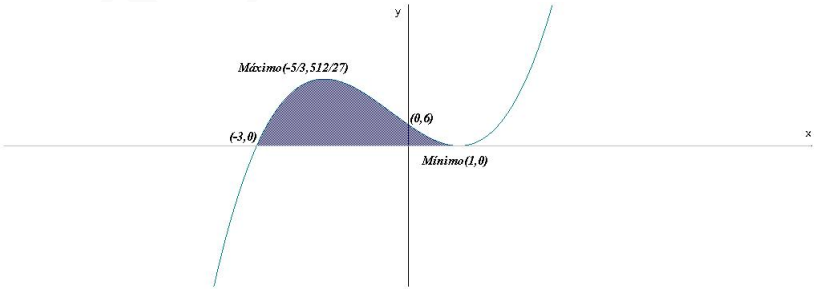
b) Para $x = 0 \Longrightarrow (0, 6)$ y para $f(x) = 0 \Longrightarrow (1, 0), \;\; (-3, 0)$



c)

$$\int_{-3}^{1} 2(x-1)^2(x+3)\,dx = \int_{-3}^{1} (2x^3 + 2x^2 - 10x + 6)\,dx =$$

$$\frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - 5x^2 + 6x \Big]_{-3}^{1} = \frac{128}{3}\,u^2$$



Opción B

Problema 3.12.8 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si} \quad x \leq 1/2 \\ bx + c & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases}$$

Calcúlense los valores de a, b, c para que f satisfaga todas las condiciones siguientes:

- $a > 0$
- La función f es continua y derivable en $x = 1/2$.
- El valor del área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = -2$, $x = 0$, es igual a $32/3$.

Solución:

- Por la continuidad en $x = 1/2$:

$$\lim_{x \longrightarrow (1/2)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow (1/2)^-} ax^2 = \frac{a}{4}$$

$$\lim_{x \longrightarrow (1/2)^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow (1/2)^+} (bx + c) = \frac{b}{2} + c$$

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{2} + c \Longrightarrow a - 2b - 4c = 0$$

- Por la derivabilidad en $x = 1/2$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si} \quad x \leq 1/2 \\ b & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'((1/2)^-) = a \\ f'((1/2)^+) = b \end{cases} \Longrightarrow a = b$$

- Por el área:

$$\int_{-2}^{0} ax^2 \, dx = \frac{ax^3}{3}\Big]_{-2}^{0} = \frac{8a}{3} = \frac{32}{3} \Longrightarrow a = 4$$

Luego $a = 4$, $b = 4$ y $c = -1$.

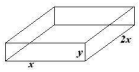
3.13. Año 2012

3.13.1. Modelo

Opción A

Problema 3.13.1 *(3 puntos)* Una empresa de productos de limpieza fabrica cajas de cartón con tapa, para comercializar un determinado tipo de detergente. Las cajas son prismas rectos de 9000 cm^3 de volumen y base rectangular de largo igual al doble de su anchura. Calcúlense las dimensiones en centímetros (largo, anchura, altura) que ha de tener cada caja para que la superficie de cartón empleada en su fabricación sea mínima.

Solución:



$$V = 2x^2 y = 9000 \Longrightarrow y = \frac{4500}{x^2}$$

$$S(x, y) = 4x^2 + 6xy \Longrightarrow S(x) = 4x^2 + \frac{27000}{x} = \frac{4x^3 + 27000}{x}$$

$$S'(x) = \frac{8x^3 - 27000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 15$$

Comprobamos que es un mínimo por la segunda derivada

$$S''(x) = \frac{8(x^3 + 6750)}{x^3} \Longrightarrow S''(15) = 24 > 0$$

Luego se trata de un mínimo en $x = 15$. Las cajas tendrán de dimensiones: $15\,cm$ de ancho, $30\,cm$ de largo y $20\,cm$ de alto.

Opción B

Problema 3.13.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 3 - x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Calcúlense a, b y c, para que la función f sea continua en todos los puntos y derivable en $x = 0$.

b) Para $a = 0$, calcúlense b, c, para que la función f sea continua en todos los puntos y calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

c) Para $a = b = 1$, $c = 2$, calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

Solución:

a) f continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = c \Longrightarrow c = 2$$

f continua en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 9a + 3b + c, \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 0 \Longrightarrow 9a + 3b + c = 0$$

f derivable en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ -1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 2, \quad f'(0^+) = b \Longrightarrow b = 2$$

$$\begin{cases} c = 2 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -8/9 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

b) Si $a = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ bx + c & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 3 - x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

2; www.yoquieroaprobar.es

f continua en $x = 0$:

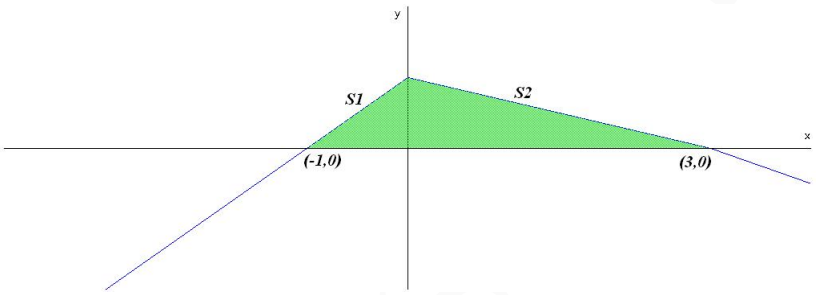
$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = c \Longrightarrow c = 2$$

f continua en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 3b + c, \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 0 \Longrightarrow 3b + c = 0$$

Luego $b = -2/3$ y $c = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} & x < 0 \\ -2/3x + 2 & \text{si} & 0 \leq x \leq 3 \\ 3 - x & \text{si} & x > 3 \end{cases}$$



$$S_1 = \int_{-1}^{0} (2x + 2)\, dx = x^2 + 2x\Big]_{-1}^{0} = 1$$

$$S_2 = \int_{0}^{3} (-\frac{2}{3}x + 2)\, dx = -\frac{x^2}{3} + 2x\Big]_{0}^{3} = 3$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4 \ u^2$$

c) Si $a = b = 1$, $c = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} & x < 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{si} & 0 \leq x \leq 3 \\ 3 - x & \text{si} & x > 3 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} (2x + 2)\, dx + \int_{0}^{3} (x^2 + x + 2)\, dx =$$

$$x^2 + 2x\Big]_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{0}^{3} = 1 + \frac{39}{2} = \frac{41}{2}$$

3.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.13.3 *(3 puntos)* Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en una finca, produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca, las cepas producen de media 0,01 kg menos de uva cada una. Determínese el número de cepas que se deben añadir a las existentes para que la producción de uvas de la finca sea máxima.

Solución:

x: Nº de copas que debemos añadir. La producción vendrá dada por la siguiente función:

$$f(x) = (16 - 0,01x)(1200 + x) = -0,01x^2 + 4x + 19200$$

$$f'(x) = -0,02x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 200$$

$$f''(x) = -0,02 \Longrightarrow f''(200) < 0 \Longrightarrow \text{en } x = 200 \text{ hay un máximo}$$

Luego hay que añadir 200 cepas.

Opción B

Problema 3.13.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad y la derivabilidad de la función f.

b) Represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, el eje OX, el eje OY, y la recta $x = 2$.

Solución:

a) f continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

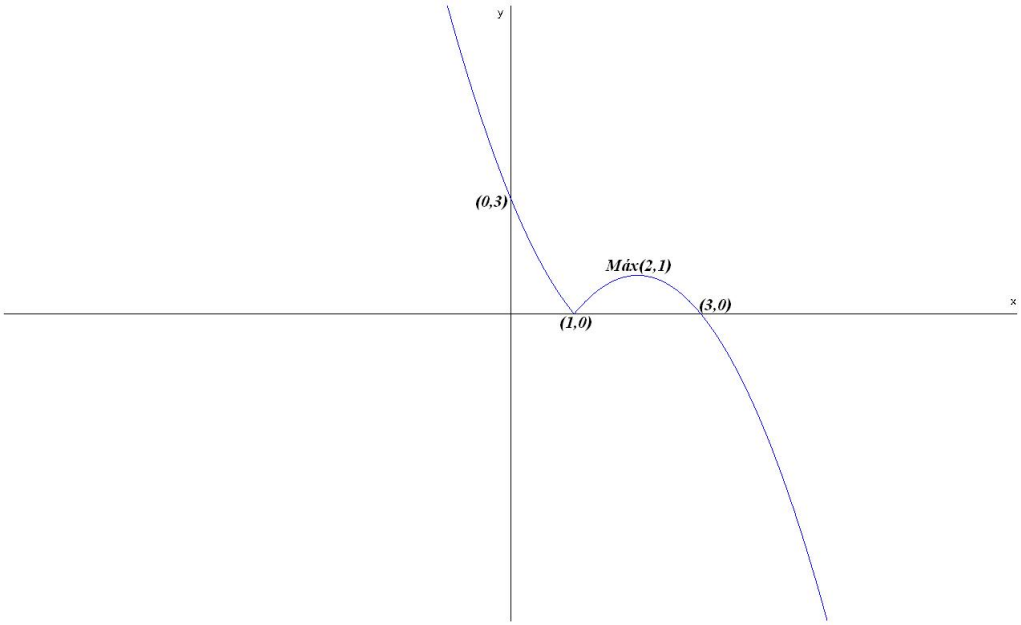
f no es derivable en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -2x + 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = 2 \end{cases} \Longrightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

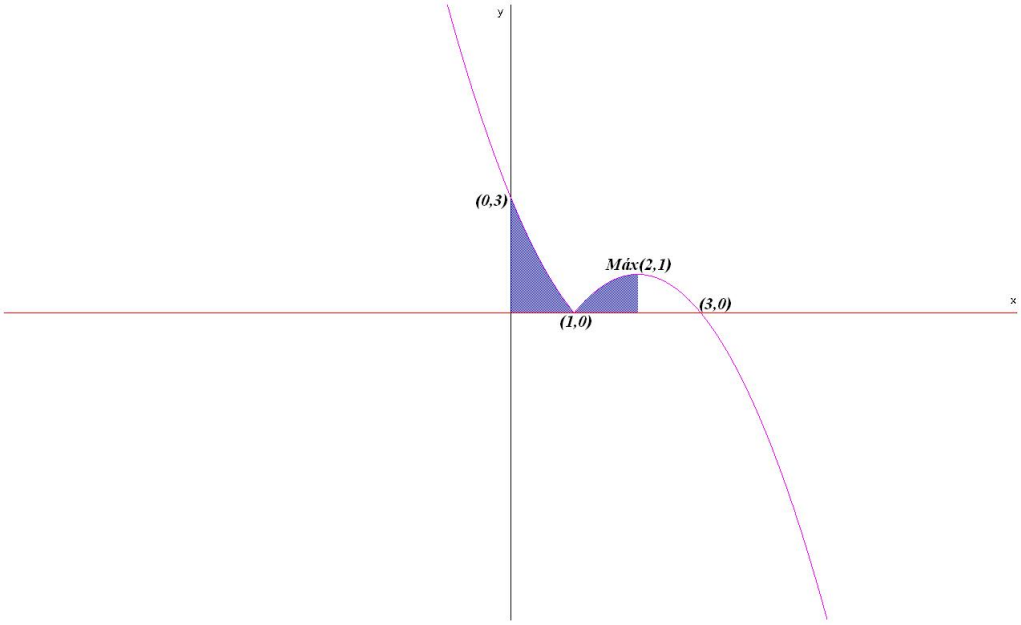
Luego f no es derivable en $x = 1$.

b) Representación:

www.matesat.net



c) Área:



$$S_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \Big]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \Big]_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \ u^2$$

3.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.13.5 *(3 puntos)*) Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{4-2x}{x^2}$.

a) Determínense los máximos y mínimos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) Hállense los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de f.

c) Determínense las asíntotas y los puntos de corte con los ejes. Esbócese la gráfica de f.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2x-8}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = 4$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y es decreciente en el intervalo $(0, 4)$.

Hoy un mínimo local en el punto $(4, -1)$.

b)

$$f''(x) = \frac{24-4x}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = 6$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 6)$	$(6, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa	convexa	cóncava

La función es convexa en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (0, 6)$ y es cóncava en el intervalo $(6, \infty)$.

Hay un punto de inflexión en el punto $(6, -2/9)$.

c) ☛ Puntos de corte: Con el eje de ordenadas no hay y con el eje de abscisas $4 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 2$, se trata del punto $(2, 0)$.

☛ Asíntotas:

a) Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{4-2x}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

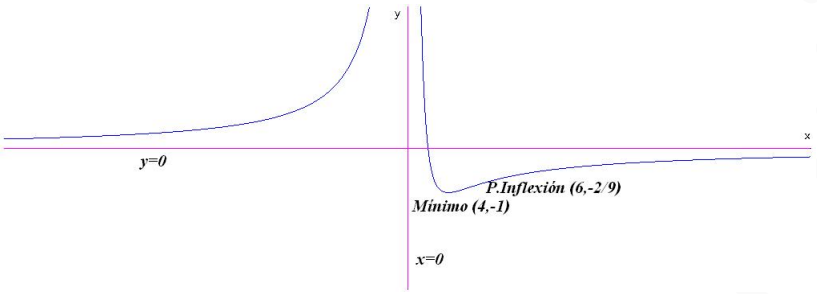
$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{4-2x}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

b) Verticales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{4-2x}{x^2} = 0$$

c) Oblicuas no hay por haber horizontales.

d) Representación gráfica:



Opción B

Problema 3.13.6 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 - \frac{b}{x}$$

a) Hállense los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$ tenga como ecuación $y = 3x - 2$.

b) Hállense los valores de a y b para que la función f tenga en (1,0) un punto de inflexión.

c) Hállense los valores de a y b de manera que f no tenga asíntotas y $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - \frac{b}{x},\ \ f'(x) = 2ax + \frac{b}{x^2},\ \ f''(x) = 2a - \frac{2b}{x^3}$$

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1 \Longrightarrow a - b = 1 \\ f'(1) = 3 \Longrightarrow 2a + b = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 4/3 \\ b = 1/3 \end{array} \right.$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 0 \Longrightarrow a - b = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 2a - 2b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow a = b$$

c) Para que no tenga asíntotas: $b = 0$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 ax^2 dx = \frac{ax^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{a}{3} = 1 \Longrightarrow a = 3$$

3.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.13.7 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x(2x-1)}{x-1}$.

a) Determínense las asíntotas de f . Calcúlense los extremos relativos de f .

b) Represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}\,dx$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x(2x-1)}{x^2-x} = 2$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x(2x-1)}{x-1} - 2x\right) = 1$$

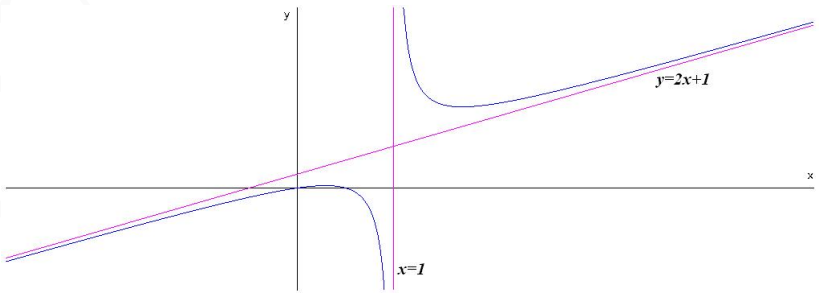
$$y = 2x + 1$$

Extremos:

$$f'(x) = \frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \Longrightarrow \begin{cases} f''(x_1) > 0 \Longrightarrow \text{en } x_1 \text{ hay un mínimo} \\ f''(x_2) < 0 \Longrightarrow \text{en } x_1 \text{ hay un máximo} \end{cases}$$

b) Representación gráfica:



c) $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}\,dx = \int_2^5 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx = \ln|x^2-x|\Big]_2^5 = \ln 10.$

Opción B

Problema 3.13.8 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcúlense los valores de a y b para los que la función f es continua y derivable.

b) Para $a = 0$ y $b = 1$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en los puntos en los que dicha tangente es paralela a la recta $y - 8x = 1$.

c) Sea g la función real de variable real definida por $g(x) = 1 - 2x^2$. Para $a = 1$ y $b = 0$, calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f y la gráfica de g.

Solución:

a) f continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax+b) = a+b$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^3 - x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \Longrightarrow a + b = 1$$

f no es derivable en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = a \\ f'(1^+) = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = 1$$

Luego $a = 1$ y $b = 0$.

b) $y - 8x = 1 \Longrightarrow y = 8x - 1 \Longrightarrow m = 8$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Las soluciones estarán cuando $x > 1 \Longrightarrow 3x^2 - 2x = 8 \Longrightarrow x = 2$ y $x = -4/3$, esta última solución no es válida, y el punto de tangencia es $(2, f(2)) = (2, 5)$. La ecuación de la recta tangente a la función f es $y - 5 = 8(x-2)$.

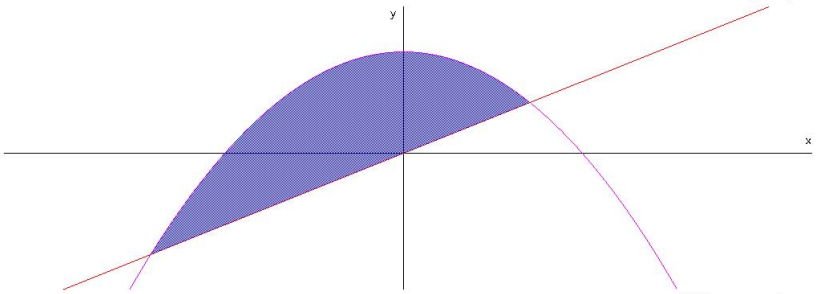
c)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 = 1 - 2x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^3 + x^2 = 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1, \ x = 1/2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x = 0, \ x = -1 & \text{si} \quad x > 1 \text{ No valen} \end{cases}$$

d)



$$S = \int_{-1}^{1/2} (-2x^2 - x + 1)dx)\, dx = -\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\Big]_{-1}^{1/2} = \frac{9}{8}\ u^2$$

3.14. Año 2013

3.14.1. Modelo

Opción A

Problema 3.14.1 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5}{x + 1}$

a) Hállense sus asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

b) Hállense los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) ☛ Verticales: $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{3x^2 - 5}{x + 1} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{3x^2 - 5}{x + 1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5}{x + 1} = +\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx - n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5}{x^2 + x} = 3$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{x + 1} - 3x\right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-3x - 5}{x + 1} = -3$$

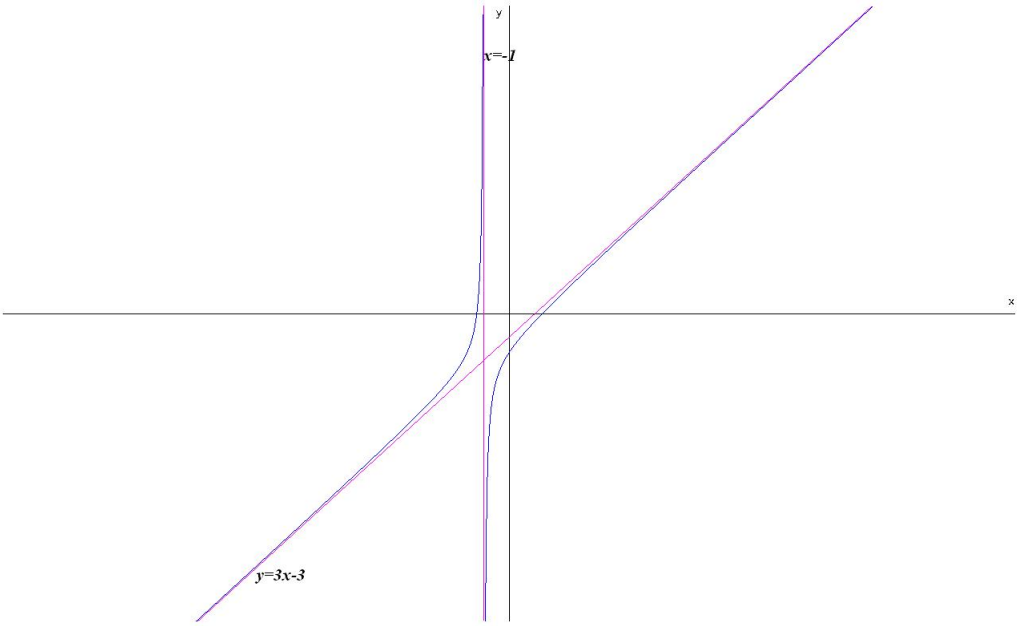
$$y = 3x - 3$$

b) ☛ Puntos de corte:
Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -5)$
Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (-\sqrt{5/3}, 0)$ y $(\sqrt{5/3}, 0)$

☛ Curvatura:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 5(x+1)^2 \neq 0 \Longrightarrow \text{ no hay extremos}$$

Como $f'(x) > 0$ siempre podemos asegurar que la función es creciente en todo el dominio $R - \{0\}$.



Problema 3.14.2 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 5 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de la función en R.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (-x^2 - 3x + 5) = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} x^2 = 1$$

Luego la función es continua en $x = 1$ por ser iguales los límites laterales y además $f(1) = 1$.

b)

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (-x^2 - 3x + 5)\,dx + \int_1^2 x^2\,dx =$$

$$\frac{-x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 5x\Big]_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{19}{6} + \frac{7}{3} = \frac{11}{2}$$

Opción B

Problema 3.14.3 *(2 puntos)* El coste de fabricación de una serie de hornos microondas viene dado por la función $C(x) = x^2 + 40x + 30000$; donde x representa el número de hornos fabricados. Supongamos que cada horno se vende por 490 euros.

a) Determínese la función de beneficios.

b) ¿Cuántos microondas deben fabricarse y venderse para que los beneficios sean máximos? ¿Cuál es el importe de esos beneficios máximos?

Solución:

a) Si llamamos x al número de hornos vendidos la función beneficio será:

$$B(x) = 490x - (x^2 + 40x + 30000) = -x^2 + 450x - 30000$$

b)

$$B'(x) = -2x + 450 = 0 \Longrightarrow x = 225$$

$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(225) = -2 < 0 \Longrightarrow$ en $x = 225$ hay un máximo. El beneficio máximo se obtiene al venderse 225 hornos y sería de $B(225) = 20625$ euros.

3.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.14.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 3e^{-2x}$

a) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 0$

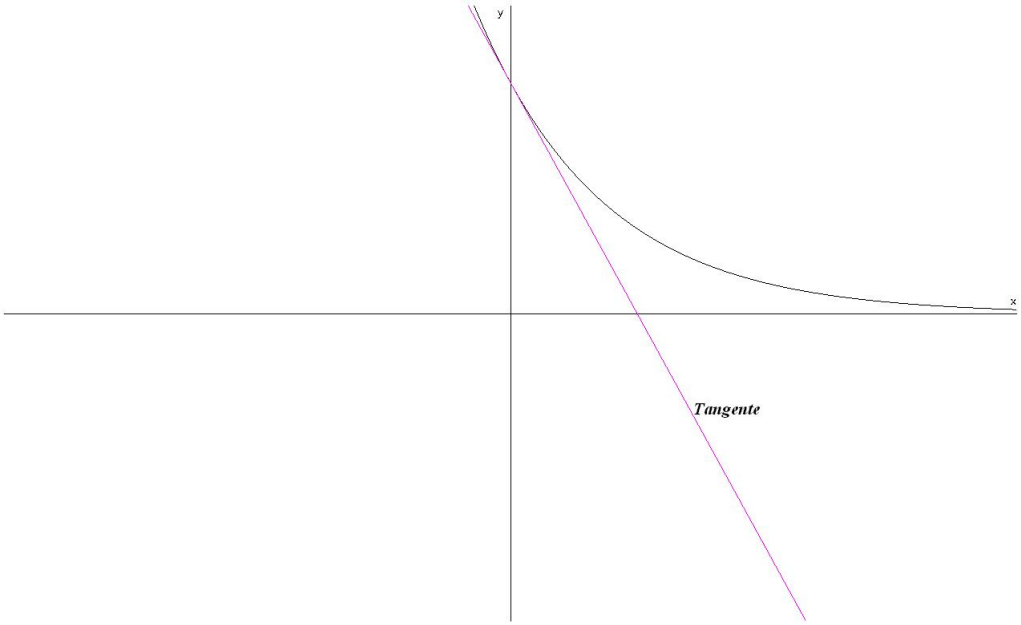
b) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f, las rectas $x = 0$, $x = 0,5$ y el eje de abscisas.

Solución:

a) $f'(x) = -6e^{-2x} \Longrightarrow f'(0) = -6$ y $f(0) = 3 \Longrightarrow$

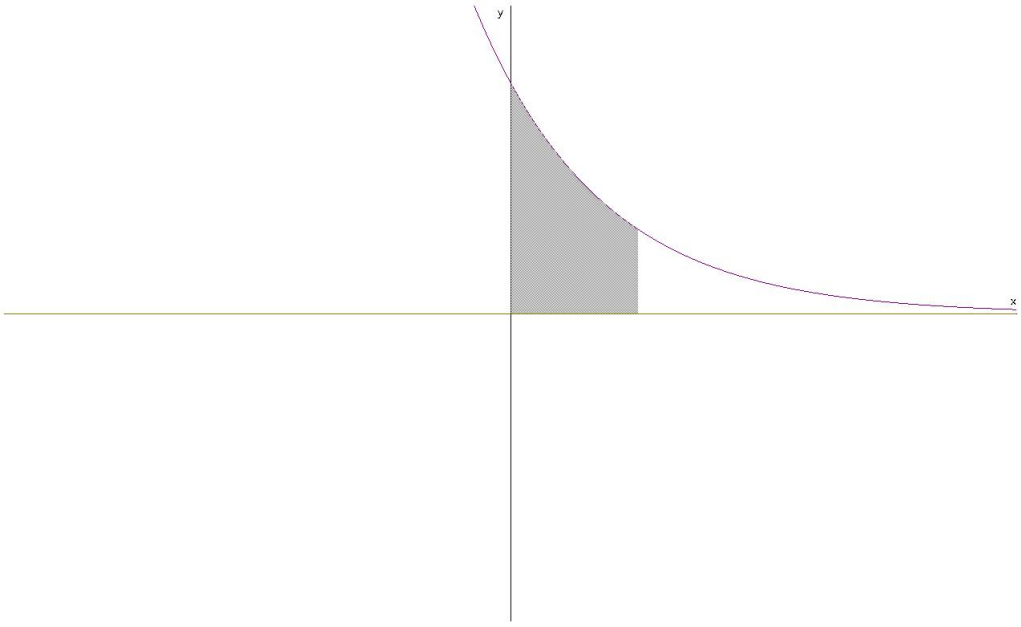
$$y - 3 = -6x \Longrightarrow 6x + y - 3 = 0$$

www.matematicas.net



b)

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} (3e^{-2x}\,dx = -\frac{3}{2}e^{-2x}\Big]_0^{1/2} = \frac{3(e-1)}{2e} = 0,948\,u^2$$



Opción B

Problema 3.14.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{a+3x}{x^2-4x+3} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f en $x = 0$ para los distintos valores del parámetro a.

b) Determínense las asíntotas de la función.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \frac{a}{3}$$

Luego la función es continua en $x = 0$ si $a/3 = 1 \Longrightarrow a = 3$.
Si $a \neq 3$ hay una discontinuidad no evitable:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x)$$

b) Asíntotas:
Si $x < 0$:

- ☛ Verticales: No hay
- ☛ Horizontales: $\lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0 \Longrightarrow y = 0$
- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales

Si $x \geq 0$:

- ☛ Verticales: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1, \ \ x = 3$
  - $x = 1$: pueden ocurrir que $a = -3$ o $a \neq -3$.
    - $a = -3$: No hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{-3+3x}{x^2-4x+3} = \frac{3}{2}$$

    - $a \neq -3$: Si hay asíntota

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \pm\infty$$

  - Si $x = 3$ pueden ocurrir que $a = -9$ o $a \neq -9$.
    - Si $a = -9$: No hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{-9+3x}{x^2-4x+3} = \frac{3}{2}$$

www.yoquieroaprobar.es

◦ Si $a \neq -9$: Si hay asíntota:

$$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \pm\infty$$

☛ Horizontales: $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{a+3x}{x^2-4x+3} = 0 \Longrightarrow y = 0$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales

Problema 3.14.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x(5-x)^2$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Determínense los intervalos de concavidad y convexidad de f.

Solución:

a) $f'(x) = (x-5)(3x-5) = 0 \Longrightarrow x = 5, \;\; x = \dfrac{5}{3}$

	$(-\infty, 5/3)$	$(5/3, 5)$	$(5, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

f es creciente en el intervalo $(-\infty, 5/3) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en $(5/3, 5)$. Presenta un máximo en $x = 5/3$ y un mínimo en $x = 5$.

b) $f''(x) = 6x - 20 = 0 \Longrightarrow x = 10/3$

	$(-\infty, 10/3)$	$(10/3, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

f es convexa en el intervalo $(-\infty, 10/3)$ y cóncava en $(5, +\infty)$. Presenta un punto de inflexión en $x = 10/3$.

3.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.14.7 *(2 puntos)* Calcúlese la derivada de cada una de las funciones siguientes ($\ln x$ denota al logaritmo neperiano de x):

a) $f(x) = (x^3 + 2x) \cdot \ln x$

b) $g(x) = \dfrac{2x}{x-1} \cdot e^{x^2}$

Solución:

a) $f'(x) = (3x^2+2)\ln x + \dfrac{x^3+2x}{x} = (3x^2+2)\ln x + x^2 + 2$

b) $g'(x) = \dfrac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} \cdot e^{x^2} + \dfrac{2x}{x-1} \cdot e^{x^2} \cdot 2x = \dfrac{2e^{x^2}(2x^3-2x^2-1)}{(x-1)^2}$

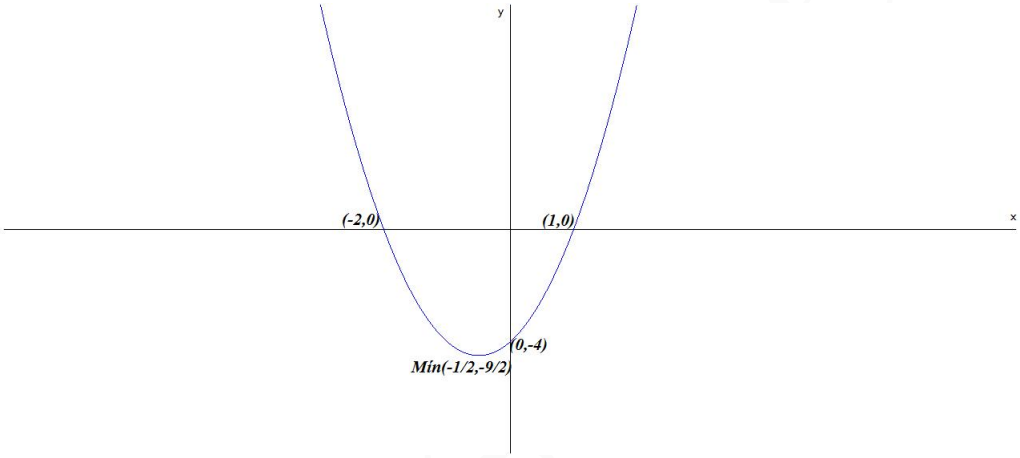
Problema 3.14.8 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$

a) Represéntense gráficamente f.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

a) Puntos de corte: $(0, -4)$, $(1, 0)$ y $(-2, 0)$; $f'(x) = 4x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$, $f''(x) = 4 \Longrightarrow f''(-1/2) = 4 > 0 \Longrightarrow (-1/2, -9/2)$ es un mínimo. Su gráfica:



b) $x^2 - 6x = x - 10 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5$.

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (2x^2 + 2x - 4)\,dx = \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x$$

$$S_1 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-2) = -9$$

$$S = |S_1| = 9\ u^2$$

Opción B

Problema 3.14.9 *(2 puntos)* Supongamos que el consumo eléctrico de un país (expresado en gigavatios) entre las 0 y las 8 horas viene dado por la función $c(x) = 10x - x^2 + 16$, con $0 \leq x \leq 8$.

a) Determínese cuáles son el consumo máximo y el mínimo en ese intervalo de tiempo, y los instantes en los que se alcanzan.

b) Calcúlese $\dfrac{\int_0^8 c(x)\,dx}{8}$ (que representa el consumo medio a lo largo de esas 8 horas).

Solución:

a) $c'(x) = -2x + 10 = 0 \Longrightarrow x = 5$ como $c''(x) = -2 \Longrightarrow c''(5) = -2 < 0 \Longrightarrow (5, 41)$ es un máximo local. A partir de este punto la función empieza a decrecer hasta llegar al punto de corte de la función $c(x)$ con la recta $x = 8$ sería $(8, 32)$ y con la recta $x = 0$ sería $(0, 16)$. El consumo mínimo es a las 0 horas con 16 gigavatios y el máximo a las 5 horas con 41 gigavatios.

b) $\dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^8 c(x)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^8 (10x - x^2 + 16)dx = \frac{1}{8}\left(5x^2 - \frac{x^3}{3} + 16x\right)\Big]_0^8 = \frac{104}{3}$

3.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.14.10 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$

a) Hállense las asíntotas de f.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales:

$$x = 3 \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{27}{0^+}\right] = +\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{27}{0^-}\right] = -\infty$$

$$x = -3 \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow -3^+} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{-27}{0^-}\right] = +\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow -3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{-27}{0^+}\right] = -\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-9} = \infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3}{x^3-9x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x\right) = 0$$

b)

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-27)}{(x^2-9)^2} \Longrightarrow f'(1) = -\frac{13}{32}; \;\; f(1) = -\frac{1}{8}$$

La recta tangente en su ecuación punto pendiente es:

$$y + \frac{1}{8} = -\frac{13}{32}(x-1)$$

Opción B

Problema 3.14.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \\ \ln(2x-1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcúlese a para que la función f sea continua en todo R:

b) Represéntese gráficamente la función para el caso $a = 3$.

Nota: lnx denota al logaritmo neperiano del número x.
Solución:

a)

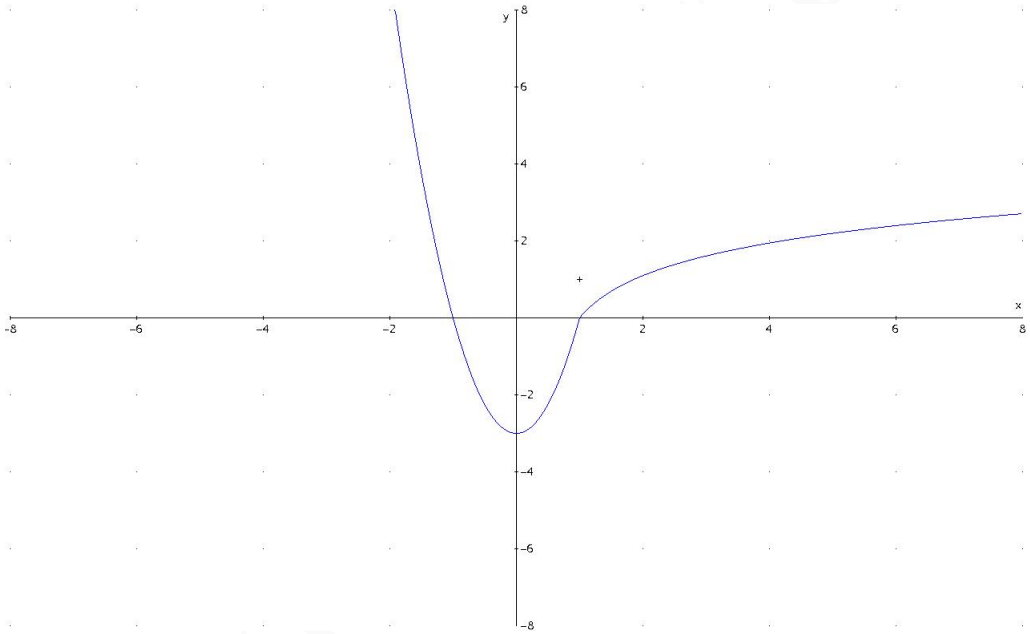
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 - 3) = a - 3$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \ln(2x - 1) = 0$$

Luego la función es continua en $x = 1$ si $a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln(2x - 1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



Problema 3.14.12 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

a) Determínense los extremos relativos de f.

b) Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

f es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(-2, 2)$. Presenta un máximo en $(2, 1/4)$ y un mínimo en $(-2, -1/4)$.

b)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\sqrt{\frac{5}{4}}$$

3.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.14.13 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

a) Hállense sus asíntotas horizontales, verticales y oblicuas si es que existen.

b) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Asíntotas

- Verticales: $x = -1$
  $\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^2+3}{x+1} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$; $\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^2+3}{x+1} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$
- Horizontales: No hay. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x+1} = \infty$
- Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x - 1$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+3}{x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2+3}{x+1} - x\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-x+3}{x+1} = -1$$

b) Los puntos de corte con eje OX no hay y con el OY es el $(0,3)$.

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -3$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$ y decreciente en $(-3,-1)\cup(-1,1)$. La función tiene un máximo local en $x = -3$ y un mínimo local en $x = 1$.

Problema 3.14.14 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 30 & \text{si} \quad x < 2 \\ 3x^2 + 2x + b & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

a) Determínese el valor de b para que la función sea continua en R.

b) Para $b = 0$, calcúlese $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-}(4x^3 - 30) = 2$; $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^+}(3x^2 + 2x + b) = 16 + b \Longrightarrow b = -14$

b)

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 (4x^3 - 30)\,dx + \int_2^3 (3x^2 + 2x)\,dx =$$
$$x^4 - 30x\Big]_0^2 + x^3 + x^2\Big]_2^3 = -20$$

Opción B

Problema 3.14.15 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como sus límites cuando x tiende a infinito y a menos infinito.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus máximos y sus mínimos locales.

Solución:

a) El único punto de corte es el (0,0).

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty}(2x^3 - 9x^2 + 12x) = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow \infty}(2x^3 - 9x^2 + 12x) = \infty$$

b) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = 2$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ y decreciente en $(1, 2)$. La función tiene un máximo local en $(1, 5)$ y un mínimo local en $(2, 4)$.

3.15. Año 2014

3.15.1. Modelo

Opción A

Problema 3.15.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{x+2} - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Determínense las asíntotas de la función y los puntos de corte con los ejes.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Solución:

a) Asíntotas:

- Si $x \leq 0$: En $x = -2$ hay una vertical

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{-x-6}{x+2} = \left[\frac{-4}{0^-}\right] = +\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{-x-6}{x+2} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

En $y = -1$ hay una horizontal

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-x-6}{x+2} = -1$$

- Si $x > 0$: No hay una verticales y en $y = 0$ hay una horizontal

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Puntos de Corte:

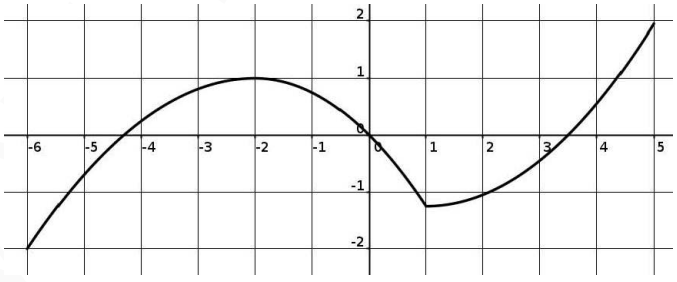
- Si $x \leq 0 \Longrightarrow (0,-3)\ \ (-6,0)$
- Si $x > 0 \Longrightarrow$ No hay puntos de corte

b)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{-4}{x+2} - 1\right) dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x+1}\,dx =$$
$$-4\ln|x+2| - x]_{-1}^{0} + \ln|x+1|]_{0}^{1} = -1 - 3\ln 2$$

Opción B

Problema 3.15.2 *(2 puntos)* La figura representa la gráfica de una función $f : [-6;5] \longrightarrow \mathbb{R}$. Contéstese razonadamente a las preguntas planteadas.



a) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

b) ¿En qué puntos del intervalo $[-6,5]$ f alcanza sus extremos relativos?

c) ¿Cuál es el signo de $\displaystyle\int_{2}^{4} f(x)dx$?

d) ¿En qué valores de $(-6;5)$ f no es derivable?

Solución:

a) $f'(x) > 0$ en $(-6,-2) \cup (1,5)$.

b) En $x = -2$ hay un máximo relativo, en $x = 1$ hay un mínimo relativo, en $x = -6$ hay un mínimo absoluto y en $x = 5$ hay un máximo absoluto.

c) Es claramente negativo: El área encerrada por la curva y el eje de abscisas entre $x = 2$ y $x \simeq 3,5$ es mayor que el área encerrada por la curva y el eje de abscisas entre $x \simeq 3,5$ y $x = 4$.

d) La función f no es derivable en $x = 1$, en este punto la función hace un pico, y en él se podrían trazar infinitas tangentes. Las derivadas laterales no coincidirían.

Problema 3.15.3 *(2 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determínense los valores de a y b que hacen que f sea continua en $x = 1$ y que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

b) Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 4$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 3$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (2x^2 - ax + 1) = 3 - a \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 3x - b) = 2 - b \end{cases} \Longrightarrow a - b = 1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right) - b = \frac{1}{4} \Longrightarrow b = 2$$

Luego $a = 3$ y $b = 2$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -2x + 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Tenemos $f(3) = -4$, el punto de tangencia es $(3,-4)$. La pendiente de la recta tangente en este punto es $m = f'(3) = -3$. La ecuación de la recta en su forma punto pendiente es:

$$y + 4 = -3(x - 3)$$

3.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.15.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si} \quad x<1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ x+b & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

a) Determínense a y b para que f sea continua en todo R.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x=1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x+a) = 1+a$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (x^2-2) = -1$$

$$1+a=-1 \Longrightarrow a=-2$$

Para que f sea continua en $x=3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^-} (x^2-2) = 7$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} (x+b) = 3+b$$

$$7=3+b \Longrightarrow b=4$$

b)

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(x^2-2\right)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}-2x\right]_1^3 = \frac{14}{3}$$

Opción B

Problema 3.15.5 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x) = 4x^3-3x^2-2x$.

a) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 12x^2-6x-2$:

$$b=f(1)=-1, \quad m=f'(1)=4, \Longrightarrow \; y+1=4(x-1)$$

.

b) $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (4x^3-3x^2-2x)dx = \left. x^4-x^3-x^2\right]_2^3 = 41$

Problema 3.15.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Determínense el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Solución:

a) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x-2} = \infty$$

Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x + 2$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = 2$$

b) $Dom(f) = R - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 4$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 2) \cup (2, 4)$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $(4, 8)$ y un máximo relativo en el punto $(0, 0)$.

3.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.15.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

a) Hállense sus asíntotas horizontales y oblicuas, si es que existen.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

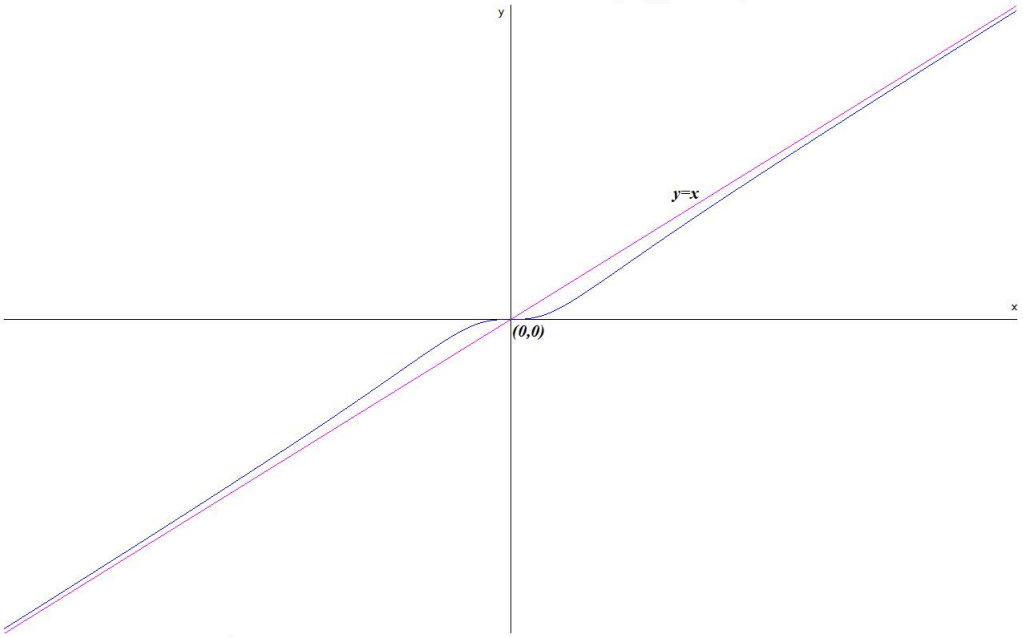
a) Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales: No hay, $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = \infty$
- Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = 0$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$, pero en este punto no hay un extremo dado que $f'(x) > 0$ en el dominio de la función y, por tanto, es creciente en R y no tiene extremos.



Opción B

Problema 3.15.8 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{mx - 6}{x - 3} & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

a) Determínese para qué valores del parámetro m la función f es continua en $x = 0$.

b) Calcúlese la recta tangente a la gráfica de f en $x = 5$.

Solución:

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{mx-6}{x-3} = 2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} (x^2+2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Longrightarrow f$ continua en $x = 0$ independientemente del valor que tome el parámetro real m.

b) En $x = 5$ $b = f(5) = 27 \Longrightarrow$ el punto de tangencia es el $(5, 27)$. $f'(x) = 2x \Longrightarrow$ la pendiente de la recta es $m = f'(5) = 10$. La recta tangente es: $y - 27 = 10(x - 5)$ en su ecuación punto pendiente.

Problema 3.15.9 *(2 puntos)* Para la función real de variable real $f(x) = \dfrac{(5x+7)^{10}}{2}$

a) Calcúlese su función derivada.

b) Calcúlese $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 25(5x+7)^9$

b) $\displaystyle\int \frac{(5x+7)^{10}}{2}\,dx = \frac{(5x+7)^{11}}{110} + C$

3.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.15.10 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x(x-2)}$$

a) Determínense las asíntotas de f.

b) Estúdiese si la función f es creciente o decreciente en un entorno de $x = 4$.

Solución:

a) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = 1$$

Oblicuas: No hay por haber horizontales

www.musat.net

b)

$$f'(x) = \frac{2(x-3)(2x-3)}{(x^2(x-2)^2)} = 0 \Longrightarrow x = 3/2, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, 3/2)$	$(3/2, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en un entorno de $x = 4$.
Otra manera sería: f es creciente en un entorno $U(x)$ de un punto x si $\forall x_1, x_2 \in U(x)/x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Elegimos dos puntos próximos a $x = 4$ sean $x_1 = 3,9$ por la izquierda y $x_2 = 4,1$ por la derecha. Calculamos $f(x_1) = 0,1093117408$ y $f(x_2) = 0,1405342624$. Como $x_1 < x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ la función es creciente.

Problema 3.15.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 2e^{x+1}$.

a) Esbócese la gráfica de la función f.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

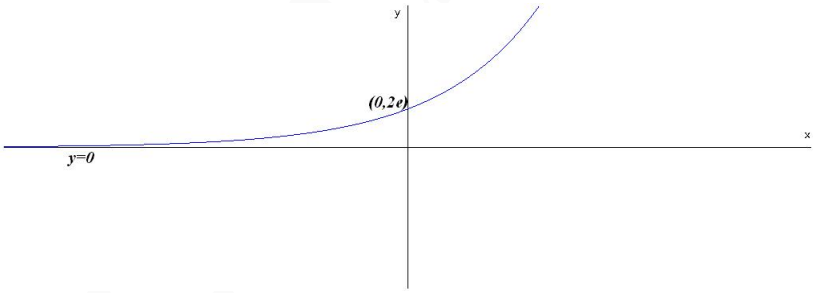
Solución:

a) A grandes rasgos, el único punto de corte es $(0, 2e)$ y no tiene asíntotas verticales y si tiene una asíntota horizontal en $y = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} 2e^{x+1} = 0$$

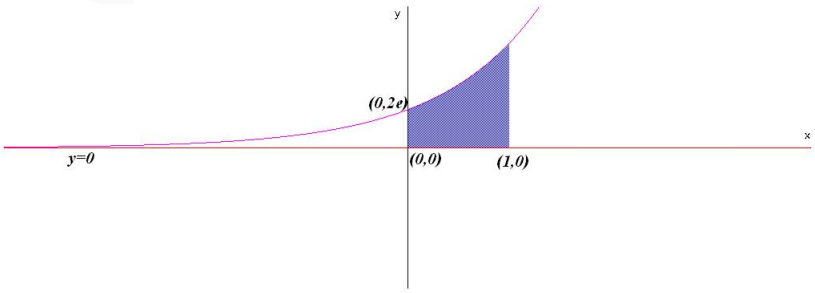
.

$$f'(x) = 2e^{x+1} > 0 \Longrightarrow f \text{ siempre creciente}$$



b)

$$S = \int_0^1 2e^{x+1}\, dx = 2e^{x+1}\Big]_0^1 = 2e(e-1)\ u^2$$



Opción B

Problema 3.15.12 *(2 puntos)* función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{\lambda x}{4 + x^2}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real λ para que la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$ sea paralela a la recta $y = 2x - 3$.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{a(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2};\ \ f'(-1) = 2 \Longrightarrow \lambda = \frac{50}{3}$$

b)

$$\int_0^2 \frac{x}{4 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|4 + x^2|\Big]_0^2 = \frac{\ln 2}{2}$$

3.15.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.15.13 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} & \text{si} \quad x < 1 \\ (x-1)^3 + a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Determínese el valor de la constante a para que sea una función continua en todo su dominio.

b) Para $a = 0$, calcúlese el valor de la integral $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} = 4$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} (x-1)^3 + a = a$$

Luego $a = 4$

b) con $a = 0$

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 (x-1)^3\,dx = \frac{(x-1)^4}{4}\Big]_1^5 = 64$$

Opción B

Problema 3.15.14 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$,contéstese razonadamente a las preguntas:

a) Calcúlense su dominio de definición, los puntos de corte con los ejes, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Hállense las asíntotas, si las tuviere, y esbócese la gráfica de la función f.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = R - \{2\}$, los puntos de corte serán $(0, -1/2)$ con el eje de ordenadas y $(-1, 0)$ con el de abscisas.
$f'(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos relativos. Por otra parte el numerador es siempre negativo y el denominador es siempre positivo, luego $f'(x) < 0$ en todo el dominio de la función y, por tanto, f es decreciente en $R - \{2\}$.

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 2$

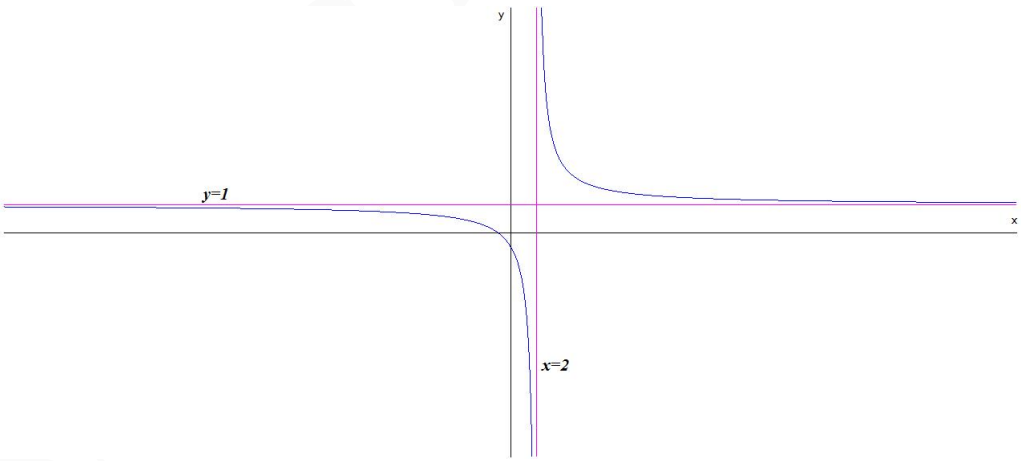
$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.



Problema 3.15.15 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = x^3 - ax + 1$

a) Determínese el valor de a para que la función tenga un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 2$.

b) Para el caso en el que $a = 48$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 5$.

Solución:

a) Si $f'(x) = 3x^2 - a \Longrightarrow f'(2) = 12 - a = 0 \Longrightarrow a = 12$
$f(x) = x^3 - 12x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función tiene un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 2$

b) $a = 48 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 48x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 48$:
$b = f(5) = -114$ y $m = f'(5) = 27 \Longrightarrow y + 114 = 27(x - 5)$

3.16. Año 2015

3.16.1. Modelo

Opción A

Problema 3.16.1 *(2 puntos)*

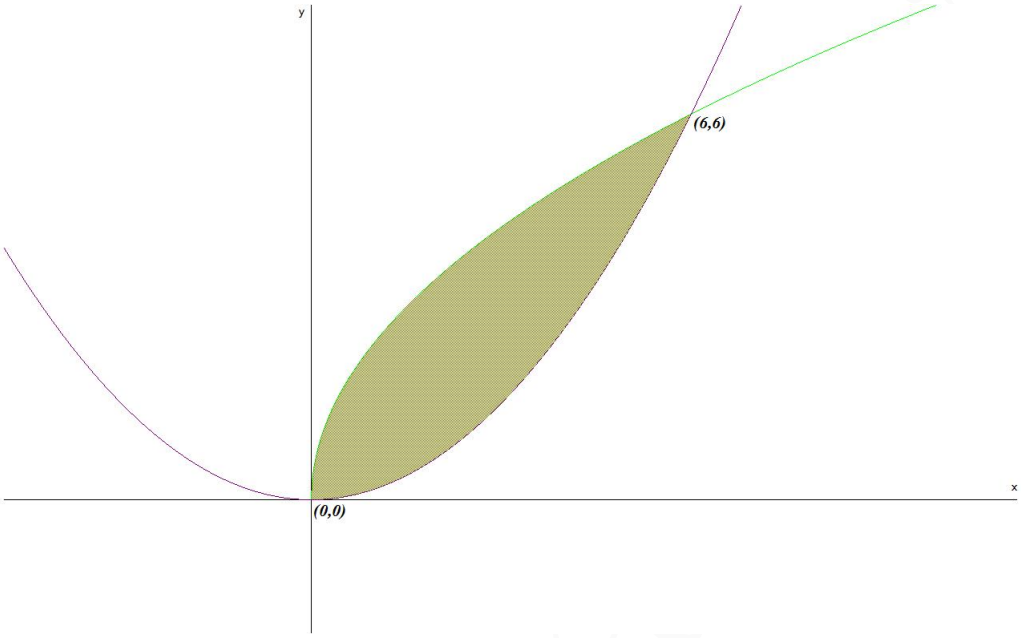
a) Dibújese, de manera esquemática, la región acotada del plano limitada por las gráficas de las curvas

$$y = \sqrt{6x}; \quad y = \frac{x^2}{6}$$

b) Calcúlese el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución:

a) $\sqrt{6x} = \dfrac{x^2}{6} \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 6$



b) $\displaystyle\int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right) dx = \left.\frac{12x\sqrt{6x} - x^3}{18}\right]_0^6 = 12\ u^2$

Opción B

Problema 3.16.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = 24x - 15x^2 + 2x^3 + 2$$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Hállense sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = 4.$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$, y es decreciente en el intervalo $(1, 4)$.

b) En $x = 1$ hay un máximo relativo, en $x = 4$ hay un mínimo relativo.
$f''(x) = 12x - 30 = 0 \Longrightarrow x = 5/2$ y $f'''(x) = 12 \neq 0 \Longrightarrow f$ tiene un punto de inflexión en $x = 5/2$.

Problema 3.16.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1,5$.

Solución:

a) Asíntotas

- Verticales: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ ó $x = 3$
  Si $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

  Si $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\dfrac{27}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\dfrac{27}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = 3$$

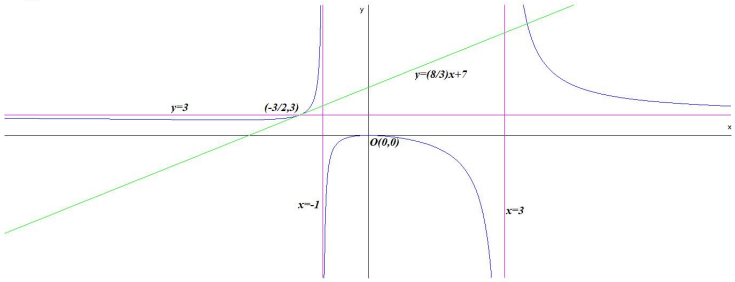
- Oblicuas no hay por haber horizontales.

b) $f(-1,5) = 3$ y $m = f'(-1,5) = 8/3$

$$f'(x) = -\frac{6x(x+3)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

La ecuación de la recta en su forma punto pendiente es:

$$y - 3 = 8/3(x + 3/2) \Longrightarrow y = \frac{8}{3}x + 7$$



3.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.16.4 *(2 puntos)* Sabiendo que la derivada de una función real de variable real f es

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

a) Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(1, 4)$.

Solución:

a) $f(x) = \int (3x^2 + 2x)\, dx = x^3 + x^2 + C$:

$$f(1) = 4 \Longrightarrow 2 + C = 4 \Longrightarrow C = 2 \Longrightarrow f(x) = x^3 + x^2 + 2$$

b)

$$b = f(1) = 4, \quad m = f'(1) = 5, \Longrightarrow y - 4 = 5(x - 1)$$

.

Problema 3.16.5 *(2 puntos)* Sean las funciones reales de variable real

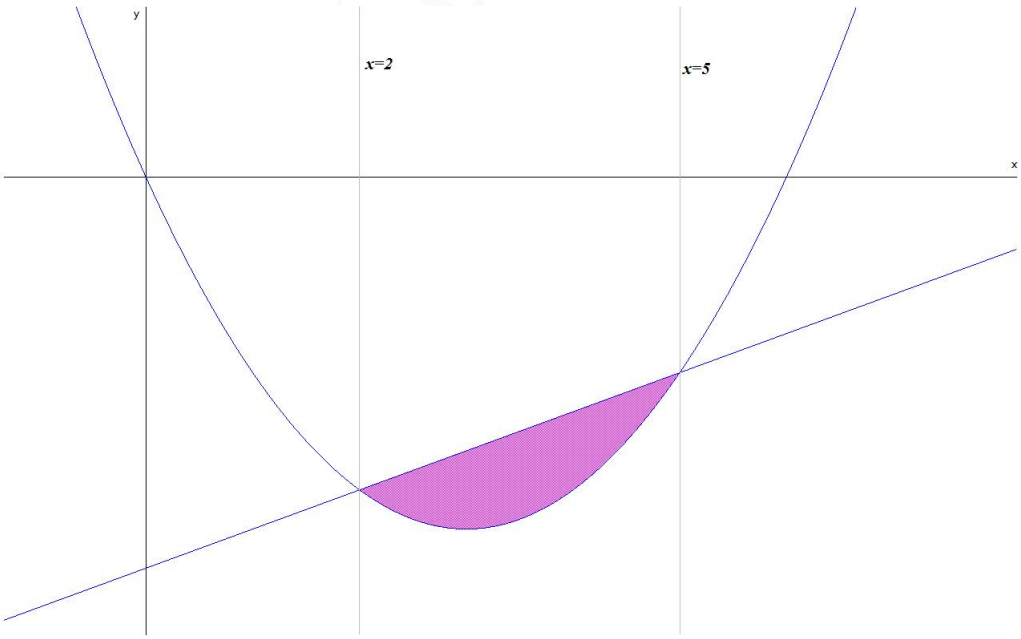
$$f(x) = x^2 - 6x, \quad g(x) = x - 10$$

a) Represéntense gráficamente las funciones f y g.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones f y g.

Solución:

a) Gráfica:



b) $x^2 - 6x = x - 10 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5$.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^2 - 7x + 10)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x$$

$$S_1 = \int_2^5 (f(x) - g(x))\, dx = F(5) - F(2) = -\frac{9}{2}$$

$$S = |S_1| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.16.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & \text{si} \quad x < 2 \\ 3x + m & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

a) Calcúlese el valor del parámetro real m para que la función f sea continua en $x = 2$.

b) Calcúlese $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = -4$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (3x + m) = 6 + m$$

$$6 + m = -4 \Longrightarrow m = -10$$

b)

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} (x + m) = \infty$$

ubsectionOrdinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.16.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{x - 1}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a, sabiendo que la función alcanza un extremo relativo en $x = -1$. Compruébese que se trata de un máximo.

b) Para $a = 1$, calcúlese $\int_{-1}^{0} (x - 1) f(x) dx$.

Solución:

a)

b) $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-a}{(x-1)^2}$, $f'(-1) = 0 \Longrightarrow a = 3$:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego en $x = -1$ hay un máximo.

c) con $a = 1$:

$$\int_{-1}^{0} (x^2+1)\,dx = \left.\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} = \frac{4}{3}$$

Problema 3.16.8 *(2 puntos)* Se sabe que la derivada de cierta función real de variable real f es $f'(x) = x^2(x^2-2x-15)$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) Determínense los extremos relativos de f, indicando si se trata de máximos o mínimos relativos.

Solución:

a) $x^2(x^2-2x-15) = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = -3, \;\; x = 5$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,5)$	$(5,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

En $x = 0$ $f'(x)$ no cambia de signo y pasa de decrecer a decrecer.
La función es creciente en el intervalo: $(-\infty,-3) \cup (5,\infty)$ y decreciente en $(-3,5)$.

b) La función presenta un máximo en $x = -3$ y un mínimo en $x = 5$.

Opción B

Problema 3.16.9 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 + a & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ bx + 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Determínense los valores que deben tomar los parámetros reales a y b para que f sea continua en toda la recta real.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

a) $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} (x^2+a) = a \end{array}\right. \Longrightarrow a = -1.$

$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} (x^2+a) = 4+a \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} (bx+1) = 2b+1 \end{array}\right. \Longrightarrow 4+a = 2b+1 \Longrightarrow a-2b = -3.$

$\left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ a-2b = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 1 \end{array}\right. .$

b) En $x = -1$ $b = f(-1) = 0 \Longrightarrow$ el punto de tangencia es el $(-1, 0)$. $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2} \Longrightarrow$ la pendiente de la recta es $m = f'(-1) = -1/2$. La recta tangente es: $y = -\dfrac{1}{2}(x+1)$ en su ecuación punto pendiente.

3.16.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.16.10 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 4x^3 - ax^2 - ax + 2$, $a \in R$.

a) Determínese el valor del parámetro real a para que la función alcance un extremo relativo en $x = 1/2$. Compruébese que se trata de un mínimo.

b) Para $a = 2$, calcúlese el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 12x^2 - 2ax - a$:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - a - a = 0 \Longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

$f''(x) = 24x^2 - 2a = 24x - 3$:

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - 3 = 9 > 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ Mínimo}$$

b)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (4x^3 - 2x^2 - 2x + 2)\,dx = x^4 - \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x\Big]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

Opción B

Problema 3.16.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -8x^2 + 24x - 10$$

a) Calcúlense los máximos y mínimos locales de f y represéntese gráficamente la función.

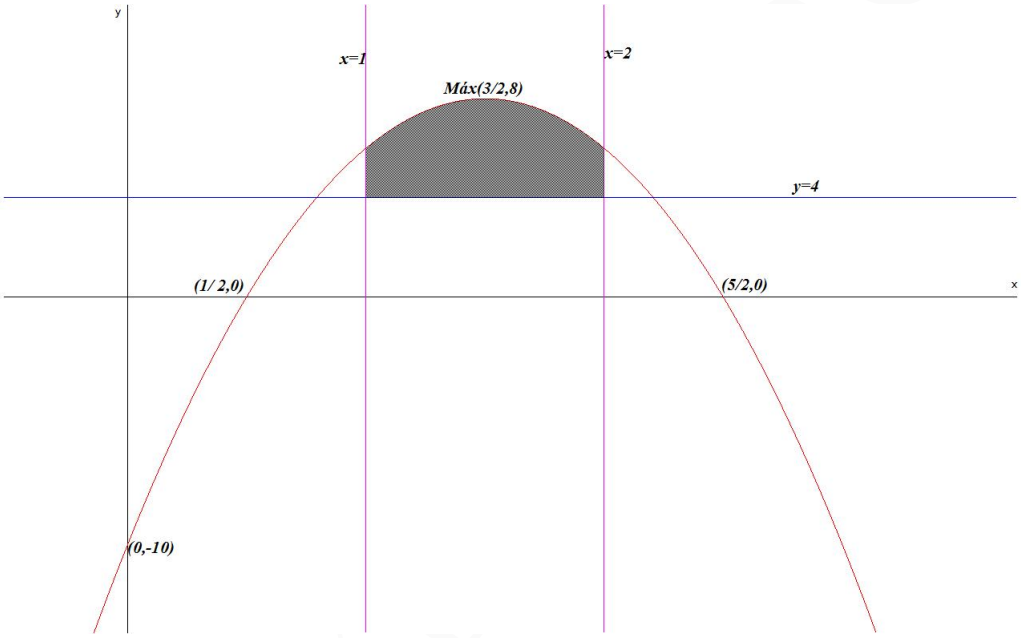
b) Determínese el área del recinto cerrado comprendido entre la gráfica de la función f y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 4$.

Solución:

a) $f'(x) = -16x + 24 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$f''(x) = -16 \Longrightarrow f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -16 < 0 \Longrightarrow$ hay un máximo en el punto $\left(\dfrac{3}{2}, 8\right)$.

Hay un punto de corte con OY en $(0, -10)$ y dos con OX en $(1/2, 0)$ y $(5/2, 0)$.



b) $g(x) = 4$.

$$S = \int_1^2 (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^2 (-8x^2 + 24x - 14)\, dx = -\frac{8x^3}{3} + 12x^2 - 14x\Big]_1^2 = \frac{10}{3}\ u^2$$

Problema 3.16.12 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^3}{(x-2)^2} + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de esta función.

b) Determínense las asíntotas de esta función.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} (e^x) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Luego la función es continua en $R - \{2\}$

b) En la rama $x < 0$: $f(x) = e^x$ La función no tiene verticales pero si tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ $\lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$ y, por tanto, no hay oblicuas.

En la rama $x \geq 0$: $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2}$

Tiene una asíntota vertical en $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

No tiene horizontales $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ Si tiene oblicuas $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \quad n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = 5$$

$$y = x + 5$$

3.16.4. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.16.13 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real: $f(x) = e^{x^2}$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Determínense sus intervalos de concavidad ($\cup$) y convexidad ($\cap$).

Solución:

a) $f'(x) = 2xe^{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$,

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

Luego en $x = 0$ hay un mínimo. La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el $(0, \infty)$.

b) $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = 2e^{x^2}(1 + 2x^2) > 0 \Longrightarrow$ la función es cóncava $\cup$ en todo el dominio de la función, es decir, en R.

Opción B

Problema 3.16.14 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \ln(x+1) + m & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Nota: ln denota el logaritmo neperiano.

a) Determínese para qué valores del parámetro m la función f es continua en $x = 0$.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -2$.

Solución:

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (x^2 + 6) = 6 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (\ln(x+1) + m) = m \end{cases} \Longrightarrow m = 6.$

b) En $x = -2$ la función es $f(x) = x^2 + 6$ y $f'(x) = 2x$). La ecuación punto pendiente de la recta es $y - b = m(x - a)$ donde $a = -2$, $b = f(a) = f(-2) = 10$ y $m = f'(a) = f'(-2) = -4 \Longrightarrow y - 10 = -4(x + 2)$ es la recta tangente buscada.

Problema 3.16.15 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x) = (2x + 3)^5 + e^{2x}$

a) Calcúlese su función derivada.

b) Calcúlese $\int f(x)\, dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 10(2x + 3)^4 + 2e^{2x}$

b) $\int ((2x + 3)^5 + e^{2x})\, dx = \int (2x + 3)^5\, dx + \int e^{2x}\, dx = \dfrac{(2x + 3)^6}{12} + \dfrac{e^{2x}}{2} + C$

3.17. Año 2016

3.17.1. Modelo

Opción A

Problema 3.17.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$$

a) Estudíense y determínense sus asíntotas.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales: $1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$
Si $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{x^3}{1 - x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

Si $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x - x^3} = -1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) = 0$$

$$y = -x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2(3-x^2)}{1-x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\nearrow$	creciente $\searrow$	decreciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, y es creciente en el intervalo $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

Opción B

Problema 3.17.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

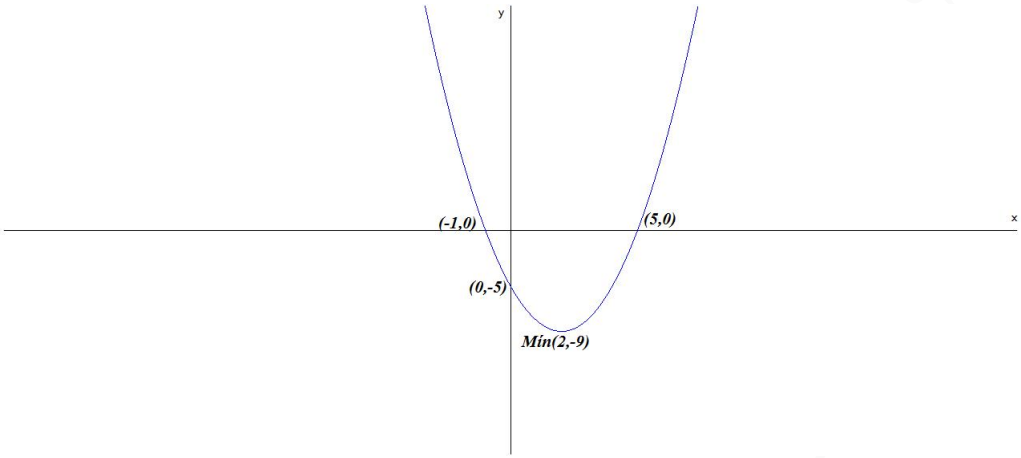
a) Represéntese gráficamente la función f.

b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

a)

Representación de $f(x) = x^2 - 4x - 5$:



b) $\displaystyle\int_{-1}^{5} \left(x^2 - 4x - 5\right)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x\Big]_{-1}^{5} = -36$

$$S = |-36| = 36\, u^2$$

Problema 3.17.3 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real

$$f(x) = x^2 e^{x^2}$$

a) Calcúlese su función derivada.

b) Determínense sus intervalos de concavidad ($\cap$) y convexidad ($\cup$).

Solución:

a) $f'(x) = 2xe^{x^2}(1 + x^2)$

b) $f''(x) = 2e^{x^2}(2x^4 + 5x^2 + 1) > 0$ siempre luego la función es siempre convexa $\cup$.

3.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.17.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 + 8$$

.

a) Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = -3$ y $x = -1$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) $x^3+8=0 \Longrightarrow x=-2$ luego hay que separar dos áreas S_1 en el intervalo $[-3,-2]$ y S_2 en el intervalo $[-2,-1]$.

$$S_1=\int_{-3}^{-2}(x^3+8)\,dx=\frac{x^4}{4}+8x\Big]_{-3}^{-2}=-\frac{33}{4}$$

$$S_1=\int_{-2}^{-1}(x^3+8)\,dx=\frac{x^4}{4}+8x\Big]_{-2}^{-1}=\frac{17}{4}$$

$$S=|S_1|+|S_2|=\frac{33}{4}+\frac{17}{4}=\frac{25}{2}\ u^2$$

b) $b=f(1)=9,\ f'(x)=3x^2,\ m=f'(1)=3$. La ecuación de la recta tangente es: $y-9=3(x-1)$

Opción B

Problema 3.17.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+b}{x-2} & \text{si} \quad x\leq -1\\ \dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$$

a) Determínese para qué valores del parámetro b la función $f(x)$ es continua en $x=-1$.

b) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a) Continuidad en $x=-1$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-}\dfrac{-x+b}{x-2}=-\dfrac{1+b}{3}\\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}\dfrac{2x+6}{2x+4}=2\end{cases}$$

Luego $-\dfrac{1+b}{3}=2\Longrightarrow b=-7$

b) Asíntotas:

- Si $x\leq -1$ no hay asíntotas verticales ($x=2$ no está en la rama). Si hay horizontales $y=-1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{-x+b}{x-2}=-1$$

- Si $x>-1$ no hay asíntotas verticales, los valores que anulan el denominador ($x=-1$ y $x=-3$) no están en la rama. Si hay horizontales $y=1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3}=1$$

Problema 3.17.6 *(2 puntos)* Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$$

a) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f así como sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Solución:

a)

$$f(x) = \int (6x^2 + 4x - 2)\, dx = 2x^3 + 2x^2 - 2x + C$$

$$f(0) = 5 \Longrightarrow C = 5 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5$$

b) $6x^2 + 4x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 1/3$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/3)$	$(1/3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1/3, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1/3)$.

La función tiene un mínimo en $(1/3, 125/27)$ y un máximo en $(-1, 7)$.

3.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.17.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^2 + 4$$

.

a) Escríbase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$.

b) Determínese el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$, la recta $y = 4x$ y el eje de ordenadas.

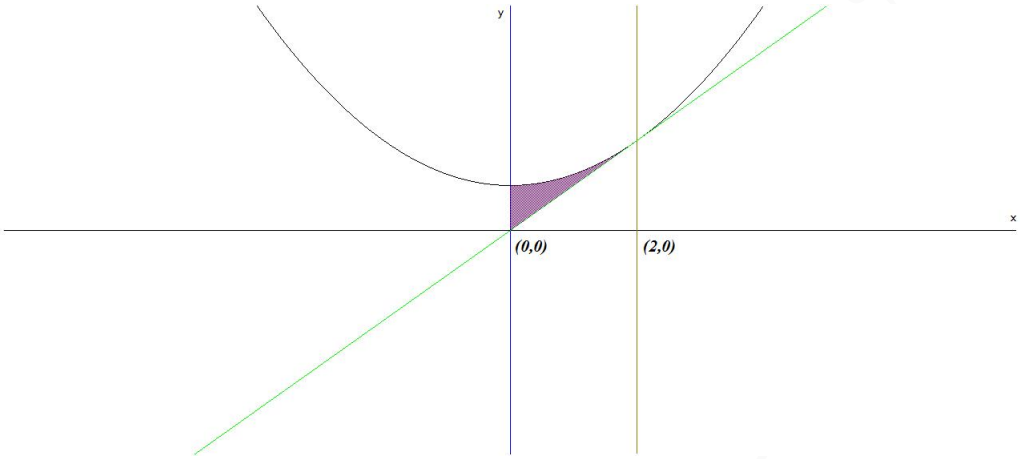
Solución:

a) $b = f(2) = 8$, $f'(x) = 2x$, $m = f'(2) = 4$. La ecuación de la recta tangente es: $y - 8 = 4(x - 2)$

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ (doble), como el eje de ordenadas (OY) es la recta $x = 0$ el intervalo de integración es $[0, 2]$.

$$S_1 = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \Big]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{8}{3}\ u^2$$



Problema 3.17.8 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

a) Determínense las asíntotas de $f(x)$.

b) Determínense los máximos y los mínimos relativos de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = -2$

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x^2+2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x+2} - x\right) = -4$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x - 4$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -5$:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-5, 1)$.

La función tiene un mínimo en $(1, 0)$ y un máximo en $(-5, -12)$.

Opción B

Problema 3.17.9 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$$

a) Determínense los valores de los parámetros reales a y b si se sabe que la recta $y = x$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Para $a = 1$ y $b = 0$, calcúlese el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX.

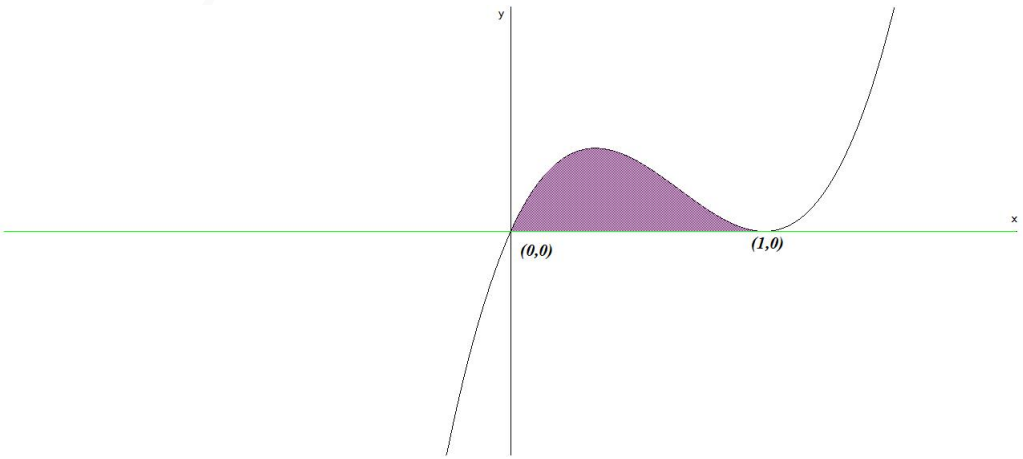
Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + a \Longrightarrow m = f'(0) = a = 1$.
El punto de tangencia es común a la curva y a la recta $(y = x)$, luego es el $(0, 0) \Longrightarrow f(0) = b = 0$.

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$:

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{12}\ u^2$$



3.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.17.10 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{ax+b}{x} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^3+1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Determínense los valores que deben tomar los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y $x = 2$.

b) Calcúlese, para $a = 4$ y $b = -2$, el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (x^2+1) = 2 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{ax+b}{x} = a+b \end{cases} \Longrightarrow a+b = 2$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{ax+b}{x} = \dfrac{2a+b}{2} \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \sqrt{x^3+1} = 3 \end{cases} \Longrightarrow 2a+b = 6$$

$$\begin{cases} a+b = 2 \\ 2a+b = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$$

b)

$$S_1 = \int_1^2 \frac{4x-2}{x}\,dx = \int_1^2 \left(4 - \frac{2}{x}\right) dx = 4x - 2\ln|x|\Big]_1^2 = 4 - 2\ln 2$$

$$S = |S_1| = 4 - 2\ln 2 = 2,614\ u^2$$

Opción B

Problema 3.17.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x & \text{si} \quad x < 0 \\ -x^2+3x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad y derivabilidad de la función.

b) Determínense los valores de $a \in R$ para los cuales la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es $m = -2$. Calcúlese, para cada valor de a obtenido, la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (x^2 + 2x) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (-x^2 + 3x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Luego la función es continua en $x = 0$ y, por tanto, en todo R.
Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ -2x + 3 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 2 \\ f'(0^+) = 3 \end{cases}$$

Luego f no es derivable en $x = 0 \Longrightarrow f$ es derivable en $R - \{0\}$.

b) En $x = a$ es $m = f'(a) = -2$, hay dos casos:

☞ Si $x < 0$: $f'(a) = 2a + 2 = -2 \Longrightarrow a = -2$
$b = f(-2) = 0 \Longrightarrow y = -2(x + 2)$

☞ Si $x \geq 0$: $f'(a) = -2a + 3 = -2 \Longrightarrow a = 5/2$
$b = f(5/2) = \dfrac{5}{4} \Longrightarrow y - \dfrac{5}{4} = -2(x - \dfrac{5}{2})$

Problema 3.17.12 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9}$$

a) Calcúlense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ **Verticales:**
$x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$

$x = -3$

$$\lim_{x \longrightarrow -3} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^-} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$

www.matex.net

☛ **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = 1$$

☛ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

b)

$$f'(x) = -\frac{12x}{(x^2 - 9)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 3) \cup (3, \infty)$.

La función tiene un máximo en $(0, 1/3)$.

3.18. Año 2017

3.18.1. Ordinaria

Opción A

Problema 3.18.1 *(2 puntos)*

a) Determínese el valor de la derivada de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Estúdiense las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2} \Longrightarrow f'(0) = 0$

b) Asíntotas:

☛ Verticales:
En $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

En $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

www.yoquieroaprobar.es

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=\infty$$

☛ Oblicuas: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x-x^3}=-1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+x\right)=0$$

Luego la asíntota oblicua es $y=-x$

Opción B

Problema 3.18.2 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real:

$$f(x)=x^3-3x$$

a) Calcúlense $\lim_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{f(x)}{1-x^3}$ y $\lim_{x\longrightarrow0}\dfrac{f(x)}{x}$.

b) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) $\lim_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{f(x)}{1-x^3}=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{x^3-3x}{1-x^3}=-1$

$\lim_{x\longrightarrow0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow0}\dfrac{x^3-3x}{x}=\lim_{x\longrightarrow0}\dfrac{x(x^2-3)}{x}=-3$

b) $f'(x)=3x^2-3=0\Longrightarrow x=\pm1$:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1,1)$.

La función tiene un mínimo en $(1,-2)$ y un máximo en $(-1,2)$.

Problema 3.18.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+2} & \text{si}\quad x\leq0\\ x+2 & \text{si}\quad x>0\end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en R.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{0}f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{2}{x+2} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (x+2) = 2 \end{cases}$$

Luego f es discontinua no evitable en $x = 0$, hay un salto. Tampoco lo es en $x = -2$ donde hay una asíntota vertical, en conclusión: f es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2}{x+2}\, dx = 2 \ln |x+2|]_{-1}^{0} = 2 \ln 2.$

3.18.2. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.18.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$$

.

a) Calcúlese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 1$ y $x = 3$. Tendremos dos áreas S_1 con un intervalo de integración $[0, 1]$ y otro S_2 con un intervalo de integración $[1, 3]$.

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$S_1 = \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_1^3 = -\frac{8}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\ u^2$$

b) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$

	$(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3})$	$(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3})$	$(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$ y decreciente en $\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}, \dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$.

Opción B

Problema 3.18.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 5x+1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2+5x+1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Determínese si la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución:

a) Para que sea derivable tiene que ser continua:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} (5x+1) = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (x^2+5x+1) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Luego f es continua en $x = 0$. Comprobamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x+5 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \implies f'(0^-) = f'(0^+) = 5$$

Luego f es derivable en $x = 0$.

b) En $x = 3 \Longrightarrow f(x) = x^2+5x+1 \Longrightarrow f'(x) = 2x+5$
$b = f(3) = 25$, $m = f'(3) = 11$. La ecuación de la recta tangente es: $y - 25 = 11(x-3)$ (ecuación punto pendiente)

Problema 3.18.6 *(2 puntos)* Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f'(x) = x^2+8x+15$$

a) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 1/3$.

b) Determínense los máximos y los mínimos locales de $f(x)$, si los tuviese.

Solución:

a) $f(x) = \displaystyle\int (x^2+8x+15)\,dx = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 15x + C$

$$f(1) = \frac{1}{3} + 4 + 15 + C = \frac{1}{3} \Longrightarrow C = -19$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 15x - 19$$

b) $f'(x) = x^2+8x+15 = 0 \Longrightarrow x = -5$ y $x = -3$:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -3)$	$(-3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-5, -3)$.

La función tiene un mínimo en $(-3, -37)$ y un máximo en $(-5, -107/3)$.

3.18.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.18.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2+x-2 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio.

b) Para $a = 2$, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Continuidad en $x = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} (ax+1) = -a+1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (x^2+x-2) = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow -a+1 = -2 \Longrightarrow a = 3$$

b) para $a = 2$ es $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2+x-2 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$

- ☞ Si $x < -1$ la recta $f(x) = 2x+1 \Longrightarrow f'(x) = 2 > 0$ es siempre creciente (en $(-\infty, -1)$ y no llegaría a cortar ni al eje de abscisas ni al de coordenadas.
- ☞ Si $x \geq -1$: $f(x) = x^2+x-2 \Longrightarrow f'(x) = 2x+1 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$ por la segunda derivada $f''(x) = 2 > 0$ luego $x = -1/2$ es un mínimo, por tanto, la función es decreciente en el intervalo $(-1, -1/2)$ y creciente en el $(-1/2, \infty)$.
  Haciendo $x = 0$ tendrá un punto de corte con OY en $(0, -2)$ y con OX se calcularían haciendo $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2+x-2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -2$ no está en la rama, luego el único punto de corte con el eje de abscisas será $(1, 0)$.

Opción B

Problema 3.18.8 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2-1}{3x-2}$$

a) Estúdiense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales:
  En $x = 2/3$:

$$\lim_{x \longrightarrow (2/3)^-} \frac{x^2-1}{3x-2} = \left[\frac{-5/9}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{3x-2} = \left[\frac{-5/9}{0^+}\right] = -\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2-1}{3x-2}=\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x^2-1}{3x-2}=-\infty$$

☛ Oblicuas: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2x}=\frac{1}{3}$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-1}{3x-2}-\frac{x}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

Luego la asíntota oblicua es $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{9}$

b) $f'(x)=\dfrac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2}=0\Longrightarrow 3x^2-4x+3=0$ no tiene solución y $f'(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}-\{2/3\}\Longrightarrow f$ creciente en $\mathbb{R}-\{2/3\}$.

Problema 3.18.9 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x)=x^2+ax$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=2$. Determínese si se trata de un máximo o un mínimo local.

b) Para $a=-2$, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=2$.

Solución:

a) $f'(x)=2x+a$ luego $f'(2)=4+a=0\Longrightarrow a=-4$. Como $f''(x)=2\Longrightarrow f''(2)=2>0\Longrightarrow x=2$ es un mínimo.

b) Si $a=-2\Longrightarrow f(x)=x^2-2x=0\Longrightarrow x=0$ y $x=2$:

$$S_1=\int_0^2(x^2-2x)\,dx=\frac{x^3}{3}-x^2\Big]_0^2=-\frac{4}{3}$$

$$S=|S_1|=\left|\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}\ u^2$$

3.18.4. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.18.10 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & \text{si} \quad x<-1\\ x & \text{si} \quad -1\le x<1\\ -x^2+2x & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) Determínese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

a) Continuidad en $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} (x^2 - 2x) = 3 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (x) = -1 \end{cases} \Longrightarrow \text{discontinuidad no evitable}$$

Continuidad en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (x) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 2x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \text{es continua}$$

Luego f es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) La función no corta al eje de abscisas en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$ Serán dos áreas a estudiar, S_1 en el intervalo $(0, 1)$ y S_2 en el $(1, 2)$.

$$S_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \int_1^2 (-x^2 + 2x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2\Big]_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.18.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = (3x^2 - 2x)^2$$

a) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 (9x^4 - 12x^3 + 4x^2)\,dx = \frac{9x^5}{5} - 3x^4 + \frac{4x^3}{3}\Big]_{-1}^1 = \frac{94}{15}$

b) Sea $y - b = m(x - a)$ la ecuación punto pendiente de la recta tangente tenemos que $b = f(a) = f(2) = 64$ y como $f'(x) = 2(3x^2 - 2x)(6x - 2) \Longrightarrow m = f'(2) = 160$:

$$y - 64 = 160(x - 2)$$

Problema 3.18.12 *(2 puntos)* La función de beneficio (en euros) de una empresa que fabrica cables de electricidad viene dada por la función

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200$$

donde x representa la cantidad de metros de cable elaborados diariamente.

a) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que la empresa no tenga ganancias ni pérdidas?

b) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que se obtenga el máximo beneficio?

(Observación: valores negativos de $b(x)$ implican que la empresa tiene pérdidas, mientras que valores positivos implican ganancias)

Solución:

a) $b(x) = -x^2 + 120x - 3200 = 0 \Longrightarrow x = 40$ m y $x = 80$ m.

b) $b'(x) = -2x + 120 = 0 \Longrightarrow x = 60$ para comprobar si es un máximo recurrimos a la segunda derivada: $b''(x) = -2 \Longrightarrow b''(60) = -2 < 0 \Longrightarrow$ hay un máximo cuando se producen 60 m con un beneficio de $b(60) = 400$ euros.

3.19. Año 2018

3.19.1. Modelo

Opción A

Problema 3.19.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16$$

a) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Calcúlese el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 3$.

Solución:

a) La ecuación de una recta en su ecuación punto pendiente es $y - b = m(x - a)$ donde $b = f(a) = f(1) = 8$. La derivada de la función es $f'(x) = 12x^2 - 24x \Longrightarrow m = f'(a) = f'(1) = -12$, luego la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 8 = -12(x - 1)$$

b) La función f corta al eje de abscisas en los puntos $x = -1$ y $x = 2$, por lo que habrá tres recintos $S_1 : [-2, -1]$, $S_2 : [-1, 2]$ y $S_3 : [2, 3]$.

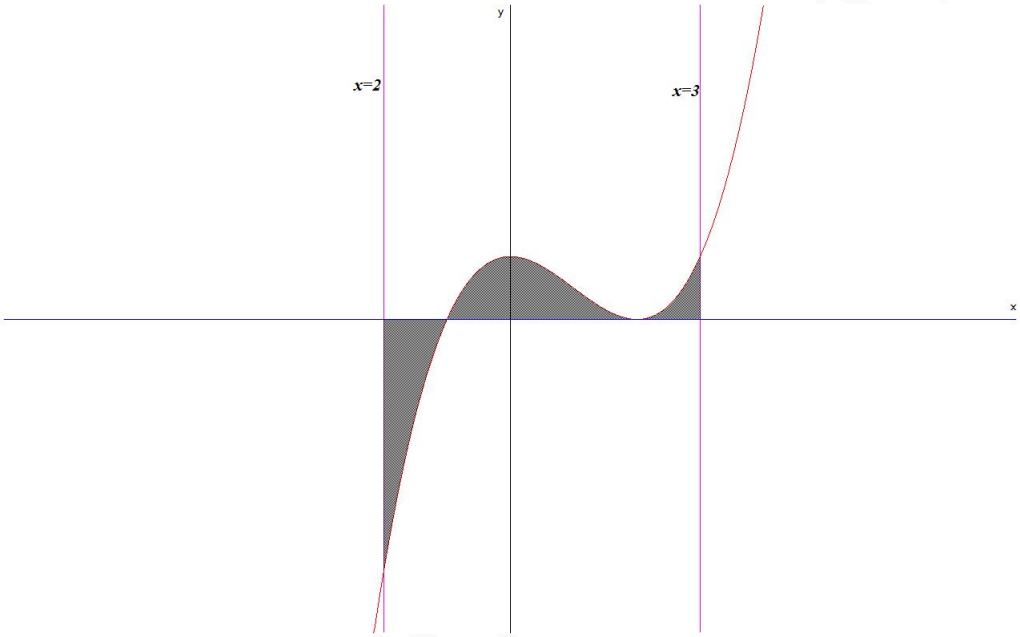
$$F(x) = \int (4x^3 - 12x^2 + 16)\, dx = x^4 - 4x^3 + 16x$$

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (4x^3 - 12x^2 + 16)\, dx = F(-1) - F(-2) = -27$$

$$S_2 = \int_{-1}^{2} (4x^3 - 12x^2 + 16)\, dx = F(2) - F(-1) = 27$$

$$S_3 = \int_2^3 (4x^3 - 12x^2 + 16)\,dx = F(3) - F(2) = 5$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 27 + 27 + 5 = 59\ u^2$$



Opción B

Problema 3.19.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real: $f(x) = \dfrac{3x^2+3}{x}$

a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ y asíntotas:

☛ Verticales: $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{3x^2+3}{x} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{3x^2+3}{x} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2+3}{x} = \infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2+3}{x^2} = 3$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+3}{x} - 3x \right) = 0$$

$$y = 3x$$

b) $f'(x) = \dfrac{3(x^2-1)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 0) \cup (0, 1)$, y es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Tiene un Máximo en $(-1, -6)$ y un mínimo en $(1, 6)$.

Problema 3.19.3 *(2 puntos)* El beneficio diario (en miles de euros) de una empresa productora de cemento viene dado por la función:

$$f(x) = -2x^2 + 14x - 12$$

donde x expresa las toneladas de cemento producidos al día. Se sabe que la producción diaria de cemento está entre 0 y 8 toneladas, es decir, $x \in [0, 8]$.

a) Calcúlense $f(0)$ y $f(8)$ e interprétense los resultados en el contexto del problema. Hállense las toneladas de cemento que deben producirse diariamente para obtener el máximo beneficio posible.

b) Determínese entre qué valores debe estar la producción diaria de cemento para que la empresa no tenga pérdidas.

Solución:

a) $f(0) = -12$ quiere decir que si la empresa no produce nada incurre en pérdidas de 12000 euros diarios. $f(8) = -28$ quiere decir que la empresa tendría unas pérdidas de 28000 euros (sobreproducción) Calculamos la cantidad de toneladas para obtener un beneficio máximo: $f'(x) = -4x + 14 = 0 \Longrightarrow x = 3,5$ por la segunda derivada $f''(x) = -4 \Longrightarrow f''(3,5) = -4 < 0 \Longrightarrow x = 3,5$ es un máximo. En conclusión: El beneficio máximo se produce con 3,5 toneladas y será de $f(3,5) = 12500$ euros.

b) La empresa no tendría ni ganancias ni pérdidas cuando $f(x) = 0 \Longrightarrow -2x^2 + 14x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 1$ tonelada o $x = 6$ toneladas.

3.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.19.4 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.

b) Calcúlese la función derivada de $f(x)$ para $x < 2$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{x+2}{x-1} = 4 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \dfrac{3x^2-2x}{x+2} = 2 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x = 2$, en ese punto hay un salto.

b) Si $x < 2$: $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

Opción B

Problema 3.19.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ y asíntotas:

- Verticales: $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3+2x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+2x+1} - x\right) = -2$$

$$y = x - 2$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -3$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-3, -1)$, y es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$. Tiene un Máximo en $(-3, -27/4)$.

Problema 3.19.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x$$

a) Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

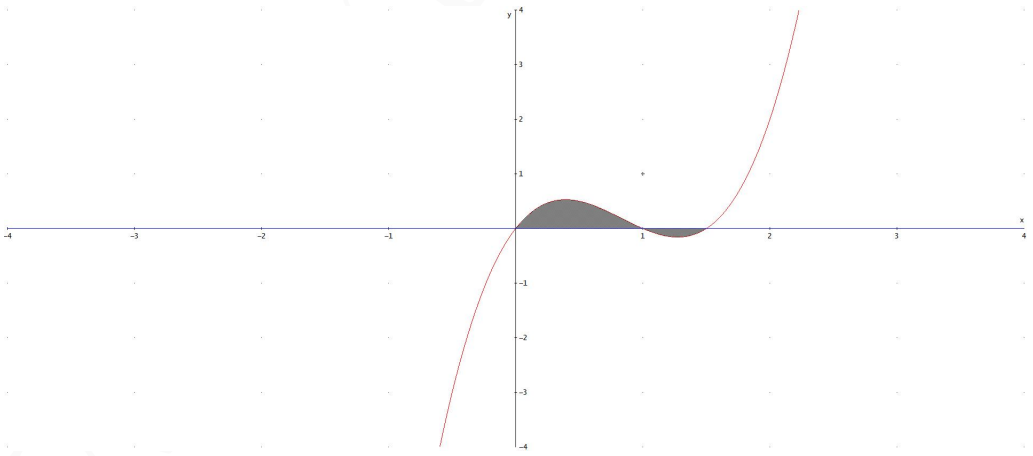
a) La función f corta al eje de abscisas en los puntos:
$2x^3 - 5x^2 + 3x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 1$ y $x = 3/2$, luego tendremos los recintos $S_1 : [0, 1]$ y $S_2 : [1, 3/2]$.

$$F(x) = \int (2x^3 - 5x^2 + 3x)\, dx = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$$

$$S_1 = \int_0^1 (2x^3 - 5x^2 + 3x)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_1^{3/2} (2x^3 - 5x^2 + 3x)\, dx = F(3/2) - F(1) = -\frac{5}{96}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{3} + \frac{5}{96} = \frac{37}{96}\ u^2$$



b) La ecuación de una recta en su ecuación punto pendiente es $y - b = m(x - a)$ donde $b = f(a) = f(0) = 0$. La derivada de la función es $f'(x) = 6x^2 - 10x + 3 \Longrightarrow m = f'(a) = f'(0) = 3$, luego la ecuación de la recta tangente es:

$$y = 3x$$

3.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.19.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

a) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y la gráfica de $f'(x)$, siendo f' la función derivada de f.

Solución:

a) $b = f(0) = 1$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = -1 \Longrightarrow y - 1 = -x \Longrightarrow y = -x + 1$

b) La función $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ no corta el eje OX luego $S_1 : [0, 1]$

$$S_1 = \int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$S = |S_1| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.19.8 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determínese si $f(x)$ es una función continua en todo su dominio.

b) Calcúlense sus asíntotas horizontales y oblicuas, si las tuviese.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (x+1) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = -1 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x = 0$, en ese punto hay un salto. Luego f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) Si $x < 0$: No hay asíntotas, la función es una recta.
Si $x \geq 0$: La función no tiene asíntotas verticales porque el denominador no se anula nunca, si tendría una horizontal en $y = 1$

$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$ y, por tanto, no habría oblicuas en esta rama.

Problema 3.19.9 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x$$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 30x + 36 = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = -2$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$, y es creciente en el intervalo $(-3, -2)$.

b) Tiene un Máximo en $(-3, -27)$ y un Mínimo en $(-2, -28)$.

3.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.19.10 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real: $f(x) = \dfrac{x}{1-4x^2}$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Estúdiense las asíntotas de f.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1/2\}$ y $f'(x) = \dfrac{4x^2+1}{(1-4x^2)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos y $f'(x) > 0$ en todo el dominio de la función, luego la función es creciente en $\mathbb{R} - \{\pm 1/2\}$.

b) Asíntotas:

☛ Verticales: $x = -1/2$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow (-1/2)^-} \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{-1/2}{0^-}\right] = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow (-1/2)^+} \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{-1/2}{0^+}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

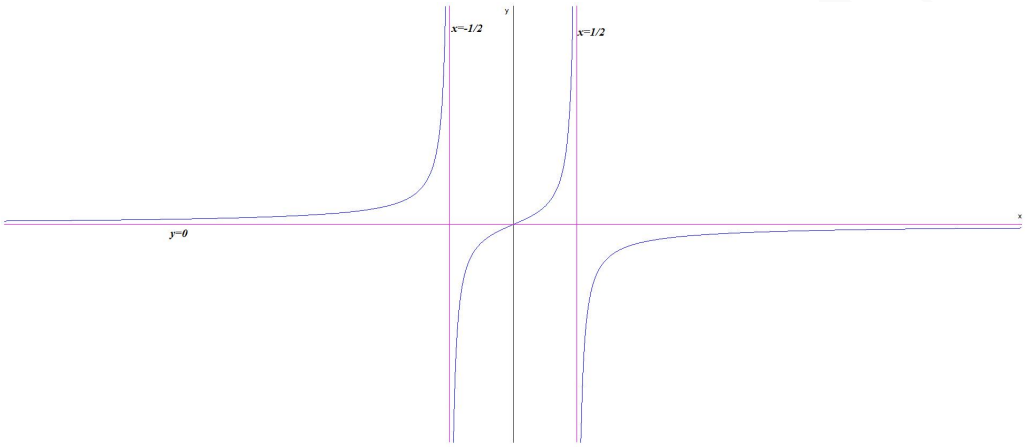
En $x = 1/2$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow (1/2)^-} \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{1/2}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow (1/2)^+} \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{1/2}{0^-}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

☛ Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{1-4x^2} = 0$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales



Opción B

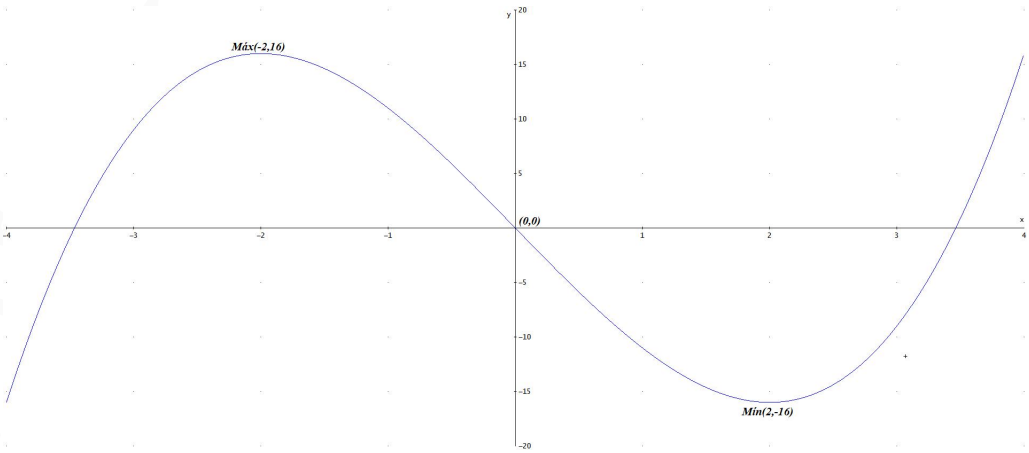
Problema 3.19.11 *(2 puntos)* Los beneficios, en millones de euros, de una determinada inversión vienen dados por la función $f(x) = x^3 - 12x$, donde x representa cierto índice que puede tomar cualquier valor real.

a) Determínese, en el caso de que exista, el valor del índice para el que el beneficio es mayor que el de todos los valores de un entorno suyo. ¿Cuál sería el beneficio para ese valor del índice?

b) Supóngase que el valor actual del índice es $x = 4$ y que está previsto que éste experimente un incremento positivo. Justifíquese si el beneficio aumentará o disminuirá.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$ y $f''(x) = 6x$ por el método de la segunda derivada en $x = 2 \Longrightarrow f''(2) = 12 > 0 \Longrightarrow$ hay un mínimo, y en $x = -2 \Longrightarrow f''(-2) = -12 > 0 \Longrightarrow$ hay un máximo, con $f(-2) = -8 + 24 = 16$ millones de euros, siempre y cuando la variable x pueda tener valores negativos.



b) La función f es creciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$, luego para valores superiores a $x=2$ los beneficios irán creciendo.

Problema 3.19.12 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2e^x & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{2}{3+x} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) Determínense el dominio de $f(x)$ y estúdiese su continuidad.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

Solución:

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}(x^3+2e^x)=2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{2}{3+x}=2/3 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x=0$, en ese punto hay un salto. f es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3+2e^x)\,dx=\frac{x^4}{4}+2e^x\Big]_{-1}^{0}=\frac{7}{4}-\frac{2}{e}\simeq 1,014$

3.20. Año 2019

3.20.1. Modelo

Opción A

Problema 3.20.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$$

a) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

b) Calcúlense sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ la pendiente de la recta es $m=f'(0)=\dfrac{1}{4}$ y el punto de tangencia será $(0,f(0))=\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. La recta es:

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-0)\Longrightarrow x-4y+2=0$$

b) Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 1$:
  $\lim_{x \longrightarrow 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 1} \dfrac{2x}{2x+1} = \dfrac{2}{3}$, luego en $x = 1$ no hay asíntota, hay un una discontinuidad evitable (un agujero)
  En $x = -2$:
  $$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow -2^-} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim_{x \longrightarrow -2^+} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$
- Horizontales: $y = 1$
  $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = 1$$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Opción B

Problema 3.20.2 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si} \quad x < -1 \\ e^{2x+2} & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) Determínese el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para el cual $f(x)$ es una función continua en $x = -1$.

b) Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a)
$$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow -1^-} (2x+a) = -2+a \\ \\ \lim_{x \longrightarrow -1^+} e^{2x+2} = e^0 = 1 \end{cases} \Longrightarrow -2+a = 1 \Longrightarrow a = 3$$

b)
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{2x+2}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+2}\Big]_0^1 = \frac{e^2}{2}(e^2-1)\ u^2 \simeq 23,6\ u^2$$

Problema 3.20.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

www.yoquieroaprobar.es

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

	$(-\infty, 1-\sqrt{2})$	$(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$	$(1+\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$, y es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, \infty)$.

b) Tiene un máximo en $\left(1+\sqrt{2}, \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$ y un mínimo en $\left(1-\sqrt{2}, -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

3.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.20.4 *(2 puntos)* La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 3)$.

b) Determínense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad $(\cup)$ y convexidad $(\cap)$ de esta función.

Solución:

a) $f(x) = \displaystyle\int (2x^2 - 4x - 6)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + C$ como $f(0) = 3 \Longrightarrow C = 3$ luego la función será:

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + 3$$

b) $f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, y es decreciente en el intervalo $(-1, 3)$. Tiene un máximo en $\left(-1, \dfrac{19}{3}\right)$ y un mínimo en $(3, -15)$.

$f''(x) = 4x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 1$:

	$(-\infty, 1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función tiene un punto de inflexión en el punto $\left(1, -\dfrac{13}{3}\right)$

Opción B

Problema 3.20.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{8}{x^2+4}$$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{16x}{(x^2+4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, y es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$. Tiene un máximo en $(0, 2)$.
Asíntotas:

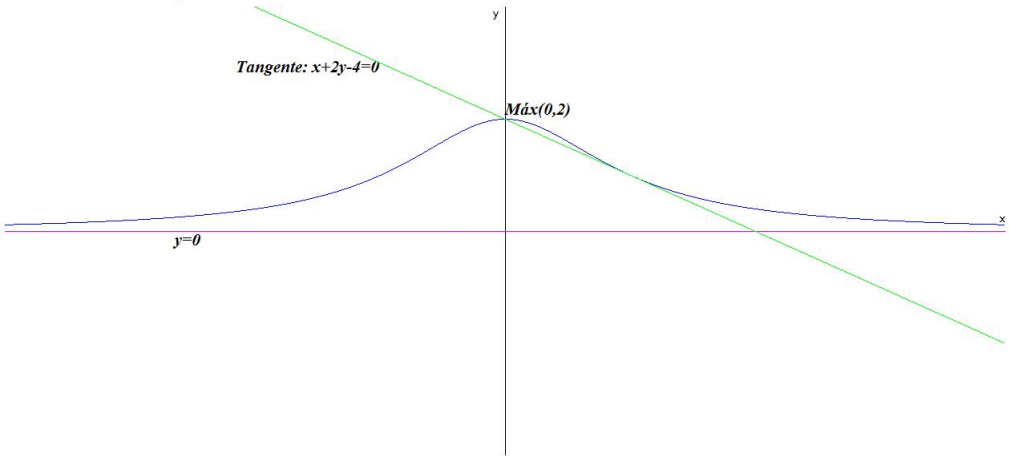
- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{8}{x^2+4} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) La pendiente de la recta es $m = f'(2) = -\dfrac{1}{2}$ y el punto de tangencia será $(2, f(2)) = (2, 1)$. La recta es:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2) \Longrightarrow x + 2y - 4 = 0$$



Problema 3.20.6 *(2 puntos)* La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.

b) Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (e^x + k) = 1 + k \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (1 - x^2) = 1 \end{cases} \Longrightarrow 1 + k = 1 \Longrightarrow k = 0$$

Si $k \neq 0$ la función es discontinua en $x = 0$.
Continuidad en $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} (1 - x^2) = -8 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{cases} \Longrightarrow$$

En $x = 3$ la función es siempre discontinua, en resumen: Si $k = 0$ f es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. Si $k \neq 0$ f es continua en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

b) Con $k = 0$:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^x\,dx = e^x\big]_{-1}^{0} = 1 - e^{-1}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} (1 - x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 - e^{-1} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{e} \simeq 1,3\ u^2$$

3.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.20.7 *(2 puntos)* Se consideran las funciones reales de variable real

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + 5x + 20; \quad g(x) = \frac{ax}{x^2 + 1} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

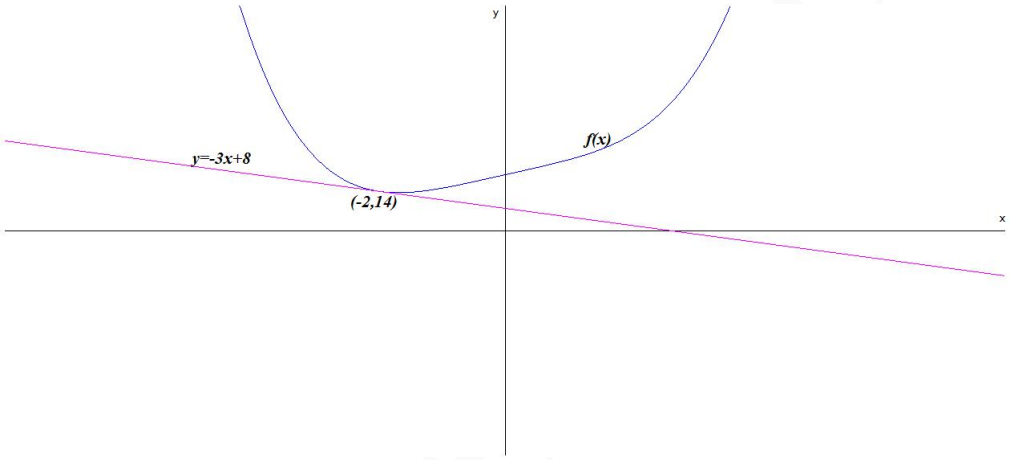
a) Hállese el punto en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente -3 y determínese la ecuación de esta recta tangente.

b) Calcúlese el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de g, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y el eje OX sea igual a 2 u^2.

Solución:

a) $f'(x) = x^3 + 5 \Longrightarrow m = f'(a) = a^3 + 5 = -3 \Longrightarrow a^3 = -8 \Longrightarrow a = -2$ y el punto de tangencia es $(a, f(a)) = (-2, f(-2)) = (-2, 14)$:

$$y - 14 = -3(x + 2) \Longrightarrow y = -3x + 8$$



b)

$$\int_0^1 \left(\frac{ax}{x^2+1} + \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx = \frac{a}{2} \ln|x^2+1| - \frac{1}{(x+1)} \Big]_0^1 =$$

$$\frac{a \ln 2 + 1}{2} = 2 \Longrightarrow a = \frac{3}{\ln 2} \simeq 4,33$$

Problema 3.20.8 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

a) Determínense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Obténganse los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$ y Asíntotas:

☛ Verticales:
En $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

En $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{9}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{9}{0^+} \right] = +\infty$$

☛ Horizontales: $y = 1$

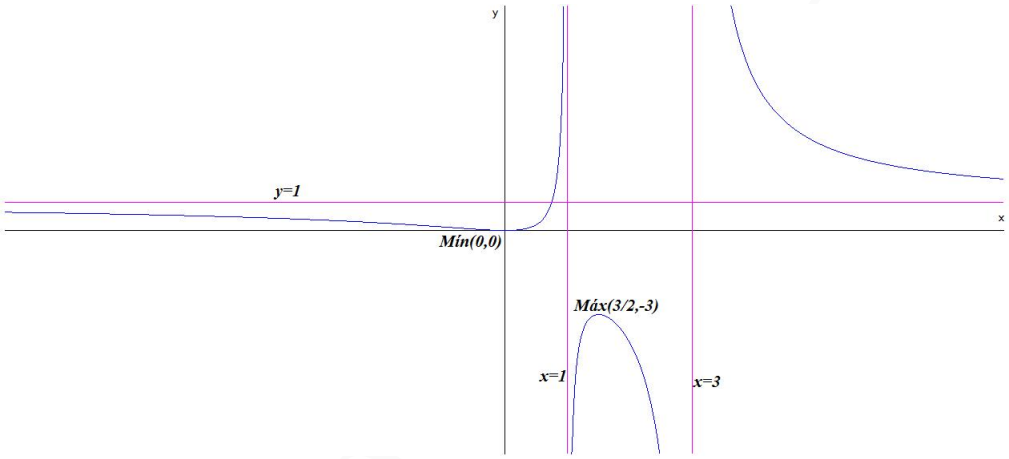
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{2x(2x-3)}{(x^2-4x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3/2$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3/2)$	$(3/2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,1) \cup (1, 3/2)$, y es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (3/2, 3) \cup (3, +\infty)$. Tiene un máximo relativo en $(3/2, -3)$ y un mínimo relativo en $(0, 0)$



Opción B

Problema 3.20.9 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - a}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga tangente horizontal en $x = 3$.

b) Hállense las asíntotas de $f(x)$ para $a = 4$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 3a)}{(x^2 - a)^2}$ como $f'(3) = 0 \Longrightarrow \dfrac{9(9 - 3a)}{(9 - a)^2} = 0 \Longrightarrow a = 3$

b) Si $a = 4 \Longrightarrow \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$. Asíntotas:

☛ Verticales:
En $x = -2$:

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{-8}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{-8}{0^-}\right] = +\infty$$

En $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-4} = \infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3-4x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0$$

$$y = x$$

3.20.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.20.10 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.

a) Determínese en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.

b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

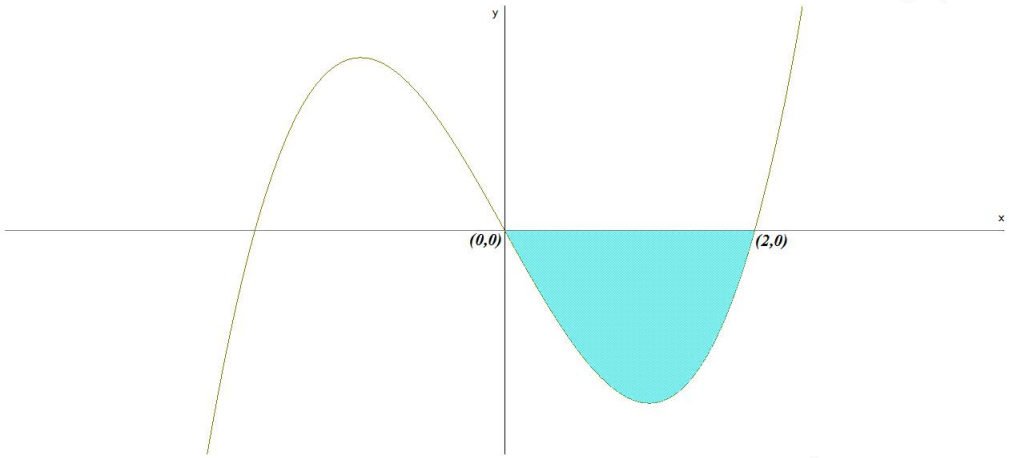
Solución:

a) $f(x) = 2x^3 - 8x \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 - 8 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{32\sqrt{3}}{9}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{32\sqrt{3}}{9}\right)$

b) $2x^3 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$. Luego la función no corta el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$:

$$S_1 = \int_0^2 (2x^3 - 8x)\, dx = \frac{x^4}{2} - 4x^2\Big]_0^2 = -8$$

$$S = |S_1| = |-8| = 8 \ u^2$$



Problema 3.20.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-9} & \text{si} \quad x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f.

b) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \dfrac{x^3}{x^2-9} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} (x^2-4) = 5 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x = 3$, en ese punto hay un salto. f es continua en $\mathbb{R} - \{\pm 3\}$ (En $x = -3$ hay una asíntota vertical)

b) Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 3$ hay una asíntota por la izquierda, se ha visto en el apartado anterior.
  En $x = -3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} \dfrac{x^3}{x^2-9} = \left[\dfrac{-27}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -3^+} \dfrac{x^3}{x^2-9} = \left[\dfrac{-27}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: No hay.

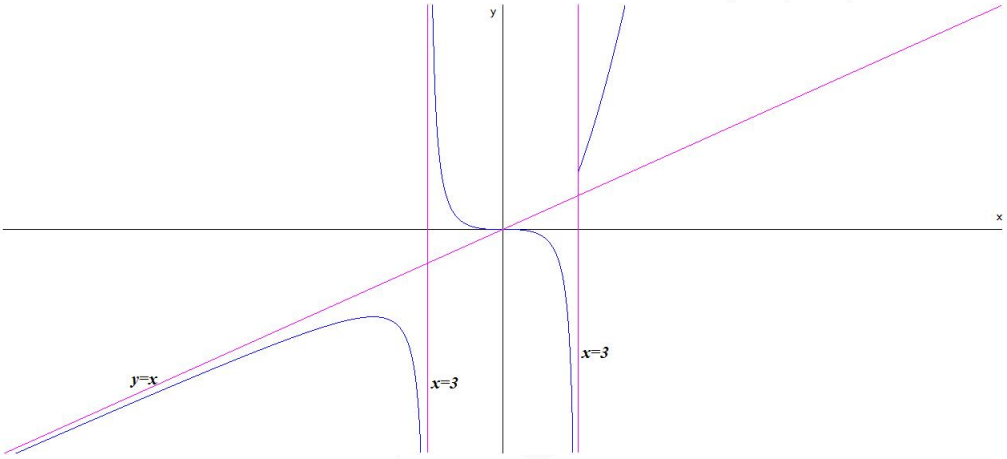
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2-9} = -\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 - 9x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 9} - x \right) = 0$$

$$y = x$$



Opción B

Problema 3.20.12 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.

b) Determínense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

Solución:

a) Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 3 \Longrightarrow (0, 3)$.
Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$ y $(-3, 0)$.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} (x^3 + x^2 - 5x + 3) = -\infty \quad \lim_{x \longrightarrow \infty} (x^3 + x^2 - 5x + 3) = \infty$$

b) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ y $f'(a) = 3 \Longrightarrow 3a^2 + 2a - 5 = 3 \Longrightarrow 3a^2 + 2a - 8 = 0 \Longrightarrow a = -2$ y $a = \dfrac{4}{3}$.

3.20.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.20.13 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$$

a) Determínense las asíntotas verticales y horizontales de f, si las hubiese.

b) Calcúlese la derivada de $f(x)$, para los valores de x en donde f es derivable y determínese la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $x = 1$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales:
En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

En $x = -2$:

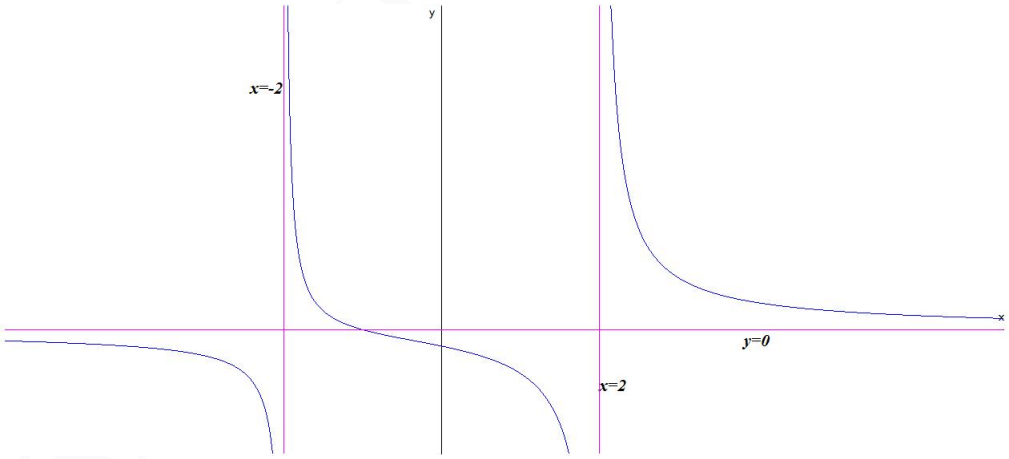
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

☛ Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-4} = 0$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2+2x+4}{(x^2-4)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -\dfrac{7}{9}$



Opción B

Problema 3.20.14 *(2 puntos)* Considérese la función de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x < 0 \\ a + e^{-5x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determínese el valor de a para que la función sea continua en $x = 0$.

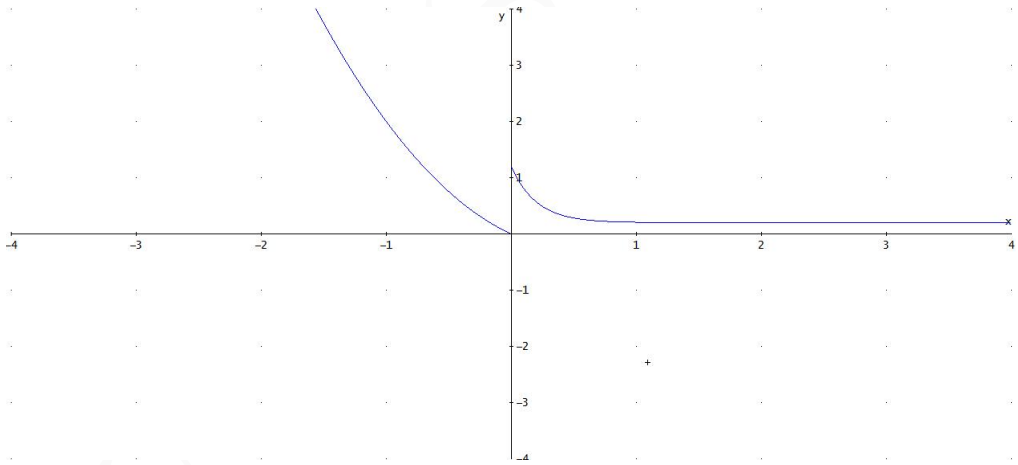
b) Para $a = 1/5$, calcúlese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1/5$, y la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (x^2 - x) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (a + e^{-5x}) = a + 1 \end{cases} \Longrightarrow a + 1 = 0 \Longrightarrow a = -1$$

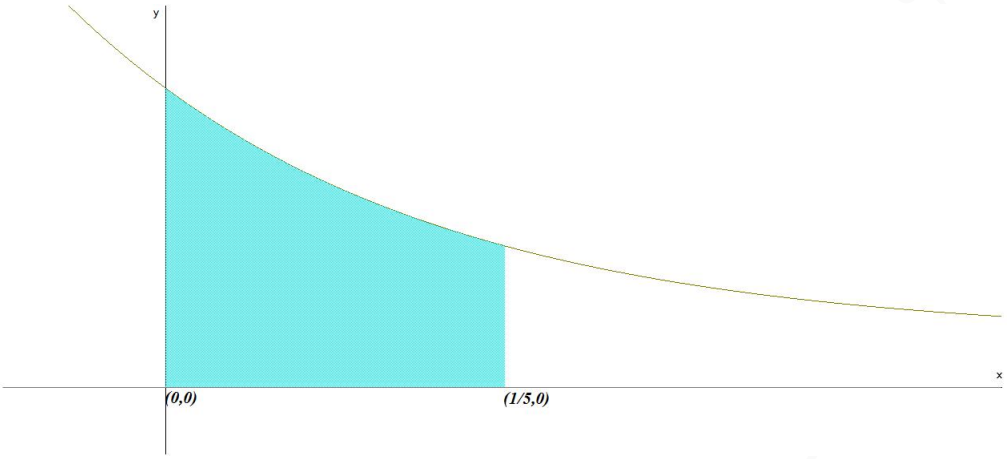
b) En el intervalo $[0, 1/5]$ la función es $f(x) = \dfrac{1}{5} + e^{-5x}$ comprobamos si la función corta al eje OX en ese intervalo:
$f(x) = \dfrac{1}{5} + e^{-5x} = 0 \Longrightarrow e^{-5x} = -\dfrac{1}{5}$ no tiene soluciones reales.



$$F(x) = \int \left(\frac{1}{5} + e^{-5x}\right) dx = \frac{x - e^{-5x}}{5} + C$$

$$S_1 = \int_0^{1/5} \left(\frac{1}{5} + e^{-5x}\right) dx = F\left(\frac{1}{5}\right) - F(0) = \frac{6}{25} - \frac{1}{5e} \simeq 0,166$$

$$S = |S_1| = \frac{6}{25} - \frac{1}{5e} \simeq 0,166 \ u^2$$



Problema 3.20.15 *(2 puntos)* considera la función de variable real

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x}$$

a) Determínense las asíntotas verticales y horizontales, si las hubiese.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-3}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-3}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

  En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 0$.

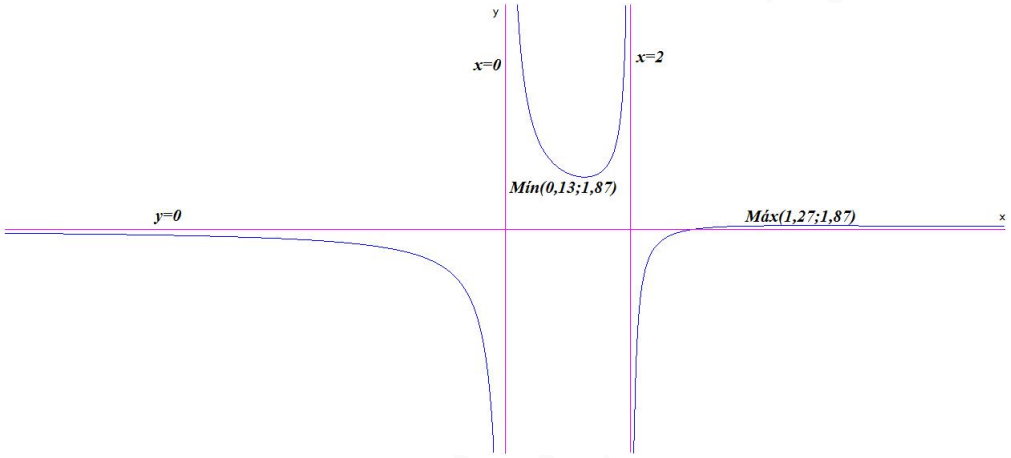
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2-2x} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2-6x+6}{x^2(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$

	$(-\infty, 3-\sqrt{3})$	$(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$	$(3+\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(3-\sqrt{3},2)\cup(2,3+\sqrt{3})$, y decreciente en el intervalo $(-\infty,0)\cup(0,3-\sqrt{3})\cup(3+\sqrt{3},\infty)$, tiene un mínimo en el punto $\left(3+\sqrt{3},\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)=(0,13;1,87)$ y un máximo en $\left(3-\sqrt{3},\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)=(1,27;1,87)$.



3.21. Año 2020

3.21.1. Modelo

Opción A

Problema 3.21.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} -x+a & \text{si} \quad x<-8 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si} \quad -8\leq x<1 \\ \ln x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

donde ln denota el logaritmo neperiano y $a\in\mathbb{R}$. Se pide:

a) Proporcionar el valor del parámetro a para que la función anterior sea continua en el punto de abscisa $x=-8$ y analizar la continuidad de la función en el resto de los puntos de su dominio.

b) Obtener la recta tangente a la función en el punto $x=e$ y estudiar el crecimiento/decrecimiento de esta recta. Justifique su respuesta.

Solución:

a) Continuidad en $x=-8$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -8^-}(-x+a)=8+a \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -8^+}\sqrt[3]{x}=-2 \end{cases} \Longrightarrow 8+a=-2\Longrightarrow a=-10$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \sqrt[3]{x} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \ln x = 0 \end{cases}$$

En $x = 1$ la función es discontinua y no evitable, hay un salto concluimos que para $a = -10$ la función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

b) Cuando $x = e$ la rama es $f(x) = \ln x$:

$$a = e,\ \ b = f(a) = f(e) = 1,\ \ f'(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow m = f'(a) = \frac{1}{e} \Longrightarrow$$

$$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Longrightarrow y = \frac{1}{e}x$$

Como la pendiente de esta recta $m = \dfrac{1}{e} > 0 \Longrightarrow$ la recta es creciente.

Problema 3.21.2 *(2 puntos)* Dada la curva

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

a) Halle el punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y - 6x + 1 = 0$, indicando su abscisa y ordenada.

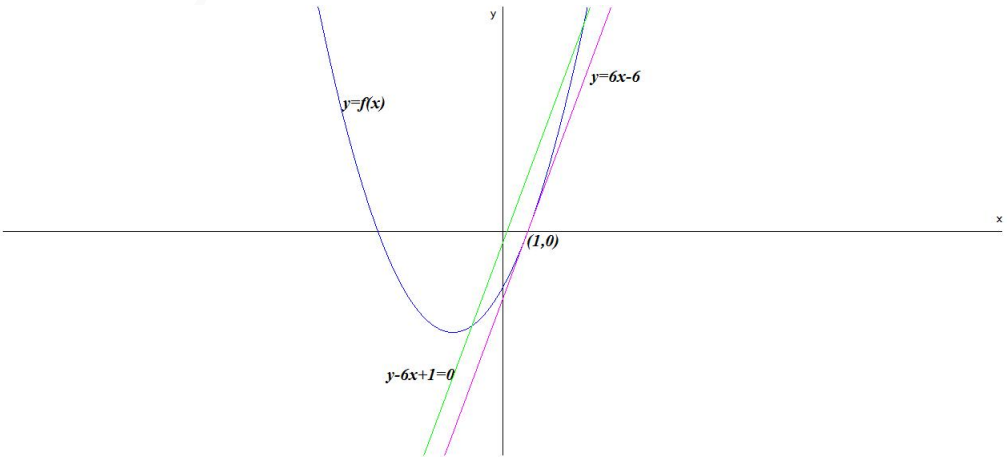
b) Calcule el área del recinto acotado del plano limitado por la gráficas de $f(x)$ y $g(x) = -x^2 + 4x + 3$.

Solución:

a) $y = 6x - 1 \Longrightarrow$la pendiente de la recta es $m = 6$

$f'(x) = 2x + 4$ la pendiente de la recta es $m = f'(a) = 2a + 4 = 6 \Longrightarrow a = 1$ y el punto de tangencia será $(1, f(1)) = (1, 0)$. La recta es:

$$y - 0 = 6(x - 1) \Longrightarrow y = 6x - 6$$

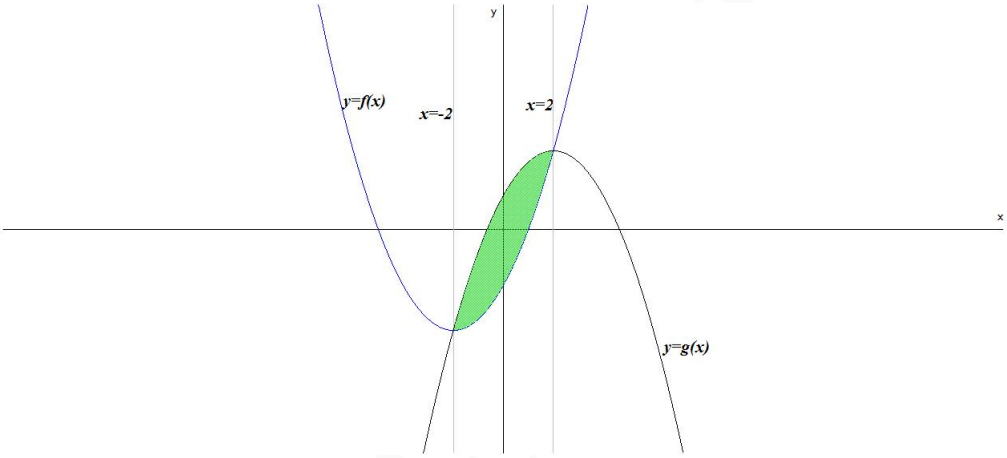


b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 + 4x - 5 = -x^2 + 4x + 3 \Longrightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (2x^2 - 8)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 8x$$

$$S_1 = \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\, dx = F(2) - F(-2) = \left(\frac{16}{3} - 16\right) - \left(-\frac{16}{3} + 16\right)$$

$$= -\frac{64}{3} \Longrightarrow S = |S_1| = \frac{64}{3}\ u^2$$



Opción B

Problema 3.21.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2}$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcule $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$.

b) Halle el área del recinto acotado del plano delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, y es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

Tiene un Máximo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ y un mínimo en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -e^{-1/2}\right)$.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}}{2xe^{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\infty} = 0$$

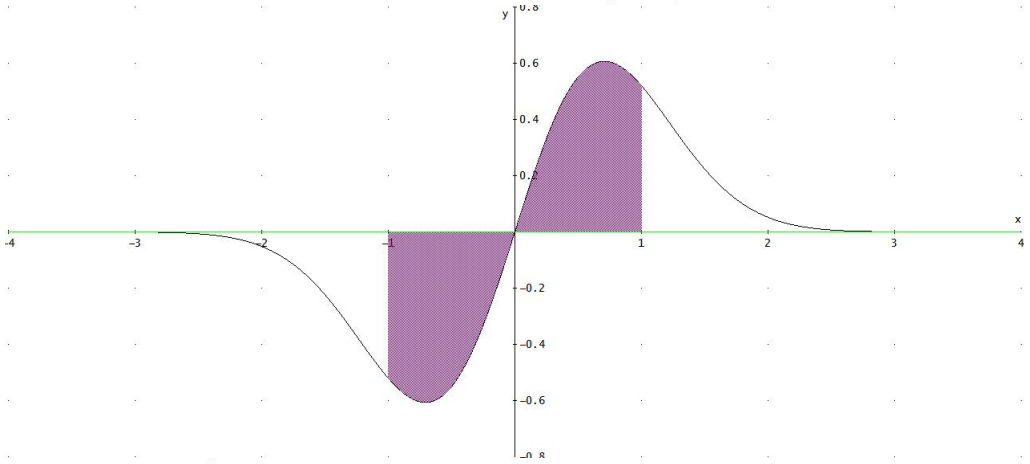
b) La función $f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ corta al eje OX en $x = 0$ y tendremos dos recintos de integración: $[-1, 0]$ y $[0, 1]$.

$$F(x) = \int \sqrt{2}xe^{-x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x^2}$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x) = F(0) - F(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} f(x) = F(1) - F(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \simeq 0,894\ u^2$$



3.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.21.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en este punto.

b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

Solución:

a) $3x + x^2 = x(3 + x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -3 \Longrightarrow$
Dom$(f) = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

En $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \left[\frac{0}{0}\right] + 4 = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{4 - 3x^2}{3 + 2x} + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} \Longrightarrow$$

La función f presenta en el punto $x = 0$ una discontinuidad evitable (un agujero) La extensión por continuidad que necesita esta función para ser continua en ese punto sería hacer $f(0) = \frac{16}{3}$.

b) **Asíntotas**:

- **Verticales**: En $x = 0$ no hay asíntota por el apartado anterior. Analizamos en $x = -3$:

$$\lim_{x \longrightarrow -3^-} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \left[\frac{-5}{0^-}\right] + 4 = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \left[\frac{-5}{0^+}\right] + 4 = -\infty$$

- **Horizontales**: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = -\infty$$

- **Oblicuas**: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-x^2 + 4x + 16}{x^2 + 3x} = -1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{7x + 16}{x + 3} = 7$$

$$y = -x + 7$$

Problema 3.21.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

Solución:

a) $b = f(-1) = 0$. $f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x \Longrightarrow m = f'(-1) = 3$ Luego la ecuación de la recta tangente será:

$$y = 3(x + 1) \Longrightarrow y = 3x + 3$$

b) $-x^4 + x^3 + 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$. Como $x \geq 0$ el intervalo de integración será el $[0, 2]$.

$$S = \int_0^2 (-x^4 + x^3 + 2x^2) = \frac{-x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\Big]_0^2 = \frac{44}{15}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.21.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x+k)e^{-\frac{x}{2}}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.

b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

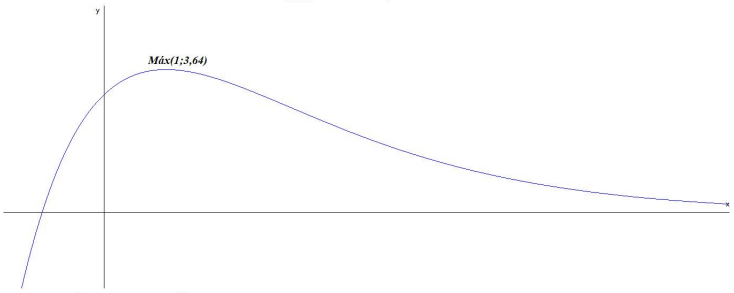
a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x+k-2) \text{ y } f'(1) = 0 \Longrightarrow \frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}(1-k) = 0 \Longrightarrow k = 1$$

b) Si $k = 1 \Longrightarrow f(x) = 3(x+1)e^{-\frac{x}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$, y decreciente en el intervalo $(1, \infty)$ con un máximo en $\left(1, \frac{6}{\sqrt{e}}\right) = (1; 3,64)$.



3.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.21.7 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$$

a) Determine el valor de del parámetro real a para que el punto de abscisa $x = -1$ de la función $f(x)$ sea un máximo relativo.

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ para $a = 1$.

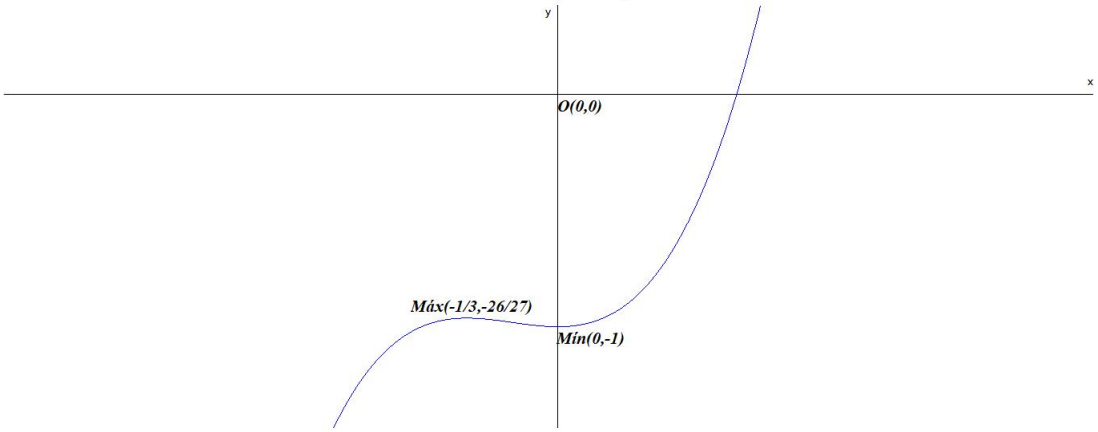
Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 2ax \Longrightarrow f'(-1) = 6 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 3$
$f''(x) = 12x + 2a \Longrightarrow f''(-1) = -12 + 6 = -6 < 0 \Longrightarrow x = -1$ es un máximo relativo.

b) Si $a = 1 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 + x^2 - 1 \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -\dfrac{1}{3}$.

	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup (0, \infty)$, y decreciente en el intervalo $\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)$, tiene un mínimo en el punto $(0, -1)$ y un máximo en $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{26}{27}\right)$.



Opción B

Problema 3.21.8 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real:

$$f(x) = ax^3 - x^2 - x + a$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que haya un punto de inflexión en $x = 1$.

b) Para $a = 2$, calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = 3ax^2 - 2x - 1 \Longrightarrow f''(x) = 6ax - 2$, $f''(1) = 6a - 2 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{3}$

b) $a = 2 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$. La función no tiene puntos de corte con el eje de abscisas en el intervalo $[0, 1]$, luego:

$$S = \int_0^1 (2x^3 - x^2 - x + 2)\, dx = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_0^1 = \frac{5}{3}\ u^2$$

Problema 3.21.9 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1} & \text{si} \quad x > 1 \\ \\ -x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x)$. ¿Es la función $f(x)$ continua en todo su dominio?.

b) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (-x^2) = -1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{2x-4}{2x} = -1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = -1$$

Y como $f(1) = -1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 1$.

b) La rama $x \leq 1$ no tiene asíntotas, estudiamos la rama $x > 1$:

- Verticales: Las únicas posibles son $x = 1$ (por el apartado anterior no lo es) y $x = -1$ no está en la rama, luego no hay asíntotas verticales.
- Horizontales: $y = 1$.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

3.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.21.10 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x}{2x^2+1} & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 2m + \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudie los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.

b) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje OX:

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{6x}{2x^2+1} = 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (2m + \ln x) = 2m \implies 2m = 2 \Longrightarrow m = 1 \\ f(1) = 2m \end{cases}$$

En $x < 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{6x}{2x^2+1} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-12x^2+6}{(2x^2+1)^2}$

b) En el intervalo $[-1, 0]$ la función es $f(x) = \dfrac{6x}{2x^2+1}$ y no corta al eje OX en ese intervalo.

$$S_1 = \int_{-1}^{0} \frac{6x}{2x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\left(\ln(2x^2+1)\right]_{-1}^{0} = -\frac{3\ln 3}{2}$$

$$S = |S_1| = \left|-\frac{3\ln 3}{2}\right| = \frac{3\ln 3}{2} \simeq 1,65\ u^2$$

Opción B

Problema 3.21.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{ax^2-3}{x^2-5}$$

a) Calcule el valor del parámetro $a \in \overline{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$.

b) Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{ax^2-3}{x^2-5} = a = -1$$

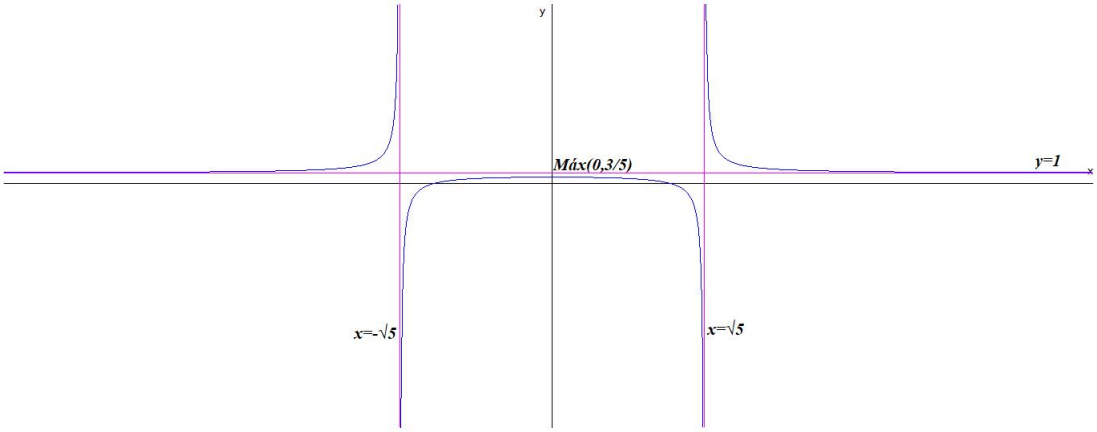
b) Si $a = 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2-5}$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{5}\}$.

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-5)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

$\Longrightarrow x = 0$ es un máximo local.

La función crece en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, 0)$ y decrece en el intervalo $(0, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$.



Problema 3.21.12 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real

$$f(x) = e^{2x} + x$$

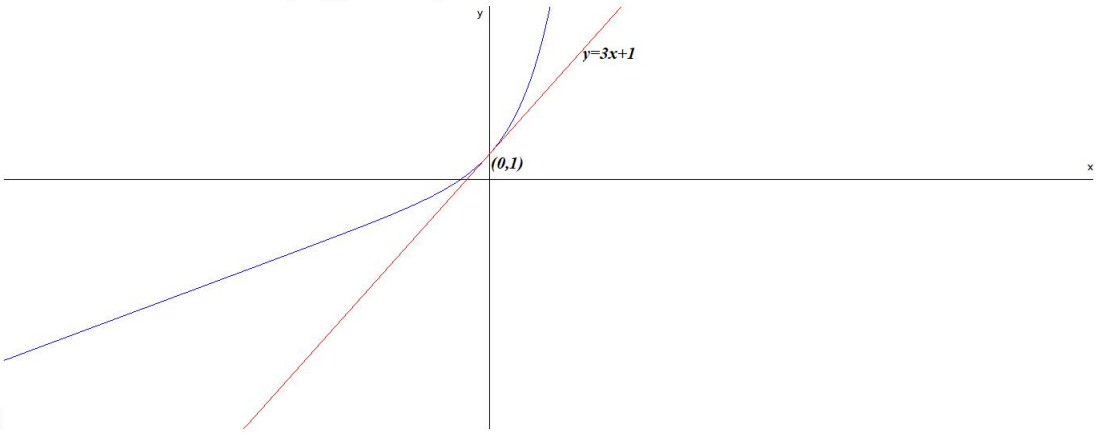
a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$.

b) Calcule

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Solución:

a) $a = 0$, $f'(x) = 2e^{2x} + 1 \Longrightarrow m = f'(0) = 3$ y $b = f(0) = 1$ como $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 1 = 3x \Longrightarrow y = 3x + 1$.



b) $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x} + x)\,dx = \frac{e^{2x} + x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{e^2}{2} \simeq 3,6945$

3.22. Año 2021

3.22.1. Modelo

Opción A

Problema 3.22.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a) Obtenga los coeficientes reales a, b y c, de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.

b) Para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$, calcule la integral $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b, \quad y = 6x + 8$$

a) $$\begin{cases} f'(-3) = 0 \Longrightarrow -6a + b = 0 \\ m = f'(0) = 6 \Longrightarrow b = 6 \\ f(0) = 6 \cdot 0 + 8 = 8 \Longrightarrow c = 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = 8 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f(x) = x^2 + 6x + 8$$

b) Si $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1 \Longrightarrow f(x) = 2x^2 + x + 1$:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^e \frac{2x^2 + x + 1}{x}\,dx = \int_1^e \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right)\,dx =$$

$$x^2 + x + \ln x\Big]_1^e = e^2 + e - 1 \simeq 9,107$$

Problema 3.22.2 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos.

Solución:

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2} = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
Asíntotas:

☛ Verticales:
En $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{x^3 + 4}{x^2} = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x^3 + 4}{x^2} = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

☛ Horizontales: No hay.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=\infty\quad\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=-\infty$$

☛ Oblicuas: $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1$$

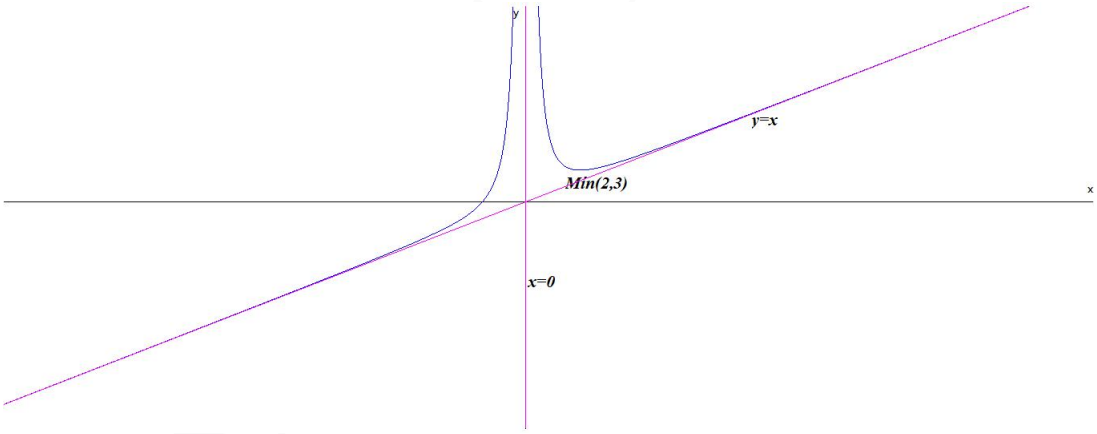
$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+4-x^3}{x^2}=0\Longrightarrow y=x$$

b) $f'(x)=\dfrac{x^3-8}{x^3}=0\Longrightarrow x=2$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$, y decreciente en el intervalo $(0,2)$, tiene un mínimo relativo en el punto $(2,3)$.



Opción B

Problema 3.22.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax-\dfrac{1}{9} & \text{si}\quad x\leq 0\\[2ex] \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si}\quad x>0\end{cases}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.

b) Para $a = 0$ determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a) Estudiamos la continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \left(x^2 + ax - \dfrac{1}{9}\right) = -\dfrac{1}{9} \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x+1}{x^2-9} = -\dfrac{1}{9} \\ \\ f(0) = -\dfrac{1}{9} \end{cases} \Longrightarrow$$

La función es continua en $x = 0$ pero no lo es en $x = 3 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.
Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$, que es el único punto del dominio en el que hay duda.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \\ -\dfrac{x^2 + 2x + 9}{(x^2-9)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Tenemos que $f'(0^-) = a$ y $f'(0^+) = -\dfrac{1}{9} \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{9}$. Para este valor la función sería derivable en todo el dominio de la función $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{9} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Asíntotas:
En la rama $x \leq 0$ no hay asíntotas, se trata de un polinomio.
En la rama $x > 0$

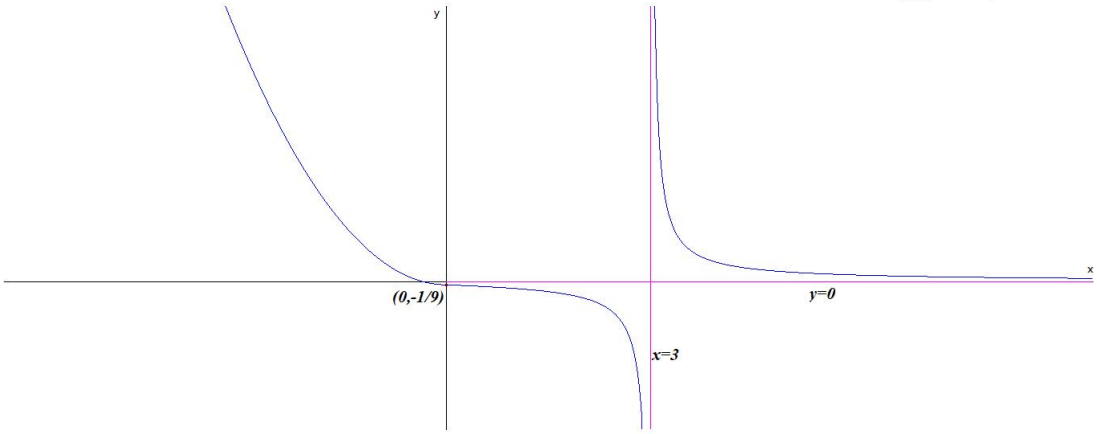
- Verticales:
  En $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \dfrac{x+1}{x^2-9} = \left[\dfrac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{x+1}{x^2-9} = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-9} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.



3.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.22.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-1}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.
Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{5}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{5}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

☛ Horizontales: No hay $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \infty$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

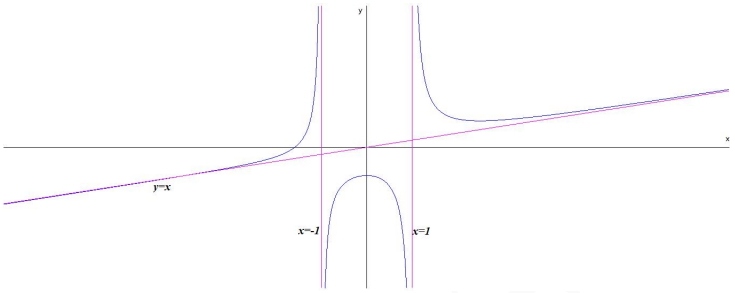
$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2 - 1} - x \right) = 0$$

Luego

$$y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x(x^3 - 3x - 8)}{(x^2 - 1)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = 0$ y $b = f(0) = -4$. Luego $y + 4 = 0(x - 0) \Longrightarrow y = -4$



Problema 3.22.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

denotando por ln la función logaritmo neperiano.

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas en los intervalos en los que están definidas. Hay que estudiar continuidad en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - ax) = 1 - a \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (\ln x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$$

b) Para $a = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Tenemos $x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1 \Longrightarrow$ la función no corta al eje de abscisas en el intervalo $[-1, 0]$. Luego:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^2 - x)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{0} = \frac{5}{6}$$

$$S = |S_1| = \frac{5}{6}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.22.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real, definida $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)\, dx$$

Solución:

a) $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 1$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-3, 1)$ y creciente en $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$.
Tiene un Máximo local en $(-3, 6e^{-3})$ y un Mínimo local en $(1, -2e)$

b)

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)\, dx = \int_1^2 e^{-x}(x^2 - 3)e^x\, dx = \int_1^2 (x^2 - 3)\, dx = \frac{x^3}{3} - 3x\Big]_1^2 = -\frac{2}{3}$$

3.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.22.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

a) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Asíntotas verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = -\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \infty$$

☛ Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x(1-x)^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3}{(1-x)^2} - x\right) = 2$$

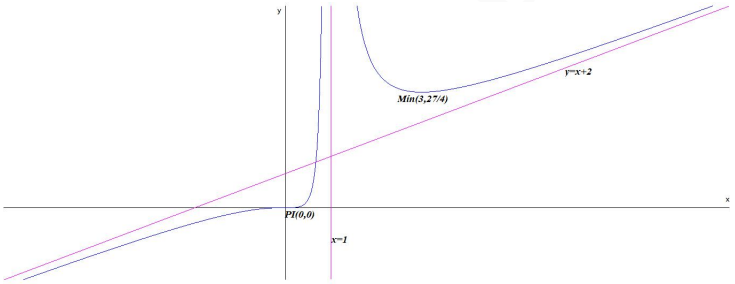
$$y = x + 2$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(1, 3)$, tiene un mínimo en el punto $\left(3, \dfrac{27}{4}\right)$.

En el punto $(0, 0)$ hay un punto de inflexión.



Problema 3.22.8 *(2 puntos)* Sea $f(x) = x^2 + ax$ donde a es un parámetro real.

a) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$ y $F(2) = 9$.

b) Para $a = -2$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (x^2 + ax)\, dx = +C$

$F(0) = 0 + 0 + C = 3 \Longrightarrow C = 3$

$F(2) = \dfrac{8}{3} + 2a + C = 9 \Longrightarrow 2a = 9 - C - \dfrac{8}{3} = 9 - 3 - \dfrac{8}{3} \Longrightarrow a = \dfrac{5}{3}$

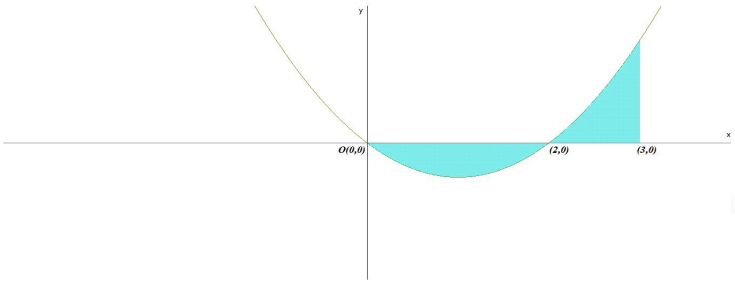
$f(x) = x^2 + \dfrac{5}{3}x$ y $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{6} + 3$

b) Para $a = -2 \Longrightarrow f(x) = x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$. La gráfica de la función corta al eje de abscisas en el intervalo $[0, 3]$ en $x = 2$.

$$S_1 = \int_0^2 (x^2 + 2x)\, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 \Big]_0^2 = -\frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 + 2x)\, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 \Big]_2^3 = \frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\ u^2$$



Opción B

Problema 3.22.9 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x$$

donde a y b son parámetros reales.

a) Calcule a, b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1, 2)$ sea paralela a la recta $y = -4x$.

b) Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$.

Solución:

a) $f(1) = a + b + 2 = 2 \Longrightarrow a + b = 0$

$$f'(x) = 2ax - \frac{b}{x^2} + 2 \Longrightarrow m = f'(1) = 2a - b + 2 = -4 \Longrightarrow 2a - b = -6$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a + b = 0 \\ 2a - b = -6 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

b) $f(1) = a + b + 2 = 2 \Longrightarrow a + b = 0$

$$f''(x) = 2a + \frac{2b}{x^2} \Longrightarrow f''(1) = 2(a + b) = 0 \Longrightarrow a + b = 0$$

Luego no hay solución única, los parámetros tienen que cumplir $a = -b$.

3.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.22.10 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \dfrac{3a}{x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?

b) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) ☛ **Continuidad en** $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} (x^2 - x - 1) = 5 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{3a}{x} = a \\ f(3) = 5 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ continua si } a = 5$$

Cuando $a = 5$ las dos ramas son continuas y también lo es en $x = 3 \Longrightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$.

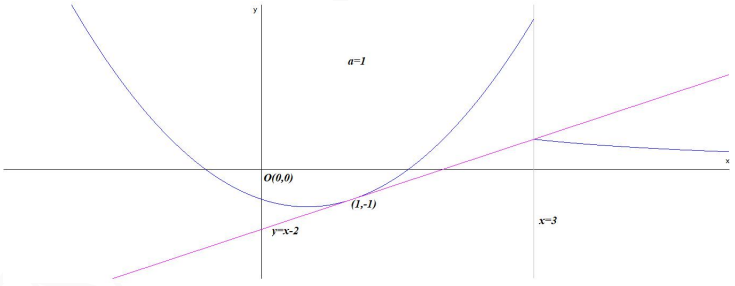
☛ **Derivabilidad en** $x = 3$ para $a = 5$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x < 3 \\ -\dfrac{15}{x^2} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(3^-) = 5 \\ f'(3^+) = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f \text{ no es derivable en } x = 3$$

Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$ para $a = 5$.

b) Para $a = 1$ en $x = 1$ la función es $f(x) = x^2 - x - 1 \Longrightarrow b = f(1) = -1$ y $f'(x) = 2x - 1 \Longrightarrow m = f'(1) = 1$. La ecuación de la recta tangente es $y + 1 = x - 1 \Longrightarrow y = x - 2$



Opción B

Problema 3.22.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
Asíntotas:

- Asíntotas verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

- Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} = -\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} = \infty$$

- Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-2x^2}{x(x^2-2x+1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-2x^2}{x^3-2x^2+x} = 1$$

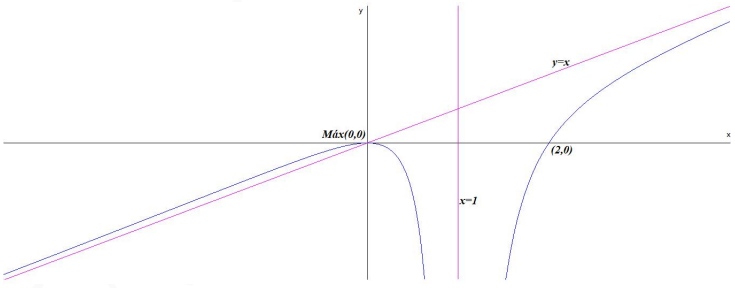
$$n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1} - x\right) =$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{-x}{x^2-2x+1}\right) = 0 \Longrightarrow y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x(x^2-3x+4)}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0.$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 1)$, tiene un máximo en el punto $(0, 0)$.



Problema 3.22.12 *(2 puntos)* Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ es:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

donde a y b son parámetros reales.

a) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.

b) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

Solución:

a) $f(x) = \int (3x^2+8x)\,dx = x^3+4x^2+C$, como $f(1) = 11 \Longrightarrow f(1) = 1+4+C = 11 \Longrightarrow C = 6$.
Luego $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6$

b) $f'(x) = 3x^2 + 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -\dfrac{8}{3}$

$$f''(x) = 6x + 8 \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 8 > 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ mínimo} \\ \\ f''\left(-\dfrac{8}{3}\right) = -8 < 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{8}{3} \text{ máximo} \end{cases}$$

Hay un mínimo relativo en $(0, 6)$ y un máximo relativo en $\left(-\dfrac{8}{3}, \dfrac{418}{27}\right)$.

3.23. Año 2022

3.23.1. Modelo

Opción A

Problema 3.23.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcule $\displaystyle\int_0^1 2xf(x)\,dx$

Solución:

a) $x = a = 0 \Longrightarrow b = f(0) = 1$
$f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow m = f'(0) = 0$
$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 1 = 0 \Longrightarrow y = 1$

b) $F(x) = \displaystyle\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int 2x(1+x^2)^{1/2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array}\right] = \int 2xt^{1/2}\,\frac{dt}{2x} = \int t^{1/2}\,dt =$

$\dfrac{t^{3/2}}{3/2} + C = \dfrac{2\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + C$

$\displaystyle\int_0^1 2xf(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \simeq 1,219$

Opción B

Problema 3.23.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 2x - 3}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.

b) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

Solución:

a) $x^2+2x-3=0 \Longrightarrow x=1$ y $x=-3 \Longrightarrow \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$.
Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x=-3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -3^-} \dfrac{10}{x^2+2x-3}=\left[\dfrac{10}{0^+}\right]=+\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -3^+} \dfrac{10}{x^2+2x-3}=\left[\dfrac{10}{0^-}\right]=-\infty \end{cases}$$

- En $x=1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{10}{x^2+2x-3}=\left[\dfrac{10}{0^-}\right]=-\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{10}{x^2+2x-3}=\left[\dfrac{10}{0^+}\right]=+\infty \end{cases}$$

☛ Horizontales: $y=0$.

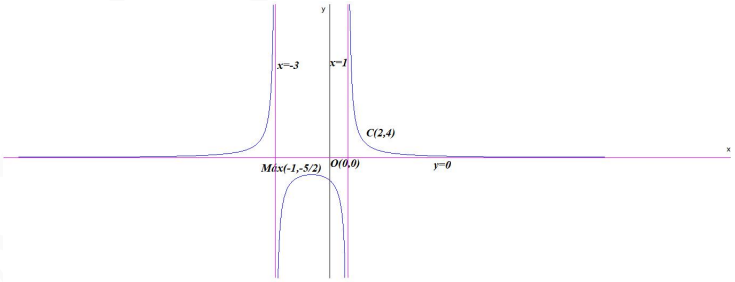
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{10}{x^2+2x-3}=\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3+4}{x^2}=0$$

☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x)=-\dfrac{20(x+1)}{(x^2+2x-3)^2}=0 \Longrightarrow x=-1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)$, y decreciente en el intervalo $(-1,1)\cup(1,\infty)$, tiene un máximo relativo en el punto $\left(-1,-\dfrac{5}{2}\right)$.



Problema 3.23.3 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en su dominio.

b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas.
Estudiamos la continuidad en $x = 2$

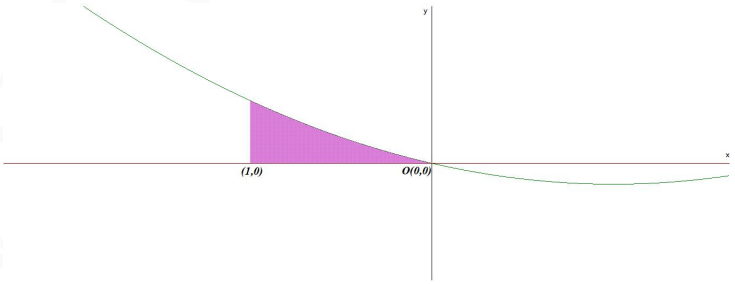
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \left(ax^2 - 2x\right) = 4a - 4 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \ln(x-1) = 0 \\ f(2) = 4a - 4 \end{cases} \Longrightarrow 4a - 4 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a = 1 \Longrightarrow f$ es continua en todo el dominio de la función $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

b) En esa rama $f(x) = x^2 - 2x$ que corta al eje de abscisas en $x = 0$. Luego el único punto de corte con el eje OX está en la frontera del intervalo $[-1, 0]$.

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 \Big]_{-1}^{0} = \frac{4}{3}$$

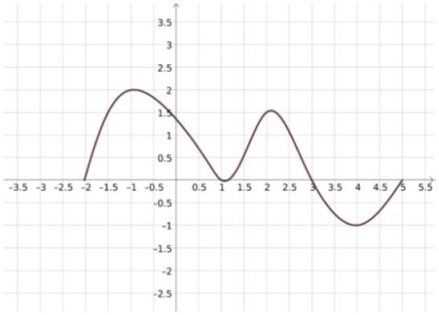
$$S = |S_1| = \frac{4}{3} \simeq 1,3333 \ u^2$$



3.23.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.23.4 *(2 puntos)* La figura dada representa la gráfica de cierta función f.



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$.

a) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

b) Determine razonadamente cuál es el signo de

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$$

Solución:

a) $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ creciente $(-2,-1) \cup (1,2) \cup (4,5)$.

b) $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx = S_1 + S_2$

Tenemos $S_1 > 0$, $S_2 < 0$ y $|S_1| > |S_2| \Longrightarrow S_1 + S_2 > 0$

Opción B

Problema 3.23.5 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

a) Determine sus asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

b) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

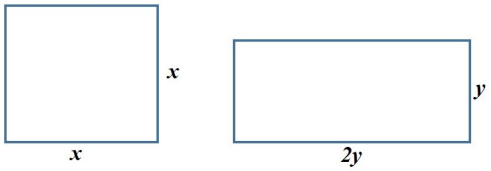
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x - 1}\right) = 0$$

$$y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \Longrightarrow f'(2) = 0$

Problema 3.23.6 *(2 puntos)* Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm^2 para el cuadrado y 10 céntimos de euro/^{2} para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.
Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 cifras decimales para realizar los cálculos.
Solución:



- $L(x, y) = 4x + 6y = 450 \Longrightarrow y = \dfrac{225 - 2x}{3}$
- $C(x, y) = 16x^2 + 20 \cdot y^2 \Longrightarrow$
  $C(x) = 16x^2 + 20\left(\dfrac{225 - 2x}{3}\right)^2 = \dfrac{4(56x^2 - 4500x + 253125)}{9}$
- $C'(x) = \dfrac{16(28x - 1125)}{9} = 0 \Longrightarrow x = 40,179$ cm $C''(x) = \dfrac{448}{9} \Longrightarrow C''(40,179) = \dfrac{448}{9} > 0 \Longrightarrow x = 40,179$
  cm es un mínimo relativo, con $y = \dfrac{225 - 2 \cdot 40,179}{3} = 48,214$ cm
- Para el cuadrado necesita $4x = 4 \cdot 40,179 = 160,714$ cm y para hacer el rectángulo $6y = 6 \cdot 48,214 = 289,284$ cm

3.23.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.23.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si} \quad x < -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 \le x \le 1 \\ x + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determine los valores de a y b que hacen que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Para $a = b = -8$, calcule

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$$

Solución:

a) Las tres ramas son continuas, habrá que estudiar la continuidad en $x = -2$ y $x = 1$.
En $x = -2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (2x - a) = -4 - a \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} x^2 = 4 \\ f(-2) = 4 \end{cases} \implies -4 - a = 4 \implies a = -8$$

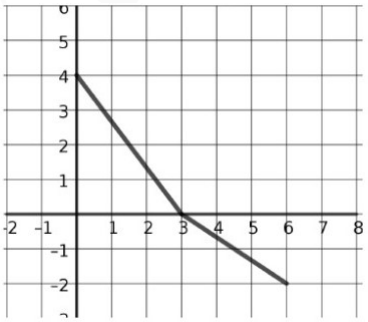
En $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x + b) = 1 + b \\ f(1) = 1 \end{cases} \implies 1 = 1 + b \implies b = 0$$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 8 & \text{si} & x < -2 \\ x^2 & \text{si} & -2 \le x \le 1 \\ x - 8 & \text{si} & x > 1 \end{cases}$ $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} (2x+8)\,dx + \int_{-2}^{0} x^2\,dx = x^2 + 8x\Big]_{-3}^{-2} + \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{0} = 4 - 16 - (9 - 24) + 0 + \frac{8}{3} = \frac{17}{3}$

Opción B

Problema 3.23.8 *(2 puntos)* La siguiente figura representa la gráfica de una función lineal a trozos $f : [0, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$



a) Determine razonadamente el valor de la integral definida $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$

b) ¿Cuál número es mayor, $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ o $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx$? Razone tu respuesta.

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = \left[S = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}\right] = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$

b) $\displaystyle\int_3^6 f(x)\,dx = -\frac{3\cdot 2}{2} = -3$

$\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx = 6 - 3 = 3$

Luego $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx > \int_0^6 f(x)\,dx$

Problema 3.23.9 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-K)^2}$$

a) Obtenga el valor de la constante K para que la recta tangente a la función en $x = 9$ sea paralela al eje de las x. Indique la expresión de dicha recta.

b) Para $K = 3$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ y clasifique los extremos relativos de esta función.

Solución:

a) La pendiente de esta tangente $m = f'(9) = 0$.

$f'(x) = \dfrac{x^2(x-3k)}{(x-k)^3} \Longrightarrow f'(9) = \dfrac{243(k-3)}{(k-9)^3} = 0 \Longrightarrow K = 3$

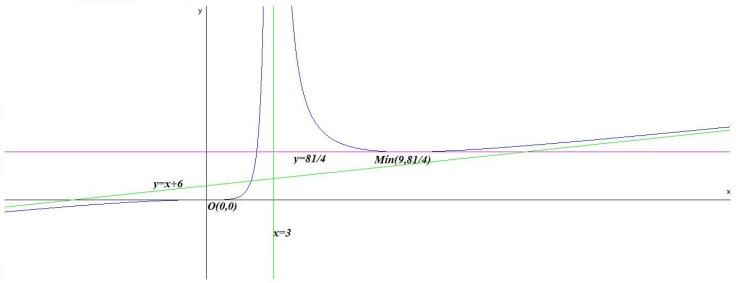
Para $K = 3 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{(x-3)^2} \Longrightarrow f(9) = \dfrac{81}{4}$

La recta horizontal es $y = \dfrac{81}{4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-3)^2} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{x^2(x-9)}{(x-3)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 9$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, 9)$	$(9, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (9, \infty)$ y decreciente en el $(3, 9)$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $\left(9, \dfrac{81}{4}\right)$.



3.23.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.23.10 *(2 puntos)* Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + ax + 3$.

a) Se define $h(x)$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \leq 1 \\ g(x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

¿Qué valor debe darle a la constante $a \in \mathbb{R}$ para que la función h sea continua en $\mathbb{R}$?

b) Para $a = 2$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de f y de g.

Solución:

a) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -x^2 + ax + 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ las dos ramas son polinómicas y continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 1$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 4x + 3) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + ax + 3) = a + 2 \\ h(1) = 0 \end{cases}$

Para que h sea continua en $x = 1 \Longrightarrow a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -2$

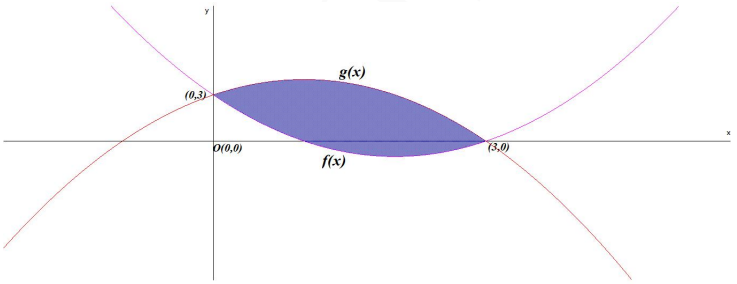
En conclusión si $a = -2$ la función h es continua en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3 \Longrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3$.

$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (2x^2 - 6x)\, dx = \dfrac{2x^3}{3} - 3x^2 + C$ $S_1 = \int_0^3 (f(x) - g(x))\, dx =$

$F(3) - F(0) = -9$

$S = |S_1| = 9\ u^2$



Opción B

Problema 3.23.11 *(2 puntos)*

a) Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ verifique que $f(2) = 4$ y $f'(2) = 0$.

b) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Solución:

a) $f(x) = ax + \dfrac{b}{x} \Longrightarrow f'(x) = a - \dfrac{b}{x^2}$

$$\begin{cases} f(2) = 4 \Longrightarrow 2a + \dfrac{b}{2} = 4 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow a - \dfrac{b}{4} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4a + b = 8 \\ 4a - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

b) Asíntotas de $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$y = x$$

Problema 3.23.12 *(2 puntos)* Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función

$$I(x) = x\frac{170 - 0,85x}{5},$$

en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.

a) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.

b) Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $C(x)/x$, no supere los diez mil euros.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

Solución:

a) La función beneficio sería:

$B(x) = I(x) - C(x) = x\dfrac{170 - 0,85x}{5} - (10 + 2x + x^2) \Longrightarrow$

$B(x) = -\dfrac{117x^2 - 3200x + 1000}{100}$

$B'(x) = \dfrac{1600 - 117x}{50} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1600}{117} \Longrightarrow 13675,21$ litros

$B''(x) = -\dfrac{117}{50} \Longrightarrow B''\left(\dfrac{1600}{117}\right) < 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1600}{117}$ es un máximo relativo con un beneficio de $B\left(\dfrac{1600}{117}\right) = 208,8034188 \Longrightarrow 208803,42€$

b) $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^2 + 2x + 10}{x} \leq 10 \Longrightarrow \dfrac{x^2 + 2x + 10}{x} - 10 \leq 0 \Longrightarrow$

$\dfrac{x^2 - 8x + 10}{x} \leq 0 \Longrightarrow x \in [1,550510257; 6,449489742]$.

Los costes medios inferiores a 10.000 euros se consiguen con una producción comprendida entre 1550,51 y 6449,48 litros.

3.23.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.23.13 *(2 puntos)*

a) Halle $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x^2+5}\,dx$

b) Considere $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+5}$ y $g(x) = \ln x$

Halle la derivada de la función compuesta $f \circ g(x)$

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x^2+5}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x}{2x^2+5}\,dx = \frac{1}{4}\ln|2x^2+5|\Big]_0^1 =$

$\dfrac{1}{4}(\ln 7 - \ln 5) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{7}{5} \simeq 0,08412$

b) Por la regla de la cadena $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$f'(x) = -\dfrac{2x^2-5}{(2x^2+5)^2} \Longrightarrow f'(g(x)) = -\dfrac{2(\ln x)^2 - 5}{(2(\ln x)^2+5)^2}$

$g'(x) = \dfrac{1}{x}$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\dfrac{2(\ln x)^2-5}{(2(\ln x)^2+5)^2} \cdot \dfrac{1}{x} = -\dfrac{2(\ln x)^2-5}{x(2(\ln x)^2+5)^2}$

Opción B

Problema 3.23.14 *(2 puntos)* Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ (x-a)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que f sea una función continua en su dominio.

b) Para $a = 1/2$, determine, si existen, los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de las x.

Solución:

a) Las ramas son continuas, son polinomios, hay que calcular a en $x = 1$
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2 - 1) = a - 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-a)^2 = (1-a)^2 \\ f(1) = a - 1 \end{cases} \implies a - 1 = (1-a)^2 \implies a = 1$ y $a = 2$. Con cualquiera de estos valores la función f es continua en el dominio de la función.

b) Si $a = \dfrac{1}{2} \implies f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

En la rama $x \leq 1$ es $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 1$

Corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \implies \dfrac{x^2}{2} - 1 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}$ la solución positiva no es válida está fuera del intervalo, luego el punto de corte es $(-\sqrt{2}, 0)$

En la rama $x > 1$ es $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$

Corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \implies \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \implies x = \dfrac{1}{2}$ la solución no es válida está fuera del intervalo.

Problema 3.23.15 *(2 puntos)* Un ensayo clínico indica que la cantidad de glucosa en sangre en ratones tras la ingesta de un determinado fármaco depende del tiempo transcurrido, t (en minutos), según la siguiente función expresada en mg/dl:

$$f(t) = 90 + Ct^2 e^{-t/5}, \quad 0 \leq t \leq 60$$

a) Obtenga razonadamente el valor de la constante C sabiendo que la tasa de variación instantánea de la cantidad de glucosa a los 5 minutos de la ingesta del producto es $15/e$.

b) Para $C = 3$, indique a partir de qué momento disminuye la cantidad de glucosa en sangre. Señale también la cantidad máxima de glucosa en sangre alcanzada tras la ingesta del fármaco.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

Solución:

a) $f'(t) = \dfrac{Cte^{-t/5}(10-t)}{5}$, $f'(5) = \dfrac{5C}{e} = \dfrac{15}{e} \implies C = 3$

b) Si $C = 3 \implies f(t) = 90 + 3t^2 e^{-t/5}$ y $f'(t) = \dfrac{3te^{-t/5}(10-t)}{5} = 0 \implies t = 10$

	$(0, 10)$	$(10, 60)$
$f'(t)$	$+$	$-$
$f(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 10)$ y decrece en el $(10, 60)$ con un máximo relativo en el punto $(10; 130, 60)$.
La cantidad de glucosa aumenta hasta los 10 minutos donde alcanza el máximo con 130,60 mg/dl. A partir de este tiempo decrece hasta los 60 minutos.

3.24. Año 2023

3.24.1. Modelo

Opción A

Problema 3.24.1 *(2 puntos)* Se pide:

a) Represente la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ prestando especial atención a la determinación de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Determine los valores de x en los que f alcanza máximos o mínimos relativos.

b) Represente la gráfica de $g(x) = f(x-3) + 2$, donde f es la función del apartado anterior.

Solución:

a) Calculamos

- ☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- ☛ Puntos de corte:
  - Con $OY \Longrightarrow f(0) = 1 \Longrightarrow (0, 1)$
  - Con $OX \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0 \Longrightarrow (-1,9; 0)$, $(0,35; 0)$ y $(1,5; 0)$ (complejos de obtener y no necesarios)
- ☛ Asíntotas no tiene.
- ☛ Monotonía: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

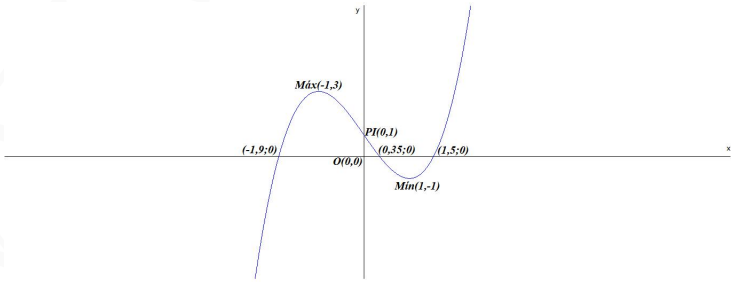
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(-1, 1)$, tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 3)$ y un mínimo relativo en $(1, -1)$.

- ☛ Curvatura: $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

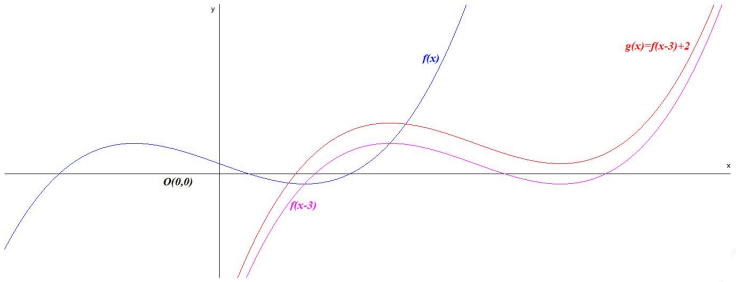
	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0) \frown$ y cóncava en el $(0, +\infty) \smile$. Tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$

- ☛ Representación gráfica:



b) $f(x-3)$ es la traslación horizontal derecha de 3 unidades de la función $f(x)$ y $g(x) = f(x-3)+2$ es la traslación vertical hacia arriba de dos unidades de la función $f(x-3)$.



Opción A

Problema 3.24.2 *(2 puntos)* Se pide:

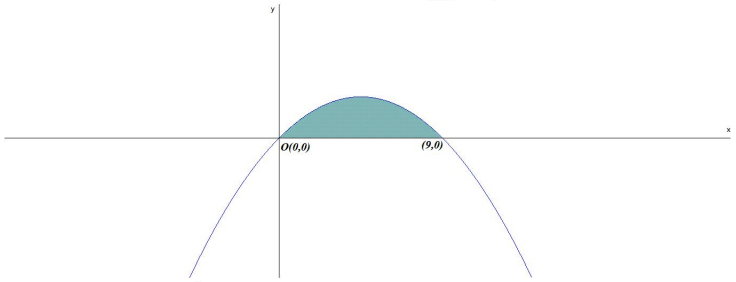
a) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por el eje de las x y superiormente por la parábola $y = 9x - x^2$.

b) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por la parábola $y = 9x - x^2$ y superiormente por las rectas tangentes a esa parábola en los puntos de corte con el eje de las x.

Solución:

a) $9x - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 9$. Los límites de integración son los extremos del intervalo $[0, 9]$. La función en este intervalo es positiva ($f(3) = 18 > 0$) y el resultado de la integral debe de ser positiva.

$$S = \int_0^9 (9x - x^2)\, dx = \frac{9x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^9 = \frac{243}{2} = 121,5\ u^2$$



b) $f'(x) = 9 - 2x$

En $(0, 0)$ la pendiente de la recta tangente es $m_0 = f'(0) = 9 \Longrightarrow y = 9x$ es la recta tangente en $(0, 0)$

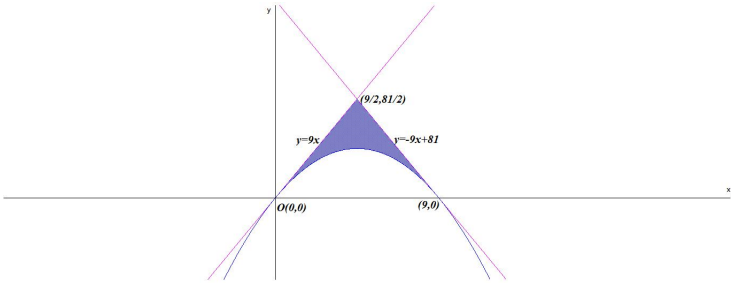
En $(9, 0)$ la pendiente de la recta tangente es $m_9 = f'(9) = -9 \Longrightarrow y = -9(x - 9) \Longrightarrow y = -9x + 81$ es la recta tangente en $(9, 0)$

Calculamos el punto corte de ambas rectas:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 9x \\ y = -9x + 81 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 9/2 \\ y = 81/2 \end{array} \right.$$

El área del triángulo formado por las dos tangentes y el eje de abscisas es $A = \dfrac{9 \cdot 81/2}{2} = \dfrac{729}{4}\ u^2$

El área buscada es $S_1 = A - S = \dfrac{729}{4} - \dfrac{243}{2} = \dfrac{243}{4} = 60,75\ u^2$



Problema 3.24.3 *(2 puntos)* Una pastelería hace diariamente una cantidad fija de dulces cuya masa requiere de un tiempo de reposo, el cual tiene que ser de una a dos horas. La pastelería usa un ingrediente secreto. La cantidad necesaria de ingrediente secreto, medida en gramos, varía en función del tiempo de reposo de la masa según la siguiente función:

$$Q(t) = \frac{1}{2}t^4 - 3t^2 + 5, \quad 1 \leq t \leq 2$$

siendo t el tiempo de reposo medido en horas.

a) La producción diaria de dulces tiene un coste fijo de 150 euros más el coste por el uso del ingrediente secreto, el cual cuesta 100 euros/gramo. Obtenga la función que representa el coste de producción diaria de estos dulces y encuentre el tiempo de reposo de la masa que minimiza dicho coste. Indique el valor del coste mínimo.

b) Obtenga el tiempo de reposo que maximiza el coste de producción e indique la cantidad de ingrediente secreto que se necesitaría en este caso.

Solución:

a) $C(t) = 150 + 100\left(\dfrac{1}{2}t^4 - 3t^2 + 5\right) = 50\left(t^4 - 6t^2 + 13\right)$
$C'(t) = 200t\left(t^2 - 3\right) = 0 \Longrightarrow t = \pm\sqrt{3}$, la solución negativa no es relevante.
$C''(t) = 600(t^2 - 1) \Longrightarrow C''(\sqrt{3}) = 1200 > 0 \Longrightarrow t = \sqrt{3}$ horas es un mínimo relativo con un coste de $C(\sqrt{3}) = 200€$
Tenemos $C(1) = 400$ y $C(2) = 250 \Longrightarrow$ el mínimo calculado es absoluto.

b) Por la visto en el apartado anterior el máximo coste se produce en $t = 1$ hora de reposo con una cantidad de $Q(1) = \dfrac{5}{2} = 2,5$ gramos.

3.24.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.24.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = 6x^2 + ae^x - 2, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a sabiendo que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = e - 1$.

b) Para $a = 1$, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 2x^3 + ae^x - 2x\Big]_0^1 = ae - a = e - 1 \Longrightarrow a(e-1) = e - 1 \Longrightarrow a = 1.$

b) La ecuación punto pendiente de una recta es $y - b = m(x - a)$, en nuestro caso $a = 0$.
$f(x) = 6x^2 + e^x - 2 \Longrightarrow f'(x) = 12x + e^x \Longrightarrow m = f'(0) = 1$ y $b = f(0) = -1 \Longrightarrow y + 1 = x \Longrightarrow y = x - 1$

Problema 3.24.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^4}{x^2+1} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Indique el dominio de la función $f(x)$ y analice su continuidad, señalando el tipo de discontinuidad si la presenta.

b) Determine las asíntotas de la función anterior.

Solución:

a) ☛ Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x^4}{x^2+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x+1} = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Longrightarrow f$ no es continua en $x = 0$ hay una discontinuidad no evitable, la función tiene un salto.

☛ En la rama $x \leq 0 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{-x^4}{x^2+1}$ el denominador no se anula para ningún valor de esta rama y, por tanto, es continua en toda la rama.

☛ En la rama $x > 0 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ el denominador se anula para $x = -1$ valor que no está en la rama y, por tanto, es continua en toda la rama.

☛ En conclusión, f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

☛ En conclusión, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, en $x = 0$ es $f(0) = 0$.

b) Asíntotas:

☛ En la rama $x \leq 0 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{-x^4}{x^2+1}$ el denominador no se anula para ningún valor de esta rama y, por tanto, no tiene verticales.
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Longrightarrow$ no hay horizontales.
$m = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \Longrightarrow$ no hay oblicuas.

☛ En la rama $x > 0 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ el denominador sólo se anula en $x = -1$ y no está en esta rama y, por tanto, no tiene verticales.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow$ no hay horizontales.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-x}{x+1}\right) = -1 \Longrightarrow$$

$$y = x - 1$$

.

Opción B

Problema 3.24.6 *(2 puntos)* Se consideran las siguientes funciones reales de variable real:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x, \quad g(x) = 4x$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el primer cuadrante del plano cartesiano.

Solución:

a) $f'(x) = -3x^2 + 4x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = -\dfrac{2}{3}$

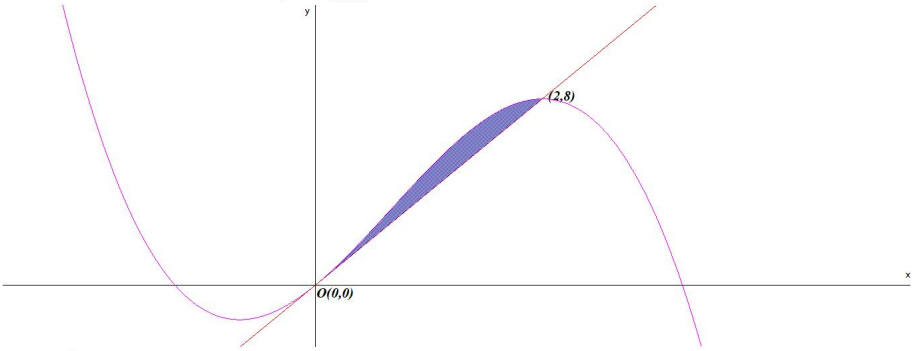
	$(-\infty, -2/3)$	$(-2/3, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2/3) \cup (2, \infty)$ y creciente en el $(-2/3, 2)$.

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow -x^3 + 2x^2 = 0 \Longrightarrow x_0 = 0$ y $x_1 = 2$.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (-x^3 + 2x^2)\,dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}$$

$$S = \left|\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx\right| = |F(2) - F(0)| = \left|\frac{4}{3} - 0\right| = \frac{4}{3} \simeq 1,33\ u^2$$



3.24.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.24.7 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = ax^2 + 4x + 5$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Para $a = 1$ obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) $f'(x) = 2ax + 4 \Longrightarrow f'(1) = 2a + 4 = 0 \Longrightarrow a = -2$.

b) La ecuación punto pendiente de una recta es $y - b = m(x - a)$, en nuestro caso $a = 0$.
$f(x) = x^2 + 4x + 5 \Longrightarrow f'(x) = 2x + 4 \Longrightarrow m = f'(0) = 4$ y $b = f(0) = 5 \Longrightarrow y - 5 = 4x \Longrightarrow y = 4x + 5$

Opción B

Problema 3.24.8 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x + a & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

b) Para $a = 1$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

a) ☛ Las dos ramas son continuas, independientemente del valor de a.

☛ Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} e^{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (2x + a) = a \end{cases} \Longrightarrow a = 1$$
$$f(0) = 1$$

b) Si $a = 1$ y el área pedida se encuentra en el intervalo $[1, 3]$ hay que comprobar si la rama $f(x) = 2x + 1$ corta al eje de abscisas dentro del intervalo: $2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$, luego la función no corta al eje de abscisas dentro del intervalo y los límites de integración serán 1 y 3.

$$S = \int_1^3 (2x + 1)\, dx = x^2 + x \Big]_1^3 = 12 - 2 = 10 \ u^2$$

Problema 3.24.9 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$$

a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

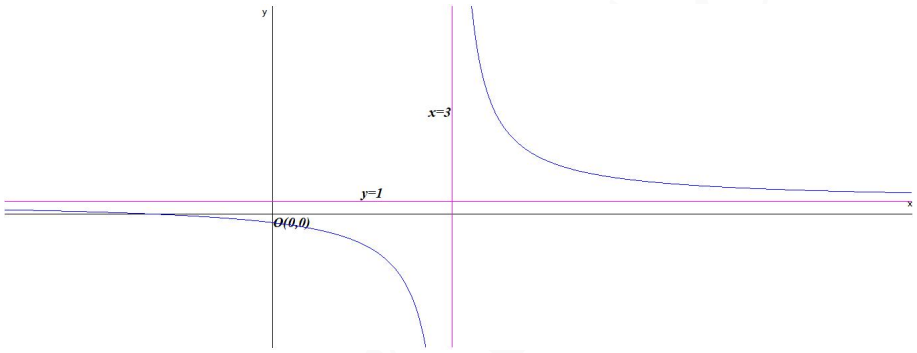
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ y sus asíntotas:

- ☛ Verticales en $x = 3$:
  $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{x+2}{x-3} = \left[\dfrac{5}{0^-}\right] = -\infty$
  $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{x+2}{x-3} = \left[\dfrac{5}{0^+}\right] = +\infty$
- ☛ Horizontales en $y = 1$:
  $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x-3} = 1$
- ☛ Oblicuas no hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{5}{(x-3)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay extremos relativos. Como $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$ la función es decreciente en todo el dominio de la función.



3.24.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.24.10 (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = x^3 + 2x^2$$

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 + 4x \Longrightarrow m = f'(1) = 7$, $a = 1$ y $b = f(a) = f(1) = 3$.
La ecuación punto pendiente de una recta es $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 3 = 7(x - 1) \Longrightarrow y = 7x - 4$

b) $f'(x) = 3x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -\dfrac{4}{3}$

$$f''(x) = 6x + 4 \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 4 > 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ mínimo} \\ f''\left(-\dfrac{4}{3}\right) = -4 < 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{4}{3} \text{ máximo} \end{cases}$$

Problema 3.24.11 (2 puntos) Considere la función real de variable real.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ e^x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
Continuidad en $x = 2$:

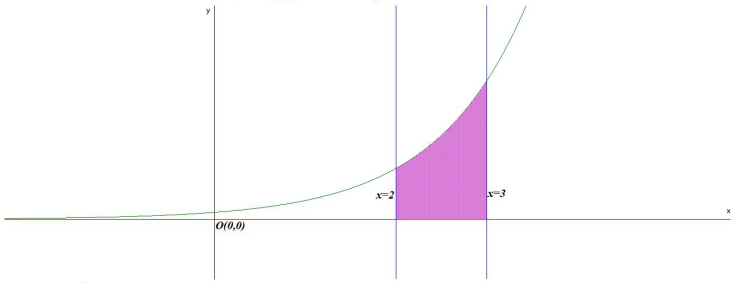
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (ax^2 + 3) = 4a + 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (e^x) = e^2 \\ f(2) = e^2 \end{cases} \Longrightarrow 4a + 3 = e^2 \Longrightarrow$$

$$a = \frac{e^2 - 3}{4} \simeq 1,097264024$$

b) $f(x) = e^x \neq 0 \Longrightarrow$ sólo hay un recinto de integración $S_1 : [2, 3]$:

$$S_1 = \int_2^3 e^x \, dx = e^x]_2^3 = e^3 - e^2$$

$$S = |S_1| = e^3 - e^2 \simeq 12,696 \ u^2$$



Opción B

Problema 3.24.12 (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = x + \frac{2}{x}$$

a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

$$f(x) = x + \frac{2}{x} = \frac{x^2+2}{x}$$

a) $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2}{x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+2}{x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2}{x} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$$

$$y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ y decreciente en el $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$, con un máximo relativo en $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ y un mínimo relativo en $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

3.24.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.24.13 (2 puntos) Dada la siguiente función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 e^{x-3} & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x = 3$.

b) Para $a = 1$, determine los maximos y minimos relativos de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (ax^2e^{x-3}) = 9a \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-1}{2x-3} = \dfrac{5}{3} \\ f(3) = 9a \end{cases} \Longrightarrow$$

$$9a = \frac{5}{3} \Longrightarrow a = \frac{5}{27}$$

b) $f(x) = x^2e^{x-3} \Longrightarrow f'(x) = x(x+2)e^{x-3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$. Ambos puntos pertenecen a la rama $(-\infty, 3]$.

$f''(x) = (x^2+4x+2)e^{x-3} \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 2e^{-3} > 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ Mínimo} \\ f''(-2) = -2e^{-5} < 0 \Longrightarrow x = -2 \text{ Máximo} \end{cases}$

Opción B

Problema 3.24.14 (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real dependiente de un parámetro real a:

$$f(x) = -x^3 + 4ax^2 - 17x + 5a$$

a) Calcule el valor de a para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea la misma que la pendiente de la recta $g(x) = \sqrt{3} - 4x$.

b) Para $a = 0$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

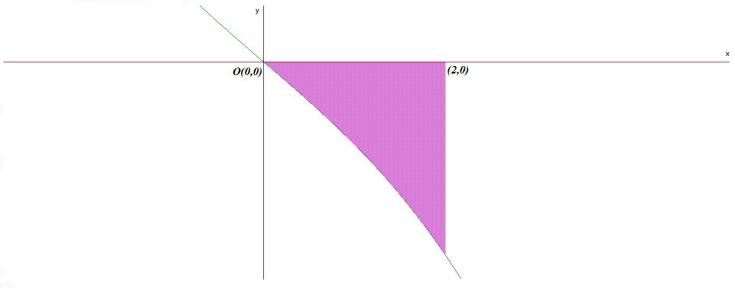
Solución:

a) $f'(x) = -3x^2 + 8ax - 17 \Longrightarrow m = f'(1) = -20 + 8a$.
$g'(x) = -4 \Longrightarrow g'(1) = 4$ como $f'(1) = g'(1) \Longrightarrow -20 + 8a = -4 \Longrightarrow a = 2$

b) Si $a = 0 \Longrightarrow f(x) = -x^3 - 17x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm\sqrt{17}$. Ninguno de estos valores están dentro del intervalo de integración, luego sólo hay un área a estudiar $S_1 : [0, 2]$.

$$S_1 = \int_0^2 (-x^3 - 17x)\, dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{17x^2}{2}\Big]_0^2 = -38 + 0 = 38$$

$$S = |S_1| = 38 \ u^2$$



Problema 3.24.15 (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x}$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Determine las asíntotas de la función.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ y decreciente en el $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$, con un máximo relativo en $(-\sqrt{3}, 4 - 2\sqrt{3})$ y un mínimo relativo en $(\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$.

b) $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x + 3}{x}\right) = 4$$

$$y = x + 4$$

3.25. Año 2024

3.25.1. Modelo

Problema 3.25.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - a, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva que pase por los puntos $(0, 1)$ y $(-1, 1/4)$. Señale la expresión de esta primitiva.

b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función clasificando, si procede, los extremos relativos de la función.

Solución:

a) $F(x) = \int (x^3 + x^2 - x - a)\, dx = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - ax + C$

$F(0) = 1 \Longrightarrow C = 1$

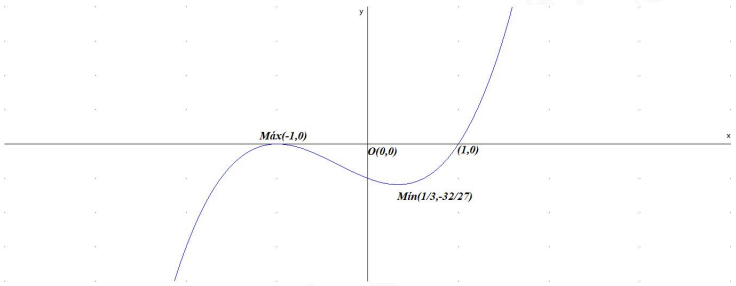
$F(-1) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + a + 1 = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{6}$

Luego $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{6} + 1$

b) Si $a = 1$ tenemos $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = \dfrac{1}{3}$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/3)$	$(1/3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1/3, \infty)$, y decreciente en el intervalo $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$, tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 0)$ y un mínimo relativo en $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{32}{27}\right)$.



Problema 3.25.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de la función $f(x)$ e indique el tipo de discontinuidad si procede.

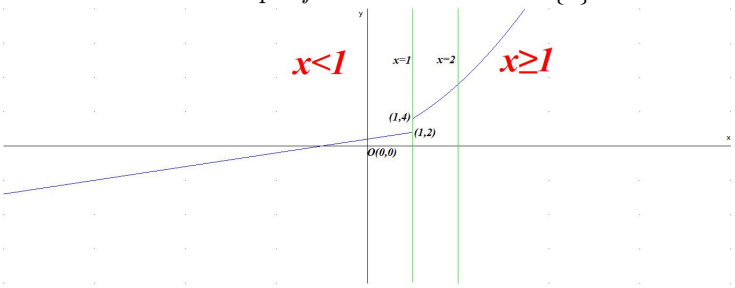
b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

a) La función es continua en todos los puntos de la rama $x < 1$. El denominador se anula en $x = 1$ y no se encuentra en la rama.
La función es continua en todos los puntos de la rama $x > 1$, se trata de un polinomio.
Hay que estudiar la continuidad en $x = 1$:

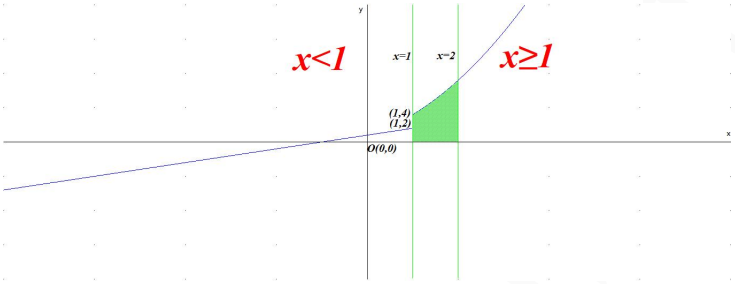
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x + 1) = 4 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) \Longrightarrow$$

f es discontinua no evitable en $x = 1$ donde hay un salto finito.
Concluimos diciendo que f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$



b) $f(x) = x^2 + 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$, luego la función no corta al eje de abscisas en el interior del intervalo $(1, 2)$, luego el recinto de integración es el intervalo completo:

$$S = \int_1^2 (x^2 + 2x + 1)\, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x \Big]_1^2 = \frac{19}{3}\ u^2$$



Problema 3.25.3 *(2 puntos)* Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4}$$

a) Determine las asíntotas de la función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{-16}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{-16}{0^-}\right] = +\infty$$

- En $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{16}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{16}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = +\infty$$

☛ Oblícua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x}{x^3-4x} = 1$$

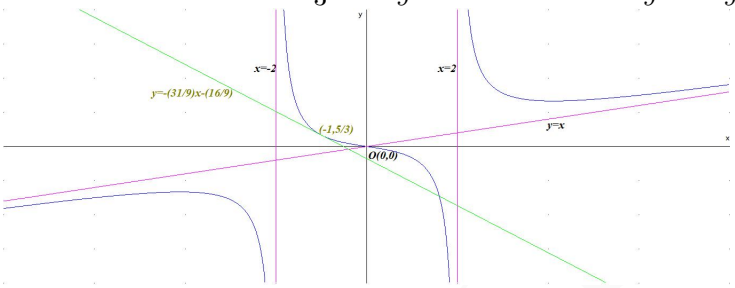
$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+4x}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{8x}{x^2-4}\right) = 0$$

Luego $y = x$

b) $b = f(a) = f(-1) = \dfrac{5}{3}$

$f'(x) = \dfrac{x^4-16x^2-16}{(x^2-4)^2} \Longrightarrow m = f'(-1) = -\dfrac{31}{9}$

$y - b = m(x-a) \Longrightarrow y - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{31}{9}(x+1) \Longrightarrow y = -\dfrac{31}{9}x - \dfrac{16}{9}$



3.25.2. Ordinaria

Problema 3.25.4 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 2)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Solución:

a) $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$

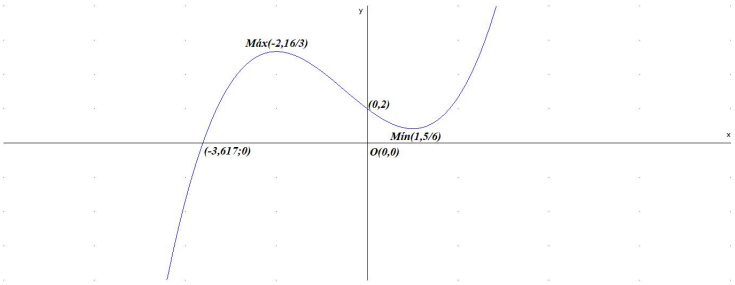
Como $f(0) = 2 \Longrightarrow f(0) = C = 2$

Luego $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2$

b) $f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ \ x = -2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en el $(-2, 1)$ con un máximo relativo en el punto de abscisa $x = -2$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.



Problema 3.25.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ ae^{2x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

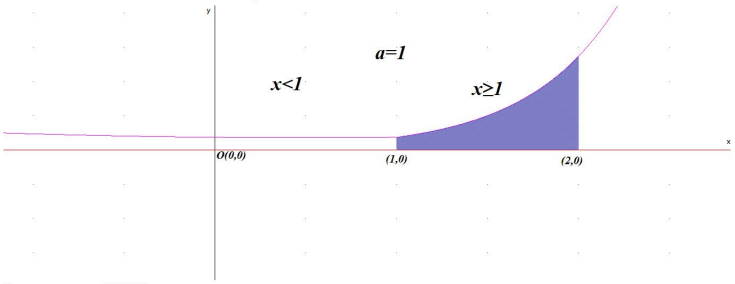
a) La función es continua en las dos ramas por ser composición de funciones polinómicas y exponenciales, hay que imponer la continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2 - x + e^2) = e^2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(ae^{2x}) = ae^2 \\ f(1) = ae^2 \end{cases} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)} e^2 = ae^2 \Longrightarrow a = 1$$

b) Para $a = 1$ y en el intervalo $[1, 2]$ la función $f(x) = e^{2x} > 0$ en toda la rama. Luego el intervalo de integración es $[1, 2]$.

$$F(x) = \int e^{2x}\, dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$S = \left| \int_1^2 e^{2x}\, dx \right| = |F(2) - F(1)| = \left| \frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2} \right| = \frac{e^4 - e^2}{2} \simeq 23,6045\ u^2$$



Problema 3.25.6 *(2 puntos)* Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 9}$$

a) Determine las asíntotas de la función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = -3$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x-2}{x^2-9} = \left[\frac{-5}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to -3^+} \frac{x-2}{x^2-9} = \left[\frac{-5}{0^-}\right] = +\infty$$

- En $x = 3$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x-2}{x^2-9} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{x-2}{x^2-9} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: $y = 0$.

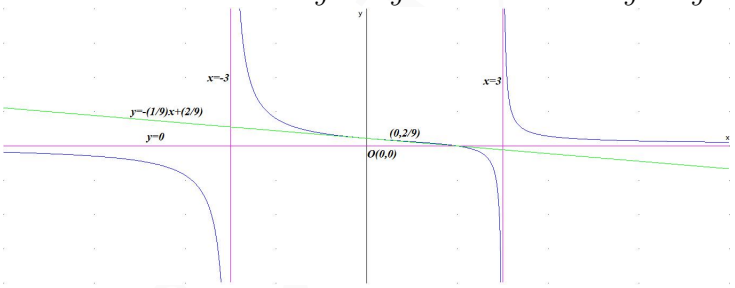
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x-2}{x^2-9} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-2}{x^2-9} = 0$$

☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $b = f(a) = f(0) = \dfrac{2}{9}$

$$f'(x) = -\frac{x^2 - 4x^2 + 9}{(x^2-9)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = -\frac{1}{9}$$

$$y - b = m(x-a) \Longrightarrow y - \frac{2}{9} = -\frac{1}{9}(x-0) \Longrightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}$$



3.25.3. Ordinaria-Coincidente

Problema 3.25.7 *(2 puntos)* La siguiente derivada de una función real de variable real representa la tasa de variación instantánea de una sustancia disuelta en agua:

$$f'(t) = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{2}t^2\right),$$

siendo $t \geq 0$ el tiempo en horas desde que se prepara la disolución.

a) Encuentre la función que proporciona la cantidad de sustancia disuelta en función del tiempo, sabiendo que en $t = 0$ la cantidad disuelta es nula.

b) Determine el instante de tiempo en el que la sustancia disuelta es máxima.

Solución:

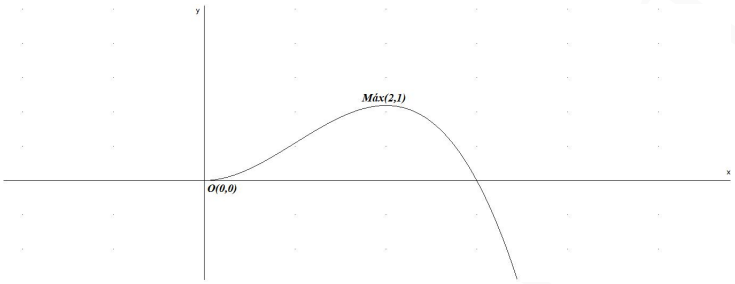
a) $f(t) = \int f'(t)\,dt = \frac{3}{2}\int \left(t - \frac{1}{2}t^2\right)\,dt = \frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) + C$

Como $f(0) = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow f(t) = \frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right)$

b) $f'(t) = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{2}t^2\right) = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 2$

	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(t)$	$+$	$-$
$f(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,2)$, y decreciente en el intervalo $(2,+\infty)$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $(0,0)$ y un máximo relativo, en nuestro caso absoluto, en el punto $(2,1)$. Luego la máxima cantidad disuelta se presenta a las dos horas.



Problema 3.25.8 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{-x^2}{x-2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y estudie la continuidad en el punto $x = 1$.

b) Analice los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) La rama $x \leq 1$ es una exponencial y Dom$f = (-\infty, 1]$ en esa rama. En la rama $x > 1$ el denominador se anula en $x = 2 \Longrightarrow$ Dom$(f) = (1,2) \cup (2,\infty)$. En conclusión: Dom$(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Continuidad en $x = 1$:

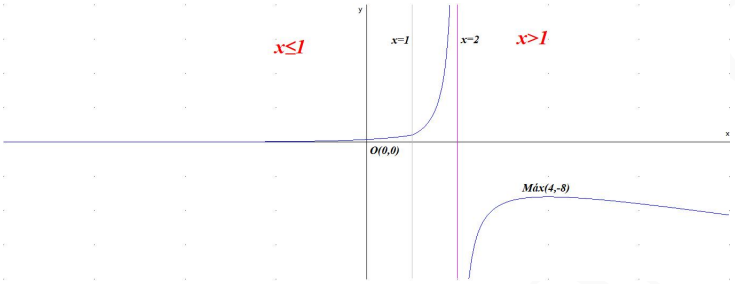
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} e^{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x^2}{x-2} = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 1$

b) $f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} > 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ -\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ no válida y } x = 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 2) \cup (2, 4)$ y decreciente en el $(4, +\infty)$, con un máximo relativo en el punto $(4, -8)$



Problema 3.25.9 *(2 puntos)* Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16}$$

a) Determine las asíntotas de la función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = \left[\frac{-33}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = \left[\frac{-33}{0^-}\right] = +\infty$$

- En $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = \left[\frac{31}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = \left[\frac{31}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay.

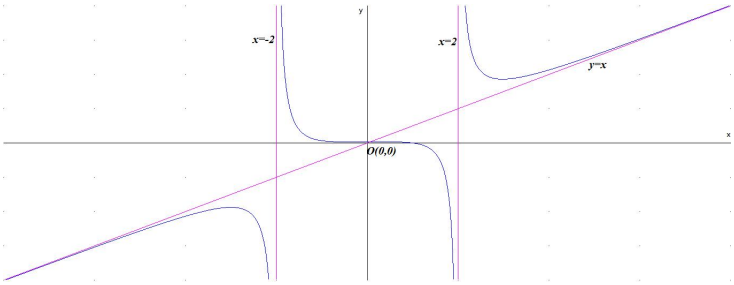
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = +\infty$$

☛ Oblícua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^5 - 1}{x^5 - 16x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{16x - 1}{x^4 - 16}\right) = 0$$

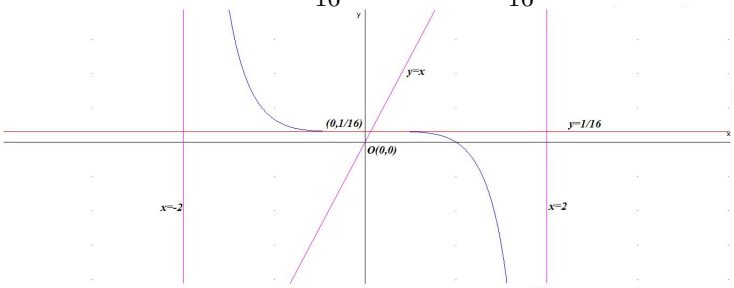
Luego $y = x$



b) $b = f(a) = f(0) = \dfrac{1}{16}$

$f'(x) = \dfrac{x^3(x^5 - 80x + 4)}{(x^4 - 16)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = 0$

$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - \dfrac{1}{16} = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{1}{16}$



3.25.4. Extraordinaria

Problema 3.25.10 *(2 puntos)*

a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a)\, dx = \frac{2}{3}$$

b) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ Determine para qué valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b.

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^1 (x^{1/2} - a)\, dx = \frac{2x^{3/2}}{3} - ax\Big]_0^1 = \frac{2}{3} - a = \frac{2}{3} \Longrightarrow a = 0$

b) Las dos ramas son polinómicas y en $x = 0$ la función está definida. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Para que f sea continua en $x = 0$: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - b) = -b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Longrightarrow b = -2$

Tenemos:

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 3 \end{cases} \Longrightarrow$

$f'(0^-) \neq f'(0^+) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.
Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

Problema 3.25.11 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $(1, 3)$ y $(2, 7/2)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.

b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Solución:

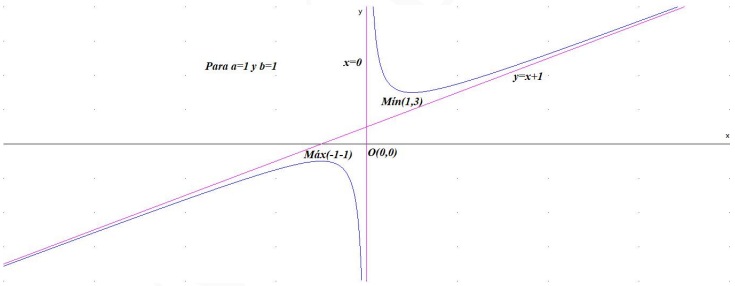
a) $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,dx = \frac{1}{x} + ax + b$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 3 \Longrightarrow 1 + a + b = 3 \Longrightarrow a + b = 2 \\ f(2) = \dfrac{7}{2} \Longrightarrow \dfrac{1}{2} + 2a + b = \dfrac{7}{2} \Longrightarrow 2a + b = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{x} + x + 1$$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} + 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en el $(-1, 0) \cup (0, 1)$ con un máximo relativo en el punto de abscisa $x = -1$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.



Problema 3.25.12 *(2 puntos)* Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$$

a) Determine las asíntotas de la función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = -2$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty, \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty$$

- En $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: $y = 1$.

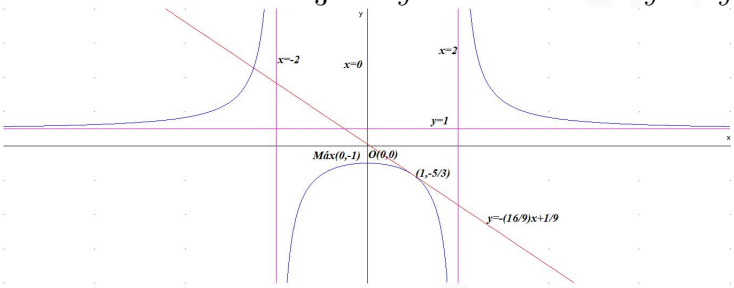
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+4}{x^2-4} = 1$$

☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $b = f(a) = f(1) = -\dfrac{5}{3}$

$f'(x) = -\dfrac{16x}{(x^2-4)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -\dfrac{16}{9}$

$y - b = m(x-a) \Longrightarrow y + \dfrac{5}{3} = -\dfrac{16}{9}(x-1) \Longrightarrow y = -\dfrac{16}{9}x + \dfrac{1}{9}$



3.25.5. Extraordinaria-Coincidente

Problema 3.25.13 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = ax + \sqrt{x^2+2}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tome el valor $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) Para $a = 1$, calcule $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

Solución:

a) $f'(x) = a + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} \Longrightarrow f'(1) = a + \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow a = 1$

b) $\lim_{x\to -\infty} (x + \sqrt{x^2+2}) = [-\infty + \infty] = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{(x+\sqrt{x^2+2})(x-\sqrt{x^2+2})}{x-\sqrt{x^2+2}} =$

$\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-x^2-2}{x-\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{-2}{x-\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{-2}{-\infty} = 0$

Problema 3.25.14 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ k & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ -2x^2 + x + 6 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Determine, si es posible, el valor del parámetro real k para que esta función sea continua en todo su dominio.

b) Considerando $k = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) Las dos ramas son polinómicas y exponencial y la función está definida en todo $\mathbb{R}$.
$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Para que f sea continua en $x = 0$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} k = k \\ f(0) = k \end{cases} \implies k = 1$

Para que f sea continua en $x = 2$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} k = k \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(-2x^2 + x + 6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \implies k = 0$

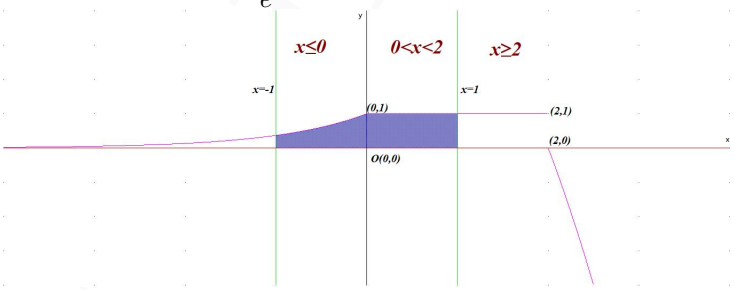
Tenemos dos valores diferentes para k, luego $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ que imponga la continuidad de f en $x = 0$ y $x = 2$ al mismo tiempo.

b) Si $k = 1 \implies f$ es continua en $x = 0$ y tendremos dos recintos de integración $S_1 : [-1, 0]$ y $S_2 : [0, 1]$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} e^x\, dx = e^x]_{-1}^{0} = 1 - \frac{1}{e}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} dx = x]_{0}^{1} = 1$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 2 - \frac{1}{e} \simeq 1,6321\ u^2$$



Problema 3.25.15 *(2 puntos)* Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3}$$

a) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, el denominador no se anula nunca.
Monotonía: $f'(x) = \dfrac{24x}{(x^2+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

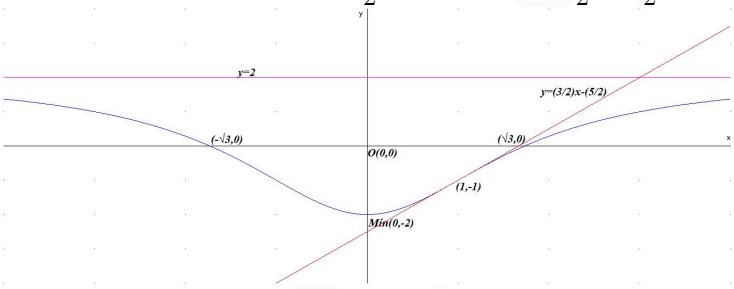
La función es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decreciente en el $(-\infty, 0)$ con un mínimo relativo en el punto $(0, -2)$
Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales: $y = 2$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3} = 2$$

- Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $b = f(a) = f(1) = -1$
$f'(x) = \dfrac{24x}{(x^2+3)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = \dfrac{3}{2}$
$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y + 1 = \dfrac{3}{2}(x - 1) \Longrightarrow y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$



3.26. Año 2025

3.26.1. Modelo

EJERCICIO 1

(2,5 puntos) Responda los tres apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

Problema 3.26.1 HidroBio es una marca de un preparado en polvo para elaborar suero bebible que se utiliza para rehidratar a pacientes con gastroenteritis. El suero se prepara disolviendo un sobre de HidroBio en un litro de agua. La marca comercializa tres tipos de sobres, de sabor a naranja, fresa o limón. El contenido de cada sobre reacciona químicamente con el agua produciéndose en esa reacción un determinado principio activo, en cantidad variable en función del tiempo, de manera que la tasa de variación instantánea de la cantidad de principio activo, medida en mg/hora, viene dada por la función

$$c(t) = \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right)$$

siendo t el tiempo transcurrido, en horas, desde la elaboración del preparado hasta pasadas tres horas. La cantidad de principio activo presente en la disolución potencia además el sabor del preparado, de forma que a más cantidad de principio más intenso es el sabor.

a) (1 punto) Indique la cantidad de principio activo al cabo de 60 minutos de haber sido preparado el suero.

b) (0,75 puntos) ¿Va aumentando la cantidad de principio activo a lo largo de las 3 primeras horas? ¿Por qué?

c) (0,75 puntos) Se ha observado que para conseguir que los menores de 5 años ingieran el suero más fácilmente, lo mejor es disolver un sobre con sabor a fresa y darles el primer vaso en el momento en que el sabor de la disolución sea más intenso. ¿Cuándo le daría el primer vaso de suero a una niña de 4 años? Determine cuál será la cantidad de principio activo en el litro de suero en ese momento.

Solución:

a) Sea $C(t)$ la primitiva de $c(t)$, es decir, $C'(t) = c(t)$:
$C(t) = \displaystyle\int \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) = \frac{t^2(3-t)}{4} + K$
Tenemos $C(0) = 0 \Longrightarrow 0 + K = 0 \Longrightarrow K = 0 \Longrightarrow C(t) = \dfrac{t^2(3-t)}{4}$
Como 60 minutos son una hora tenemos $C(1) = \dfrac{1}{2} = 0,5$ mg.

b) Estudiamos la monotonía: $C'(t) = c(t) = \dfrac{3}{2}\left(t - \dfrac{t^2}{2}\right) = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 2$.

	$(0,2)$	$(2,3)$
$c(t)$	$+$	$-$
$C(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,2)$ horas y decreciente en el $(2,3)$ con un máximo relativo (en este caso absoluto) en el punto $(2,1)$.
Luego el principio activo aumenta durante las dos primeras horas, en ese momento alcanza el máximo valor y a partir de entonces decrece el principio activo de forma continua.
Por tanto, no crece de 0 a 3 horas sino de 0 a 2.

c) Como se ha explicado en el apartado anterior, el máximo de principio activo se produce a las 2 horas, momento en el que hay que dar a la niña el sobre de sabor a fresa y el principio activo en una cantidad de 1 mg.

www.inusat.net

Capítulo 4

Probabilidad

4.1. Año 2000

4.1.1. Modelo

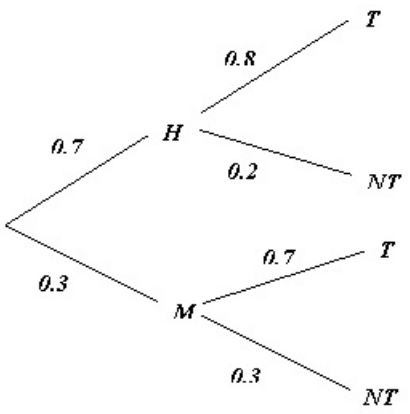
Opción A

Problema 4.1.1 ***(2 puntos)*** Si se escoge un número al azar en la guía telefónica de cierta ciudad española, la probabilidad de que sea nombre de un hombre es 0,7 y de que figure una mujer es 0,3. En dicha ciudad, la probabilidad de que un hombre trabaje es 0,8 y de que lo haga una mujer es 0,7. Se elige un número de teléfono al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una persona que trabaja?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a un hombre, sabiendo que pertenece a una persona que trabaja?

Solución:



a) $P(T) = 0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,77$

b)

$$P(H|T) = \frac{P(T|H) \cdot P(H)}{P(T)} = \frac{0,8 \cdot 0,7}{0,77} = 0,7272$$

Opción B

Problema 4.1.2 ***(2 puntos)*** Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno.

a) ¿Qué probabilidad tiene un alumno, que sabe seis temas, de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los dos temas elegidos y el otro no?

Solución:

S: Sabe el tema y NS: No se sabe el tema

a) $P($ sabe alguno$) = 1 - P($no sabe ninguno$) = 1 - \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{13}{15}$

b) $P($ sabe uno y el otro no$) = P(S, NS) + P(NS, S) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$

4.1.2. Ordinaria

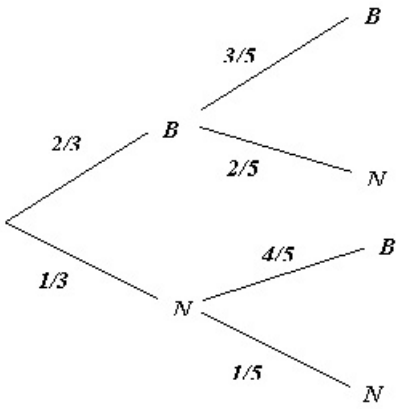
Opción A

Problema 4.1.3 ***(2 puntos)*** De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas?

b) Si la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido?

Solución:



a) $P(BB) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

b)

$$P(1N|2N) = \frac{P(2N|1N)P(1N)}{P(2N)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

Opción B

Problema 4.1.4 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos aleatorios tal que: $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,2$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,7$.

a) Calcula $P(A \cap B)$ y razona si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcula $P(A \cup B)$.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$

Este resultado no es bueno, ya que siempre se tiene que cumplir que la probabilidad $P(B) \geq P(A \cap B)$. (Problema de diseño)

Para que sean independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ y con los datos que tenemos es imposible hacerlo.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ no se puede hacer con los datos que tenemos.

4.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.1.5 ***(2 puntos)*** La probabilidad de que un mes dado un cliente de una gran superficie compre un producto A es 0,6; la probabilidad de que compre un producto B es 0,5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre un producto B no habiendo comprado el producto A es 0,4.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado sólo el producto B?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los dos productos?

Solución:

$$P(A) = 0,6, \quad P(B) = 0,5, \quad P(B|\overline{A}) = 0,4$$
$$P(\overline{A}) = 0,4, \quad P(\overline{B}) = 0,5$$

a) Hay que calcular $P(B \cap \overline{A})$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} \Longrightarrow P(B \cap \overline{A}) = P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$$

b) Hay que calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}) = 0,6 + 0,16 = 0,76$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,76 = 0,24$$

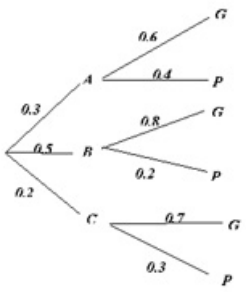
Opción B

Problema 4.1.6 ***(2 puntos)*** Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete A es 0,3; de que se remita al bufete B es 0,5 y de que se remita al bufete C es 0,2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete A sea ganado en los tribunales es 0,6; para el bufete B esta probabilidad es 0,8 y para el bufete C es 0,7.

a) Calcúlese la probabilidad de que la empresa gane un caso.

b) Sabiendo que un caso se ha ganado, determínese la probabilidad de que lo haya llevado el bufete A.

Solución:



a) $P(G) = 0,3 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,72$

b)

$$P(A|G) = \frac{P(G|A) \cdot P(A)}{P(G)} \frac{0,3 \cdot 0,6}{0,72} = 0,25$$

4.2. Año 2001

4.2.1. Modelo

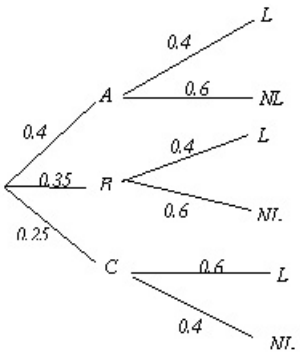
Opción A

Problema 4.2.1 ***(2 puntos)*** En una ciudad, la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido A es 0,4; la probabilidad de vote al partido B es 0,35 y la probabilidad de que vote al partido C es 0,25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diariamente algún periódico son, respectivamente, 0,4; 0,4 y 0,6. Se elige una persona de la ciudad al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico.

b) La persona elegida lee algún periódico, ¿cuál es la probabilidad de que sea votante del partido B?

Solución:



a) $P(L) = 0,4 \cdot 0,4 + 0,35 \cdot 0,4 + 0,0,25 \cdot 0,6 = 0,45$

b)

$$P(B|L) = \frac{P(L|B) \cdot P(B)}{P(L)} = \frac{0,4 \cdot 0,35}{0,45} = 0,3111$$

Opción B

Problema 4.2.2 ***(2 puntos)*** Una urna contiene 7 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Se considera el experimento aleatorio consistente en extraer tres bolas de la urna, de forma sucesiva y sin reemplazamiento. Sean los sucesos $B_1 =$ { La primera bola es blanca }, $B_2 =$ { La segunda bola es blanca } y $B_3 =$ { La tercera bola es blanca }.

a) Exprésese con ellos el suceso { Las bolas extraídas en primer y tercer lugar son blancas, y la extraída en segundo lugar no }.

b) Calcúlese la probabilidad del suceso { Las tres bolas son del mismo color }.

Solución:

a) $B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3$.

b) $P(\text{tres bolas son del mismo color}) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{55}$

4.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.2.3 ***(2 puntos)*** Una fábrica produce tres modelos de coche: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diésel. Sabemos que el 60 % de los modelos son del tipo A y el 30 % del tipo B. El 30 % de los coches fabricados tienen motor diésel, el 30 % de los coches de modelo A son de tipo diésel y el 20 % de los coches del modelo B tienen motor diésel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) El coche es del modelo C.

b) El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diésel.

c) El coche tiene motor diésel, sabiendo que es del modelo C.

Solución:

Hacemos la siguiente tabla

	A	B	C	Total
Gasolina	$0,42$	$0,24$	$0,04$	$0,70$
Diesel	$0,18$	$0,06$	$0,06$	$0,30$
Total	$0,60$	$0,30$	$0,10$	1

a) $P(C) = 0,1$

b) $P(A|Diesel) = \dfrac{0,18}{0,3} = 0,6$

c) $P(Diesel|C) = \dfrac{0,06}{0,1} = 0,6$

Opción B

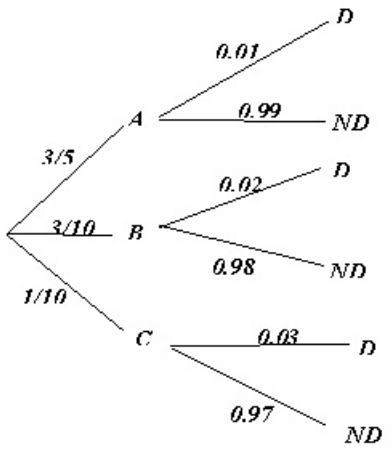
Problema 4.2.4 ***(2 puntos)*** Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0,01 para A, de 0,02 para B y de 0,03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso?

Solución:

$$P(A) = \frac{600}{1000} = \frac{3}{5},\ \ P(B) = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10},\ \ P(C) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$$



a) $P(ND) = \frac{3}{5} \cdot 0,99 + \frac{3}{10} \cdot 0,98 + \frac{1}{10} \cdot 0,97 = 0,985$

b)

$$P(A|ND) = \frac{P(ND|A)P(A)}{P(ND)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot 0,99}{0,985} = 0,603$$

4.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.2.5 ***(2 puntos)*** En un videoclub quedan 8 copias de la película A, 9 de la B y 5 de la C. Entran tres clientes consecutivos. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Los tres escojan la misma película.

b) Dos escojan la película A y el otro la C.

Solución:

a)

$$P(AAA) + P(BBB) + P(CCC) = \frac{8}{22} \cdot \frac{7}{21} \cdot \frac{6}{20} + \frac{9}{22} \cdot \frac{8}{21} \cdot \frac{7}{20} + \frac{5}{22} \cdot \frac{4}{21} \cdot \frac{3}{20} = \frac{15}{154}$$

b) $P(\text{dos}A \text{ y uno } B) = 3 \cdot \frac{8}{22} \cdot \frac{7}{21} \cdot \frac{5}{20} = \frac{1}{11}$

Opción B

Problema 4.2.6 ***(2 puntos)*** Con el objetivo de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de un instituto realizan una rifa con 500 números. Un alumno compra dos números.

a) Si sólo hay un premio, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque a él?

b) Si hay dos premios, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque al menos uno de ellos?

Solución:

a) $P(\text{ganar}) = P(GP) + P(PG) = \dfrac{2}{500} = 0{,}004$

b) $P(\text{ganar}) = P(GG) + P(GP) + P(PG) = 1 - P(PP) = 1 - \dfrac{498}{500} \cdot \dfrac{497}{499} = 0{,}00799$

4.3. Año 2002

4.3.1. Modelo

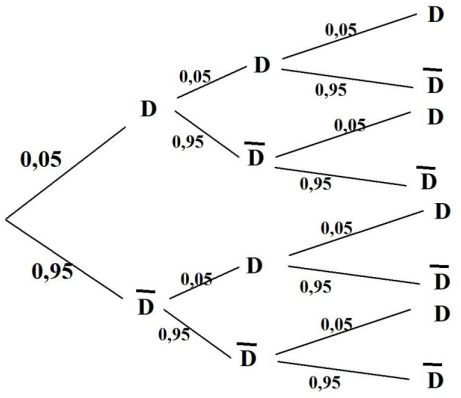
Opción A

Problema 4.3.1 ***(2 puntos)*** Un proveedor suministra lotes de materia prima y el 5 % de ellos resulta defectuoso. Seleccionando al azar 3 lotes

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 sean defectuosos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de lotes defectuosos sea 2?

Solución:



a)

$$P(2D) = P(DD\overline{D}) + P(D\overline{D}D) + P(\overline{D}DD) = 3 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95 = 0{,}007125$$

$$P(3D) = 0{,}05^3 = 0{,}000125$$

$$P(\text{al menos dos}) = P(2D) + P(3D) = 0{,}00725$$

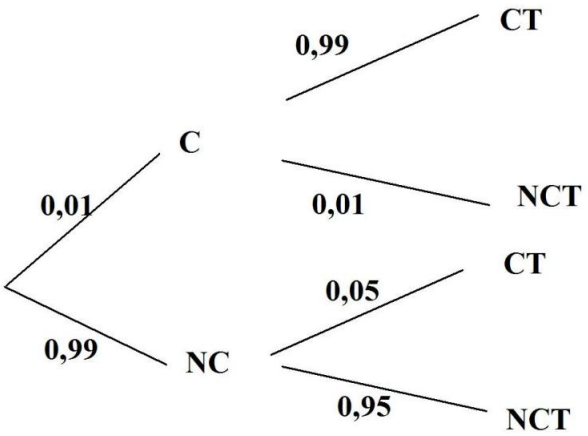
b)

$$P(\text{Máximo dos}) = 1 - P(3D) = 1 - 0{,}000125 = 0{,}999875$$

Opción B

Problema 4.3.2 ***(2 puntos)*** Una prueba para determinar cierta contaminación del agua presenta los siguientes resultados en probabilidad: 0,05 de falsos positivos, esto es, casos en los que el agua libre de contaminación, el test dice que el agua se encuentra contaminada. Si el agua está contaminada, el test lo detecta con probabilidad 0,99. El agua está libre de contaminación con probabilidad 0,99. Si se realizara una nueva prueba y el test indica que hay contaminación, calcular la probabilidad de que el agua esté libre de contaminación.

Solución:



$$P(NC|CT) = \frac{P(CT|NC) \cdot P(NC)}{P(CT)} = \frac{0,05 \cdot 0,99}{0,0594} = 0,8333$$

Donde $P(CT) = 0,01 \cdot 0,99 + 0,99 \cdot 0,05 = 0,0594$.

Se trata de un malísimo test.

4.3.2. Ordinaria

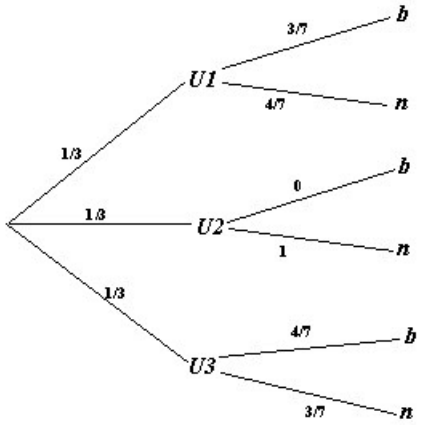
Opción A

Problema 4.3.3 ***(2 puntos)*** Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera, 4 blancas y 3 negras.

a) Se elige una caja al azar, y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

Solución:



a)

$$P(n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$$

b)

$$P(U2|n) = \frac{P(n|U2)P(U2)}{P(n)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

Opción B

Problema 4.3.4 ***(2 puntos)*** Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas.

a) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble.

b) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

Solución:

a)

$$P(3 \text{ veces } = 6D) = \left(\frac{1}{36}\right)^3$$

b)

$$P(3 \text{ veces } \neq 6D) = \left(\frac{5}{36}\right)^3$$

4.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.3.5 ***(2 puntos)*** Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regalan un peluche, si al tirar un dardo se acierta en el blanco. Si sólo se permite tirar tres dardos y la probabilidad de acertar en cada tirada es 0,3.

a) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche?

b) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente en el tercer intento?, ¿y de llevárselo exactamente en el segundo?

Solución: Sea $A = \{\text{Acertar}\} \Longrightarrow P(A) = 0,3$; y $P(\overline{A}) = 0,7$:

a)

$$P(\text{acertar en 3 intentos}) = 1 - P(\text{no acertar en 3 intentos}) =$$
$$= 1 - (0,7)^3 = 0,657$$

b)

$$P(\text{acertar en el 3 intento}) = P(\overline{A})P(\overline{A})P(A) = 0,147$$
$$P(\text{acertar en el 2 intento}) = P(A)P(\overline{A}) = 0,21$$

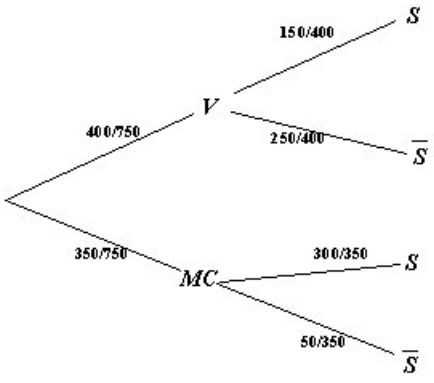
Opción B

Problema 4.3.6 ***(2 puntos)*** Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las ventas pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros?

b) Si la compra es inferior a 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?

Solución:



a)

$$P(S) = \frac{150}{400} \cdot \frac{400}{750} + \frac{300}{350} \cdot \frac{350}{750} = \frac{3}{5}$$

b)

$$P(MC|\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}|MC)P(MC)}{P(\overline{S})} = \frac{50/350 \cdot 350/750}{1 - 3/5} = \frac{1}{6}$$

4.4. Año 2003

4.4.1. Ordinaria

Opción A

Problema 4.4.1 ***(2 puntos)*** El 45 % del censo de cierta ciudad vota al candidato A, el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se elige al azar tres personas del censo. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Las tres personas votan al candidato A.

b) Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B.

c) Al menos una de las tres personas se abstiene.

Solución:

a) $P(A \cap A \cap A) = (0,45)^3 = 0,091125$.

b) $P(\text{dos votan } A \text{ y uno vota } B) = 3P(A \cap A \cap B) = 3(0,45)^2 \cdot 0,35 = 0,2126$.

c) $P(\text{abstenerse}) = 0,20$, $P(\text{no abstenerse}) = 0,80$

$P(\text{alguno se abstiene}) = 1 - P(\text{ninguno se abstiene}) = 1 - 0,80^3 = 0,488$

Opción B

Problema 4.4.2 ***(2 puntos)*** De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener:

a) Tres reyes.

b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.

c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

Solución:

a)

$$P(PRRR) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2470} = 0,0004$$

b)

$$P(F56) = \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{4}{1235} = 0,0032$$

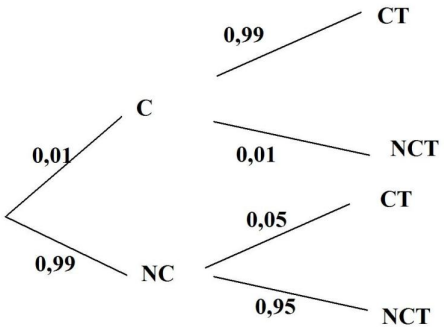
c)

$$P(A36 \,\text{sin orden}) = 3! \left(\frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38}\right) = \frac{8}{1235} = 0{,}0065$$

4.4.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.4.3 ***(2 puntos)*** El test para detectar una sustancia contaminante en agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0,99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0,05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0,99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.
Solución:
C = contaminada, NC = no contaminada, CT = contaminada según el test, NCT = no contaminada según el test



$$P(CT) = 0,99 \cdot 0,05 + 0,01 \cdot 0,99 = 0,0594$$

$$P(NC|CT) = \frac{P(CT|NC) \cdot P(NC)}{P(CT)} = \frac{0,99 \cdot 0,05}{0,0594} = 0,8333$$

El test detecta que el agua está contaminada, cuando en realidad no lo está el 83,33 % de las veces. Se trata de un mal producto.

Opción B

Problema 4.4.4 ***(2 puntos)*** Se elige un número natural entre el 1 y el 20 de manera que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3? ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 y no por 6?
Solución:
A= divisible por dos
B= divisible por tres

$$P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, \quad P(A \cap B) = \frac{3}{20}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

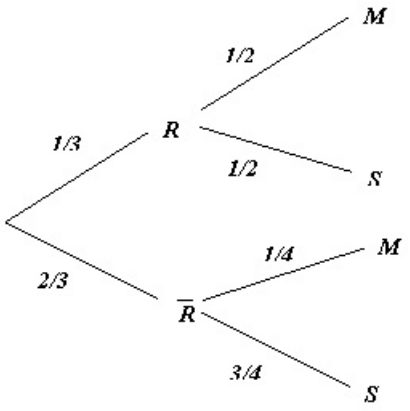
$$P(B \cup \overline{A}) = \frac{3}{20}$$

4.5. Año 2004

4.5.1. Modelo

Opción A

Problema 4.5.1 ***(2 puntos)*** Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es de 0,25. La probabilidad de no regar el rosal es de 2/3. Si el rosal se ha secado, ¿Cuál es la probabilidad de no haberlo regado?.
Solución:



$$P(\overline{R}|S) = \frac{P(S|\overline{R})P(\overline{R})}{P(S)} = \frac{3/4 \cdot 2/3}{1/3 \cdot 1/2 + 2/3 \cdot 3/4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Opción B

Problema 4.5.2 ***(2 puntos)*** Sobre los sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0,7, \quad P(B) = 0,5 \quad P(A \cap B) = 0,45$$

Calcular:

a) $P(B|A)$

b) $P(A^c \cap B^c)$

Nota: A^c representa el suceso complementario de A.
Solución:

a)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,45}{0,7} = 0{,}6428571428$$

b)

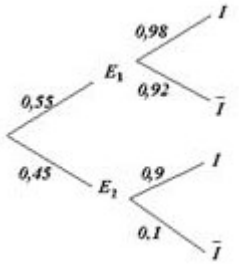
$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,75 = 0,25$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,5 - 0,45 = 0,75$$

4.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.5.3 ***(2 puntos)*** Dos expertos, E_1 y E_2, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E_1 es $0,55$ y por E_2 es $0,45$. Si una peritación ha sido realizada por E_1, la probabilidad de que dé lugar a indemnización es 0,98 y si ha sido realizada por E_2, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0,90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E_2.

Solución:



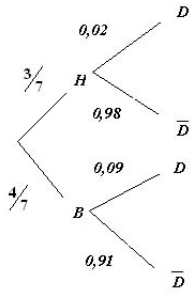
$$P(I) = P(I|E_1)P(E_1) + P(I|E_2)P(E_2) = 0,55 \cdot 0,98 + 0,45 \cdot 0,90 = 0,944$$

$$P(E_2|I) = \frac{P(I|E_2)P(E_2)}{P(I)} = \frac{0,9 \cdot 0,45}{0,944} = 0,429$$

Opción B

Problema 4.5.4 ***(2 puntos)*** En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0,02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0,09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?.

Solución:



$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|H)P(H) + P(\overline{D}|B)P(B) = \frac{3}{7} \cdot 0,98 + \frac{4}{7} \cdot 0,91 = 0,94$$

$$P(H|\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}|H)P(H)}{P(\overline{D})} = \frac{0,98 \cdot \frac{3}{7}}{0,94} = 0,4468$$

4.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.5.5 ***(2 puntos)*** Una cierta instalación de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es $0,95$ y de que se active el segundo es $0,90$.

a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno de los indicadores.

b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.

Solución:
Llamamos $A = \{\text{se enciende el indicador1}^\circ\}$, $P(A) = 0,95$, $P(\overline{A}) = 0,05$
Llamamos $B = \{\text{se enciende el indicador2}^\circ\}$, $P(B) = 0,90$, $P(\overline{B}) = 0,10$

a) $P(\text{se enciende uno sólo}) = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) = 0,95 \cdot 0,10 + 0,05 \cdot 0,90 = 0,14$

b) $P(\text{al menos uno}) = 1 - P(\text{ninguno}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,05 \cdot 0,10 = 0,995$

Opción B

Problema 4.5.6 ***(2 puntos)*** En una población, el $40\,\%$ son hombres y el $60\,\%$ mujeres. En esa población el $80\,\%$ de los hombres y el $20\,\%$ de las mujeres son aficionados al futbol.

a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al futbol.

b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al futbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?.

Solución:
Llamamos $H = \{\text{hombre}\}$, $M = \{\text{mujer}\}$, $A = \{\text{aficionado}\}$, $\overline{A} = \{\text{no aficionado}\}$.

a)
$$P(A) = P(A|H)P(H) + P(A|M)P(M) = 0,80 \cdot 0,40 + 0,20 \cdot 0,60 = 0,44$$

b)
$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \frac{0,20 \cdot 0,60}{0,44} = 0,273$$

4.6. Año 2005

4.6.1. Modelo

Opción A

Problema 4.6.1 ***(2 puntos)*** Un ajedrecista gana una partida con probabilidad 0,6, la empata con probabilidad 0,3 y la pierde con probabilidad 0,1. El jugador juega dos partidas.

a) Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada uno de los resultados de este experimento aleatorio.

b) Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida.

Solución:

a) $\Omega = \{GG, GP, GE, PG, PP, PE, EG, EP, EE\}$

$$P(GG) = 0,36 \quad P(GP) = 0,18 \quad P(GE) = 0,06$$
$$P(PG) = 0,18 \quad P(PP) = 0,09 \quad P(PE) = 0,03$$
$$P(EG) = 0,06 \quad P(EP) = 0,03 \quad P(EE) = 0,01$$

b)

$$P(\text{ganar al menos una}) = P(GG) + P(GP) + P(GE) + P(PG) + P(EG) =$$
$$0,36 + 0,18 + 0,06 + 0,18 + 0,06 = 0,84$$

Opción B

Problema 4.6.2 ***(2 puntos)*** En un centro de enseñanza hay 240 estudiantes matriculados en 2º curso de Bachillerato. La siguiente tabla recoge su distribución por sexo y por opción que se cursa

	Chicas	Chicos
Científico – Tecnológica	64	52
Humanidades y C. Sociales	74	50

Si se elige un estudiante al azar de entre los que cursan 2º de Bachillerato en ese centro, calcular la probabilidad de que:

a) No curse la opción Científico-Tecnológica.

b) Si es chico, curse la opción de Humanidades y Ciencias Sociales.

Solución:

	Chicas	Chicos	Totales
Científico – Tecnológica	64	52	116
Humanidades y C. Sociales	74	50	124
Totales	138	102	240

a) $P(\overline{CT}) = 1 - P(CT) = 1 - \dfrac{116}{240} = \dfrac{31}{60} = 0,5166666666$

b)

$$P(HCS|H) = \frac{P(H|HCS) \cdot P(HCS)}{P(H)} = \frac{50/124 \cdot 124/240}{102/240} =$$
$$\frac{25}{51} = 0,49$$

4.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.6.3 ***(2 puntos)*** Una caja con una docena de huevos contiene dos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos.

a) Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.

b) Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.

Solución:

a) Llamamos $A = \{\text{sale un huevo en buen estado}\}$
Llamamos $B = \{\text{sale un huevo roto}\}$

$$P(AAAA) = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{14}{33}$$

b)

$$P(BAAA) + P(ABAA) + P(AABA) + P(AAAB) =$$
$$4 \cdot P(BAAA) = 4 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{33}$$

Opción B

Problema 4.6.4 ***(2 puntos)*** En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: "Obtener tres unos", "Obtener al menos un dos", "Obtener tres números distintos" y "Obtener una suma de cuatro".
Solución:

a) $P(111) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0,00463$

b) $P(\textit{algún } 2) = 1 - P(\textit{ningún } 2) = 1 - P(\overline{222}) = 1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) = 0,4213$

c) $P(3 \textit{ distintos}) = 1 - P(3 \textit{ iguales}) = 1 - 6P(111) = 0,972$

d) $P(\textit{suma} = 4) = P(211) + P(121) + P(112) = 3P(211) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0,0139$

4.6.3. Extraordinaria

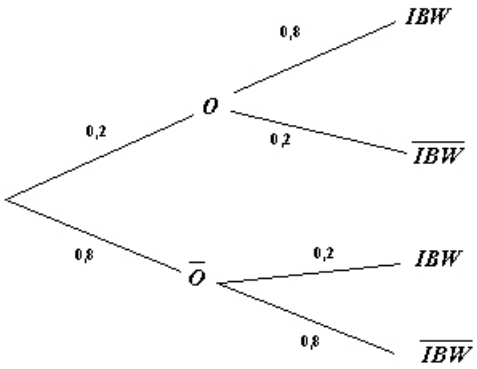
Opción A

Problema 4.6.5 ***(2 puntos)*** En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones vía internet. De los inversores que realizan operaciones vía internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan inversiones vía internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide:

a) Obtener la probabilidad de que un inversor elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.

b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por internet?.

Solución:



a)

$$P(IBW) = 0,2 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,32$$

b)

$$P(O|IBW) = \frac{P(IBW|O)P(O)}{P(IBW)} = \frac{0,8 \cdot 0,2}{0,32} = 0,5$$

Opción B

Problema 4.6.6 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos, tal que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(\overline{B}) = \frac{2}{5}$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{3}{4}$. Calcular

a) $P(B|A)$.

b) $P(\overline{A}|B)$.

Nota: $\overline{A}$ representa el suceso contrario del suceso A.

Solución:

a)

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Longrightarrow$$
$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

b)

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{3}{5}$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$
$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{12}$$

4.7. Año 2006

4.7.1. Modelo

Opción A

Problema 4.7.1 ***(2 puntos)*** Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B:

$$P(A) = 0,6 \quad P(B) = 0,2 \quad P(A \cap B) = 0,12$$

a) calcular las probabilidades de los sucesos

$$(A \cup B) \text{ y } (A|(A \cup B))$$

b) ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,2 - 0,12 = 0,68$

$$P(A|(A \cup B)) = \frac{(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,6}{0,68} = 0,88$$

b) Como $P(A \cap B) = 0,12 = P(A) \cdot P(B)$ los sucesos son independientes. Como $P(A \cap B) \neq 0$ los sucesos no son incompatibles.

Opción B

Problema 4.7.2 ***(2 puntos)*** Una urna contiene dos bolas. La urna se llenó tirando una moneda equilibrada al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

Solución:

El espacio muestral será $\Omega = \{(B, B), (B, N), (N, B), (N, N)\}$ y la probabilidad de cada uno de estos sucesos es $1/4$.

Si una de las bolas ha salido blanca, sólo hay tres casos posibles de los que hay únicamente uno favorable, luego la probabilidad pedida es $1/3$.

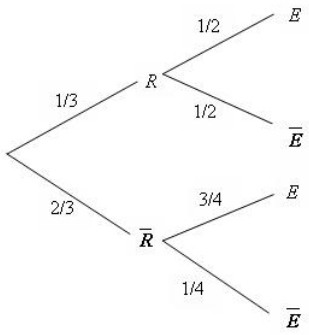
4.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.7.3 ***(2 puntos)*** Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es $2/3$. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0,25.

Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

Solución:



$$P(\overline{R}|E) = \frac{P(E|\overline{R}) \cdot P(\overline{R})}{P(E)} = \frac{3/4 \cdot 2/3}{1/3 \cdot 1/2 + 3/4 \cdot 2/3} = \frac{3}{4}$$

Opción B

Problema 4.7.4 ***(2 puntos)*** Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado. Se pide:

a) Describir el espacio muestral de este experimento.

b) Determinar la probabilidad del suceso: "obtener una cara en la moneda y un número par en el dado".

Solución:

a)

$$\Omega = \{(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),(X,1),(X,2),(X,3),(X,4),(X,5),(X,6)\}$$

b)

$$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

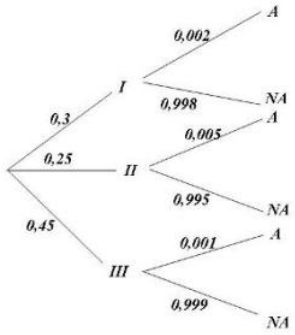
4.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.7.5 (Puntuación máxima: 2 puntos)

Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0,2 %, mientras que dicha proporción es 0,5 % en la segunda, y 0,1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

Solución:



$$P(A) = 0,002 \cdot 0,3 + 0,005 \cdot 0,25 + 0,001 \cdot 0,45 = 0,0023$$

Opción B

Problema 4.7.6 (Puntuación máxima: 2 puntos)

Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

Solución:

$$P(bb) + P(nn) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{11}{21} = 0,5238095238$$

4.8. Año 2007

4.8.1. Modelo

Opción A

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

Opción B

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

4.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.8.1 ***(2 puntos)*** Según un cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tienen contratado acceso a internet, el 33 % tiene contratada televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Solución:

Lamamos $A = \{\text{Tiene contratado internet}\}$ y $B = \{\text{Tiene contratado TV por cable}\}$

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,33, \quad P(A \cap B) = 0,2$$

a)

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,33 - 0,2 = 0,13$$

b)

$$P(\text{Ninguno}) = 1 - P(\text{Alguno}) = 1 - P(A \cup B) =$$
$$1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - 0,53 = 0,47$$

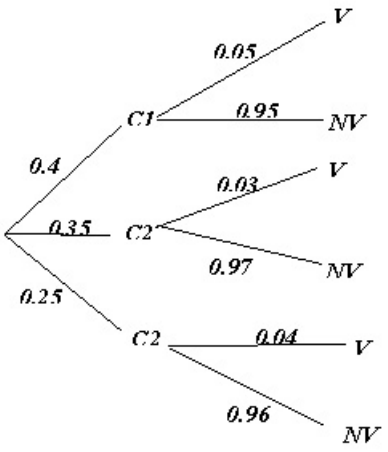
Opción B

Problema 4.8.2 ***(2 puntos)*** Los pianistas de la isla sordina se forman en tres conservatorios, $C1$, $C2$ y $C3$, que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 %, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar.

a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.

b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio $C1$.

Solución:



a) $P(V) = 0,4 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,04 = 0,0405$

b)

$$P(C1|V) = \frac{P(V|C1) \cdot P(C1)}{P(V)} = \frac{0,05 \cdot 0,4}{0,0405} = 0,4938$$

4.8.3. Extraordinaria

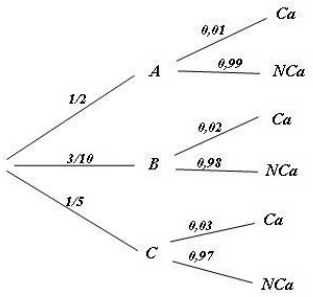
Opción A

Problema 4.8.3 ***(2 puntos)*** En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.

a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado.

b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

Solución:



$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{10}, \quad P(C) = \frac{1}{5}$$

a)

$$P(Ca) = \frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{3}{10} \cdot 0,02 + \frac{1}{5} \cdot 0,03 = 0,017$$

b)

$$P(B|Ca) = \frac{P(Ca|B)P(B)}{P(Ca)} = \frac{0,02 \cdot \frac{3}{10}}{0,017} = 0,3529$$

Opción B

Problema 4.8.4 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos aleatorios tal que:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$$

Calcular:

$$P(A \cup B), \quad P(A \cap B), \quad P(\overline{A}|B), \quad P(\overline{B}|A)$$

Solución:

☛ $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{19}{20} = \dfrac{3}{10}$
- $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/2 - 3/10}{1/2} = \dfrac{2}{5}$
- $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{3/4 - 3/10}{3/4} = \dfrac{3}{5}$

4.9. Año 2008

4.9.1. Modelo

Opción A

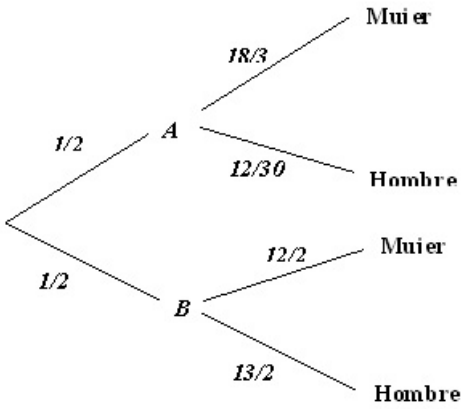
Problema 4.9.1 ***(2 puntos)*** Un instituto tiene dos grupos de 2º de Bachillerato. El grupo A está formado por 18 alumnas, de las cuales 5 juegan al baloncesto, y 12 alumnos, 7 de los cuales juegan al mismo deporte. El grupo B está formado por 12 alumnas, 4 de ellas jugadoras de baloncesto, y 13 alumnos, 7 de los cuales practican baloncesto.

a) Si se elige un alumno de 2º de bachillerato al azar, calcular la probabilidad de que sea mujer.

b) ¿En qué grupo es más probable elegir al azar un estudiante que juegue al baloncesto?

Solución:

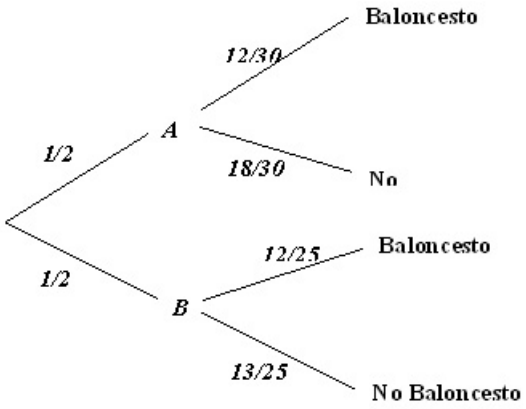
a) Hay dos maneras de ver este problema:



¿Están todos los alumnos juntos y fuera de sus grupo?, en este caso $P(\text{Mujer}) = \dfrac{30}{55} = 0,5454545454$. Pero también podemos pensar que los alumnos se encuentran en sus grupos, en ese caso primero nos dirigimos hacia un grupo con una probabilidad de $1/2$ y calculamos las probabilidades condicionadas correspondientes:

$$P(\text{Mujer}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{25} = 0,54$$

b) Ahora tenemos:



$$P(A|\text{Baloncesto}) = \frac{P(\text{Baloncesto}|A)P(A)}{P(\text{Baloncesto})} = \frac{12/30 \cdot 1/2}{12/30 \cdot 1/2 + 12/25 \cdot 1/2} = \frac{5}{11} = 0{,}4545$$

$$P(B|\text{Baloncesto}) = \frac{P(\text{Baloncesto}|B)P(B)}{P(\text{Baloncesto})} = \frac{12/25 \cdot 1/2}{12/30 \cdot 1/2 + 12/25 \cdot 1/2} = \frac{6}{11} = 0{,}5454$$

Es claro que, es más probable encontrar un alumno que juegue al baloncesto en el grupo B.

Opción B

Problema 4.9.2 ***(2 puntos)*** La orquesta musiquera está formada por tres tipos de instrumentos, 30 de madera, 15 de viento y 5 de percusión. La víspera de un concierto se ponen enfermos dos músicos. Calcular la probabilidad de que:

a) Ambos toquen instrumentos de viento.

b) Ambos toquen el mismo tipo de instrumento.

Solución:

Llamamos M al instrumento de madera, V al de viento y P al de percusión. Los músicos enfermos son A y B.

a)

$$P(A = V \text{ y } B = V) = \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} = \frac{3}{35} = 0,086$$

b)

$$P(\text{ambos lo mismo}) = P(A = M \text{ y } B = M) + P(A = V \text{ y } B = V) + P(A = P \text{ y } B = P) = \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} + \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} + \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} = \frac{22}{49} = 0,449$$

4.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.9.3 ***(2 puntos)*** En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual a cinco en el dado.

a) Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane.

b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

Solución:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(CC1),(CC2),(CC3),(CC4),(CC5),(CC6),\\ &(CX1),(CX2),(CX3),(CX4),(CX5),(CX6),\\ &(XC1),(XC2),(XC3),(XC4),(XC5),(XC6),\\ &(XX1),(XX2),(XX3),(XX4),(XX5),(XX6)\}\end{aligned}$$

a)
$$P(\text{Gane}) = \frac{7}{24}$$

b)
$$P(CC|\text{gana}) = \frac{6}{8} = \frac{3}{7}$$

Opción B

Problema 4.9.4 ***(2 puntos)*** Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, tal que:

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

a) ¿Son A y B sucesos independientes? Razónese.

b) Calcúlese $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

Solución:

a)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12} = P(A) \cdot P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.

b)

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} =$$

$$\frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

4.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.9.5 ***(2 puntos)*** Se consideran dos actividades de ocio: A = ver televisión y B = visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a $0,46$; la probabilidad de que practique B es igual a 0,33 y la probabilidad de que practique A y B es igual a 0,15.

a) Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores?

b) Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?

Solución:

$$P(A) = 0,46; \quad P(B) = 0,33; \quad P(A \cap B) = 0,15$$

a)

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 0,36$$

b)

$$P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P(A \cap B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \frac{0,15}{0,64} = 0,234375$$

Opción B

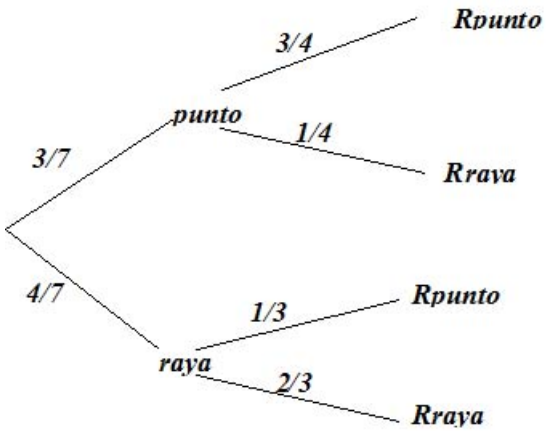
Problema 4.9.6 ***(2 puntos)*** Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son *punto* y *raya* y que el telégrafo envía un *punto* con probabilidad $\frac{3}{7}$ y una *raya* con probabilidad $\frac{4}{7}$. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un *punto* se reciba una *raya* con probabilidad $\frac{1}{4}$ y que cuando se envíe una *raya* se reciba un *punto* con probabilidad $\frac{1}{3}$.

$$P(raya|punto) = \frac{1}{4}, \quad P(punto|raya) = \frac{1}{3}$$

a) Si se recibe una *raya*, ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una *raya*?

b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe $punto - punto$ se hubiera enviado $raya - raya$

Solución:



a)

$$P(raya|Rraya) = \frac{P(Rraya|raya) \cdot P(raya)}{P(Rraya)} = \frac{2/3 \cdot 4/7}{3/7 \cdot 1/4 + 4/7 \cdot 2/3} =$$

$$= \frac{32}{41} = 0,7804878048$$

b)

$$P(raya|Rpunto) = \frac{P(Rpunto|raya) \cdot P(raya)}{P(Rpunto)} = \frac{1/3 \cdot 4/7}{3/7 \cdot 3/4 + 4/7 \cdot 1/3} =$$

$$= \frac{16}{43} = 0,3720930232 \Longrightarrow P(raya - raya|Rpunto - Rpunto) =$$

$$\frac{16}{43} \cdot \frac{16}{43} = \frac{256}{1849} = 0,1384532179$$

4.10. Año 2009

4.10.1. Modelo

Opción A

Problema 4.10.1 ***(2 puntos)*** Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

a) Obtener dos caras y una cruz en el lanzamiento de tres monedas equilibradas e indistinguibles.

b) Obtener una suma de puntos igual a seis o siete en el lanzamiento de dos dados de seis caras equilibrados e indistinguibles.

Solución:

a) $P($ dos caras y una cruz$) = P(CCX) + P(CXC) + P(XCC) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

b)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tenemos:

$$P(\text{Suma}\,6) = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{Suma}\,7) = \frac{1}{6}$$

$$P(6 \text{ o } 7) = \frac{11}{36}$$

Opción B

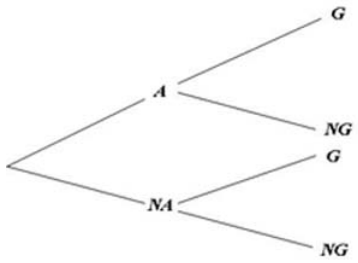
Problema 4.10.2 ***(2 puntos)*** La probabilidad de que un vehículo de una cierta compañía de coches tenga un accidente es igual a 0,2. Si uno de los vehículos sufre un accidente, la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa es igual a 0,85. Por otra parte, la probabilidad de que uno de los vehículos necesite la asistencia de una grúa sin haber tenido un accidente es igual a 0,1.

a) Se elige al azar un vehículo de dicha compañía, ¿cuál es la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa?

b) Si el vehículo elegido ha necesitado la asistencia de una grúa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido por causa de un accidente?

Solución:

Llamamos A al suceso accidente, NA al suceso no hay accidente, G al suceso necesita grúa y NG al suceso no necesita grúa.



a)

$$P(G) = P(G|A) \cdot P(A) + P(G|NA) \cdot P(NA) = 0,2 \cdot 0,85 + 0,8 \cdot 0,1 = 0,25$$

b)

$$P(NA|G) = \frac{P(G|NA) \cdot P(NA)}{P(G)} = \frac{0,1 \cdot 0,8}{0,25} = 0,32$$

4.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.10.3 ***(2 puntos)*** Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tal que:

$$P(A) = \frac{1}{2};\ \ P(B) = \frac{1}{3};\ \ P(C) = \frac{1}{4};$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3};\ \ P(A \cap B \cap C) = 0;\ \ P(A|B) = P(C|A) = \frac{1}{2}$$

a) Calcúlese $P(C \cap B)$.

b) Calcúlese $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$. La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

Solución:

a)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(C \cap A) = P(C|A)P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - P(B \cap C) + 0 \Longrightarrow P(B \cap C) = 0$$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1$

Opción B

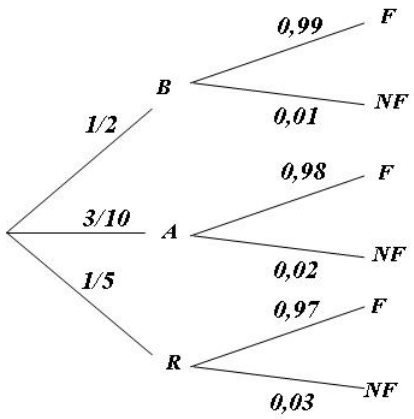
Problema 4.10.4 ***(2 puntos)*** Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es es blanca, es igual a 0,02 si la bombilla es azul y 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.

b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea de color azul

Solución:

$$P(B) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2},\ \ P(A) = \frac{120}{400} = \frac{3}{10},\ \ P(R) = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$$



☛

$$P(NF) = \frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{3}{10} \cdot 0,02 + \frac{1}{5} \cdot 0,03 = 0,017$$

☛

$$P(A|NF) = \frac{P(NF|A) \cdot P(A)}{P(NF)} = \frac{0,02 \cdot 3/10}{0,017} = 0,35294$$

4.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.10.5 ***(2 puntos)*** En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a las empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %.

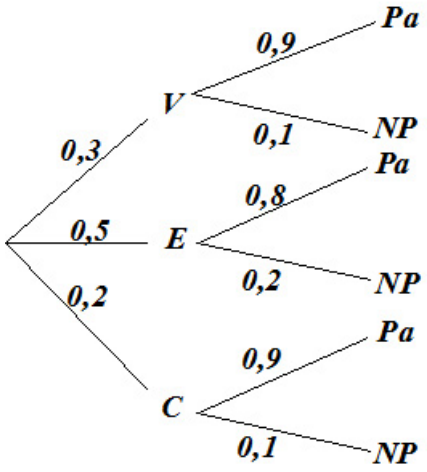
a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

Solución:

V: crédito para vivienda, E: crédito para empresa y C: crédito para consumo.

Pa: pagados y NP: no pagados.



a) $P(Pa) = P(V)\cdot P(Pa|V)+P(E)\cdot P(Pa|E)+P(C)\cdot P(Pa|C) = 0,3\cdot 0,9+0,5\cdot 0,8+0,2\cdot 0,9 = 0,85$

b)

$$P(C|Pa) = \frac{P(Pa|C)\cdot P(C)}{P(Pa)} = \frac{0,9\cdot 0,2}{0,85} = 0,21176$$

Opción B

Problema 4.10.6 ***(2 puntos)*** La probabilidad de que un habitante de cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0,55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0,40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0,25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:

a) al menos uno de los dos tipos de música.

b) la música clásica y también la moderna.

c) sólo la música clásica.

d) sólo la música moderna.

Solución:

Llamamos M al suceso le gusta la música moderna y C al suceso le gusta la música clásica. Los datos del problema: $P(M) = 0,55$, $P(C) = 0,4$ y $P(\overline{M \cup C}) = 0,25$

a) $P(M \cup C) = 1 - P(\overline{M \cup C}) = 1 - 0,25 = 0,75$

b) $P(M \cap C) = P(M) + P(C) - P(M \cup C) = 0,55 + 0,40 - 0,75 = 0,20$

c) $P(C \cap \overline{M}) = P(C) - P(M \cap C) = 0,40 - 0,20 = 0,20$

d) $P(M \cap \overline{C}) = P(M) - P(M \cap C) = 0,55 - 0,20 = 0,35$

4.11. Año 2010

4.11.1. Modelo

Opción A

Problema 4.11.1 ***(2 puntos)*** Según un cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tienen contratado acceso a internet, el 33 % tiene contratada televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Solución:
Lamamos $A = \{\text{Tiene contratado internet}\}$ y $B = \{\text{Tiene contratado TV por cable}\}$

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,33, \quad P(A \cap B) = 0,2$$

a)

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,33 - 0,2 = 0,13$$

b)

$$P(\text{Ninguno}) = 1 - P(\text{Alguno}) = 1 - P(A \cup B) =$$

$$1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - 0,53 = 0,47$$

Opción B

Problema 4.11.2 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos aleatorios tal que:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$$

Calcular:

$$P(A \cup B), \quad P(A \cap B), \quad P(\overline{A}|B), \quad P(\overline{B}|A)$$

Solución:

- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \dfrac{1}{20} \Longrightarrow P(\overline{A \cup B}) = \dfrac{19}{20}$
- $P(\overline{A \cup B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{19}{20} = \dfrac{3}{10}$
- $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/2 - 3/10}{1/2} = \dfrac{2}{5}$
- $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{3/4 - 3/10}{3/4} = \dfrac{3}{5}$

4.11.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.11.3 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tal que $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,4$; $P(A \cap B) = 0,1$. Calcúlense las siguientes probabilidades:

$$a)P(A \cup B); \quad b)P(\overline{A} \cup \overline{B}); \quad c)P(A|B); \quad d)P(\overline{A} \cap B)$$

Solución:

$a)P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,8$
$b)P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,9$
$c)P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,25$
$d)P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,3$

Opción B

Problema 4.11.4 ***(2 puntos)*** Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

a) Obtener al menos un seis en el total de los lanzamientos.

b) Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.

Solución:

✌

$$P(\text{algún seis}) = 1 - P(\text{ningún seis}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,6651020233$$

✌

$$P(6, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,01339591906$$

4.11.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.11.5 ***(2 puntos)*** Sean tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tal que:

$$P(A|C) \geq P(B|C), \quad P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C})$$

Razónese cuál de las siguientes desigualdades es cierta:

$$\text{a) } P(A) < P(B); \quad \text{b) } P(A) \geq P(B)$$

Nota.- $\overline{C}$ representa el suceso complementario de C.
Solución:

$$P(A|C) \geq P(B|C) \Longrightarrow \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \geq \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \Longrightarrow P(A \cap C) \geq P(B \cap C)$$

$$P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C}) \Longrightarrow \frac{P(A\cap\overline{C})}{P(\overline{C})} \geq \frac{P(B\cap\overline{C})}{P(\overline{C})} \Longrightarrow P(A\cap\overline{C}) \geq P(B\cap\overline{C})$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap C)+P(A\cap\overline{C})=P(A) \\ P(B\cap C)+P(B\cap\overline{C})=P(B) \end{array}\right\} \Longrightarrow P(A) \geq P(B)$$

Luego es falso que $P(A) < P(B)$, se cumple que:

$$P(A) \geq P(B)$$

Opción B

Problema 4.11.6 ***(2 puntos)*** Se consideran los siguientes sucesos:

- Suceso A=La economía de un cierto país está en recesión.
- Suceso B=Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión.

Se sabe que:

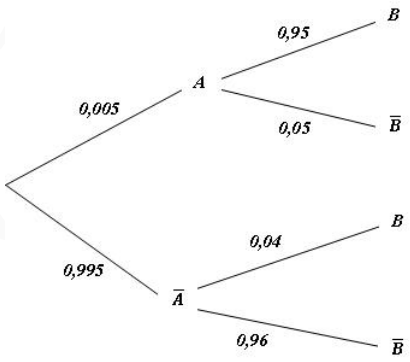
$$P(A) = 0,005, \quad P(B|A) = 0,95, \quad P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,96$$

a) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.

b) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

Nota.- La notación $\overline{A}$ representa el suceso complementario de A.

Solución:



a)

$$P(\overline{B}\cap A) = 0,005 \cdot 0,05 = 0,00025$$

b)

$$P(B) = 0,005 \cdot 0,95 + 0,995 \cdot 0,04 = 0,04455$$

4.12. Año 2011

4.12.1. Modelo

Opción A

Problema 4.12.1 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tal que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es igual a $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a $\frac{7}{12}$. Se sabe además que $P(A|B) = \frac{1}{2}$.

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra A ó B.

b) Calcúlese la probabilidad de que ocurra A.

Solución:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \quad P(\overline{A \cup B}) = \frac{7}{12}, \quad P(A|B) = \frac{1}{2}$$

a) $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.

b)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow$$

$$P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(B) = \frac{5}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

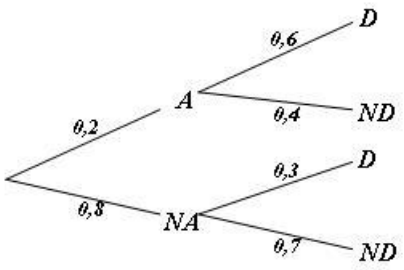
Opción B

Problema 4.12.2 ***(2 puntos)*** En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0,2. Entre los habitantes que siguen una dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,6. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,3. Se elige al azar un habitante de la población.

a) Calcúlese la probabilidad de que practique deporte regularmente.

b) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

Solución:



a) $P(D) = 0,2 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,36$

b)

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0,6 \cdot 0,2}{0,36} = 0,333$$

4.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.12.3 ***(2 puntos)*** En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0,4, de molinos eólicos con probabilidad 0,26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0,12. Elegido un día al azar, calcúlese la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio:

a) por alguna de las dos instalaciones,

b) solamente por una de las dos.

Solución:

Sean los sucesos A: energía solar y B: energía eólica

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,26, \quad P(A \cap B) = 0,12$$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,54.$

b)

$$P(\text{sólo uno}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0,42$$

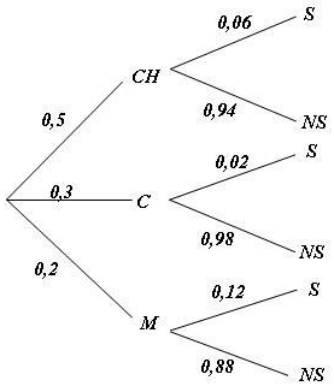
Opción B

Problema 4.12.4 ***(2 puntos)*** En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0,5, de que sea un camión es 0,3 y de que sea una motocicleta es 0,2. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es 0,06 para un coche, 0,02 para un camión y 0,12 para una motocicleta. En un momento dado, un vehículo pasa por el radar.

a) Calcúlese la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida.

b) Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta?

Solución:



a) $P(S) = 0,5 \cdot 0,06 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,12 = 0,06$

b)

$$P(M|S) = \frac{P(S|M)P(M)}{P(S)} = \frac{0,2 \cdot 0,12}{0,06} = 0,40$$

4.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.12.5 ***(2 puntos).*** Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0,49 y la probabilidad de que nazca un niño es 0,51. Una familia tiene dos hijos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?

Solución:

a) V_1: el primer hijo es niño, V_2: el segundo hijo es niño. M_1: el primer hijo es niña, M_2: el segundo hijo es niña.

$$P(V_1 \cap V_2|V_2) = \frac{P(V_1 \cap V_2 \cap V_2)}{P(V_2)} = \frac{0,51 \cdot 0,51}{0,51} = 0,51$$

b) Si el suceso A es al menos un niño y el B es dos niños tendremos que $A \cap B = B$ y

$$P(A) = 1 - P(M_1 \cap M_2) = 1 - 0,49^2 = 0,7599$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0,51^2}{0,7599} = 0,342$$

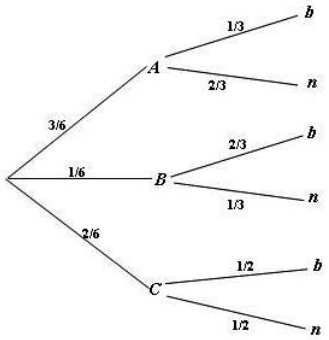
Opción B

Problema 4.12.6 ***(2 puntos).*** Se dispone de tres urnas, A, B y C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

b) Si se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?

Solución:



a)

$$P(b) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} = 0,444$$

b)

$$P(C|b) = \frac{P(b|C)P(C)}{P(b)} = \frac{1/2 \cdot 1/3}{0,444} = 0,375$$

4.12.4. Reserva

Opción A

Problema 4.12.7 ***(2 puntos).*** La probabilidad de que el jugador A de baloncesto consiga una canasta de tres puntos es igual a $7/9$, y la probabilidad de que otro jugador B consiga una canasta de tres puntos es $5/7$. Cada uno de estos jugadores realiza un lanzamiento de tres puntos.

a) Calcúlese la probabilidad de que solamente uno de los dos jugadores consiga un triple.

b) Calcúlese la probabilidad de que al menos uno de los dos jugadores consiga un triple.

Solución:

$$P(A) = \frac{7}{9}, \quad P(\overline{A}) = \frac{2}{9}, \quad P(B) = \frac{5}{7}, \quad P(\overline{B}) = \frac{2}{7}$$

a)

$$P(\text{sólo uno}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{7} = \frac{8}{21} = 0,381$$

b)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{9} + \frac{5}{7} - \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{7} = \frac{59}{63} = 0,937$$

Opción B

Problema 4.12.8 ***(2 puntos).*** Los datos de la tabla siguiente se han extraído de las estadísticas oficiales de la prueba de acceso a estudios universitarios (fase general) de la convocatoria del curso 2009/2010, en el Distrito único de Madrid:

	Chico	Chica
Apto	12109	9863
NoApto	1717	1223

Se elige un alumno al azar de entre los que se presentaron a dicha prueba.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea chica o haya resultado apto?

b) Si el alumno elegido es chico, ¿Cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

Solución:

	Chico	Chica	Total
Apto	12109	9863	21972
NoApto	1717	1223	2940
Total	13826	11086	24912

$\Longrightarrow$

	Chico	Chica	Total
Apto	$0,486$	$0,396$	$0,882$
NoApto	$0,069$	$0,049$	$0,118$
Total	$0,555$	$0,445$	1

Sean los sucesos V: Chico, M: Chica, A: Apto y $\overline{A}$: No Apto.

a) $P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = 0,445 + 0,882 - 0,396 = 0,931$

b)

$$P(\overline{A}|V) = \frac{P(\overline{A} \cap V)}{P(V)} = \frac{0,069}{0,555} = 0,124$$

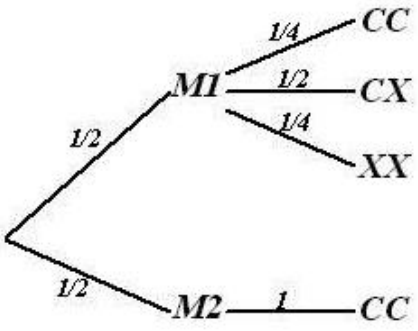
4.13. Año 2012

4.13.1. Modelo

Opción A

Problema 4.13.1 ***(2 puntos)*** Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?

Solución:



$$P(CC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}, \;\; P(CC|M2) = 1$$
$$P(M2|CC) = \frac{P(CC|M2)P(M2)}{P(CC)} = \frac{4}{5}$$

Opción B

Problema 4.13.2 ***(2 puntos)*** Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

	Pre − benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?

c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?

d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

Solución:

a)
$$P(\text{iniciación}) = \frac{200}{480} = \frac{5}{12}$$

b)
$$P(\text{perfeccionamiento} \cup \text{alevín}) = \frac{280}{480} + \frac{160}{480} - \frac{150}{480} = \frac{29}{48}$$

c)
$$P(\text{perfeccionamiento}|\text{benjamín}) = \frac{9}{16}$$

d)
$$P(\text{benjamín}|\text{iniciación}) = \frac{7}{20}$$

4.13.2. Ordinaria

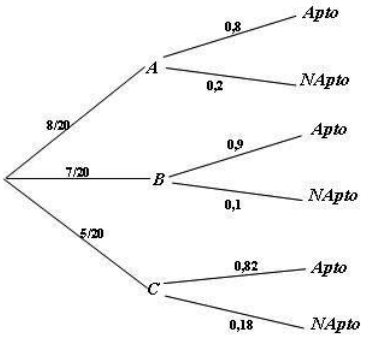
Opción A

Problema 4.13.3 ***(2 puntos)*** En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

Solución:



a)
$$P(Apto) = \frac{8}{20} \cdot 0,8 + \frac{7}{20} \cdot 0,9 + \frac{5}{20} \cdot 0,82 = 0,84$$

b) $P(NApto) = 1 - P(Apto) = 0,16$

$$P(B|NApto) = \frac{P(NApto|B)P(B)}{P(NApto)} = \frac{7}{32} = 0,21875$$

Opción B

Problema 4.13.4 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tal que:

$$P(A \cap B) = 0,1 \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6 \quad P(A|B) = 0,5$$

Calcúlense:

a) $P(B)$.

b) $P(A \cup B)$.

c) $P(A)$.

d) $P(\overline{B}|\overline{A})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

Solución:

a)
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

b)

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,6$$
$$P(A \cup B) = 0,4$$

c)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow$$
$$P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(B) = 0,4 + 0,1 - 0,2 = 0,3$$

d)

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0,6}{0,7} = 0,86$$

4.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

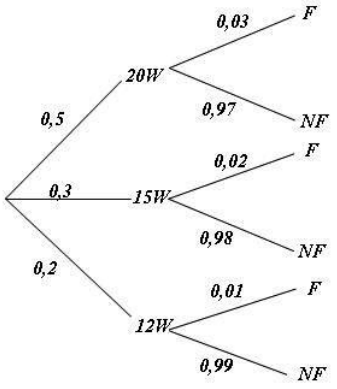
Problema 4.13.5 ***(2 puntos)*** Una ferretería tiene en su almacén bombillas de bajo consumo: 500 bombillas de 20 W, 300 de 15 W y 200 de 12 W. Los controles de calidad realizados por la empresa que fabrica las bombillas han permitido determinar las probabilidades de fallo de cada tipo de producto durante la primera hora de encendido, siendo de 0,03 para las bombillas de 20 W, de 0,02 para las de 15 W y de 0,01 para las bombillas de 12 W.

a) Se elige al azar una bombilla del almacén, ¿cuál es la probabilidad de que se produzca un fallo durante la primera hora de encendido?

b) Se somete al control de calidad una bombilla del almacén elegida al azar y falla en su primera hora de encendido, ¿cuál es la probabilidad de que sea una bombilla de 20 W?

Solución:

$$P(20W) = 0,5, \;\; P(15W) = 0,3, \;\; P(12W) = 0,2$$



a)

$$P(F) = P(20W)P(F|20W) + P(15W)P(F|15W) + P(12W)P(F|12W) =$$
$$0,5 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,01 = 0,023$$

b)

$$P(20W|F) = \frac{P(F|20W)P(20W)}{P(F)} = \frac{0,03 \cdot 0,5}{0,023} = 0,652$$

Opción B

Problema 4.13.6 ***(2 puntos)*** Los 30 alumnos de una Escuela de Idiomas estudian obligatoriamente Inglés y Francés. En las pruebas finales de estas materias se han obtenido los siguientes resultados: 18 han aprobado Inglés, 14 han aprobado Francés y 6 han aprobado los dos idiomas.

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya aprobado ni Inglés ni Francés?

b) Se elige un estudiante al azar de entre los aprobados de Francés, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Inglés?

Solución:

Llamamos I al suceso aprobar inglés y F al de aprobar francés.

$$P(I) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5},\ \ P(F) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15},\ \ P(I \cap F) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

a)

$$P(\overline{I} \cap \overline{F}) = P(\overline{I \cup F}) = 1 - (P(I) + P(F) - P(I \cap F)) = \frac{1}{15} = 0,133$$

b)

$$P(I|F) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = \frac{3}{7} = 0,428$$

4.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.13.7 ***(2 puntos)*** Se dispone de cinco cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada previamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde.

a) Calcúlese la probabilidad de que el jugador gane.

b) Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?

Solución:

Para que un jugador gane pueden ocurrir los siguientes sucesos: B, NB y NNB.

a)

$$P(Ganar) = P(B) + P(NB) + P(NNB) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

b)

$$P(una\ caja|Perder) = \frac{P(Perder \cap una\ caja)}{P(Perder)} = \frac{2/5}{2/3} = \frac{3}{5}$$

Opción B

Problema 4.13.8 ***(2 puntos)*** Se consideran dos sucesos A y B tal que:

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad P(B|A) = \frac{1}{4} \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

Calcúlese razonadamente:

a) $P(A \cap B)$.

b) $P(B)$.

c) $P(\overline{B}|A)$.

d) $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

Solución:

a)

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

b)

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

c)

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4}$$

d)

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{2}{3}$$

4.14. Año 2013

4.14.1. Modelo

Opción A

Problema 4.14.1 ***(2 puntos)*** Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0,01, de que lo sea uno fabricado en B es 0,02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0,03. En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C.

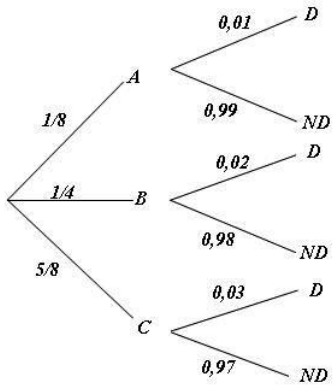
a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.

b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

Solución:

$$P(D|A) = 0,01, \quad P(D|B) = 0,02, \quad P(D|C) = 0,03$$

$$P(A) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}, \quad P(B) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}, \quad P(C) = \frac{75}{120} = \frac{5}{8}$$



a)

$$P(ND) = \frac{1}{8} \cdot 0,99 + \frac{1}{4} \cdot 0,98 + \frac{5}{8} \cdot 0,97 = 0,975$$

b)

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{0{,}02 \cdot 0,25}{1 - 0,975} = 0,2$$

Opción B

Problema 4.14.2 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos aleatorios tal que

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{B}) = \frac{3}{4}, \quad P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

a) Determínese si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B.

b) Determínese si son dependientes o independientes los sucesos A y B.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} \neq 0 \Longrightarrow$ los sucesos A y B son compatibles.

b) $P(A \cap B) = \frac{1}{12} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \Longrightarrow$ los sucesos A y B no son independientes.

4.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.14.3 ***(2 puntos)*** Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector.

b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

Solución:

$D \equiv$ deportistas, $L \equiv$ lectores.

$$P(D \cup L) = 0,55, \;\; P(D) = 0,4, \;\; P(L) = 0,3$$

a) $P(D \cup L) = P(D) + P(L) - P(D \cap L) \Longrightarrow P(D \cap L) = P(D) + P(L) - P(D \cup L) = 0,4 + 0,3 - 0,55 = 0,15$
$P(D \cap \overline{L}) = P(D) - P(D \cap L) = 0,4 - 0,15 = 0,25$

b)

$$P(D|L) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{0,15}{0,3} = 0,5$$

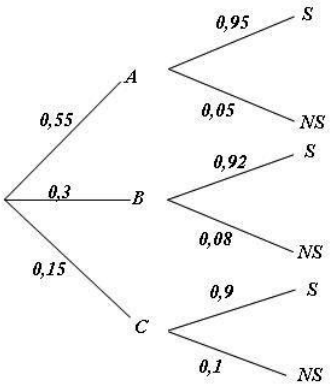
Opción B

Problema 4.14.4 ***(2 puntos)*** Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A

Solución:



a) $P(NS) = 0,55 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,08 + 0,15 \cdot 0,1 = 0,0665$

b) $P(A|NS) = \dfrac{P(NS|A)}{P(NS} = \dfrac{0,05 \cdot 0,55}{0,0665} = 0,4135$

4.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.14.5 ***(2 puntos)*** En un instituto se imparten únicamente dos lenguas extranjeras: inglés y francés. El 72 % de los alumnos de ese instituto estudia inglés y el 42 % estudia francés. Todos los alumnos estudian al menos una lengua extranjera. Si se elige un alumno al azar, calcúlese la probabilidad de que:

a) Estudie inglés y francés.

b) Estudie inglés, y no estudie francés.

Solución:

$$P(I) = 0,72; \quad P(F) = 0,42$$

a) $P(I \cup F) = 1 = P(I) + P(F) - P(I \cap F) \Longrightarrow$
$1 = 0,72 + 0,42 - P(I \cap F) \Longrightarrow P(I \cap F) = 0,14$

b) $P(I \cap \overline{F}) = P(I) - P(I \cap F) = 0,72 - 0,14 = 0,58$

Opción B

Problema 4.14.6 ***(2 puntos)***

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,8$, determínese la probabilidad de A condicionado a que B haya ocurrido.

b) Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0,4$, $P(D) = 0,5$ y que C y D son incompatibles, determínese $P(C \cup D)$.

Solución:

a) $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,8$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,4 - 0,8 = 0,2$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$

b) C y D incompatibles $\Longrightarrow P(C \cap D) = 0$, luego $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = 0,4 + 0,5 - 0 = 0,9$

4.14.4. Extraordinaria

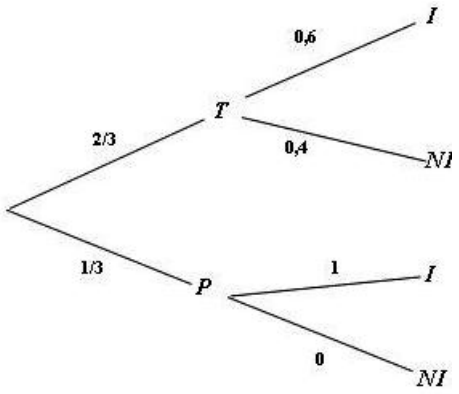
Opción A

Problema 4.14.7 ***(2 puntos)*** En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.

b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

Solución:



a) $P(I) = \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0,733$

b)

$$P(T|I) = \frac{P(I|T)P(T)}{P(I)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,6}{0,733} = 0,54$$

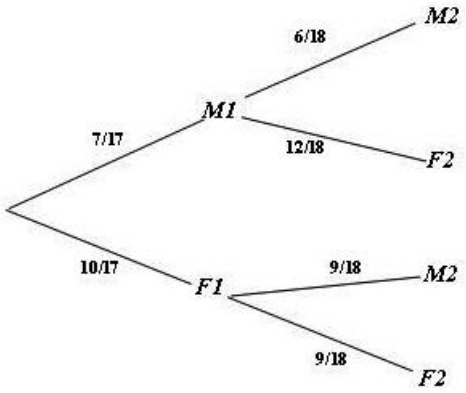
Opción B

Problema 4.14.8 ***(2 puntos)*** Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa.

b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

Solución:



a) $P(F2) = \frac{7}{17} \cdot \frac{12}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{9}{18} = \frac{29}{51} = 0,569$

b) $P(mismo\ \ sabor) = P(M1, M2) + P(F1, F2) = \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{9}{18} = \frac{22}{51} = 0,43$

4.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.14.9 ***(2 puntos)*** Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tal que

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

a) Determínese la probabilidad de que suceda A si sabemos que ha sucedido B.

b) Determínese la probabilidad de que no suceda ni A ni B.

Solución:

a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

b)

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$$

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

Opción B

Problema 4.14.10 ***(2 puntos)*** En un avión viajan un 10 % de los pasajeros en primera clase. Del total de pasajeros del avión un 20 % son mujeres. Se sabe que los pasajeros que viajan en primera clase y además son mujeres, son el 2 % del total. Determínese la probabilidad de que:

a) al escoger un pasajero de primera clase al azar sea mujer.

b) al escoger un varón del avión al azar, no viaje en primera clase.

Solución:

$$P(1) = 0,1, \quad P(2) = 0,9, \quad P(M) = 0,2, \quad P(H) = 0,8, \quad P(1 \cap M) = 0,02$$

	1	2	
H	$0,08$	$0,72$	$0,8$
M	$0,02$	$0,18$	$0,2$
	$0,1$	$0,9$	

a)

$$P(M|1) = \frac{P(1 \cap M)}{P(1)} = \frac{0,02}{0,1} = 0,2$$

b)

$$P(2|H) = \frac{P(2 \cap H)}{P(H)} = \frac{0,72}{0,8} = 0,9$$

4.15. Año 2014

4.15.1. Modelo

Opción A

Problema 4.15.1 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tal que la probabilidad de que no ocurra B es 0,6. Si el suceso B ocurre, entonces la probabilidad de que el suceso A ocurra es de 0,4 y si el suceso A ocurre, la probabilidad de que el suceso B ocurra es 0,25. Calcúlense:

a)$P(B)$, b)$P(A \cap B)$, c)$P(A)$, d)$P(A \cup B)$

Solución:

$$P(\overline{B}) = 0,6, \quad P(A|B) = 0,4, \quad P(B|A) = 0,25$$

a) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0,4$

b) $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$

c) $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B|A)} = \dfrac{0{,}16}{0,25} = 0,64$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,64 + 0,4 - 0,16 = 0,88$

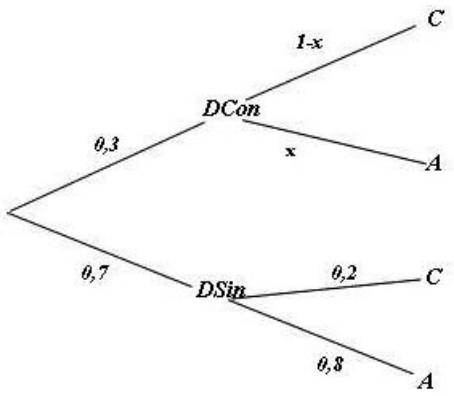
Opción B

Problema 4.15.2 ***(2 puntos)*** En una determinada población, el 30 % de las personas que deciden iniciar una dieta de adelgazamiento utilizan algún tipo de supervisión médica mientras que el 40 % de todas las personas que inician una dieta de adelgazamiento continúan con ella al menos un mes. En esa población, el 80 % de las personas que inician la dieta sin supervisión abandona antes del primer mes.

a) Se escoge al azar a un individuo de esa población del que sabemos que ha iniciado una dieta. ¿Cuál es la probabilidad de que abandonara antes del primer mes y no hubiera tenido supervisión médica?

b) ¿Qué porcentaje de las personas que inician una dieta con supervisión médica abandona antes del primer mes?

Solución:



a) $P(A \cap DSin) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$

b) $P(C) = 0,4 \Longrightarrow P(A) = 0,6 = 0,3x + 0,7 \cdot 0,8 \Longrightarrow x = 0,1333 \Longrightarrow x = 13,33\,\%$

4.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.15.3 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tal que: $P(A) = 0,4$; $P(A \cup B) = 0,5$; $P(B|A) = 0,5$. Calcúlense:

a) $P(B)$.

b) $P(A|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(B \cap A) = P(B|A)P(A) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) =$$
$$= 0,5 + 0,2 - 0,4 = 0,3$$

b)

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,4 - 0,2}{1 - 0,3} = 0,28$$

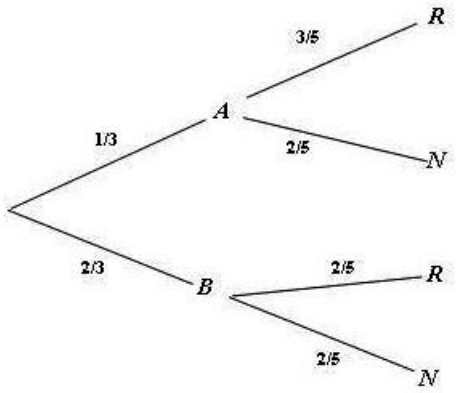
Opción B

Problema 4.15.4 ***(2 puntos)*** Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 negras; la urna B contiene 2 rojas y 3 negras. Lanzamos el dado: si el número obtenido es 1 ó 2 extraemos una bola de la urna A; en caso contrario extraemos una bola de la urna B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?

b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

Solución:



a)

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

b)

$$P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = \frac{3/5 \cdot 1/3}{7/15} = \frac{3}{7}$$

4.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.15.5 ***(2 puntos)*** Todos los trabajadores de una determinada empresa tienen como mínimo conocimientos de Inglés o de Alemán. El 75 % de los empleados tienen conocimientos de Inglés y el 46 % conocimientos de Alemán. Calcúlese la probabilidad de que un empleado elegido al azar:

a) Tenga conocimientos de Inglés y de Alemán.

b) Tenga conocimientos de Inglés si sabemos que tiene conocimientos de Alemán.

Solución:

$$P(I) = 0,75, \quad P(A) = 0,46, \quad P(I \cup A) = 1$$

a)

$$P(I \cap A) = P(I) + P(A) - P(I \cup A) = 0,75 + 0,46 - 1 = 0,21$$

b)

$$P(I|A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} = \frac{0,21}{0,46} = 0,457$$

Opción B

Problema 4.15.6 ***(2 puntos)*** En un estudio de arquitectura de Madrid trabajan personas de diferentes nacionalidades. El 80 % de las personas que trabajan en el estudio son españolas. El 40 % de los empleados del estudio son mujeres, de las cuales un 90 % son españolas. Calcúlese la probabilidad de que tomando a un empleado del estudio de arquitectura al azar:

a) Sea mujer y extranjera.

b) Sea español sabiendo que no es mujer.

Solución:

$$P(E) = 0,8,\ \ P(\overline{E}) = 0,2,\ \ P(M) = 0,4,\ \ P(\overline{M}) = 0,6,\ \ P(E|M) = 0,9,\ \ P(\overline{E}|M) = 0,1$$

Construimos una tabla de contingencia:

	E	$\overline{E}$	
M	$0,36$	$0,04$	$0,4$
$\overline{M}$	$0,44$	$0,16$	$0,6$
	$0,8$	$0,2$	1

a) $P(\overline{E} \cap M) = P(\overline{E}|M)P(M) = 0,1 \cdot 0,4 = 0,04$

b) $P(E|\overline{M}) = \dfrac{P(E \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{0,44}{0,6} = 0,73$

4.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.15.7 ***(2 puntos)*** En la representación de navidad de los alumnos de 3º de primaria de un colegio hay tres tipos de papeles: 7 son de animales, 3 de personas y 12 de árboles. Los papeles se asignan al azar, los alumnos escogen por orden alfabético sobres cerrados en los que está escrito el papel que les ha correspondido.

a) Calcúlese la probabilidad de que a los dos primeros alumnos les toque el mismo tipo de papel.

b) Calcúlese la probabilidad de que el primer papel de persona le toque al tercer alumno de la lista.

Solución:
Sean los sucesos A con dibujos de animales, B con dibujos de personas y C con dibujos de árboles.

$$P(A) = \frac{7}{22},\ \ P(B) = \frac{3}{22},\ \ P(C) = \frac{12}{22}$$

a)

$$P(\text{mismo papel}) = P(AA) + P(BB) + P(CC) = \frac{7}{22} \cdot \frac{6}{21} + \frac{3}{22} \cdot \frac{2}{21} + \frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} =$$
$$= \frac{30}{77} = 0,3896103896$$

b)

$$P(\text{el primero de persona al tercero}) =$$
$$= P(AAB) + P(ACB) + P(CAB) + P(CCB) =$$
$$= \frac{7}{22} \cdot \frac{6}{21} \cdot \frac{3}{20} + \frac{7}{22} \cdot \frac{12}{21} \cdot \frac{3}{20} + \frac{12}{22} \cdot \frac{7}{21} \cdot \frac{3}{20} + \frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} \cdot \frac{3}{20} = \frac{171}{1540} = 0,1110389610$$

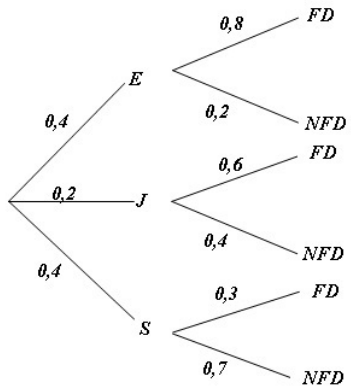
Opción B

Problema 4.15.8 ***(2 puntos)*** Al 80 % de los trabajadores en educación (E) que se jubilan sus compañeros les hacen una fiesta de despedida (FD), también al 60 % de los trabajadores de justicia (J) y al 30 % de los de sanidad (S). En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad, y el doble en educación que en justicia.

a) Calcúlese la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubiló, le hicieran una fiesta.

b) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.

Solución:



a)

$$P(FD) = P(FD|E)P(E) + P(FD|J)P(J) + P(FD|S)P(S) =$$

$$= 0,8 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,56$$

b)

$$P(S|NFD) = \frac{P(NFD|S)P(S)}{P(NFD)} = \frac{0,7 \cdot 0,4}{1 - 0,56} = 0,64$$

4.15.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.15.9 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tal que $P(A) = P(A|B) = 0,25$ y $P(B|A) = 0,5$.

a) Estúdiese si los sucesos son independientes.

b) Calcúlese $P(A \cup B)$

Solución:

a)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0,125}{0,25} = 0,5$$

$P(A) \cdot P(B) = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 = P(A \cap B) \Longrightarrow$ A y B son independientes.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,25 + 0,5 - 0,125 = 0,625$

Opción B

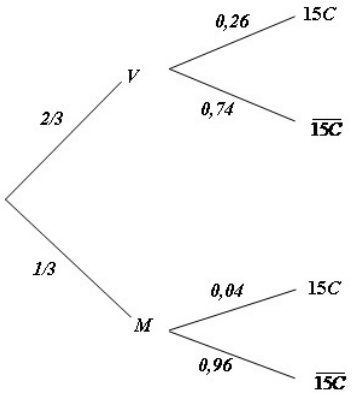
Problema 4.15.10 ***(2 puntos)*** Se ha cometido un delito. La probabilidad de que lo haya cometido un varón es el doble de que lo haya cometido una mujer. Por otra parte, la probabilidad de que al examinar un área determinada de la huella dactilar de un varón se encuentren 15 crestas es 0,26, mientras que en una mujer es 0,04.

a) Calcúlese la probabilidad de que una huella encontrada en la escena del delito tenga 15 crestas en el recuento de dicha área.

b) Se ha encontrado en la escena del delito una huella dactilar con 15 crestas en esa área determinada. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha huella pertenezca a un varón?

Solución:

$$P(M) = \frac{1}{3},\ \ P(V) = \frac{2}{3},\ \ P(15C|V) = 0,26,\ \ P(15C|M) = 0,04$$



a)

$$P(15C) = P(15C|V)P(V) + P(15C|M)P(M) =$$

$$= 0,26 \cdot \frac{2}{3} + 0,04 \cdot \frac{1}{3} = 0,187$$

b)

$$P(V|15C) = \frac{P(15C|V)P(V)}{P(15C)} = \frac{0,26 \cdot \frac{2}{3}}{0,187} = 0,927$$

4.16. Año 2015

4.16.1. Modelo

Opción A

Problema 4.16.1 ***(2 puntos)*** Se consideran los sucesos incompatibles A y B de un experimento aleatorio tal que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$. Calcúlese:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

b) $P(B \cap \overline{A})$

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,3$.
Por ser A y B incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,7$.

b) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) = 0,3$

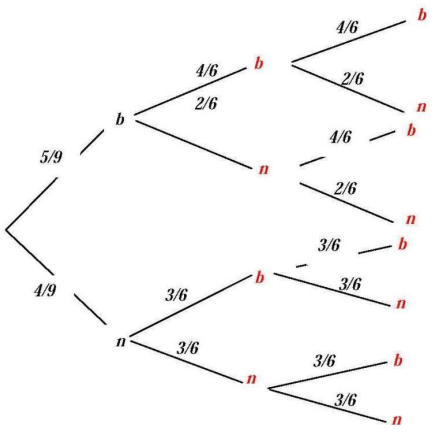
Opción B

Problema 4.16.2 ***(2 puntos)*** Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 negras, y otra urna contiene 3 bolas blancas y dos negras. Se toma al azar una bola de la primera urna y, sin mirarla, se introduce en la segunda urna. A continuación extraemos consecutivamente, con reemplazamiento, dos bolas de la segunda urna. Hállese la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean:

a) Del mismo color.

b) De distinto color.

Solución:



a) $P(\text{mismo color}) = P(2b) + P(2n) = \dfrac{43}{81}$

$P(2b) = \dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{4}{6} + \dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{3}{6} = \dfrac{29}{81}$

$P(2n) = \dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{6} + \dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{3}{6} = \dfrac{14}{81}$

b) $P(\text{distinto color}) = 1 - P(\text{mismo color}) = 1 - \dfrac{43}{81} = \dfrac{38}{81}$

4.16.2. Ordinaria

Opción A

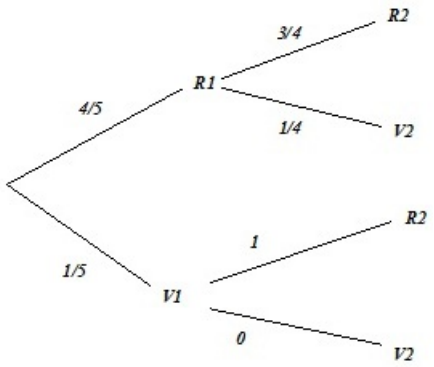
Problema 4.16.3 ***(2 puntos)*** En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean del mismo color.

b) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

Solución:

a) Tenemos:



$$P(mismo\ color) = P(R1)P(R2|R1) + P(V1)P(V2|V1) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\cdot 0 = \frac{3}{5}$$

b)

$$P(V1|R2) = \frac{P(R2|V1)P(V1)}{P(R2)} = \frac{1\cdot\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Opción B

Problema 4.16.4 ***(2 puntos)*** Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tal que $P(A\cap B) = 0,3$; $P(A \cap \overline{B}) = 0,2$; $P(B) = 0,7$. Calcúlense:

a) $P(A \cup B)$:

b) $P(B|\overline{A})$.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a)

$$\begin{cases} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B) = 0,2 + 0,7 = 0,9$$

b) $P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 = 0,5$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0,7 - 0,3}{1 - 0,5} = 0,8$$

ubsectionOrdinaria-Coincidente

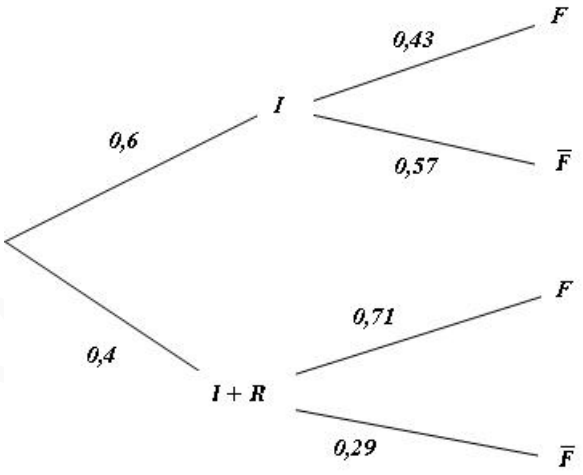
Opción A

Problema 4.16.5 ***(2 puntos)*** En cierto ensayo clínico, se trata al 60 % de pacientes afectados de hepatitis C con interferón, y al 40 % restante con ribavirina más interferón. Al cabo de ocho semanas se observa una respuesta favorable al tratamiento en el 43 % de los pacientes tratados únicamente con interferón y en el 71 % de los pacientes tratados con ribavirina más interferón. Se toma al azar un paciente del ensayo. Determínese la probabilidad de que:

a) Haya respondido favorablemente al tratamiento que está recibiendo.

b) Si ha respondido favorablemente al tratamiento, haya sido tratado únicamente con interferón.

Solución:
$P(I) = 0,6, \quad P(I + R) = 0,4$



a)

$$P(F) = 0,6 \cdot 0,43 + 0,4 \cdot 0,71 = 0,542$$

b)

$$P(I|F) = \frac{P(F|I)}{P(F)} = \frac{0,6 \cdot 0,43}{0,542} = 0,476$$

Opción B

Problema 4.16.6 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tal que $P(A) = 0,8$; $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,8$ y $P(A \cup B) = 0,9$.

a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

b) Calcúlese $P(B|\overline{A})$.
Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,8 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,2$
$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0,9 + 0,2 - 0,8 = 0,3$
$P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24 \neq P(A \cap B)$, luego no son independientes.

b) $P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,3 - 0,2}{0,2} = 0,5$

4.16.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.16.7 ***(2 puntos)*** Se consideran los sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tal que: $P(A) = 0,09$; $P(B) = 0,07$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,97$. Además los sucesos A y C son incompatibles.

a) Estúdiese si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcúlese $P(A \cap B|C)$.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,97 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,03$
$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = 0,09 \cdot 0,07 = 0,0063 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

b) $P(A \cap B|C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = 0$ ya que $P(A \cap B) = 0$ por ser incompatibles y, por tanto, $P(A \cap B \cap C) = 0$.

Opción B

Problema 4.16.8 ***(2 puntos)*** La probabilidad de que un trabajador llegue puntual a su puesto de trabajo es 3/4. Entre los trabajadores que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un trabajador elegido al azar llegue tarde al trabajo y vaya en transporte público.

b) Si se eligen tres trabajadores al azar, al menos uno de ellos llegue puntual. Supóngase que la puntualidad de cada uno de ellos es independiente de la del resto.

Solución:
Denominamos A al suceso llega puntual, $\overline{A}$ al no puntual y B utiliza transporte público. Tenemos:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(\overline{A}) = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad P(B|\overline{A}) = \frac{1}{2}$$

a)

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} \Longrightarrow P(B \cap \overline{A}) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125$$

b)

$$P(\text{al menos uno llega temprano}) = 1 - P(\text{todos llegan tarde}) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0,984375$$

4.16.4. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.16.9 ***(2 puntos)*** Todos los estudiantes de una facultad de Madrid afirman haber comido en el último mes en alguna de las dos cafeterías de esa facultad, la grande y la pequeña. Un 60 % declara haber comido en la grande mientras que un 55 % declara haber comido en la pequeña. Calcúlese la probabilidad de que un estudiante de dicha facultad elegido al azar:

a) Haya comido en el último mes en la cafetería grande y en la pequeña.

b) Haya comido en el último mes en la cafetería pequeña si se sabe que nunca ha comido en la grande.

Solución:
G: grande y Pe: pequeña $\Longrightarrow$ $P(G) = 0,6$, $P(Pe) = 0,55$ y $P(G \cup Pe) = 1$

a) $P(G \cup Pe) = 1 = P(G) + P(Pe) - P(G \cap Pe) \Longrightarrow P(G \cap Pe) = 0,6 + 0,55 - 1 = 0,15$

b) $P(Pe|\overline{G}) = \dfrac{P(Pe \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \dfrac{P(Pe) - P(G \cap Pe)}{P(\overline{G})} = \dfrac{0,55 - 0,15}{0,4} = 1$

Opción B

Problema 4.16.10 ***(2 puntos)*** En una universidad de Madrid el 65 % del profesorado es funcionario. Por otro lado, el 60 % del profesorado son mujeres de las cuales el 70 % son funcionarias. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado tomado al azar:

a) Sea funcionario y hombre.

b) Sea mujer sabiendo que no es funcionario.

Solución:
Construimos una tabla de contingencia: (la probabilidad de ser mujer y funcionaria es $0,6 \cdot 0,7 = 0,42$)

	F	$\overline{F}$	
H			$0,4$
M	$0,42$		$0,6$
	$0,65$	$0,35$	

$\Longrightarrow$

	F	$\overline{F}$	
H	$0,23$	$0,17$	$0,4$
M	$0,42$	$0,18$	$0,6$
	$0,65$	$0,35$	

a) $P(H \cap F) = 0,23$

b) $P(M|\overline{F}) = \dfrac{P(M \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{0,18}{0,35} = 0,514$

4.17. Año 2016

4.17.1. Modelo

Opción A

Problema 4.17.1 ***(2 puntos)*** En un polígono industrial se almacenan 30000 latas de refresco procedentes de las fábricas A, B y C a partes iguales. Se sabe que en 2016 caducan 1800 latas de la fábrica A, 2400 procedentes de la B y 3000 que proceden de la fábrica C.

a) Calcúlese la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2016.

b) Se ha elegido una lata de refresco aleatoriamente y caduca en 2016, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la fábrica A?

Solución:

a) Casos favorables: $1800 + 2400 + 3000 = 7200$ y casos posibles 30000. Por la ley de Laplace:

$$p = \frac{7200}{30000} = \frac{6}{25}$$

b) Casos favorables: 1800 y casos posibles 7200. Por la ley de Laplace:

$$p = \frac{1800}{7200} = \frac{1}{4}$$

Opción B

Problema 4.17.2 ***(2 puntos)*** Las probabilidades de que cinco jugadores de baloncesto encesten un lanzamiento de tiro libre son, respectivamente, de 0,8; 0,9; 0,7; 0,9; 0,93. Si cada jugador lanza un tiro libre siguiendo el orden anterior y considerando los resultados de los lanzamientos como sucesos independientes, calcúlese la probabilidad de que:

a) Todos los jugadores encesten su tiro libre.

b) Al menos uno de los tres primeros jugadores enceste.

Solución:

a) $p = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,9 \cdot 0,93 = 0,4218$

b) La probabilidad de que no enceste ninguno de los tres primero es $0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,3 = 0,006$ la probabilidad que nos piden será $1 - 0,006 = 0,994$

4.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.17.3 ***(2 puntos)*** Una conocida orquesta sinfónica está compuesta por un 55 % de varones y un 45 % de mujeres. En la orquesta un 30 % de los instrumentos son de cuerda. Un 25 % de las mujeres de la orquesta interpreta un instrumento de cuerda. Calcúlese la probabilidad de que un intérprete de dicha orquesta elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es intérprete de un instrumento de cuerda.

b) Sea intérprete de un instrumento de cuerda y sea varón.

Solución:

$$P(H) = 0,55,\ \ P(M) = 0,45,\ \ P(C) = 0,3,\ \ P(C|M) = 0,25$$

a)

$$P(M|C) = \frac{P(C|M)P(M)}{P(C)} = \frac{0,25 \cdot 0,45}{0,30} = 0,375$$

b)

$$P(H \cap C) + P(M \cap C) = P(C) \Longrightarrow P(H \cap C) = P(C) - P(M \cap C) =$$

$$P(C) - P(C|M)P(M) = 0,3 - 0,25 \cdot 0,45 = 0,1875$$

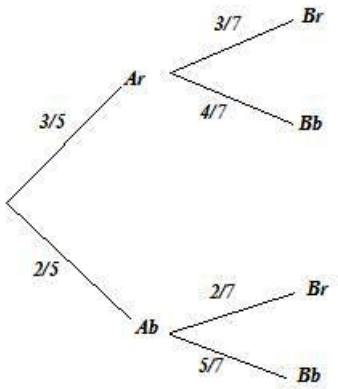
Opción B

Problema 4.17.4 ***(2 puntos)*** Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

a) La segunda bola extraída sea roja.

b) Las dos bolas extraídas sean blancas.

Solución:



a)

$$P(Br) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{35} = 0,371$$

b)

$$P(Ab \cap Bb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{7} = 0,286$$

4.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.17.5 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio tal que $P(A) = 0,5$ y $P(\overline{B}) = 0,8$. Calcúlese:

a) $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

b) $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.
Solución:

$$P(A) = 0,5, \;\; P(B) = 0,2$$

a) Como A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6$$

b)

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\overline{B})} = \frac{1 - 0,6}{0,8} = 0,5$$

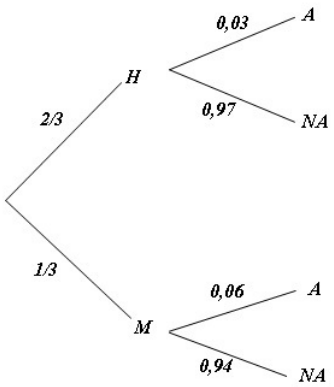
Opción B

Problema 4.17.6 ***(2 puntos)*** En cierta población animal tratada genéticamente, el número de hembras es el doble que el número de machos. Se observa que el 6 % de los machos de esa población padece albinismo, mientras que entre las hembras únicamente el 3 % padece albinismo. Calcúlese la probabilidad de que un individuo de esa población elegido al azar:

a) Padezca albinismo.

b) Sea hembra, en el supuesto de que padezca albinismo.

Solución:



$H \equiv$ Hembra, $M \equiv$ Macho.

$$P(H) = \frac{2}{3}, \;\; P(M) = \frac{1}{3}, \;\; P(A|M) = 0,06, \;\; P(A|H) = 0,03$$

a)

$$P(A) = P(A|H) \cdot P(H) + P(A|M) \cdot P(M) = \frac{2}{3} \cdot 0,03 + \frac{1}{3} \cdot 0,06 = 0,04$$

b)

$$P(H|A) = \frac{P(A|H)P(H)}{P(A)} = \frac{0,03 \cdot 2/3}{0,04} = 0,5$$

4.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.17.7 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tal que $P(A) = 3/4$, $P(A|B) = 3/4$ y $P(B|A) = 1/4$.

a) Demuéstrese que A y B son sucesos independientes pero no incompatibles.

b) Calcúlese $P(\overline{A}|\overline{B})$.
Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \frac{3/16}{3/4} = \frac{1}{4}$$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} = P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B son independientes. Como $P(A \cap B) \neq 0 \Longrightarrow A$ y B son compatibles.

b)

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} =$$

$$\frac{1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B))}{1 - P(B)} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

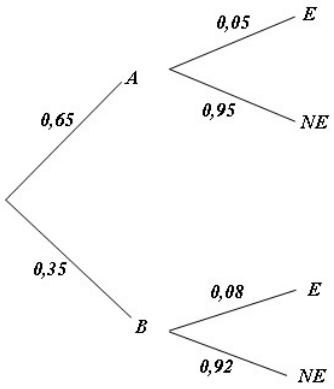
Opción B

Problema 4.17.8 ***(2 puntos)*** Para efectuar cierto diagnóstico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B. El 65 % de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A, el resto con el B. Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un 5 % de los casos, mientras que el diagnóstico efectuado usando el escáner B es erróneo en un 8 % de los casos. Calcúlese la probabilidad de que:

a) El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.

b) El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A, sabiendo que ha resultado erróneo.

Solución:



a)

$$P(E) = 0,65 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,08 = 0,0605$$

b)

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \frac{0{,}05 \cdot 0,65}{0,0605} = 0,5372$$

4.18. Año 2017

4.18.1. Ordinaria

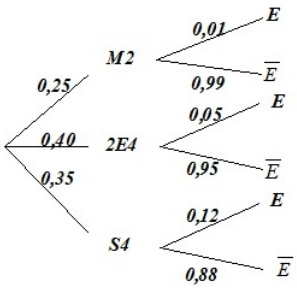
Opción A

Problema 4.18.1 ***(2 puntos)*** Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25 % de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el 40 % tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0,01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0,05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0,12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:

a) Se estropee.

b) Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

Solución:



a) $P(E) = P(M2)P(E|M2) + P(2E4)P(E|2E4) + P(S4)P(E|S4) = 0,25 \cdot 0,01 + 0,40 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,12 = 0,0645$

b) $P(S4|\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{E}|S4)P(S4)}{P(\overline{E})} = \dfrac{0,35 \cdot 0,88}{1 - 0,0645} = 0,329$

Opción B

Problema 4.18.2 ***(2 puntos)*** El 30 % de los individuos de una determinada población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea prensa al menos una vez por semana es 0,20. Si una persona lee prensa al menos una vez por semana, la probabilidad de que no sea joven es 0,9. Se escoge una persona al azar. Calcúlese la probabilidad de que esa persona:

a) No lea prensa al menos una vez por semana.

b) No lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven.

Solución:
J: joven y L: lee el periódico.
$P(J) = 0,3$, $P(\overline{J}) = 0,7$, $P(L|J) = 0,2$ y $P(\overline{J}|L) = 0,9$

a) $P(L|J) = \dfrac{P(L \cap J)}{P(J)} \Longrightarrow P(L \cap J) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

$$P(\overline{J}|L) = \frac{P(\overline{J} \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L) - P(J \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L) - 0,06}{P(L)} = 0,9$$

$$\Longrightarrow P(L) = 0,6 \Longrightarrow P(\overline{L}) = 0,4$$

b) $P(\overline{L} \cup \overline{J}) = P(\overline{L \cap J}) = 1 - P(L \cap J) = 1 - 0,06 = 0,94$

4.18.2. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.18.3 ***(2 puntos)*** El profesorado de cierta Facultad de Cc. Económicas y Empresariales está compuesto por profesores de Economía y de Empresa. El 60 % son de Economía y el 40 % de Empresa. Además el 55 % del profesorado de esa facultad son mujeres. De ellas, el 52 % son de Empresa. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado de dicha Facultad de Cc. Económicas y Empresariales elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es de Empresa.

b) Sea de Economía y sea mujer.

Solución:

$$P(Ec) = 0,6, \;\; P(Em) = 0,4, \;\; P(M) = 0,55, \;\; P(H) = 0,45$$

$$P(Em|M) = 0,52, \;\; P(Ec|M) = 0,48$$

a) $P(M|Em) = \dfrac{P(Em|M) \cdot P(M)}{P(Em)} = \dfrac{0,52 \cdot 0,55}{0,4} = 0,715$

b) $P(Ec \cap M) = P(Ec|M) \cdot P(M) = 0,48 \cdot 0,55 = 0,264$

Opción B

Problema 4.18.4 ***(2 puntos)*** Una máquina tiene dos chips de control A y B. Se sabe que al encender la máquina la probabilidad de que falle el chip A es de 0,2, la probabilidad de que falle el B es de 0,3 y la probabilidad de que fallen los dos es de 0,015. Calcúlese la probabilidad de que al encender la máquina:

a) Haya fallado el chip A si se sabe que ha fallado el B.

b) No falle ninguno de los dos chips.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.
Solución:

$$P(A) = 0,2, \quad P(B) = 0,3, \quad P(A \cap B) = 0,015$$

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,015}{0,3} = 0,05$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$

$$1 - (0,2 + 0,3 - 0,015) = 0,515$$

4.18.3. Extraordinaria

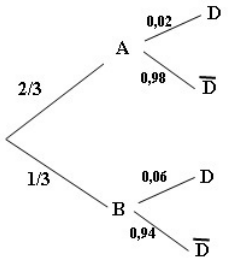
Opción A

Problema 4.18.5 ***(2 puntos)*** Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0,02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0,06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador fabricado por dicha empresa elegido al azar:

a) No salga defectuoso.

b) Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.

Solución:



a) $P(\overline{D}) = P(A)P(\overline{D}|A) + P(B)P(\overline{D}|B) = \dfrac{2}{3} \cdot 0,98 + \dfrac{1}{3} \cdot 0,94 = 0,967$

b) $P(A|D) = \dfrac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \dfrac{0,02 \cdot 2/3}{1 - 0,967} = 0,404$

Opción B

Problema 4.18.6 ***(2 puntos)*** La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0'6, por sulfatos es 0,4, y por ambos es 0,2. Calcúlese la probabilidad de que dicho río:

a) No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.

b) No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

Solución:
N: contaminado con nitratos y S: contaminado con sulfatos.
$P(N) = 0,6$, $P(S) = 0,4$, $P(N \cap S) = 0,2$, $P(\overline{N}) = 0,4$ y $P(\overline{S}) = 0,6$

a) $P(\overline{N}|S) = \dfrac{P(\overline{N} \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(S) - P(N \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,4 - 0,2}{0,4} = 0,5$

b) $P(\overline{N} \cap \overline{S}) = P(\overline{N \cup S}) = 1 - P(N \cup S) = 1 - (P(N) + P(S) - P(N \cap S)) = 1 - (0,6 + 0,4 - 0,2) = 0,2$

4.18.4. Extraordinaria-Coincidente

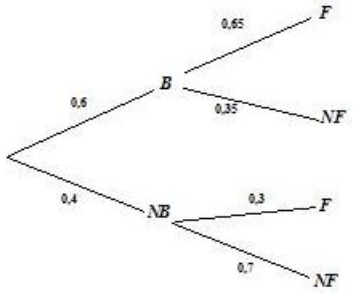
Opción A

Problema 4.18.7 ***(2 puntos)*** En un centro de danza el 60 % de los alumnos recibe clases de ballet. Por otro lado, entre quienes reciben clases de ballet, el 65 % también recibe clase de flamenco. Además sólo el 30 % de quienes no reciben clases de ballet recibe clases de flamenco. Calcúlese la probabilidad de que un alumno de dicho centro elegido al azar:

a) Reciba clases de flamenco.

b) Reciba clases de ballet si no recibe clases de flamenco.

Solución: B: reciben clases de ballet y F: reciben clases de flamenco.



a) $P(F) = P(F|B)P(B) + P(F|NB)P(NB) = 0,65 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,51$

b) $P(B|NF) = \dfrac{P(NF|B)P(B)}{P(NF)} = \dfrac{0,35 \cdot 0,6}{1 - 0,51} = 0,429$

Opción B

Problema 4.18.8 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos tal que $P(A) = 0,5$, $P(A|B) = 0,375$ y $P(B \cap A) = 0,3$. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Ocurra B.

b) Ocurra B pero no A

Solución:

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \dfrac{0,3}{0,375} = 0,8$

b) $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,375 = 0,425$

4.19. Año 2018

4.19.1. Modelo

Opción A

Problema 4.19.1 ***(2 puntos)*** Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tal que:

$$P(A) = 0,4; \quad P(B) = 0,5; \quad P(A|B) = 0,7$$

Calcúlese:

a) $P(A \cup B)$.

b) $P(\overline{A}|B)$

Nota: $\overline{S}$ ***denota el suceso complementario de*** S***.***

Solución:

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,35 = 0,55$

b) $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,5 - 0,35}{0,5} = 0,3$

Opción B

Problema 4.19.2 ***(2 puntos)*** Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tal que:

$$P(A) = 0,3; \quad P(B) = 0,8; \quad P(A \cup B) = 0,9$$

Calcúlese:

a) $P(\overline{A}|B)$

b) $P(A|\overline{B})$

Nota: *$\overline{S}$ **denota el suceso complementario de** S.*
Solución:

a) $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{B} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,8 - 0,2}{0,8} = 0,75$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,3 + 0,8 - 0,9 = 0,2$$

b) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{\overline{B}} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,3 - 0,2}{1 - 0,8} = 0,5$

4.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.19.3 ***(2 puntos)*** En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:

a) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.

b) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

Solución:
T : buscan billete de transporte y H : buscan billete de hotel, $P(T) = 0,75$, $P(H) = 0,8$ y $P(T \cap H) = 0,65$

a) $P(T \cup H) = P(T) + P(H) - P(T \cap H) = 0,75 + 0,8 - 0,65 = 0,9$

b) $P(T|H) = \dfrac{P(T \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0,65}{0,8} = 0,8125$

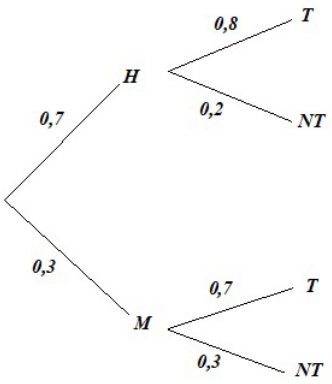
Opción B

Problema 4.19.4 ***(2 puntos)*** En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad, la probabilidad de que un hombre trabaje es de 0,8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0,7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:

a) Una persona que trabaja.

b) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

Solución:



a) $P(T) = P(T|H)P(H) + P(T|M)P(M) = 0,8 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,77$

b) $P(H|T) = \dfrac{P(T|H)P(H)}{P(T)} = \dfrac{0,8 \cdot 0,7}{0,77} = 0,727$

4.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.19.5 ***(2 puntos)*** Se toma un coche al azar de la Comunidad de Madrid. Se sabe que la probabilidad de que tenga motor diésel es 0,4. La probabilidad de que tenga más de 8 años es 0,5. Finalmente, se sabe que la probabilidad de que tenga más de ocho años o motor diésel es 0,55. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Tenga motor diésel sabiendo que tiene más de ocho años.

b) No tenga motor diésel ni tenga más de ocho años.

Solución:
D : motor diésel y $M8$: tenga más de 8 años, $P(D) = 0,4$, $P(M8) = 0,5$ y $P(D \cup M8) = 0,55$

a) $P(D|M8) = \dfrac{P(D \cap M8)}{P(M8)} = \dfrac{P(D) + P(M8) - P(D \cup M8)}{P(M8)} = \dfrac{0,4 + 0,5 - 0,55}{0,5} = 0,7.$

b) $P(\overline{D} \cap \overline{M8}) = P(\overline{D \cup M8}) = 1 - P(D \cup M8) = 1 - 0,55 = 0,45$

Opción B

Problema 4.19.6 ***(2 puntos)*** Entre los músicos que ensayan en un determinado local de Madrid, un 30 % sabe tocar la batería, un 80 % sabe tocar la guitarra y un 20 % sabe tocar tanto la batería como la guitarra. Se elige uno de esos músicos al azar. Calcúlese la probabilidad de que:

a) No sepa tocar la batería si se conoce que sabe tocar la guitarra.

b) Conocido que no sabe tocar la guitarra, no sepa tocar la batería.

Solución:
B: sabe tocar la batería, G: sabe tocar la guitarra.
$P(B) = 0,3$, $P(G) = 0,8$ y $P(B \cap G) = 0,2$

a) $P(\overline{B}|G) = \dfrac{P(\overline{B} \cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(G) - P(B \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,8 - 0,2}{0,8} = 0,75$

b) $P(\overline{B}|\overline{G}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \dfrac{P(\overline{B \cup G})}{1 - P(G)} = \dfrac{1 - P(B \cup G)}{1 - 0,8} = \dfrac{1 - (P(B) + P(G) - P(B \cap G))}{0,2} = \dfrac{1 - (0,3 + 0,8 - 0,2)}{0,2} = 0,5$

4.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.19.7 ***(2 puntos)*** Se va a celebrar una carrera popular. Entre los participantes, dos de cada tres hombres y tres de cada cuatro mujeres han entrenado para la carrera.

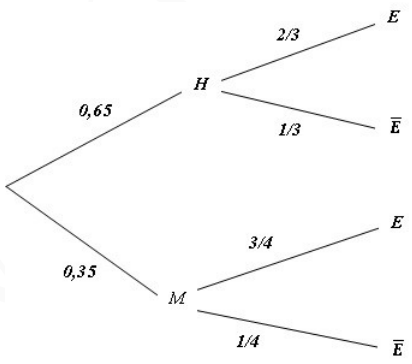
a) Se eligen al azar y de forma independiente un hombre y una mujer de entre los participantes. Calcúlese la probabilidad de que alguno de ellos haya entrenado para la carrera.

b) Si el 65 % de los participantes son hombres y el 35 % mujeres y se elige un participante al azar, calcúlese la probabilidad de que sea hombre sabiendo que ha entrenado para la carrera.

Solución:
H : Hombre, M : Mujer, E : Entrena y $\overline{E}$: no entrena.

a) $P(E \text{ alguno}) = P(E|H) \cdot P(\overline{E}|M) + P(\overline{E}|H) \cdot P(E|M) + P(E|H) \cdot P(E|M) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{11}{12} = 0,917$

b) $P(H|E) = \dfrac{P(H \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,65 \cdot 2/3}{0,65 \cdot 2/3 + 0,35 \cdot 3/4} = 0,62275$



Opción B

Problema 4.19.8 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tal que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,8$. Calcúlese:

a) $P(\overline{A} \cap B)$.

b) $P(\overline{A \cup B}|A)$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,4 + 0,6 - 0,8 = 0,2$
$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,2 = 0,4$

b) $P(\overline{A \cup B}|A) = \dfrac{P(\overline{A \cup B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(\phi)}{P(A)} = 0$

4.20. Año 2019

4.20.1. Modelo

Opción A

Problema 4.20.1 ***(2 puntos)*** En una determinada sede de la $EVAU$ hay un 45 % de alumnos de la modalidad de ciencias y un 40 % de Ciencias Sociales. Todos los alumnos de Ciencias Sociales hacen el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II ($MACCSSII$). De los alumnos de Ciencias de esa sede, un 5 % va a realizar el examen de $MACCSSII$. En esa sede ningún alumno del resto de modalidades se examina de $MACCSSII$. Se toma a un alumno al azar de esa sede. Calcúlese la probabilidad de que:

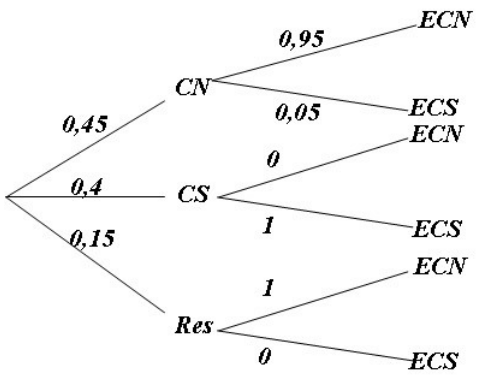
a) Se examine de $MACCSSII$.

b) Sabiendo que se examina de $MACCSS$ sea un alumno de la modalidad de Ciencias.

Solución:

a) $P(ECS) = P(ECS|CN)P(CN) + P(ECS|CS)P(CS) + P(ECS|Res)P(Res) = 0,45 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 1 + 0,15 \cdot 0 = 0,4225$

b) $P(CN|ECS) = \dfrac{P(ECS|CN)P(CN)}{P(ECS)} = \dfrac{0,05 \cdot 0,45}{0,4225} = 0,053$



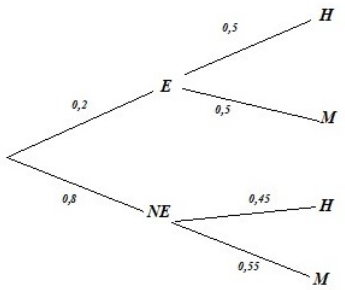
Opción B

Problema 4.20.2 ***(2 puntos)*** Se escoge al azar un cliente de un determinado hotel de la costa española. Se sabe que la probabilidad de que sea español es 0,2. La probabilidad de que siendo extranjero sea hombre es 0,45. Finalmente la probabilidad de que sea una mujer española es 0,1. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Conocido que es español, sea un hombre.

b) Sea una mujer.

Solución:



a) $P(M|E) = \dfrac{P(M \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,1}{0,2} = \dfrac{1}{2} = 0,5 \Longrightarrow P(H|E) = 1 - P(M|E) = 0,5$

b) $P(M) = P(M|E) \cdot P(E) + P(M|NE) \cdot P(NE) = 0,5 \cdot 0,2 + 0,55 \cdot 0,8 = 0,54$

4.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.20.3 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tal que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$ y $P(A \cap \overline{B}) = 0,1$.

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso B.

b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B.

Solución:
Voy a resolver este problema organizando los valores en una tabla de intersecciones:

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B			$0,8$
$\overline{B}$	$0,1$		
Totales	$0,6$		1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B	$0,5$	$0,3$	$0,8$
$\overline{B}$	$0,1$	$0,1$	$0,2$
Totales	$0,6$	$0,4$	1

a) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,1}{0,2} = 0,5$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A \cap \overline{B}) = 0,1 \\ P(A) = 0,6 \\ P(\overline{B}) = 0,2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(A \cap \overline{B}) = 0,1 \\ P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$P(A \cap \overline{B}) \neq P(A) \cdot P(\overline{B}) \Longrightarrow$ A y $\overline{B}$ no son independientes.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,8 - 0,5 = 0,9$

Opción B

Problema 4.20.4 ***(2 puntos)*** De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0,60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0,30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0,15. Seleccionado un niño al azar de esta región.

a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.

b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Solución:

Sea V el suceso juega con consola de videojuegos más tiempo del recomendado y F el suceso fracaso escolar.
$P(V) = 0,6 \Longrightarrow P(\overline{V}) = 0,4$, $P(F|V) = 0,30$ y $P(F|\overline{V}) = 0,15$

$$P(F|V) = 0,30 = \frac{P(F \cap V)}{P(V)} \Longrightarrow P(F \cap V) = 0,30 \cdot 0,6 = 0,18$$

$$P(F|\overline{V}) = 0,15 = \frac{P(F \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} \Longrightarrow P(F \cap \overline{V}) = 0,15 \cdot 0,4 = 0,06$$

Voy a resolver este problema organizando los valores en una tabla de intersecciones:

	Sucesos		
	V	$\overline{V}$	Totales
F	$0,18$	$0,06$	
$\overline{F}$			
Totales	$0,6$	$0,4$	1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	V	$\overline{V}$	Totales
F	$0,18$	$0,06$	$0,24$
$\overline{F}$	$0,42$	$0,34$	$0,76$
Totales	$0,6$	$0,4$	1

a) $P(F) = 0,24$

b) $P(\overline{V}|F) = \dfrac{P(\overline{V} \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,06}{0,24} = 0,25$

4.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.20.5 ***(2 puntos)*** En una panadería se elabora pan de dos tipos: blanco y cereales. Uno de cada tres panes es de cereales. Un pan blanco tiene la misma probabilidad de estar elaborado

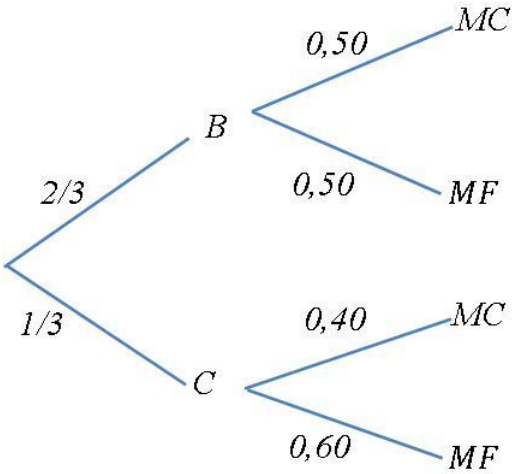
con masa congelada que con masa fresca, mientras que la probabilidad de que un pan de cereales se elabore con masa fresca es de 0,6. Se elige un pan al azar. Determínese la probabilidad de que:

a) Esté elaborado con masa fresca.

b) Sea de cereales sabiendo que está elaborado con masa congelada.

Solución:

Sea B pan blanco, C pan de cereales, MC masa congelada y MF masa fresca.



a) $P(MF) = P(MF|B)P(B) + P(MF|C)P(C) = \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,6 = 0,5\widehat{3}$

b) $P(C|MC) = \dfrac{P(MC|C)P(C)}{P(MC)} = \dfrac{0,4 \cdot \frac{1}{3}}{1 - 0,5\widehat{3}} = 0,2857$

Opción B

Problema 4.20.6 ***(2 puntos)*** Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tal que: $P(A|B) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{6}$ y $P(A) = \frac{2}{3}$
Calcúlese:

a) $P(\overline{B} \cup \overline{A})$

b) $P(\overline{A} \cap B)$

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(\overline{B} \cup \overline{A}) = P(\overline{B \cap A}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - (P(B|A)P(A)) =$

$1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}, \quad \left(P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{9}\right)$

b) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A|B)}$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A|B)} - P(A \cap B) = \dfrac{1/9}{1/4} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3}$

4.20.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.20.7 ***(2 puntos)*** Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio

a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?

b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

Solución:
E : hace ejercicio, $\overline{E}$: no hace ejercicio, D : desayuna y $\overline{D}$: no desayuna.
$P(E) = \dfrac{2}{5}$, $P(\overline{E}) = \dfrac{3}{5}$, $P(D) = \dfrac{2}{3}$, $P(\overline{D}) = \dfrac{1}{3}$ y $P(E|D) = \dfrac{9}{25} = \dfrac{P(E \cap D)}{P(D)} \Longrightarrow P(E \cap D) = \dfrac{9}{25} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{25}$

Ponemos los datos en una tabla:

	Escolares		
	E	$\overline{E}$	Totales
D	6/25		2/3
$\overline{D}$			1/3
Totales	2/5	3/5	1

$\Longrightarrow$

	Escolares		
	E	$\overline{E}$	Totales
D	6/25	32/75	2/3
$\overline{D}$	4/25	13/75	1/3
Totales	2/5	3/5	1

a) $\left\{ \begin{array}{l} P(E \cap D) = 6/25 \\ P(E) = 2/5 \\ P(D) = 2/3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(E \cap D) = 6/25 \\ \\ P(E) \cdot P(D) = 2/5 \cdot 2/3 = 4/15 \end{array} \right. \Longrightarrow$
$P(E \cap D) \neq P(E) \cdot P(D) \Longrightarrow$ E y D no son independientes.

b) $P(\overline{E}|\overline{D}) = \dfrac{13}{75}$

Opción B

Problema 4.20.8 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0,3$, $P(B|A) = 0,4$, $P(B|\overline{A}) = 0,6$. Calcúlese:

a) $P(A|B)$.

b) $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:
Tenemos $P(A) = 0,3$ y $P(\overline{A}) = 0,7$, además:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(\overline{A} \cap B) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$$

Ponemos los datos en una tabla:

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B	$0,12$	$0,42$	
$\overline{B}$			
Totales	$0,3$	$0,7$	1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B	$0,12$	$0,42$	$0,54$
$\overline{B}$	$0,18$	$0,28$	$0,46$
Totales	$0,3$	$0,7$	1

a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,54} = 0,222$$

b)

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,28}{0,46} = 0,61$$

4.20.5. Extraordinaria-Coincidente

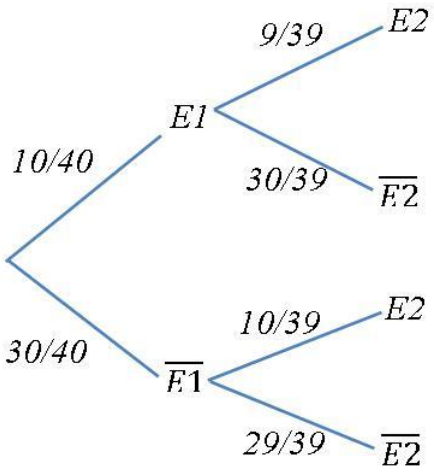
Opción A

Problema 4.20.9 ***(2 puntos)*** Una única carta, escogida al azar, es eliminada, sin ser vista, de una baraja española de 40 cartas, 10 cartas de cada palo (espadas, copas, oros y bastos). Una vez eliminada, se escoge al azar otra carta, entre las que quedan en el mazo, y se observa.

a) Calcúlese la probabilidad de que la carta observada sea del palo de espadas.

b) Si la carta observada no es del palo de espadas, calcúlese la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

Solución:
$E1$: la primera carta es espadas, $\overline{E1}$: la primera carta no es espadas, $E2$: la segunda carta es espadas y $\overline{E2}$: la segunda carta no es espadas.



a) $P(E2) = P(E2|E1)P(E1) + P(E2|E2)P(E2) = \frac{9}{39} \cdot \frac{10}{40} + \frac{10}{39} \cdot \frac{30}{40} = \frac{1}{4} = 0,25$

b) $P(\overline{E1}|\overline{E2}) = \frac{P(\overline{E2}|\overline{E1})P(\overline{E1})}{P(\overline{E2})} = \frac{29/39 \cdot 30/40}{1 - 1/4} = \frac{29}{39} = 0,744$

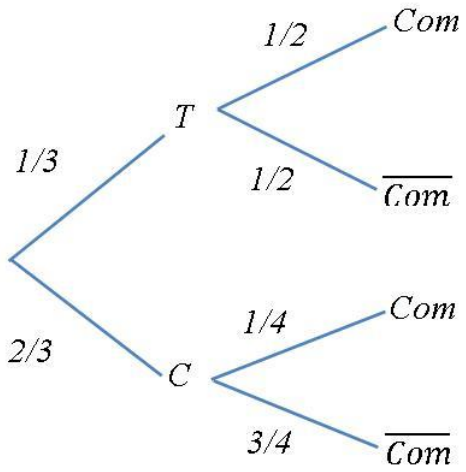
Opción B

Problema 4.20.10 ***(2 puntos)*** Se lanza un dado para decidir si se va al cine o al teatro. Si sale 1 o 6 se va al teatro, en caso contrario se va al cine. Luego, se escoge una función al azar, de cine o teatro, según lo que haya indicado el dado. El 50 % de funciones de teatro son comedias mientras que sólo 112 de las 448 funciones de cine lo son.

a) Calcúlese la probabilidad de ver una comedia.

b) Si el resultado fue no ver comedia, calcúlese la probabilidad de que haya sido en el teatro.

Solución:
T: teatro, C: cine, Com: comedia y $\overline{Com}$: no comedia.



a) $P(Com) = P(Com|T)P(T) + P(Com|C)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

b) $P(T|\overline{Com}) = \frac{P(\overline{Com}|T)P(T)}{P(\overline{Com})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$

4.21. Año 2020

4.21.1. Modelo

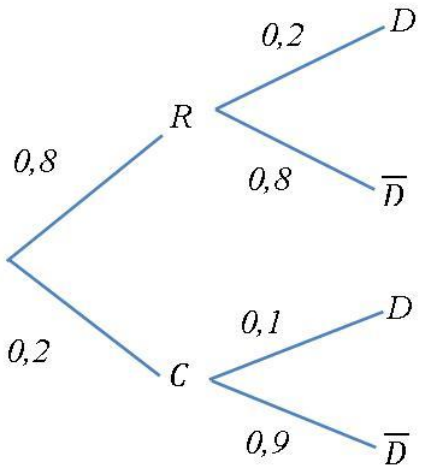
Opción A

Problema 4.21.1 ***(2 puntos)*** En una tienda en periodo de rebajas, el 80 % de las ventas son de ropa y el 20 % restante son complementos de moda. De las ventas que se realizan en la campaña, el 20 % de las ventas de ropa son devueltas, mientras que sólo se devuelven el 10 % de los complementos. Si una de las ventas es elegida al azar, calcule la probabilidad de que la venta:

a) Sea una prenda de ropa y sea devuelta.

b) Sea devuelta.

Solución:



a) $P(R \cap D) = P(D|R)P(R) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$

b) $P(D) = P(D|R)P(R) + P(D|C)P(C) = 0,2 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,18$

Opción B

Problema 4.21.2 ***(2 puntos)*** Se lanza un dado para decidir el número de veces que se lanza una moneda.

a) Obtenga la probabilidad de no observar ninguna cruz.

b) Dado que no se observó ninguna cruz, ¿cuál es la probabilidad de haber lanzado la moneda 2 veces?

Solución:

Sea X el número de cruces y sea Y el número que ha salido en el dado. $P(Y = 1) = P(Y = 2) = P(Y = 3) = P(Y = 4) = P(Y = 5) = P(Y = 6) = \frac{1}{6}$

a)

$$P(X = 0|Y = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(X = 0|Y = 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P(X = 0|Y = 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(X = 0|Y = 4) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$P(X = 0|Y = 5) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$P(X = 0|Y = 6) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(X=0)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)=$$
$$\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6-1}{\frac{1}{2}-1}\right]=\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]=0,164$$

b) $P(Y=2|X=0)=\dfrac{P(X=0|Y=2)}{P(X=0)}=\dfrac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}=\dfrac{0,04167}{0,164}=0,2541$

4.21.2. Ordinaria

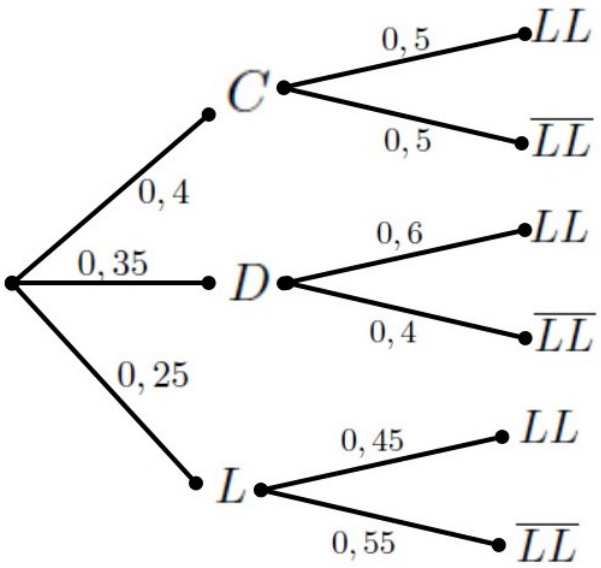
Opción A

Problema 4.21.3 ***(2 puntos)*** Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.

b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

Solución:



Sea C ir al río Cuervo, D ir a las Hoces del Duratón, L ir al Cañón del rio Lobo, LL llueve y $\overline{LL}$ no llueve.

a) $P(\overline{LL})=P(\overline{LL}|C)P(C)+P(\overline{LL}|D)P(D)+P(\overline{LL}|L)P(L)=0,5\cdot0,4+0,4\cdot0,35+0,55\cdot0,25=0,4775$

b) $P(C|LL)=\dfrac{P(LL|C)P(C)}{P(LL)}=\dfrac{0,5\cdot0,4}{1-0,4775}=0,38277$

Opción B

Problema 4.21.4 ***(2 puntos)*** Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.

b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

Solución:
Sean los sucesos M se estropea el microondas, H se estropea el horno y F conserva la factura. $P(M) = 0,02$, $P(H) = 0,05$. Como M y H son independientes $P(M \cap H) = P(M)P(H) = 0,02 \cdot 0,05 = 0,001$. También tenemos $P(\overline{F}|M) = 0,4$.

a) $P(M \cup H) = P(M) + P(H) - P(M \cap H) = 0,02 + 0,05 - 0,001 = 0,069$.

b) $P(\overline{F}|M) = \dfrac{P(\overline{F} \cap M)}{P(M)} \Longrightarrow P(\overline{F} \cap M) = P(M) \cdot P(\overline{F}|M) = 0,02 \cdot 0,4 = 0,008$.
$P(\overline{F} \cap M) = P(M) - P(F \cap M) \Longrightarrow P(F \cap M) = P(M) - P(\overline{F} \cap M) = 0,02 - 0,008 = 0,012$.

4.21.3. Ordinaria-Coincidente

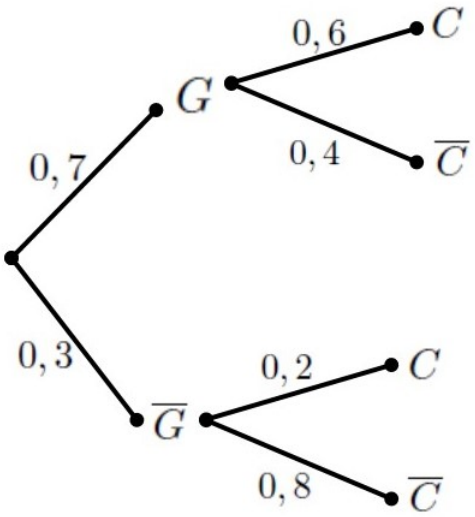
Opción A

Problema 4.21.5 ***(2 puntos)*** En un festival de circo de verano el 70 % de los espectáculos son gratuitos y el resto de pago. El 60 % de los espectáculos gratuitos se realizan en las calles, mientras que de los de pago sólo se realizan en la calle el 20 %. Si un visitante del festival, elegido al azar, decide ir a un espectáculo, calcule la probabilidad de que:

a) El espectáculo sea gratuito y no se realice en la calle.

b) El espectáculo se realice en la calle.

Solución:
G : espectáculos gratuitos, $\overline{G}$: espectáculos de pago, C : espectáculos en las calles y $\overline{C}$: espectáculos en interiores.



a) $P(G \cap \overline{C}) = P(\overline{C}|G)P(G) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$

b) $P(C) = P(C|G)P(G) + P(C|\overline{G})P(\overline{G}) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,48$

Opción B

Problema 4.21.6 ***(2 puntos)*** En un kiosco de prensa del aeropuerto de Madrid el 40 % de las ventas son periódicos y el resto revistas. Un 90 % de las publicaciones están en castellano. Además se sabe que un 8 % del total de las publicaciones son revistas en otro idioma. Calcule la probabilidad de que una publicación elegida al azar:

a) Sea un periódico, dado que está publicado en otro idioma distinto del castellano.

b) Sea un periódico o esté publicado en otro idioma distinto del castellano.

Solución:
Pe: periódico, R: revista, C: castellano y $\overline{C}$: otra lengua.

	Pe	R	Total
C			$0,9$
$\overline{C}$		$0,08$	
Total	$0,4$		1

$\Longrightarrow$

	Pe	R	Total
C	$0,38$	$0,52$	$0,9$
$\overline{C}$	$0,02$	$0,08$	$0,1$
Total	$0,4$	$0,6$	1

a) $P(Pe|\overline{C}) = \dfrac{P(Pe \cap \overline{C})}{\overline{C}} = \dfrac{0,02}{0,1} = 0,2$

b) $P(Pe \cup \overline{C}) = P(Pe) + P(\overline{C}) - P(Pe \cap \overline{C}) = 0,4 + 0,1 - 0,02 = 0,48$

4.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.21.7 ***(2 puntos)*** Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tal que: $P(A|B) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$ y $P(A) = \dfrac{2}{3}$. Calcule:

a) $P(A \cup \overline{B})$.

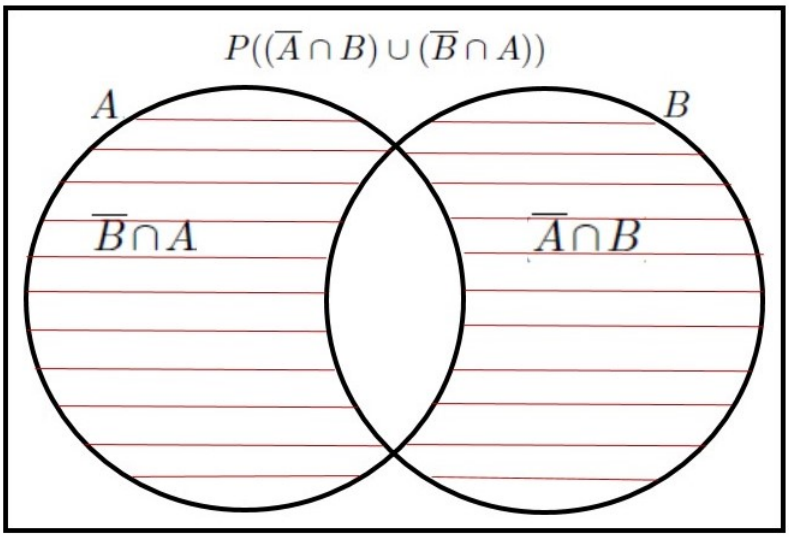
b) $P((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A))$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{24}$.
$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = P(A) + (1 - P(B)) - (P(A) - P(A \cap B) = 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{7}{8}$.

b) $P((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A)) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{B} \cap A) - P((\overline{A} \cap B) \cap (\overline{B} \cap A)) = P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) - P(\phi) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} - 2 \cdot \dfrac{1}{24} = \dfrac{3}{4}$.



Opción B

Problema 4.21.8 ***(2 puntos)*** En un instituto se decide que los alumnos y alumnas solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0,7. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es 0,2. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que

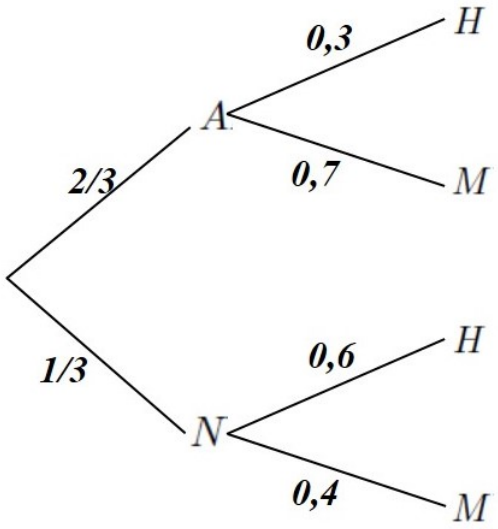
a) Sea el examen de un alumno.

b) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

Solución:
A: azul, N: negro, H: alumno y M: alumna.

$P(A) = \dfrac{2}{3}$, $P(N) = \dfrac{1}{3}$, $(M|A) = 0,7$ y $P(N \cap H) = 0,2$

$P(N \cap H) = 0,2 \Longrightarrow P(H|N) = \dfrac{P(N \cap H)}{P(N)} = \dfrac{0,2}{1/3} = 0,6$



a) $P(H) = P(H|A)P(A) + P(H|N)P(N) = 0,3 \cdot \dfrac{2}{3} + 0,6 \cdot \dfrac{1}{3} = 0,4$

b) $P(H|N) = \dfrac{P(N \cap H)}{P(N)} = \dfrac{0,2}{\frac{1}{3}} = 0,6$

4.22. Año 2021

4.22.1. Modelo

Opción A

Problema 4.22.1 ***(2 puntos)*** En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad, solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.

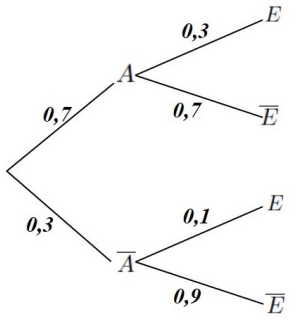
b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

Solución:

A : proximidad, $\overline{A}$: no proximidad, E : ecológica y $\overline{E}$: no ecológica.

a) $P(\overline{E}) = P(\overline{E}|A)P(A) + P(\overline{E}|\overline{A})P(\overline{A}) = 0,7 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,3 = 0,76$

b) $P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = P(A) + (1 - P(\overline{E})) - P(E|A)P(A) = 0,7 + 1 - 0,76 - 0,3 \cdot 0,7 = 0,73$



Opción B

Problema 4.22.2 ***(2 puntos)*** Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tal que $P(C) = 0,4$, $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,8$. Calcule:

a) $P(C|D)$.

b) $P(\overline{C \cap D}|C)$.

Solución:

a) $P(C|D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(C) + P(D) - P(C \cup D)}{P(D)} = \dfrac{0,4 + 0,6 - 0,8}{0,6} = \dfrac{1}{3} = 0,333$

b) $P(\overline{C \cap D}|C) = \dfrac{P(\overline{C \cap D} \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(C) - P(C \cap D)}{P(C)} = \dfrac{0,4 - 0,2}{0,4} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

4.22.2. Ordinaria

Opción A

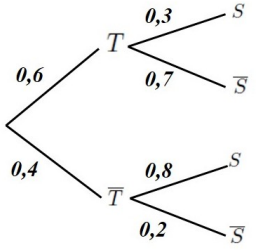
Problema 4.22.3 ***(2 puntos)*** El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.

b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

Solución:

T : teletrabaja, $\overline{T}$: no teletrabaja, S : trastorno de sueño y $\overline{S}$: sin trastorno de sueño.



a) $P(T \cap \overline{S}) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$

b) $P(\overline{T}|\overline{S}) = \dfrac{P(\overline{S}|\overline{T})P(\overline{T})}{P(\overline{S})} = \dfrac{0,2 \cdot 0,4}{0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,2} = \dfrac{4}{25} = 0,16$

Opción B

Problema 4.22.4 ***(2 puntos)*** Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,5 \quad P(\overline{B}|A) = 0,4 \quad P(A \cup B) = 0,9$$

a) Calcule $P(B|\overline{A})$.

b) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

Solución:

a) $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = 0,4 \Longrightarrow P(\overline{B} \cap A) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$
$P(\overline{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,5 - 0,2 = 0,3$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0,9 = 0,5 + P(B) - 0,3 \Longrightarrow P(B) = 0,7$
$P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{0,7 - 0,3}{1 - 0,5} = 0,8$

b) $P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,7 = 0,35 \neq P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

4.22.3. Ordinaria-Coincidente

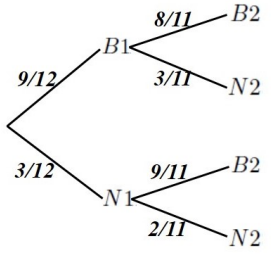
Opción A

Problema 4.22.5 ***(2 puntos)*** Una urna contiene 9 bolas blancas y 3 negras. Se seleccionan al azar consecutivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Calcule la probabilidad de que

a) La segunda bola seleccionada sea negra.

b) Ambas bolas seleccionadas sean negras, dado que la segunda bola seleccionada es negra.

Solución:
Sean $B1$: la primera es blanca, $N1$: la primera es negra, $B2$: la segunda es blanca y $N2$: la segunda es negra.



a) $P(N2) = P(N2|B1)P(B1) + P(N2|N1)P(N1) = \dfrac{3}{11} \cdot \dfrac{9}{12} + \dfrac{2}{11} \cdot \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

b) $P(N1|N2) = \dfrac{P(N2|N1)P(N1)}{P(N2)} = \dfrac{\frac{2}{11} \cdot \frac{3}{12}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{11} = 0,182$

Opción B

Problema 4.22.6 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos con $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A|\overline{B}) = \frac{4}{5}$.

a) Calcule $P(A \cap \overline{B})$.

b) ¿Son A y B incompatibles? Justifique la respuesta.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a) $P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \Longrightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A|\overline{B})P(\overline{B}) = \frac{4}{5}(\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}$

b) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$, luego los sucesos son incompatibles.

4.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.22.7 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,5$, $P(\overline{B}) = 0,8$, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9$.

a) Estudie si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcule $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,9 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,1$
$P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1 \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,5 + 0,2 - 0,1) = 0,4$
$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5$

Opción B

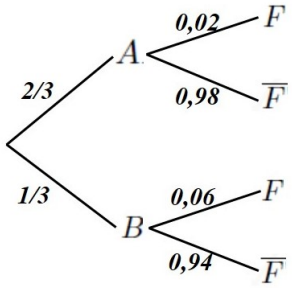
Problema 4.22.8 ***(2 puntos)*** Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0,02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0,06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) No sufra fracaso escolar.

b) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

Solución:
Sean A: alumno matriculado residente en el municipio A, B: alumno matriculado residente en el

municipio B, F: alumno con fracaso escolar y $\overline{F}$: alumno sin fracaso escolar.



a) $P(\overline{F}) = P(\overline{F}|A)P(A) + P(\overline{F}|B)P(B) = 0,98 \cdot \dfrac{2}{3} + 0,94 \cdot \dfrac{1}{3} = 0,9667$

b) $P(A|F) = \dfrac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \dfrac{0,02 \cdot \frac{2}{3}}{1 - 0,9667} = 0,4004$

4.23. Año 2022

4.23.1. Modelo

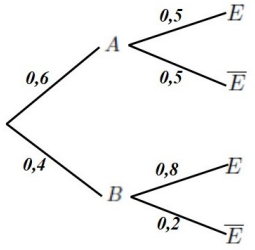
Opción A

Problema 4.23.1 ***(2 puntos)*** Una empresa de reparto de comida a domicilio reparte platos de dos restaurantes. El 60 % de los platos que reparte proceden del primer restaurante y el 40 % restante del segundo. El 50 % de los platos que reparte del primer restaurante están cocinados con productos ecológicos, siendo este porcentaje de un 80 % para el segundo restaurante. Elegido un plato al azar:

a) Calcule la probabilidad de que esté cocinado con productos ecológicos.

b) Si el plato seleccionado no está cocinado con productos ecológicos, obtenga la probabilidad de que proceda del segundo restaurante.

Solución:
Sean A primer restaurante, B segundo restaurante, E ecológica y $\overline{E}$ no ecológica.



a) $P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) =$
$0,5 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4 = 0,62$

b) $P(B|\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{E}|B)P(B)}{P(\overline{E})} = \dfrac{0,2 \cdot 0,4}{1 - 0,62} = 0,2105$

Opción B

Problema 4.23.2 ***(2 puntos)*** Entre los deportistas profesionales, el 50 % disfrutan de una beca de alto rendimiento y el 30 % está cursando estudios superiores. Se sabe también que el 10 % de los deportistas profesionales disfrutan de una beca de alto rendimiento y además están cursando estudios superiores. Seleccionado un deportista profesional al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Disfrute de una beca de alto rendimiento o esté cursando estudios superiores.

b) No disfrute de una beca de alto rendimiento, sabiendo que no está cursando estudios superiores.

Solución:
Sean B disfruta de beca y E estudia cursos superiores.
$P(B) = 0,5$, $P(E) = 0,3$ y $P(B \cap E) = 0,1$

a) $P(B \cup E) = P(B) + P(E) - P(B \cap E) = 0,5 + 0,3 - 0,1 = 0,7$

b) $P(\overline{B}|\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(\overline{B \cup E})}{1 - P(E)} = \dfrac{1 - P(B \cup E)}{1 - P(E)} = \dfrac{1 - 0,7}{1 - 0,3} = 0,4286$

4.23.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.23.3 ***(2 puntos)*** Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 0,6$, $P(A|B) = 0,4$ y $P(A|B^c) = 0,8$. Siendo B^c es el suceso complementario de B. Calcule:

a) $P(B)$.

b) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

Solución:
Por costumbre utilizaremos $\overline{B} = B^c$.

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,4 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,4P(B)$
$P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = 0,8 \Longrightarrow P(A \cap \overline{B}) = 0,8P(\overline{B})$
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,4P(B)$
$0,6 - 0,4P(B) = 0,8P(\overline{B}) = 0,8(1 - P(B)) \Longrightarrow$
$0,6 - 0,4P(B) = 0,8 - 0,8P(B) \Longrightarrow 0,4P(B) = 0,2 \Longrightarrow$
$P(B) = \dfrac{1}{2} = 0,5$

b) $P(A \cap B) = 0,4P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

Opción B

Problema 4.23.4 ***(2 puntos)*** Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

a) Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.

b) Si la carta observada no es diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

Solución:
D_1: diamante en la primera extracción y D_2: diamante en la segunda extracción.

a) $P(D_2) = P(\overline{D_1} \cap D_2) + P(D_1 \cap D_2) = \dfrac{39}{52} \cdot \dfrac{13}{51} + \dfrac{13}{52} \cdot \dfrac{12}{51} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

b) $P(\overline{D_1}|\overline{D_2}) = \dfrac{P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} = \dfrac{\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51}}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{38}{51} \simeq 0,7451$

4.23.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.23.5 ***(2 puntos)*** Sean A y B sucesos independientes de un experimento aleatorio con $P(B) = 1/2$.

a) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A \cup B) = 3/4$.

b) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A \cap B^c) = 1/4$.
Nota: B^c denota el suceso complementario de B.

Solución:

a) A y B sucesos independientes $\Longrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \Longrightarrow \dfrac{3}{4} = P(A) + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}P(A) \Longrightarrow \dfrac{1}{2}P(A) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow P(A) = \dfrac{1}{2}$

b) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \Longrightarrow \dfrac{1}{4} = P(A) - \dfrac{1}{2}P(A) \Longrightarrow \dfrac{1}{2}P(A) = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow P(A) = \dfrac{1}{2}$

Opción B

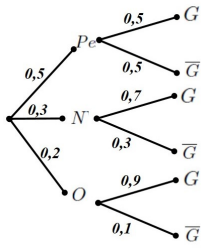
Problema 4.23.6 ***(2 puntos)*** Ganar en el juego del gambón depende de la actitud de los participantes. El 50 % de ellos son pesimistas y se sienten perdedores antes de haber jugado. El 30 % no lo ve claro y el resto son optimistas y se sienten ganadores antes de jugar. La probabilidad de que ganen los primeros es 0,5, de que ganen los segundos es 0,7 y de que ganen los últimos es 0,9.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador escogido al azar gane el juego?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea alguien que se haya sentido un perdedor antes de haber jugado el juego?

Solución:
Sean P_e a se sienten perdedores, N no lo ve claro, O son optimistas y G gana el juego.

a) $P(G) = P(G|Pe)P(Pe) + P(G|N)P(N) +$
$P(G|O)P(O) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 = 0,64$



b) $P(Pe|G) = \dfrac{P(G|Pe)P(Pe)}{P(G)} =$
$\dfrac{0,5 \cdot 0,5}{0,64} = 0,390625$

4.23.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.23.7 ***(2 puntos)*** Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatorio es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E = A \cup B$. Además suponga que $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(B) = 0,7$.

a) Calcule $P(A^c)$.

b) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.
Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

Solución:
Por costumbre utilizaremos $\overline{B} = B^c$.

a) $P(A \cup B) = P(E) = 1 = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow$
$1 = P(A) + 0,7 - 0,2 \Longrightarrow P(A) = 0,5 \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - 0,5 = 0,5$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$

Opción B

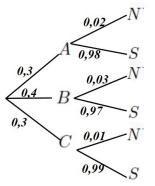
Problema 4.23.8 ***(2 puntos)*** Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30 % de las invitaciones, Berta el 40 % y Carla las restantes. El 2 % de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3 % y 1 %, respectivamente.

a) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.

b) Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

Solución:
A la envía Ana, B la envía Berta, C la envía Carla, N no llega y S si llega.

a) $P(N) = P(N|A)P(A) + P(N|B)P(B) + P(N|C)P(C) =$
$0,02 \cdot 0,3 + 0,03 \cdot 0,4 + 0,01 \cdot 0,3 = 0,021$



b) $P(A|N) = \dfrac{P(N|A)P(A)}{P(N)} = \dfrac{0,02 \cdot 0,3}{0,021} = 0,2857$

4.23.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.23.9 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio. Suponga que $P(A) = 0,7$, $P(B^c) = 0,7$ y $P(A \cap B) = 0,2$.

a) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

b) Calcule $P(A^c \cap B^c)$.
Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

Solución:
Por costumbre utilizaremos $\overline{B} = B^c$.

a) $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(A)P(B) = 0,7(1 - 0,7) = 0,21 \Longrightarrow$
$P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$
$1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,7 + 0,3 - 0,2) = 0,2$

Opción B

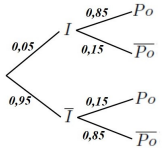
Problema 4.23.10 ***(2 puntos)*** Un virus muy peligroso está presente en el 5 % de la población nacional. Se tiene un test para detectar la presencia del virus que es correcto en el 85 % de los casos. Es decir, entre los portadores del virus, el test ha dado positivo el 85 % de las veces y entre los no portadores ha dado negativo el 85 % de las veces.

a) Si se practica el test a un individuo de la población escogido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dé positivo?

b) Si da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo escogido realmente sea un portador del virus?

Solución:
I está infectado, $\overline{I}$ no está infectado, Po el test muestra positivo y $\overline{Po}$ el test muestra positivo.

a) $P(Po) = P(Po|I)P(I) + P(Po|\overline{I})P(\overline{I}) =$
$0,85 \cdot 0,05 + 0,15 \cdot 0,95 = 0,185$



b) $P(I|Po) = \dfrac{P(Po|I)P(I)}{P(Po)} = \dfrac{0,85 \cdot 0,05}{0,185} = 0,2297$

4.24. Año 2023

4.24.1. Modelo

Opción A

Problema 4.24.1 ***(2 puntos)*** Considere el lanzamiento de un dado equilibrado. Sea A el suceso el resultado es 1 o 2, B el suceso el resultado es 2 o 3 y C el resultado es par.

a) Verifique que $P(A|C) = P(B|C) = P(A \cap B|C)$.

b) Calcule $P(A \cup B|C)$.

Solución:

a) $P(A|C) = \frac{1}{3}$ casos favorables sólo hay uno que salga el 2 y 3 casos posibles 2 o 4 o 6.
$P(B|C) = \frac{1}{3}$ casos favorables sólo hay uno que salga el 2 y 3 casos posibles 2 o 4 o 6.
$P(A \cap B|C) = \frac{1}{3}$, $A \cap B = \{2\}$ luego sólo hay un caso favorable y 3 casos posibles 2 o 4 o 6.
Luego: $P(A|C) = P(B|C) = P(A \cap B|C) = \frac{1}{3}$

b) $A \cup B = \{1, 2, 3\} \Longrightarrow P(A \cup B|C) = \frac{1}{3}$ sólo hay un caso favorable de tres posibles.

Opción B

Problema 4.24.2 ***(2 puntos)*** Se pide:

a) Se tienen 7 sobres cerrados. Uno de ellos contiene un premio y el resto son sobres vacíos. Se lanza un dado y luego se descartan tantos sobres vacíos como el dado indique. Posteriormente, se escoge al azar uno de los sobres que restan.

b) ¿Cuál es la probabilidad de escoger el sobre premiado?

c) Si salió el premio, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del dado haya sido el 1?

Solución:

a) Sean G gana el premio y sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestral del dado.
Tenemos: $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$
Tenemos: $P(G|1) = \frac{1}{6}$, $P(G|2) = \frac{1}{5}$, $P(G|3) = \frac{1}{4}$, $P(G|4) = \frac{1}{3}$ y $P(G|5) = \frac{1}{2}$ y $P(G|6) = 1$

b) $P(G) = P(G|1)P(1)+P(G|2)P(2)+P(G|3)P(3)+P(G|4)P(4)+P(G|5)P(5)+P(G|6)P(6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{49}{120} \simeq 0,40833$

c) $P(1|G) = \frac{P(G|1)P(1)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{49}{120}} = \frac{10}{147} \simeq 0,06803$

4.24.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.24.3 ***(2 puntos)*** Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,55$ y $P(B) = 0,1$. Además se sabe que $P(\overline{B}|A) = 0,89$, donde $\overline{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cap B)$.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, siendo $\overline{A}$ el suceso complementario de A.

Solución:

a) $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = 0,89 \implies P(A) - P(A \cap B) = 0,89P(A) \implies P(A \cap B) = 0,11P(A) = 0,11 \cdot 0,55 = 0,0605.$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,55 + 0,1 - 0,0605) = 0,4105$

Opción B

Problema 4.24.4 ***(2 puntos)*** El Ministerio de Educación y Formación Profesional convoca regularmente unas ayudas al estudio. En el curso 2019-2020 las ayudas destinadas a las Enseñanzas Obligatorias representaron el 56,5 % del total, el 24 % correspondieron a Enseñanzas Universitarias, mientras que el 19,5 % restante fueron para Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias. Las ayudas concedidas son financiadas o bien por el ministerio o bien por la Comunidad Autónoma a la que pertenece el estudiante. Concretamente, en el curso 2019-2020, las ayudas financiadas por el ministerio representaron el 13,8 % del total de ayudas de Enseñanzas Obligatorias, el 86,1 % de las Universitarias y el 80,3 % de las Postobligatorias No Universitarias. Eligiendo una ayuda al estudio al azar de las anteriormente descritas, calcule la probabilidad de que:

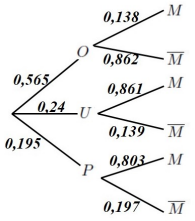
a) Sea financiada por el ministerio.

b) La ayuda sea de Enseñanza Obligatoria, sabiendo que ha sido financiada por el ministerio.

Solución:
Sean O las ayudas son destinadas a las Enseñanzas Obligatorias, U las ayudas son destinadas a las Enseñanzas Universitarias, P las ayudas son destinadas a las Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias, M las ayudas han sido financiadas por el ministerio y $\overline{M}$ las ayudas han sido financiadas por la Comunidad Autónoma.

a) $P(M) = P(M|O)P(O) + P(M|U)P(U) + P(M|P)P(P) = 0,565 \cdot 0,138 + 0,24 \cdot 0,861 + 0,195 \cdot 0,803 = 0,4412$

b) $P(O|M) = \dfrac{P(M|O)P(O)}{P(M)} = \dfrac{0,565 \cdot 0,138}{0,4412} = 0,1767$



4.24.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.24.5 ***(2 puntos)*** El informe ALADINO es un estudio de la Agencia Española de Seguridad Alimentaria y Nutrición (AESAN) que se realiza a escolares de 6 a 9 años residentes en España. En el informe de 2019, el 50,2 % de los escolares encuestados tenían entre 6 y 7 años, los restantes tenían entre 8 y 9 años. Según los estándares de la Organización Mundial de la Salud (OMS), se observó que el 23 % de los escolares estudiados presentaban sobrepeso y que en el grupo de escolares con 6-7 años de edad el 78 % no tenía sobrepeso. Eligiendo un escolar al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 6-7 años de edad.

b) No tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 8-9 años de edad.

Solución:
Sean A entre 6 y 7 años, B entre 8 y 9 años, S tiene sobrepeso y $\overline{S}$ no tiene sobrepeso.
Tenemos $P(\overline{S}|A) = \dfrac{P(\overline{S} \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(\overline{S} \cap A) = P(\overline{S}|A) \cdot P(A) = 0,78 \cdot 0,502 = 0,39156$

	S	$\overline{S}$	
A		$0,39156$	$0,502$
B			
	$0,23$	$0,77$	1

$\Longrightarrow$

	S	$\overline{S}$	
A	$0,11044$	$0,39156$	$0,502$
B	$0,11956$	$0,37844$	$0,498$
	$0,23$	$0,77$	1

a) $P(S \cap A) = 0,11044$.

b) $P(\overline{S} \cap B) = 0,37844$

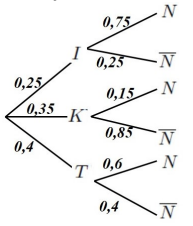
Opción B

Problema 4.24.6 ***(2 puntos)*** En un festival de música actúan varios grupos del panorama nacional e internacional reconocidos en la industria musical actual. Los artistas se agrupan por estilo musical en las siguientes categorías: el 25 % son bandas de música *indie*, el 35 % de *k-pop* y el resto de música *trap*. Además, se sabe que son nacionales el 75 % de los grupos *indie*, el 15 % de las agrupaciones de *k-pop* y el 60 % de los artistas *trap*. Eligiendo un grupo musical al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Sea nacional.

b) Toque música *indie*, sabiendo que es nacional.

Solución:
Sean I música *indie*, K música *k-pop*, T música *trap*, N música nacional y $\overline{N}$ música no nacional.



a) $P(N) = P(N|I)P(I) + P(N|K)P(K) + P(N|T)P(T) =$
$0,75 \cdot 0,25 + 0,15 \cdot 0,35 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,48$

b) $P(I|N) = \dfrac{P(N|I)P(I)}{P(N)} = \dfrac{0,75 \cdot 0,25}{0,48} = 0,390625$

4.24.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.24.7 (2 puntos) Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27,4 %de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos 150 minutos, y que el 65,1 % consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Además, el 76,3 % de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

a) Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

b) No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

Solución:
Sean A practica actividad física y F come de 1 a 4 porciones de fruta.
Tenemos: $P(A) = 0,274$, $P(F) = 0,651$ y $P(A \cup F) = 0,763$

a) $P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F) \implies P(A \cap F) = P(A) + P(F) - P(A \cup F) = 0,274 + 0,651 - 0,763 = 0,162$

b) $P(\overline{A}|\overline{F}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(\overline{A \cup F})}{1 - P(F)} = \dfrac{1 - P(A \cup F)}{1 - P(F)} = \dfrac{1 - 0,763}{1 - 0,651} = 0,6791$

Opción B

Problema 4.24.8 (2 puntos) La Agencia Estatal de Investigación Española convoca regularmente el Programa Ramón y Cajal para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria 2021 se presentaron 2159 solicitudes en la modalidad general y 1316 en la modalidad de jóvenes doctores. El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el 16,1 %, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del 21,1 %. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:

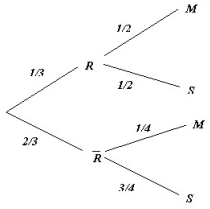
a) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramón y Cajal.

b) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigador ha sido seleccionado.

Solución:
Sean G modalidad general, D jóvenes doctores, S seleccionado y $\overline{S}$ no seleccionado.
Tenemos: $P(G) = \dfrac{2159}{2159 + 1316} = 0,6213$, $P(D) = 1 - 0,6213 = 0,3787$, $P(S|G) = 0,161$ y $P(S|D) = 0,211$

a) $P(S) = P(S|G)P(G) + P(S|D)P(D) = 0,161 \cdot 0,6213 + 0,211 \cdot 0,3787 = 0,179935$

b) $P(G|S) = \dfrac{P(S|G)P(G)}{P(S)} = \dfrac{0,161 \cdot 0,6213}{0,179935} = 0,55592$



4.24.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.24.9 (2 puntos) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,57$, $P(B) = 0,46$ y $P(A \cap B) = 0,28$. Calule las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B$.

b) $P(B|\overline{A})$ siendo $\overline{A}$ el suceso complementario de A.

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,57 + 0,46 - 0,28 = 0,75$

b) $P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{0,46 - 0,28}{1 - 0,57} = 0,4186$

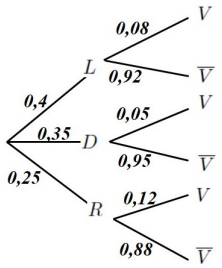
Opción B

Problema 4.24.10 (2 puntos) Un restaurante de comida rápida sirve el 40 % de los menús para consumir en el local, el 35 % es transportado por motoristas a domicilio (delivery) y el resto de menús son recogidos por los clientes en el local (take-away). El restaurante tiene un menú vegetariano que es consumido por el 8 % de los clientes en el local, el 5 % de los pedidos a domicilio y el 12 % de los recogidos en el local por los propios clientes. Eligiendo un menú al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Sea vegetariano.

b) Haya sido llevado a domicilio por un motorista, sabiendo que es vegetariano.

Solución:
Sean L consume en el local, D se transporta a domincilio, R lo recoge el cliente, V menú vegetariano y $\overline{V}$ menú no vegetariano.



a) $P(V) = P(V|L)P(L) + P(V|D)P(D) + P(V|R)P(R) = 0,08 \cdot 0,4 + 0,05 \cdot 0,35 + 0,12 \cdot 0,25 = 0,0795$

b) $P(D|V) = \dfrac{P(V|D)P(D))}{P(V)} = \dfrac{0,05 \cdot 0,35}{0,0795} = 0,2201$

4.25. Año 2024

4.25.1. Modelo

Problema 4.25.1 ***(2 puntos)*** Un estudio europeo sobre hábitos de uso de internet indica que el 62 % de los hombres españoles mayores de 16 años participa en redes sociales y que el 81 % lee noticias en internet. Además, el 95 % de los hombres de este estudio participa en redes sociales o lee noticias en internet. Eligiendo un hombre español mayor de 16 años al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Participe en redes sociales y lea noticias en internet.

b) No participe en redes sociales, sabiendo que no lee noticias en internet.

Solución:
Sean I lee noticias en Internet y S particioa en redes sociales.
$P(S) = 0,62$, $P(I) = 0,81$ y $P(S \cup I) = 0,95$

a) $P(S \cup I) = P(S) + P(I) - P(S \cap I) \Longrightarrow P(S \cap I) = P(S) + P(I) - P(S \cup I) = 0,62 + 0,81 - 0,95 = 0,48$

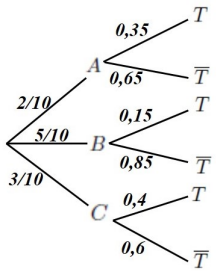
b) $P(\overline{S}|\overline{I}) = \dfrac{P(\overline{S} \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \dfrac{P(\overline{S \cup I})}{1 - P(I)} = \dfrac{1 - P(S \cup I)}{1 - P(I)} = \dfrac{1 - 0,95}{1 - 0,81} = \dfrac{5}{19} = 0,2632$

Problema 4.25.2 ***(2 puntos)*** Durante el adiestramiento de un perro para encontrar trufas, se le deja libre una vez al día en una zona de monte apropiada para encontrar este preciado hongo. En cada operación de búsqueda del animal se ha observado que este se dirige siempre hacia una de tres zonas de monte diferentes, denominadas A, B y C. En dos de cada diez operaciones de búsqueda se dirige hacia A, en cinco de cada diez hacia B y el resto hacia C. El perro detecta trufas en A un 35 % de las veces, un 15 % en B y un 40 % en C. Eligiendo al azar un perro en adiestramiento, calcule la probabilidad de que:

a) Detecte una trufa en una operación de búsqueda.

b) Sabiendo que ha encontrado una trufa, esta haya sido encontrada en la zona B.

Solución:
Sean A se dirige a zona A, B se dirige a zona B, C se dirige a zona C, T detecta trufa y $\overline{T}$ no detecta trufa.



a) $P(T) = P(T|A)P(A) + P(T|B)P(B) + P(T|C)P(C) =$
$0,35 \cdot \dfrac{2}{10} + 0,15 \cdot \dfrac{5}{10} + 0,4 \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{53}{200} = 0,265$

b) $P(B|T) = \dfrac{P(T|B)P(B)}{P(T)} = \dfrac{0,15 \cdot \frac{5}{10}}{\frac{53}{200}} = \dfrac{15}{53} = 0,2830$

4.25.2. Ordinaria

Problema 4.25.3 ***(2 puntos)*** En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:

a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.

b) Le guste el techno pero no el pop.

Solución:
Sean P le gusta el pop y T le gusta el techno.
$P(P) = \dfrac{90}{200} = \dfrac{9}{20}$, $P(T) = \dfrac{70}{200} = \dfrac{7}{20}$ y $P(P \cap T) = \dfrac{30}{200} = \dfrac{3}{20}$

a) $P(P \cup T) = P(P) + P(T) - P(P \cap T) = \dfrac{9}{20} + \dfrac{7}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{13}{20} = 0,65$

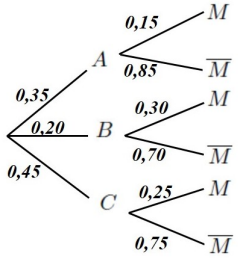
b) $P(T \cap \overline{P}) = P(T) - P(P \cap T) = \dfrac{7}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{2}{10} = 0,2$

Problema 4.25.4 ***(2 puntos)*** En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35 %, el 20 % y el 45 % de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15 % de los alevines criados en el tanque A, el 30 % de los alevines criados en el tanque B y el 25 % de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

a) Mida más de 35 mm.

b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

Solución:
Sean A la piscifactoría A, B la piscifactoría B, C la piscifactoría C, M mide más de 35 mm y $\overline{M}$ no mide más de 35 mm.



a) $P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|C)P(C) = 0,15 \cdot 0,35 + 0,30 \cdot 0,20 + 0,25 \cdot 0,45 = 0,225$

b) $P(C|\overline{M}) = \dfrac{P(\overline{M}|C)P(C)}{P(\overline{M})} = \dfrac{0,45 \cdot 0,75}{1 - 0,225} = 0,4355$

4.25.3. Ordinaria-Coincidente

Problema 4.25.5 ***(2 puntos)*** Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0,7$ y $P(B) = 0,15$. Además, se sabe que $P(\overline{B}|A) = 0,8$ donde $\overline{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule:

a) $P(A \cup B)$.

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Solución:

a) $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow$
$0,8 = \dfrac{0,7 - P(A \cap B)}{0,7} \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,14$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,15 - 0,14 = 0,71$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,14 = 0,86$

Problema 4.25.6 ***(2 puntos)*** En la base de datos de Spotify el 80 % de las canciones incluidas son de artistas procedentes de EEUU. El 30 % de las canciones de artistas procedentes de EEUU incluidas pueden clasificarse como electrónica, el 20 % como música urbana y el 50 % restante como pertenecientes a otros estilos musicales. Si el artista no procede de EEUU esas probabilidades son de 10 %, 50 % y 40 % respectivamente. Eligiendo al azar una canción de la base de Spotify, calcule la probabilidad de que:

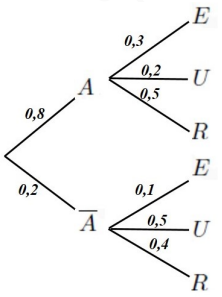
a) La canción pueda clasificarse como música urbana.

b) Sabiendo que la canción puede clasificarse como música urbana, sea de un artista no procedente de EEUU.

Solución:
Sean A artistas EEUU, E música electrónica, U música urbana y R resto de músicas.

a) $P(U) = P(U|A)P(A) + P(U|\overline{A})P(\overline{A}) =$
$0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,5 = 0,26$

b) $P(\overline{A}|U) = \dfrac{P(U|\overline{A})P(\overline{A})}{P(U)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,2}{0,26} = 0,3846$



4.25.4. Extraordinaria

Problema 4.25.7 ***(2 puntos)*** La observación metereológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50 % de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7 % de los días. Además, el 35 % de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Esté nublado y la temperatura baje de los 10 grados.

b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

Solución:
Sean N nublado y B por debajo de 10 grados.
$P(N) = 0,5$, $P(B) = 0,07$ y $P(N \cup B) = 0,35$

a) $P(N \cap B) = P(N) + P(B) - P(N \cup B) = 0,5 + 0,07 - 0,35 = 0,22$

b) $P(\overline{N}|\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{N} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(\overline{N \cup B})}{1 - P(B)} = \dfrac{1 - P(N \cup B)}{1 - P(B)} = \dfrac{1 - 0,35}{1 - 0,07} = 0,6989$

Problema 4.25.8 ***(2 puntos)*** Según los datos del INE, el 45,68 % de las familias españolas tienen una renta mensual de 1500 a 3000 euros y el 23,98 %de las familias tienen una renta mensual superior a 3000 euros. Entre las familias con menos de 1500 euros mensuales solo el 10 % viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1500 a 3000 euros mensuales viajan el 40 % y si el ingreso es mayor de 3000 euros mensuales viajan el 85 %.
Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:

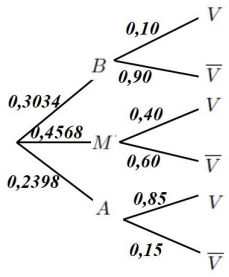
a) Viaje por vacaciones.

b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1500 euros.

Solución:
Sean B renta inferior a 1500 euros, M renta entre 1500 y 3000 euros, A renta superior a 3000 euros, V viaja de vacaciones y $\overline{V}$ no viaja de vacaciones.

a) $P(V) = P(V|B)P(B) + P(V|M)P(M) + P(V|A)P(A) =$
$0,10 \cdot 0,3034 + 0,40 \cdot 0,4568 + 0,85 \cdot 0,2398 = 0,4169$

b) $P(M \cup A|V) = \dfrac{P((M \cup A) \cap V)}{P(V)} =$
$\dfrac{P(V|M)P(M) + P(V|A)P(A)}{P(V)} =$
$\dfrac{0,40 \cdot 0,4568 + 0,85 \cdot 0,2398}{0,4169} = 0,9272$



4.25.5. Extraordinaria-Coincidente

Problema 4.25.9 ***(2 puntos)*** El 80 % de las prendas producidas por una cadena de ropa se fabrican en Asia y, desafortunadamente, el 35 % de las prendas producidas por esa cadena se han fabricado usando mano de obra infantil. Además, el 70 % de las prendas analizadas se fabrican en Asia o se han fabricado usando mano de obra infantil. Eligiendo una prenda de esa cadena al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Se haya fabricado en Asia y se haya fabricado usando mano de obra infantil.

b) No se haya fabricado en Asia, sabiendo que no se ha fabricado usando mano de obra infantil.

Solución:
Sean A prendas producidas en Asia e I producidas con mano de obra infantil.
$P(A) = 0,8$, $P(I|A) = 0,35$ y $P(A \cup I) = 0,7$

a) $P(A \cap I) = P(I|A)P(A) = 0,8 \cdot 0,35 = 0,28$

b) $P(A \cup I) = P(A) + P(I) - P(A \cap I) \Longrightarrow 0,7 = 0,8 + P(I) - 0,28 \Longrightarrow P(I) = 0,18$

$$P(\overline{A}|\overline{I}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{P(\overline{A \cup I})}{1 - P(I)} = \frac{1 - P(A \cup I)}{1 - P(I)} = \frac{1 - 0,7}{1 - 0,18} = 0,3659$$

Problema 4.25.10 ***(2 puntos)*** En un estudio sobre desarrollo sostenible de la OCDE se ha observado que el 20 % de los países son desarrollados. Si el país es desarrollado tiene una probabilidad del 5 % de tener una esperanza de vida inferior a 70 años, del 50 % de tener una esperanza de vida de 70 a 75 años y un 45 % de que la esperanza de vida sea superior a los 75 años. Si el país no pertenece al grupo de los países desarrollados, esas probabilidades son 50 %, 40 % y 10 %, respectivamente. Eligiendo al azar un país, calcule la probabilidad de que:

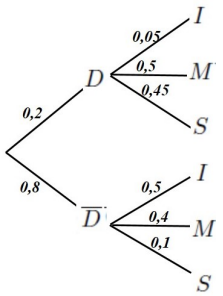
a) La esperanza de vida sea inferior a 70 años.

b) Sabiendo que la esperanza de vida es inferior a 70 años, el país no pertenezca al grupo de los países desarrollados.

Solución:
Sean D país desarrollado, $\overline{D}$ país no desarrollado, I tiene una esperanza de vida inferior a 70 años, M tiene una esperanza de vida entre 70 y 75 años y S tiene una esperanza de vida superior a 75 años.

a) $P(I) = P(I|D)P(D) + P(I|\overline{D})P(\overline{D}) =$
$0,05 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,8 = 0,41$

b) $P(\overline{D}|I) = \dfrac{P(I|\overline{D})P(\overline{D})}{P(I)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,8}{0,41} = 0,9756$



4.26. Año 2025

4.26.1. Modelo

EJERCICIO 4

(2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: a) o b).

Problema 4.26.1 (2,5 puntos)

a) De dos sucesos A y B sabemos que: $P(A \cup B) = 1$, $P(B) = 0,8$ y $P(\overline{A}) = 0,55$, donde $\overline{A}$ es el suceso complementario de A.

1. (1 punto) Calcule $P(A|B)$
2. (1 punto) Calcule $P(\overline{B}|A)$ siendo $\overline{B}$ el suceso complementario de B.
3. (0,5 puntos) Calcule $P(\overline{A} \cap B)$.

b) En los premios Grammy Latino, se sabe que el 40 % de los artistas nominados en la categoría de Mejor Álbum del Año son dúos, el 30 % son grupos musicales (más de dos artistas) y el 30 % son solistas. Además, se ha observado que el 20 % de los dúos, el 15 % de los grupos musicales y el 25 % de los solistas nominados han ganado el premio de Mejor Álbum del Año. Eligiendo al azar un artista nominado al Mejor Álbum del Año, y sabiendo que en este concurso los artistas sólo pueden presentarse por una de las tres categorías musicales, calcule la probabilidad de que:

1. (1,25 puntos) Haya ganado el Grammy Latino en dicha categoría.
2. (1,25 puntos) Dicho artista sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en dicha categoría.

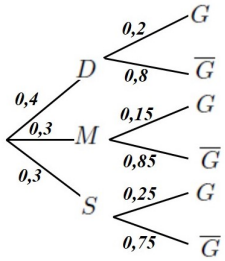
Solución:

a) Tenemos: $P(A \cup B) = 1$, $P(B) = 0,8$ y $P(\overline{A}) = 0,55$.

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 1 = (1 - 0,55) + 0,8 - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,25$
   $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,25}{0,8} = 0,3125$
2. $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,45 - 0,25}{0,45} = 0,4444$
3. $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,25 = 0,55$.

b) Sean D los dúos nominados, M los grupos musicales, S los solistas, G ganan el premio y $\overline{G}$ no ganan el premio.

1. $P(G) = P(G|D)P(D) + P(G|M)P(M) + P(G|S)P(S) = 0,2 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,3 = 0,2$
2. $P(S|G) = \dfrac{P(G|S)P(S)}{P(G)} = \dfrac{0,25 \cdot 0,3}{0,2} = 0,375$



www.imusat.net

Capítulo 5

Estadística

5.1. Año 2000

5.1.1. Modelo

Opción A

Problema 5.1.1 ***(2 puntos)*** Se sabe que el peso en kilogramos de los alumnos de bachillerato de Madrid, es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de desviación típica igual a 5 kg.

a) En caso de considerar muestras de 25 alumnos, ¿qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral $\overline{X}$?

b) Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de 1 kg de la media de la población, con probabilidad 0,95; ¿cuántos alumnos se deberían tomar en la muestra?

Solución:

a) Tenemos $N(\mu, 5)$ distribución de la población, luego la variable aleatoria media muestral $\overline{X}$ sigue una distribución

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(mu, 1\right)$$

b) Tenemos $E = 1$, $\sigma = 5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1{,}96\frac{5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 96{,}04$$

Luego el tamaño mínimo de la muestra debe ser de $n = 97$ alumnos.

Opción B

Problema 5.1.2 ***(2 puntos)*** Se sabe por experiencia que el tiempo obtenido por los participantes olímpicos de la prueba de 100 metros, en la modalidad de Decathlón, es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 12 segundos y desviación típica 1,5 segundos. Para contrastar, con un nivel de significación de 5 %, si no ha variado el tiempo medio en la última

http://www.matesat.net

Olimpiada, se extrajo una muestra aleatoria de 10 participantes y se anotó el tiempo obtenido por cada uno, con los resultados siguientes, en segundos:

$$13 \;\; 12 \;\; 11 \;\; 10 \;\; 11 \;\; 11 \;\; 9 \;\; 10 \;\; 12 \;\; 11$$

a) ¿Cuáles son la hipótesis nula y la alternativa del contraste?

b) Determínese la región crítica.

c) Realícese el contraste.

Solución:

Tenemos $N(\mu, \sigma) = N(12; 1{,}5)$, $\overline{X} = 11$, $n = 10$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

a)

$$H_0 : \mu = 11$$
$$H_1 : \mu \neq 11$$

El intervalo de aceptación de la hipótesis nula es

$$\mu \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12 \pm 0{,}0207 = (11{,}0703; 12{,}9297)$$

b) La región crítica sería el intervalo $(-\infty; 11{,}0703) \cup (12{,}9297; \infty)$

c) No se acepta la hipótesis ya que la media muestral pertenece a la región crítica.

5.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.1.3 ***(2 puntos)*** En una comunidad autónoma se estudia el número medio de hijos a partir de los datos disponibles en cada municipio. Se supone que este número sigue una distribución normal con desviación típica igual a 0,08. El valor medio de estos datos para 36 municipios resulta ser igual a 1,17 hijos por mujer. Se desea contratar, con un nivel de significación de 0,01, si el número medio de hijos por mujer en la comunidad es de 1,25.

Solución:

Tenemos $\overline{X} = 1{,}25$, $\sigma = 0{,}08$, $n = 36$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}575 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1{,}216; 1{,}284)$$

Como la media a contrastar 1,17 está fuera del intervalo, rechazamos que la media pueda valer 1,25.

Opción B

Problema 5.1.4 ***(2 puntos)*** Una variable aleatoria X tiene distribución normal, siendo su desviación típica igual a 3.

a) Si se consideran muestras de tamaño 16, ¿qué distribución sigue la variable aleatoria media muestral?

b) Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de 1 unidad de la media de la población, con probabilidad de 0,99, ¿cuántos elementos, como mínimo, se deberían tomar en la muestra?

Solución:

a) Tenemos

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = N\left(\mu; 0{,}75\right)$$

b)

$$z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 2,575 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 59,68$$

Luego $n = 60$

5.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.1.5 ***(2 puntos)*** El número de reclamaciones presentadas durante la campaña de Navidad en 9 tiendas de una empresa ha sido:

25 31 28 30 32 20 22 34 30

Se acepta que estos números de reclamaciones sigue una distribución normal con desviación típica igual a 5. Se desea contrastar si el número de reclamaciones es 26, con un nivel de significación de 0,05.

a) Plantéese cuáles son la hipótesis nula y la alternativa de contraste.

b) Determínese la región crítica de contraste.

c) ¿Es posible aceptar la hipótesis con el nivel de significación indicado?

Solución:

a) Las hipótesis serían:

$$H_0 : \mu = 28$$
$$H_1 : \mu \neq 28$$

b) Tenemos $\overline{x} = 28$, $\sigma = 5$, $n = 9$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$El intervalo de confianza para la media poblacional $\mu = 26$ sería

$$\left(\mu - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (22{,}733, 29{,}267)$$

La región crítica sería el intervalo $(-\infty, 22{,}733) \cup (29{,}267, \infty)$

c) Como la media muestral $\overline{x} = 28$ no está dentro de la región crítica, aceptamos que la media pueda valer 26.

Opción B

Problema 5.1.6 ***(2 puntos)*** Se supone que los gastos corrientes de los empleados de los distintos departamentos de una empresa siguen una distribución normal con desviación típica de 300 euros.

De los datos disponibles para 16 departamentos se ha obtenido un gasto medio por empleado de 2750 euros. Determínese un intervalo de confianza al 99 % para el gasto corriente medio por empleado en la empresa.

Solución:

$$\overline{X} = 2750, \;\; \sigma = 300, \;\; n = 16, \;\; z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (2556{,}875; 2943{,}125)$$

5.2. Año 2001

5.2.1. Modelo

Opción A

Problema 5.2.1 ***(2 puntos)*** Un investigador afirma que las horas de vuelo de cierto tipo de aviones comerciales se distribuye normalmente, con una media de 200000 horas y una desviación típica de 20000 horas. Para comprobar la veracidad de sus hipótesis, obtuvo una muestra aleatoria de 4 aviones de distintas compañías aéreas, fuera ya de servicio, y anotó el número de horas de vuelo de cada uno, resultando los siguientes datos (en miles de horas):

150 320 270 140

a) Plantéese cuáles son la hipótesis nula y la alternativa de contraste.

b) Realícese el contraste con un nivel de significación del 5 %.

Solución:

Tenemos $N(\mu, \sigma) = N(200000, 20000)$, $\overline{X} = 220000$, $n = 4$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

a)

$$H_0 : \mu = 220000$$
$$H_1 : \mu \neq 220000$$

El intervalo de aceptación de la hipótesis nula es

$$\mu \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 200000 \pm 19600 = (180400, 219600)$$

b) La región crítica sería el intervalo $(-\infty, 180400) \cup (219600, \infty)$. No se acepta la hipótesis ya que la media muestral pertenece a la región crítica.

Opción B

Problema 5.2.2 ***(2 puntos)*** El tiempo de vida de una clase de depuradoras de agua utilizadas en una planta industrial se distribuye normalmente, con una desviación típica de 2000 horas. En un ensayo realizado con una muestra aleatoria de 9 depuradoras, se obtuvieron los siguientes tiempos de vida en miles de horas

9,5 10 7,5 10,5 16,5 10 12 32 18

a) Hállese un intervalo de confianza al 99 % para la vida media de las depuradoras.

b) Calcúlese el tamaño mínimo que debería tener la muestra, en el caso de admitir un error máximo de 500 horas, con un grado de confianza del 95 %:

Solución:

a) Tenemos $N(\mu, 2000)$, $\overline{X} = 14000$, $n = 9$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}575$. El intervalo de confianza es

$$\left(\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (12283{,}33; 15716{,}667)$$

b) Tenemos $N(\mu, 2000)$, $E = 500$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 61{,}4656$$

Luego, el tamaño mínimo que debe de tener la muestra es de $n = 62$.

5.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.2.3 ***(2 puntos)*** Un establecimiento vende paquetes de carbón para barbacoa de peso teórico 10 kg. Se supone que el peso de los paquetes sigue una distribución normal con desviación típica 1 kg. Para contrastar la citada hipótesis, frente a que el peso teórico sea distinto de 10 kg, se escogen al azar 4 paquetes que pesan en kilogramos, respectivamente:

$$8 \quad 10 \quad 9 \quad 8$$

Se desea que la probabilidad de aceptar la hipótesis nula, cuando esta es cierta, sea 0,95. Se pide:

a) La región crítica de contraste.

b) ¿Se debe rechazar la hipótesis nula?

Solución:

a) La media de la muestra vale $\overline{x} = 8{,}75$, la media de la población $\mu = 10$, $\sigma = 1$, $n = 4$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Calculamos un intervalo de aceptación para la media μ y comprobamos si la media muestral está dentro de él.

$$\left(\mu - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (9{,}02; 10{,}98)$$

Las hipótesis serían:

$$H_0 : \mu = 10$$
$$H_1 : \mu \neq 10$$

b) Como la media $\overline{x} = 8{,}75 \notin (9{,}02, 10{,}98) \Longrightarrow$ no podemos aceptar la hipótesis de que el peso medio de los paquetes sea de 10 kg.

Opción B

Problema 5.2.4 ***(2 puntos)*** Se supone que el peso de las sandías de cierta variedad sigue una distribución normal con desviación típica de 1 kg. Se toma una muestra aleatoria de 100 sandías y se observa que el peso medio es de 6 kg.

a) Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de esa variedad de sandía.

b) ¿Puede aceptarse la hipótesis de que el verdadero peso medio de las sandías es de 5 kg, frente a que sea diferente, con un nivel de significación de 0,05?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 6$, $\sigma = 1$, $n = 100$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (5{,}804; 6{,}196)$$

b)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

Las hipótesis serían:

$$H_0 : \mu = 5$$
$$H_1 : \mu \neq 5$$

El intervalo de aceptación sería:

$$5 \pm 1{,}96 \cdot \frac{1}{100} \Longrightarrow (4{,}804, 5{,}196)$$

Se rechaza la hipótesis, ya que $6 \notin (4{,}804, 5{,}196)$. No podemos asegurar que el peso medio de las sandías sea 5 kg.

5.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.2.5 ***(2 puntos)*** El peso de los perros adultos de cierta raza es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con desviación típica 0,6 kg. Una muestra aleatoria de 30 animales ha dado un peso medio de 7,4 kg.

a) Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para el peso medio de los perros adultos de esta raza.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para tener una confianza del 95 % de que la media muestral no se diferencie en más de 0,3 kg de la media de la población?

Solución:

a) La media de la muestra vale $\overline{X} = 7{,}4$, $\sigma = 0,6$, $n = 30$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (7{,}118; 7{,}682)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde $E = 0,3$, $\sigma = 0,6$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

$$\Longrightarrow n = 15{,}37$$

Luego el tamaño de la muestra tiene que ser como mínimo de $n = 16$.

Opción B

Problema 5.2.6 ***(2 puntos)*** En un laboratorio se obtuvieron seis determinaciones del PH de una solución, con los resultados siguientes:

$$7,91 \quad 7,94 \quad 7,90 \quad 7,93 \quad 7,89 \quad 7,91$$

Se supone que la población de todas las determinaciones de PH de la solución tiene una distribución normal de media desconocida con una desviación típica igual a 0,02.

a) Determínese un intervalo de confianza al 98 % para la media de todas las determinaciones del PH de la misma solución obtenidas con el mismo método.

b) Con el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea a lo sumo 0,02?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 7{,}913$, $\sigma = 0{,}02$, $n = 6$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (7{,}894349787; 7{,}932316878)$$

b) $z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0{,}1 = 2{,}325 \cdot \frac{0{,}02}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 21{,}6225$$

Luego el menor tamaño de la muestra debe ser $n = 22$.

5.3. Año 2002

5.3.1. Modelo

Opción A

Problema 5.3.1 ***(2 puntos)*** El peso de individuos de cierta especie se distribuye como una variable aleatoria normal con media 50 euros y desviación típica 4.

a) Calcular la probabilidad de que la media muestral obtenida con los valores de 16 individuos seleccionados aleatoriamente, esté entre 48 y 50.

b) Se seleccionan aleatoriamente 4 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de la muestra supere el valor 54?

Solución:

a) La distribución será $N\left(50, \frac{4}{\sqrt{16}}\right) = N(50, 1)$:

$$P(48 \leq \overline{X} \leq 50) = P\left(\frac{48-50}{1} \leq Z \leq \frac{50-50}{1}\right) = P(-2 \leq Z \leq 0) =$$

$$P(Z \leq 0) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 0) - (1 - P(Z \leq 2)) =$$

$$P(Z \leq 0) + P(Z \leq 2) - 1 = 0,5 + 0,9772 - 1 = 0{,}4772$$

b) La distribución será $N\left(50, \frac{4}{\sqrt{4}}\right) = N\left(50, 2\right)$.

$$P(\overline{X} \geq 54) = P\left(Z \geq \frac{54-50}{2}\right) =$$

$$P(-2 \leq Z) = 1 - P(2 \leq Z) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Opción B

Problema 5.3.2 ***(2 puntos)*** Una investigación sobre el servicio post-venta para clientes que adquirieron cierta marca de automóviles, presenta los siguientes datos sobre una muestra de 608 clientes: 371 están muy satisfechos frente a los 45 que se declaran muy insatisfechos.

a) A nivel de significación del 5 %, ¿se puede concluir que la proporción de clientes muy satisfechos es superior al 60 %?

b) Explicar el error de Tipo I de este contraste. ¿Con qué probabilidad se comete el error?

Solución:

a) Calculamos el intervalo de confianza para esta proporción donde $p = \frac{371}{608} = 0,61$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$IC = \left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) =$$

$$= (0{,}5714304009; 0{,}6489643359)$$

Como 0,60 < 0,6489643359 está dentro del intervalo podemos aceptar la hipótesis planteada.

b) El error tipo I es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta, es decir, es el nivel de significación $= 0,05$.
Nivel de significación:
Es la probabilidad de cometer un error **TIPO I**, y se denota por α.

$$\alpha = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ Cierta})$$

5.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.3.3 ***(2 puntos)*** Se quiere comprobar si una máquina destinada al llenado de envases de agua mineral ha sufrido desajuste. Una muestra aleatoria de diez envases de esta máquina ha proporcionado los siguientes resultados:

$$0,49, \quad 0,52, \quad 0,51, \quad 0,48, \quad 0,53, \quad 0,55, \quad 0,49, \quad 0,50, \quad 0,52, \quad 0,49$$

Suponiendo que la cantidad de agua mineral que este tipo de máquinas deposita en cada envase sigue una distribución normal de media 0,5 litros y una desviación típica de 0,02 litros, se desea contrastar si el contenido medio de los envases de esta máquina es de 0,5 litros, con un nivel de significación del 5 %.

a) Plantear la hipótesis nula y la alternativa de contraste.

b) Determinar la región crítica del contraste.

c) Realizar el contraste.

Solución: La media muestral vale $\overline{X} = 0,508$.

a) Se trata de un contraste bilateral

$$H_0 : \mu = \overline{X}$$
$$H_1 : \mu \neq \overline{X}$$

b) Son aquellos valores para los que $|\overline{X} - \mu| > z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$z_{\alpha/2} = 1,96$, $\overline{X} = 0,508$, $\mu = 0,0,5$, $\sigma = 0,02$ y $n = 10$.

$$|\overline{X} - \mu| > 1,96\,\frac{0,05}{\sqrt{10}} = 0,012$$

La región crítica será el intervalo $(\mu - 0{,}012, \mu + 0{,}012) = (0{,}488, 0{,}512)$.

c) Como $|\overline{X} - \mu| = 0{,}508 - 0{,}5 = 0{,}008$ está dentro del intervalo, no se puede rechazar la hipótesis nula y, por tanto, la máquina no ha tenido desajustes.

Opción B

Problema 5.3.4 ***(2 puntos)*** La duración de las llamadas de teléfono, en una oficina comercial, sigue una distribución normal con desviación típica 10 segundos. Se hace una encuesta entre 50 llamadas y la media de duración obtenida en esa muestra es de 35 segundos. Calcular un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de las llamadas.

Solución:

$$N(\mu, 10) \quad n = 50 \quad \overline{X} = 35 \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (32{,}2281; 37{,}7718)$$

5.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.3.5 ***(2 puntos)*** Los depósitos mensuales, en euros, de una entidad bancaria, siguen una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 5,1$. Con el fin de contrastar si la media de los depósitos mensuales es 20 euros, se toma una muestra de tamaño 16, resultando ser la media muestral de 22,4 euros. ¿Se puede aceptar la hipótesis de que la media es 20 a un nivel de significación del 5 %?.

Solución:

Se trata de un contraste bilateral

$$H_0 : \mu = 22,4$$
$$H_1 : \mu \neq 22,4$$

Rechazaremos H_0 para aquellos valores que cumplan $|\overline{X} - 20| > z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$z_{\alpha/2} = 1,96$, $\overline{X} = 22,4$, $\sigma = 5,1$ y $n = 16$.

$$|\overline{X} - \mu| > 1,96\,\frac{5,1}{\sqrt{16}} = 2,499$$

Como $|\overline{X} - 20| = 2,4 < 2,499$, está fuera de la región crítica, no se puede rechazar la hipótesis nula y, por tanto, la media de los depósitos mensuales puede decirse que, vale 20 euros.

Opción B

Problema 5.3.6 ***(2 puntos)*** De una población con distribución normal de media 50 y desviación típica 6, se extrae una muestra aleatoria de tamaño n y se calcula su media muestral.

a) ¿Qué valor debe de tener n para que se cumpla la desigualdad $|\overline{X}-\mu| < 2$, con un probabilidad de 0,95?

b) Resolver el apartado anterior con un probabilidad de 0,90. Comparar ambos resultados.

Solución:

a)

$$N(50,6) \quad z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2 = 1,96\frac{6}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1,96 \cdot 6}{2}\right)^2 = 34,5744$$

$$n = 35$$

b)

$$1 - \alpha = 0,9 \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \alpha/2 = 0,05$$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2 = 1,645\dfrac{6}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\dfrac{1,645 \cdot 6}{2}\right)^2 = 24,354225 \Longrightarrow n = 25$ Al disminuir el nivel de confianza necesitamos una muestra menor.

5.4. Año 2003

5.4.1. Ordinaria

Opción A

Problema 5.4.1 ***(2 puntos)*** Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica 0,05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere 0,01 segundos con un nivel de confianza del 99 %, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?
Solución:

$$N(\mu; 0{,}05),\ \ z_{\alpha/2} = 2{,}575,\ \ E = 0{,}01$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2{,}575 \cdot 0{,}05}{0{,}01}\right)^2 = 165{,}77 \Longrightarrow n = 166$$

Opción B

Problema 5.4.2 ***(2 puntos)*** Se probaron 10 automóviles, escogidos aleatoriamente de una misma marca y modelo, por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares. Se obtuvo que el consumo medio de gasolina, en litros, por cada 100 kilómetros fue de 6,5. Estudios previos indican que el consumo de gasolina tiene una distribución normal de desviación típica 2 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95 % para la media del consumo de gasolina de estos automóviles.
Solución:

$$N(\mu, 2)\ \ z_{\alpha/2} = 1{,}96\ \ n = 10$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(6{,}5 - 1{,}96\frac{2}{\sqrt{10}}, 6{,}5 + 1{,}96\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = (5{,}260387157; 7{,}739612842)$$

5.4.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.4.3 ***(2 puntos)*** El tiempo de conexión a Internet de los alumnos de cierta universidad, sigue una distribución normal con desviación típica 15 minutos. Para estimar la media del tiempo de conexión, se quiere calcular un intervalo de confianza que tenga una amplitud menor o igual que 6 minutos, con un nivel de confianza del 95 %. Determinar cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.
Solución:

$$N(\mu, 15)\ \ z_{\alpha/2} = 1{,}96\ \ E = 3$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3 = 1{,}96\frac{15}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 15}{3}\right)^2 = 96{,}04$$

$$n = 97$$

Opción B

Problema 5.4.4 ***(2 puntos)*** Se ha extraído una muestra de 150 familias de residentes en un barrio obteniéndose que la renta familiar media de la misma asciende a 20000 euros. Se supone que la renta familiar de los residentes en el barrio sigue una distribución normal de desviación típica 150 euros.

a) A partir de estos datos, calcular un intervalo de confianza para la renta familiar media con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Qué tamaño muestral mínimo es necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 90 %, un error en la estimación de la renta familiar media no superior a ± 142 euros?

Solución:

$$N(\mu, 150) \quad \overline{X} = 20000 \quad n = 150$$

a)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(20000 - 1{,}96\frac{150}{\sqrt{150}}, 20000 + 1{,}96\frac{150}{\sqrt{150}}\right) = (19975{,}995; 20024{,}00499)$$

b)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 142 = 1{,}645\frac{150}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1{,}645 \cdot 150}{142}\right)^2 = 3{,}019518076$$

$$n = 4$$

5.5. Año 2004

5.5.1. Modelo

Opción A

Problema 5.5.1 ***(2 puntos)*** Se supone que los ingresos diarios en una empresa siguen una distribución normal con media 400 euros y desviación típica 250 euros.

a) ¿Cómo se distribuye la media muestral, para muestras de tamaño n?.

b) Se dispone de una muestra aleatoria de 25 observaciones. Calcular la probabilidad de que el promedio de ingresos esté entre 350 y 450 euros.

Solución:

a) La distribución será $N\left(400, \dfrac{250}{\sqrt{n}}\right)$

b) La distribución será $N\left(400, \dfrac{250}{\sqrt{25}}\right) = N\left(400, 50\right)$.

$$P(350 < \overline{X} < 450) = P\left(\frac{350 - 400}{50} < Z < \frac{350 - 400}{50}\right) = P(-1 < Z < 1)$$

$$= P(Z < 1) - P(-1 < Z) = 2P(z < 1) - 1 = 0,6826$$

Opción B

Problema 5.5.2 ***(2 puntos)*** El salario de los trabajadores de una ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 15 euros. Se quiere calcular un intervalo de confianza para el salario medio, con un nivel de confianza del 95 %. Determinar cuál es el tamaño mínimo de la muestra que se necesitaría recoger para que el intervalo de confianza tenga una amplitud de 6 euros.
Solución:
Tenemos $N(\mu, 15)$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \Longrightarrow$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3 = 1{,}96\frac{15}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 96{,}04 \Longrightarrow n = 97$$

5.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.5.3 ***(2 puntos)*** En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención es una variable normal de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan en un día concreto. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera de una muestra de 25 clientes no supere los 9 minutos.

b) ¿Cuál es la distribución de la media muestral, si se toman muestras aleatorias de 64 clientes?. Especificar sus parámetros.

Solución:
$N(10, 2)$, normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$.

a)

$$n = 25 \Longrightarrow N\left(10, \frac{2}{\sqrt{25}}\right) = N\left(10, \frac{2}{5}\right) = N(10; 0, 4)$$

$$P(\overline{X} \leq 9) = P\left(z \leq \frac{9-10}{0,4}\right) = P(z \leq -2, 5) = 1 - P(z \leq 2, 5) =$$

$$= 1 - 0, 9938 = 0, 0062$$

b)

$$n = 64 \Longrightarrow N\left(10, \frac{2}{\sqrt{64}}\right) = N\left(10, \frac{2}{8}\right) = N(10; 0, 25)$$

Se trata de una normal de media 10 y desviación típica 0,25.

Opción B

Problema 5.5.4 ***(2 puntos)*** El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse como una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros. Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son

255 85 120 290 80 80 275 290 135

a) Construir un intervalo de confianza al 98 % para la media poblacional.

b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99 %, el error de estimación del precio no supere los 50 euros

Solución:
$N(\mu, 100)$, normal de media μ y desviación típica $\sigma = 100$, $\overline{X} = 178,89$.

a)

$$1-\alpha = 0,98 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01 \Longrightarrow P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0,99 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,325$$

$$I.C. = \left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(178,89 - 2,32\frac{100}{\sqrt{9}}; 178,89 + 2,32\frac{100}{\sqrt{9}}\right) = (101,47; 256,31)$$

b)

$$1-\alpha = 0,99 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \Longrightarrow P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0,995 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 50 = 2,575\frac{100}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{2,575 \cdot 100}{50} \Longrightarrow n = 26,52$$

Luego $n = 27$.

5.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.5.5 ***(2 puntos)*** Una muestra aleatoria de 9 tarrinas de helado proporciona los siguientes pesos en gramos 88, 90, 90, 86, 87, 88, 91, 92, 89.
Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población, sabiendo que el peso de las tarrinas tiene una distribución normal con una desviación típica de 1,8 gramos.

Solución:

$$\overline{X} = \frac{88+90+90+86+87+88+91+92+89}{9} = 89, \;\; n = 9, \;\; \sigma = 1,8$$

$$1-\alpha = 0,95 \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$I.C. = \left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\; \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(89 - 1,96\frac{1,8}{\sqrt{9}};\; 89 + 1,96\frac{1,8}{\sqrt{9}}\right)$$

$$I.C. = (87,824;\; 90,176)$$

Opción B

Problema 5.5.6 ***(2 puntos)*** Calcular el tamaño mínimo que debe de tener una muestra aleatoria para garantizar que, en la estimación de la media de una población normal con varianza igual a 60, al 90 % de confianza, el error de estimación cometido no sea superior a 3 unidades.

Solución:

$$1-\alpha=0,9 \Longrightarrow \alpha=0,1 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2}=0,05 \Longrightarrow P(z\leq z_{\frac{\alpha}{2}})=0,95 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1,64$$

$$E=z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,64\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{n}}=3 \Longrightarrow n=17,93$$

Luego el tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n=18$.

5.6. Año 2005

5.6.1. Modelo

Opción A

Problema 5.6.1 ***(2 puntos)*** El número de días de ausencia en el trabajo de los empleados de cierta empresa para un período de seis meses, se puede aproximar mediante una distribución normal de desviación típica 1,5 días. Una muestra aleatoria de diez empleados ha proporcionado los siguientes datos

5 4 6 8 7 4 2 7 6 1

a) Determinar un intervalo de confianza al 90 % para el número medio de días que los empleados de esa empresa han faltado durante los seis últimos meses.

b) ¿Qué tamaño debe tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0,5 días, con el mismo nivel de confianza?

Solución:

a) Tenemos $N(\mu,1{,}5)$, $n=10$, $\overline{X}=\dfrac{50}{10}=5$ y $z_{\alpha/2}=1{,}645 \Longrightarrow$

$$IC=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(4{,}219707987;5{,}780292012)$$

b)

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0{,}5=1{,}645\frac{1{,}5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n=24{,}354225 \Longrightarrow n=25$$

Opción B

Problema 5.6.2 ***(2 puntos)*** La temperatura corporal en una cierta especie animal es una variable aleatoria que tiene una distribución normal de media 36,7°C y desviación típica 3,8ºC. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 ejemplares de esa especie. Hallar la probabilidad de que la temperatura corporal media de la muestra:

a) Sea menor o igual a 36,9°C.

b) Esté comprendida entre 36,5°C y 37,3°C.

Solución:
Se trata de una distribución $N\left(36{,}7;\frac{3{,}8}{\sqrt{100}}\right) = N(36{,}7;0{,}38)$

a)

$$P(\overline{X} \leq 36{,}9) = P\left(Z \leq \frac{36{,}9-36{,}7}{0{,}38}\right) = P(Z \leq 0{,}52) = 0{,}6985$$

b)

$$P(36{,}5 \leq \overline{X} \leq 37{,}3) = P\left(\frac{36{,}5-36{,}7}{0{,}38} Z \leq \frac{37{,}3-36{,}7}{0{,}38}\right) =$$

$$P(-0{,}52 \leq Z \leq 1{,}58) = P(Z \leq 1{,}58) - P(Z \leq (-0{,}52) =$$

$$P(Z \leq 1{,}58) + P(Z \leq (0{,}52) - 1 = 0{,}695 + 0{,}9429 - 1 = 0{,}6379$$

5.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.6.3 ***(2 puntos)*** En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.

a) Hallar un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional.

b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95 %, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?.

Solución:

a)

$$1-\alpha = 0,80 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,1 \Longrightarrow P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0,9 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,28$$

$$I.C. = \left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(5 - 1,28\frac{2}{\sqrt{10{,}000}}; 5 - 1,28\frac{2}{\sqrt{10{,}000}}\right) = (4,9744; 5,0256)$$

b)

$$1-\alpha = 0,95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0,975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,25 = 1,96\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 2}{0,25} \Longrightarrow n = 245,8624$$

Luego $n = 246$.

Opción B

Problema 5.6.4 ***(2 puntos)*** Para una población $N(\mu, \sigma = 25)$, ¿qué tamaño muestral mínimo es necesario para estimar μ mediante un intervalo de confianza, con un error menor o igual que 5 unidades, y con una probabilidad mayor o igual que 0,95?.

Solución:

$$1-\alpha = 0,95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0,975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 5 = 1,96 \frac{25}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 25}{5} \Longrightarrow n = 96,04$$

Luego $n = 97$.

5.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.6.5 ***(2 puntos)*** La duración de las baterías de un determinado modelo de teléfono móvil tiene una distribución normal de media 34.5 horas y una desviación típica de 6.9 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 teléfonos móviles.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media de las baterías de la muestra este comprendida entre 32 y 33.5 horas?.

b) ¿Y de que sea mayor de 38 horas?.

Solución:

a)

$$N(34{,}5; 6{,}9), \quad n = 36, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}15$$

$$P(32 < \overline{X} < 33{,}5) = P\left(\frac{32-34{,}5}{1{,}15} < Z < \frac{33{,}5-34{,}5}{1{,}15}\right) =$$

$$P(Z < 2{,}17) - P(Z < 0{,}86) = 0{,}9850 - 0{,}8051 = 0{,}1799$$

b)

$$P(\overline{X} > 38) = 1 - P(38 < \overline{X}) = 1 - P\left(Z < \frac{38-34{,}5}{1{,}15}\right) = 1 - 1 = 0$$

Opción B

Problema 5.6.6 ***(2 puntos)*** El tiempo de reacción de una alarma electrónica ante un fallo del sistema es una variable aleatoria normal con desviación típica 1 segundo. A partir de una muestra de 100 alarmas se ha estimado la media poblacional del tiempo de reacción, mediante un intervalo de confianza, con un error máximo de estimación igual a 0.2 segundos. ¿Con qué nivel de confianza se ha realizado la estimación?.

Solución:

$$N(\mu,1), \quad n=100, \quad E=0{,}2$$
$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0{,}2=z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{100}} \Longrightarrow$$
$$z_{\alpha/2}=2 \Longrightarrow 1-\alpha=0{,}9772$$

El nivel de confianza es del 97.72 %.

5.7. Año 2006

5.7.1. Modelo

Opción A

Problema 5.7.1 ***(2 puntos)*** El tiempo de conexión a Internet de los clientes de un cibercafé tiene una distribución normal de media μ y desviación típica 1,2 horas. Una muestra de 40 clientes ha dado como resultado una media de tiempo de conexión de 2,85 horas. Se pide:

a) Determinar un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Calcular el tamaño mínimo que debería tener la muestra para estimar la media de tiempo diario de conexión a Internet de los clientes de ese cibercafé, con un error menor o igual que 0,25 horas y una probabilidad de 0,95.

Solución:

a) Tenemos $N(\mu;1{,}2)$, $n=40$, $\overline{X}=2{,}85$ y $z_{\alpha/2}=1{,}96 \Longrightarrow$

$$IC=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(2{,}478116147;3{,}221883852)$$

b)

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0{,}25=1{,}96\frac{1{,}2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n=88{,}510464 \Longrightarrow n=89$$

Opción B

Problema 5.7.2 ***(2 puntos)*** Un fabricante de automóviles afirma que los coches de un cierto modelo tienen un consumo por cada 100 kilómetros que se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 0,68 litros. Se observa una muestra aleatoria simple de 20 coches del citado modelo y se obtiene una media de consumo de 6,8 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95 % para la media de consumo de ese modelo de vehículos.

Solución:

Se trata de una distribución $N(\mu;0{,}68)$, $n=20$, $\overline{X}=6{,}8$ y $z_{\alpha/2}=1{,}96 \Longrightarrow$

$$IC=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(6{,}501976859;7{,}098023140)$$

5.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.7.3 ***(2 puntos)*** En cierta población humana, la media muestral $\overline{X}$ de una característica se distribuye mediante una distribución normal. La probabilidad de que $\overline{X}$ sea menor o igual a 75 es 0,58 y la de que $\overline{X}$ sea mayor que 80 es 0,04. Hallar la media y la desviación típica de $\overline{X}$. (Tamaño muestral $n = 100$).

Solución:

$$P\left(\overline{X} \leq 75\right) = 0{,}58, \;\; P\left(\overline{X} > 80\right) = 0{,}04 \Longrightarrow P\left(\overline{X} \leq 80\right) = 0{,}96$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P\left(Z \leq \dfrac{75-\mu}{\sigma/\sqrt{100}}\right) = 0{,}58 \Longrightarrow \dfrac{75-\mu}{\sigma/\sqrt{100}} = 0{,}2 \\ \\ P\left(Z \leq \dfrac{80-\mu}{\sigma/\sqrt{100}}\right) = 0{,}96 \Longrightarrow \dfrac{80-\mu}{\sigma/\sqrt{100}} = 1{,}75 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = 74{,}355 \\ \sigma = 32{,}258 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 5.7.4 ***(2 puntos)*** El tiempo de espera en minutos en una ventanilla se supone aproximado mediante una distribución $N(\mu, \sigma)$ con $\sigma = 3$ minutos. Se lleva a cabo un muestreo aleatorio simple de 10 individuos y se obtiene que la media muestral del tiempo de espera es de 5 minutos. Determinar un intervalo de confianza al 95 % para μ.
Solución:

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$I.C. = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (3{,}1406; 6{,}8594)$$

5.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.7.5 (Puntuación máxima: 2 puntos)

La duración de la batería de cierto teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en meses):

33 34 26 37 30 39 26 31 36 19

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de este modelo de baterías.

Solución:

$$N(\mu, 5) \;\; \overline{X} = 31{,}1 \;\; z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$I.C. = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (28{,}00096789; 34{,}19903210)$$

Opción B

Problema 5.7.6 (Puntuación máxima: 2 puntos)

El peso en kg de los estudiantes universitarios de una gran ciudad se supone aproximado por una distribución normal con media 60 kg y desviación típica 8 kg. Se toman 100 muestras aleatorias simples de 64 estudiantes cada una. Se pide:

a) La media y la desviación típica de la distribución de la media muestral

b) ¿En cuántas de las 100 muestras cabe esperar una media entre 59 y 61 kg?

Solución:

a) $N(60, 1)$

b) $P(59 \leq \overline{X} \leq 61) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2P(Z \leq 1) - 1 = 0,6826$ Luego $100 \cdot 0,6826 = 68,26 \Longrightarrow$ en 68 muestras cabe esperar que la media esté entre 59 y 61 kg.

5.8. Año 2007

5.8.1. Modelo

Opción A

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

Opción B

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

5.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.8.1 ***(2 puntos)*** La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla de Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica de 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de casamiento.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

Solución:

a) Tenemos

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(35, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N\left(35, 0,5\right)$$

Media 35 varianza $0,5^2 = 0,25$

b)

$$P\left(36 \leq \overline{X} \leq 37\right) = P\left(\frac{36-35}{0,5} \leq Z \leq \frac{37-35}{0,5}\right) = P(2 \leq Z \leq 4) =$$
$$P(Z \leq 4) - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Opción B

Problema 5.8.2 ***(2 puntos)*** La duración de las rosas conservadas en agua en un jarrón es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 10 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 rosas y se obtienen las siguientes duraciones (en horas):

$$57,\ 49,\ 70,\ 40,\ 45,\ 44,\ 49,\ 32,\ 55,\ 45$$

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de las rosas.

Solución:

Se trata de una distribución $N(\mu, 10)$, $n = 10$, $\overline{X} = 48{,}6$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (42{,}40193578; 54{,}79806421)$$

5.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.8.3 ***(2 puntos)*** Se supone que la recaudación diaria de los comercios de un barrio determinado es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de desviación típica 328 euros. Se ha extraído una muestra de 100 comercios de dicho barrio, obteniéndose que la recaudación diaria media asciende a 1248 euros. Calcular:

a) El intervalo de confianza para la recaudación diaria media con un nivel de confianza del 99 %.

b) El tamaño muestral mínimo necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 95 %, un error en la estimación de la recaudación diaria menor de 127 euros.

Solución:

a) Tenemos

$$N(\mu, 328),\ \ n = 100,\ \ \overline{X} = 1248,\ \ z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1163,54; 1332,46)$$

b)

$$E = 127,\ \ z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 127 = 1,96\frac{328}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 370,97$$

El tamaño mínimo de la muestra debe de ser n=371

Opción B

Problema 5.8.4 ***(2 puntos)*** El tiempo invertido en cenar por cada cliente de una cadena de restaurantes es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica de 32 minutos. Se quiere estimar la media de dicho tiempo con un error no superior a 10 minutos, y con un nivel de confianza del 95 %.

Determinar el tamaño mínimo muestral necesario para poder llevar a cabo dicha estimación.

Solución:

$$E = 10, \quad z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 10 = 1,96\frac{32}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 39,337984$$

El tamaño mínimo de la muestra debe de ser $n = 40$.

5.9. Año 2008

5.9.1. Modelo

Opción A

Problema 5.9.1 ***(2 puntos)*** La edad de la población que vive en residencias de mayores en Madrid sigue una distribución normal de desviación típica 7,3 años. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. ¿Se puede asegurar que la edad media de la población difiere en menos de 2 años de la media de la media de la muestra con un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

a) Tenemos

$$N\left(\mu, 7{,}3\right), \ \ n = 50, \ \ z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{7{,}3}{\sqrt{50}} = 2{,}023$$

Como $IC = \left(\overline{X} - 2{,}023, \overline{X} + 2{,}023\right)$ no podemos asegurar, que la edad media de la población difiere en menos de 2 años.

Opción B

Problema 5.9.2 ***(2 puntos)*** Para conocer la producción media de sus olivos, un olivarero escoge al azar 10 de ellos, pesa su producción de aceitunas, y obtiene los siguientes valores, expresados en kg:

$$175, \ \ 180, \ \ 210, \ \ 215, \ \ 186, \ \ 213, \ \ 190, \ \ 213, \ \ 184, \ \ 195$$

Sabemos que la producción sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15,3.

Se pide estimar la producción media del olivar con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

$$N(\mu;15{,}3)\ \ n=10,\ \ \overline{X}=196{,}1,\ \ z_{\alpha/2}=1,96$$

$$IC=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(186{,}617;205{,}583)$$

5.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.9.3 ***(2 puntos)*** El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

$$91;\ \ 68;\ \ 39;\ \ 82;\ \ 55;\ \ 70;\ \ 72;\ \ 62;\ \ 54;\ \ 67$$

a) Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio dedicado a escuchar música por un estudiante.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

a) Se trata de una distribución $N(\mu,15)$, $n=10$, $\overline{X}=66$ y $z_{\alpha/2}=1{,}645\Longrightarrow$

$$IC=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(58{,}19707987;73{,}80292012)$$

b)

$$z_{\alpha/2}=1{,}96$$

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow 5=1{,}96\frac{15}{\sqrt{n}}\Longrightarrow n=34{,}5744$$

Luego $n=35$

Opción B

Problema 5.9.4 ***(2 puntos)*** El rendimiento por hectárea de las plantaciones de trigo en cierta región, se supone que es una variable aleatoria con una distribución normal con una desviación típica de 1 tonelada por hectárea. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 64 parcelas con una superficie igual a una hectárea cada una, obteniéndose un rendimiento medio de 6 toneladas.

a) ¿Puede asegurarse que el error de estimación del rendimiento medio por hectárea es menor de 0,5 toneladas, con un nivel de confianza del 98 %? Razónese.

b) ¿Qué tamaño mínimo muestral debe tomarse para que el error de estimación sea menor que 0,5 toneladas con un nivel de confianza del 95 %

Solución:

a)

$$z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325\frac{1}{\sqrt{64}} = 0{,}29$$

El error de estimación es menor de 0.29 toneladas, luego podemos afirmar que, es menor de 0.5 toneladas.

b)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$0{,}5 = 1{,}96\frac{1}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 15{,}3664$$

$$n = 16$$

5.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.9.5 ***(2 puntos)*** Se supone que la calificación en Matemáticas obtenida por los alumnos de una cierta clase es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 puntos. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 10 y se obtiene una suma de sus calificaciones igual a 59,5 puntos.

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la calificación media de la clase.

b) ¿Qué tamaño ha de tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0,5 puntos, con el nivel de confianza del 95 %.

Solución:

a) Se trata de una distribución $N(\mu, 1{,}5)$, $n = 10$, $\overline{X} = 5{,}95$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (5{,}020290367; 6{,}879709632)$$

b)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0{,}5 = 1{,}96\frac{1,5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 34{,}5744$$

Luego $n = 35$

www.yoquieroaprobar.es

Opción B

Problema 5.9.6 ***(2 puntos)*** La duración de la vida de una determinada especie de tortuga se supone que es una variable aleatoria, con distribución normal de desviación típica igual a 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen las siguientes duraciones, en años:

$$46, \quad 38, \quad 59, \quad 29, \quad 34, \quad 32, \quad 38, \quad 21, \quad 44, \quad 34$$

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la vida media de dicha especie de tortugas.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra observada para que el error de la estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 90 %

Solución:

a) Se trata de una distribución $N(\mu, 10)$, $n = 10$, $\overline{X} = 37{,}5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (31{,}30193578; 43{,}69806421)$$

b)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 5 = 1{,}645\frac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 10{,}8241$$

Luego $n = 11$

5.10. Año 2009

5.10.1. Modelo

Opción A

Problema 5.10.1 ***(2 puntos)*** Se supone que el peso de los niños recién nacidos en una cierta región es una variable aleatoria con distribución normal de media 3,25 kg y desviación típica 0,8 kg. Se elige aleatoriamente una muestra de 64 niños recién nacidos en esa región. Sea $\overline{X}$ la media muestral de los pesos observados.

a) ¿Cuáles son la media y la desviación típica de $\overline{X}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de la muestra esté comprendido entre 3,3 kg y 3,5 kg?

Solución:

Tenemos $N(3{,}25, 0{,}8)$, $n = 64$

a) $\overline{X} = 3{,}25$, $\sigma = \dfrac{0{,}8}{\sqrt{64}} = 0{,}1 \Longrightarrow N(3{,}25; 0{,}1)$

b)

$$P(3{,}3 \leq \overline{X} \leq 3{,}5) = P\left(\frac{3{,}3 - 3{,}25}{0{,}1} \leq Z \leq \frac{3{,}5 - 3{,}25}{0{,}1}\right) =$$

$$P(0{,}5 \leq Z \leq 2{,}5) = P(Z \leq 2{,}5) - P(Z \leq 0{,}5) = 0{,}9938 - 0{,}6915 = 0{,}3023$$

Opción B

Problema 5.10.2 ***(2 puntos)*** Se han elegido al azar 10 televisores de un taller de electrónica y se ha anotado el número de horas que se han necesitado para su reparación. Los resultados han sido:

$$7,\ 5,\ 8,\ 2,\ 4,\ 7,\ 4,\ 1,\ 6,\ 6$$

Se supone que el número de horas de reparación de este tipo de televisores es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 horas.

a) Determínese un intervalo de confianza del 90 % para el tiempo medio de reparación.

b) ¿Que tamaño debe tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea 0,5 horas con el mismo nivel de confianza?

Solución:

a)

$$N(\mu;1{,}5)\ \ n=10,\ \ \overline{X}=5,\ \ z_{\alpha/2}=1,645$$

$$IC=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(4{,}21707987;5{,}780292012)$$

b)

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow n=24{,}354225$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n=25$.

5.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.10.3 ***(2 puntos)*** Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una determinada familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 euros. Se ha elegido una muestra aleatoria de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 euros.

a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95 %?

b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?

Solución:

a)

$$N(\mu,55),\quad n=81,\quad z_{\alpha/2}=1{,}96$$

$$P\left(\left|\overline{X}-\lambda\right|\leq 10\right)\geq 0{,}95\Longrightarrow P\left(\left|\overline{X}-\lambda\right|\leq 10\right)=P\left(|Z|\leq\frac{10}{55/\sqrt{81}}\right)=$$

$$P\left(|Z|\leq 1{,}64\right)=0{,}9495\leq 0{,}95$$

No podemos asegurar esa hipótesis.

b)

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow n=116,2084\Longrightarrow n=117$$

Opción B

Problema 5.10.4 ***(2 puntos)*** Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogida cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtiene las siguientes cantidades de agua recogidas cada día (en litros):

$$9,1;\ 4,9;\ 7,3;\ 2,8;\ 5,5;\ 6,0;\ 3,7;\ 8,6;\ 4,5;\ 7,6$$

a) Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95 %.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 98 %.

Solución:

a) $N(\mu, 2)$, $n = 10$, $\overline{X} = 6$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$IC = \left((\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (4{,}76039; 7{,}23961)$$

b) $E = 1$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}325$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 21{,}6225$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 22$.

5.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.10.5 ***(2 puntos)*** Se supone que el tiempo de una conversación en un teléfono móvil se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1,32 minutos. Se desea estimar la media del tiempo de las conversaciones mantenidas con un error inferior o igual en valor absoluto a 0,5 minutos y con un grado de confianza del 95 %.

a) Calcúlese el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar para llevar a cabo dicha estimación mediante la media muestral.

b) Si se supone que la media del tiempo de las conversaciones es de 4,36 minutos y se elige una muestra aleatoria simple de 16 usuarios, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de las conversaciones de la muestra esté comprendido entre 4 y 5 minutos?

Solución:

Tenemos $N(3{,}25, 0{,}8)$, $n = 64$

a) $\sigma = 1,32$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = 5,175$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n = 27$.

b) $N(4,36;1,32) \Longrightarrow \overline{X} \sim N(4,36;0,33)$

$$P(4 \leq \overline{X} \leq 5) = P\left(\frac{4-4,36}{0,33} \leq Z \leq \frac{5-4,36}{0,33}\right) =$$

$$P(-1,09 \leq Z \leq 1,94) = P(Z \leq 1,94) - P(Z \leq -1,09) = 0,8359$$

Opción B

Problema 5.10.6 ***(2 puntos)*** Se supone que la estancia (en días) de un cierto hospital se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 9 días. De una muestra aleatoria simple formada por 20 pacientes, se ha obtenido una media muestral igual a 8 días.

a) Determínese un intervalo de confianza del 95 % para la estancia media de un paciente en dicho hospital.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total inferior o igual a 4 días?

Solución:

a)

$$N(\mu, 9) \;\; n = 20, \;\; \overline{X} = 8, \;\; z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4,0556; 11,9444)$$

b) $E = 2$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 77,79$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n = 78$.

5.11. Año 2010

5.11.1. Modelo

Opción A

Problema 5.11.1 ***(2 puntos)*** Se supone que la duración de una bombilla fabricada por una cierta empresa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 900 horas y desviación típica 80 horas. La empresa vende 1000 lotes de 100 bombillas cada uno. ¿En cuántos lotes puede esperarse que la duración media de las bombillas que componen el lote sobrepase 910 horas?

Solución:

La distribución de la media en un lote:

$$N(900, 80), \quad n = 100 \Longrightarrow N(900, 80/\sqrt{100}) = N(200, 8)$$

$$P(\overline{X} > 910) = P\left(Z > \frac{910-900}{8}\right) =$$

$$1 - P(Z < 1,25) = 1 - 0,8943502263 = 0,1056497736$$

La probabilidad calculada es la de que la media de un lote sobrepase las 910 horas y, como tenemos 1000 lotes, el número de lotes en los que esperamos que se sobrepasen las 910 horas será de $1000 \cdot 0,1056497736 \simeq 105$ lotes

Opción B

Problema 5.11.2 ***(2 puntos)*** La temperatura corporal de cierta especie de aves se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media 40,5°C y desviación típica 4,9°C. Se elige una muestra aleatoria simple de 100 aves de esa especie. Sea $\overline{X}$ la media muestral de las temperaturas observadas.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura media de dicha muestra esté comprendida entre 39,9°C y 41,1°C?

Solución:

a) $N(40{,}5; 4{,}9)$, $n = 100$ entonces $\overline{X}$ se distribuye según una normal $N(40{,}5, 4{,}9/\sqrt{100}) = N(40{,}5; 0{,}49)$ de media 40,5°C y desviación típica 0,49ºC, luego la varianza será de $0,49^2 = 0,2401$°C.

b)

$$P\left(39,9 < \overline{X} < 41,1\right) = P\left(\frac{39,9-40,5}{0,49} < \overline{X} < \frac{41,1-40,5}{0,49}\right) =$$

$$P\left(-1,22 < Z < 1,22\right) = P(Z < 1,22) - P(Z < -1,22) =$$

$$2P(Z < 1,22) - 1 = 0,7775351250$$

5.11.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.11.3 ***(2 puntos)*** Se supone que el tiempo de vida útil en miles de horas (Mh) de un cierto modelo de televisor, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 0,5 Mh. Para una muestra aleatoria simple de 4 televisores de dicho modelo, se obtiene una media muestral de 19,84 Mh de vida útil.

a) Hállese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo de vida útil medio de los televisores de dicho modelo.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto del error de la estimación de la media poblacional mediante la media muestral sea inferior a 0,2 Mh con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Solución:

a)

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(19,84 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{4}}; 19,84 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{4}}\right) = (19,35; 20,33)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96\cdot 0,5}{0,2}\right)^2 = 24,01$$

El tamaño mínimo muestral debe ser de $n = 25$ televisores.

Opción B

Problema 5.11.4 ***(2 puntos)*** Se supone que el tiempo de espera de una llamada a una línea de atención al cliente de una cierta empresa se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 0,5 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 llamadas y se obtiene un tiempo medio de espera igual a 6 minutos.

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de espera de una llamada a dicha línea de atención al cliente.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que debe observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total igual o inferior a 1 minuto?

Solución:

a)

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$\left(6 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{100}}; 6 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{100}}\right) = (5,902; 6,098)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96\cdot 0,5}{0,5}\right)^2 = 3,84$$

El tamaño mínimo muestral debe ser de $n = 4$ llamadas.

5.11.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.11.5 ***(2 puntos)*** Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 320. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media de la distribución normal sea mayor o igual que 50.

b) Determínese el intervalo de confianza del 95 % para la media de la distribución normal, si la media muestral es igual a 4820.

Solución:

$$N(\mu, 320), \quad n = 36$$

a)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{300}{320} = 0,9375$$
$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow$$
$$P(Z < 0,9375) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0,8289 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,3422$$
$$P(|\mu - \overline{X}| > 50) = \alpha = 0,3422 \text{ nivel de significación}$$

b)

$$\overline{X} = 4820, \quad z_{\alpha/2} = 1,96$$
$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4715,47; 4924,53)$$

Opción B

Problema 5.11.6 ***(2 puntos)*** Para estimar la media de una población con distribución normal de desviación típica igual a 5, se ha extraído una muestra aleatoria simple de tamaño 100, con la que se ha obtenido el intervalo de confianza (173,42;175,56) para dicha media poblacional.

a) Calcúlese la media de la muestra seleccionada.

b) Calcúlese el nivel de confianza del intervalo obtenido.

Solución:

$$N(\mu, 5), \quad n = 100, \quad (173,42; 175,56)$$

$$\begin{cases} \overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{5}{10} = 173,42 \\ \\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{5}{10} = 175,56 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X} = 174,49 \\ \\ z_{\alpha/2} = 2{,}14 \end{cases}$$

a) $\overline{X} = 174,49$

b) $z_{\alpha/2} = 2{,}14 \Longrightarrow P(Z < 2{,}14) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0,9838 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,0324 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 1 - 0,0324 = 0,9676.$

$$\text{Nivel de Confianza} = \ 96,76\,\%$$

5.12. Año 2011

5.12.1. Modelo

Opción A

Problema 5.12.1 ***(2 puntos)*** Se supone que el nivel de glucosa en sangre de los individuos de la población (medido en miligramos por decílitro) se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 35 mg/dl. ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que permite garantizar que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ es menor que 20 mg/dl con una probabilidad mayor o igual a 0,98?

Solución:

La distribución de la media es: $N(\mu, 35)$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 16{,}55$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 17$

Opción B

Problema 5.12.2 ***(2 puntos)*** Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica $\sigma = 2$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25 y se obtiene una media muestral igual a 12.

a) Determínese un intervalo de confianza al 90 % para estimar la media de la variable aleatoria.

b) Determínese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 0,1 con un nivel de confianza de al menos el 95 %.

Solución:

a) $N(\mu, 2)$, $n = 25$, $\overline{X} = 12$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (11,342; 12,658)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 1536,64$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 1537$

5.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.12.3 ***(2 puntos)*** Se supone que el tiempo medio diario dedicado a ver TV en una cierta zona se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 5 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 espectadores de TV en dicha zona, obteniéndose que el tiempo medio diario dedicado a ver TV es de 3 horas.

a) Determínese un intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error en la estimación de μ sea menor o igual que 3 minutos, con un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

a) $N(\mu, 15)$, $n = 400$, $\overline{X} = 180$ minutos y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (178,53; 181,47)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 7,51$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 8$

Opción B

Problema 5.12.4 ***(2 puntos)*** Se supone que el precio (en euros) de un refresco se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,09. Se toma una muestra aleatoria simple del precio del refresco en 10 establecimientos y resulta:

$$1,50; \quad 1,60; \quad 1,10; \quad 0,90; \quad 1,00; \quad 1,60; \quad 1,40; \quad 0,90; \quad 1,30; \quad 1,20$$

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Calcúlese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra elegida para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestral y la μ sea menor o igual que 0,10 euros con probabilidad mayor o igual que 0,99.

Solución:

a) $N(\mu; 0{,}09)$, $n = 10$, $\overline{X} = 1{,}25$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1{,}194; 1{,}306)$$

b) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 5{,}37$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 6$

5.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.12.5 ***(2 puntos).*** Se supone que la presión diastólica en una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 98 mm y desviación típica 15 mm. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 9.

a) Calcúlese la probabilidad de que la media muestral sea mayor que 100 mm.

b) Si se sabe que la media muestral es mayor que 100 mm, ¿cuál es la probabilidad de que sea también menor que 104 mm?

Solución:

$$N(98; 15) \;\; n = 9 \Longrightarrow \;\; \overline{X} \equiv N(98; 5)$$

a) $P(\overline{X} \geq 100) = P\left(\dfrac{\overline{X} - 98}{5} \geq \dfrac{100 - 98}{5}\right) = P\left(Z \geq \dfrac{2}{5}\right) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446$

b) Sea $A = \{\overline{X} \leq 104\}$ y sea $B = \{\overline{X} \geq 100\}$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(100 \leq \overline{X} \leq 104)}{P(\overline{X} \geq 100)} = \frac{P(0,40 \leq Z \leq 1,2)}{P(Z \geq 0,40)} =$$

$$\frac{P(Z \leq 1,2) - P(Z \leq 0,40)}{1 - P(Z \leq 0,40)} = \frac{0,8849 - 0,6554}{1 - 0,6554} = \frac{0,2295}{0,3446} = 0,6659$$

Opción B

Problema 5.12.6 ***(2 puntos).*** Para determinar el coeficiente de inteligencia θ de una persona se le hace contestar un conjunto de test y se obtiene la media de sus puntuaciones. Se supone que la calificación de cada test se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media θ y desviación típica 10.

a) Para una muestra aleatoria simple de 9 test, se ha obtenido una media muestral igual a 110. Determínese un intervalo de confianza para θ al 95 %.

b) ¿Cuál es el número mínimo de test que debería realizar la persona para que el valor absoluto del error en la estimación de su coeficiente de inteligencia sea menor o igual que 5, con el mismo nivel de confianza?

Solución:

a) $N(\theta, 10)$, $n = 9$, $\overline{X} = 110$ minutos y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (103,467; 116,534)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 15,3664$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 16$

5.12.4. Reserva

Opción A

Problema 5.12.7 ***(2 puntos).*** Se supone que la altura (en cm) que alcanza la espuma de un cierto detergente para lavadoras durante un lavado estándar se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1,5 *cm*. Una muestra aleatoria simple de 10 lavados de ese tipo ha dado las siguientes alturas de espuma:

$$7;\ \ 4;\ \ 4;\ \ 5;\ \ 7;\ \ 6;\ \ 2;\ \ 8;\ \ 6;\ \ 1$$

a) Determínese un intervalo de confianza del 90 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el valor absoluto del error máximo en la estimación sea de 0,5 *cm* con el mismo nivel de confianza?

Solución:

$$N(\mu; 1, 5), \quad n = 10 \ \ \overline{X} = 5$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4,22; 5,78)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1,645 \cdot 1,5}{0,5}\right)^2 = 24,354 \Longrightarrow n = 25$$

Opción B

Problema 5.12.8 ***(2 puntos).*** Se supone que la estatura de los individuos de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media 170 cm y desviación típica 4 cm.

a) Se extrae de dicha población una muestra aleatoria simple de 16 individuos. Calcúlese $P(X < 167)$.

b) Se extrae de dicha población una muestra aleatoria simple y resulta que $P(X > 172) = 0,0062$. Determínese el tamaño de la muestra extraída.

Solución:

a) $N(\mu;\sigma/\sqrt{n}) \equiv N(170;1)$:

$$P(\overline{X} < 170) = P\left(Z < \frac{167-170}{1}\right) =$$

$$P(Z < -3) = 1 - P(Z < 3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$$

b) $N(\overline{X};\sigma/\sqrt{n}) \equiv N(170;4/\sqrt{n})$:

$$P(\overline{X} > 172) = P\left(Z > \frac{172-170}{4/\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{172-170}{4/\sqrt{n}}\right) =$$

$$1 - 0,0062 = 0,9938 \Longrightarrow \frac{172-170}{4/\sqrt{n}} = 2,5 \Longrightarrow \sqrt{n} = 5 \Longrightarrow n = 25$$

5.13. Año 2012

5.13.1. Modelo

Opción A

Problema 5.13.1 ***(2 puntos)*** Se supone que la concentración de CO_2 en el aire de una determinada región, medida en partes por millón (ppm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 20 ppm.

a) Calcúlese el número mínimo de observaciones necesarias para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 2 ppm con un nivel de confianza mayor o igual que el 95 %.

b) Determínese un intervalo de confianza del 95 % para la concentración media de CO_2 en el aire de la región si la muestra elegida contiene 121 observaciones y la concentración media muestral es igual a 350 ppm. CO_2

Solución:

a) Tenemos $E = 2$, $\sigma = 20$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 384,16$$

Luego $n = 385$.

b) Tenemos $\overline{x} = 350$, $\sigma = 20$, $n = 121$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (346{,}436, 353{,}564)$$

Opción B

Problema 5.13.2 ***(2 puntos)*** Se supone que la tensión de un tipo de línea eléctrica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = 100V$ y desviación típica $\sigma = 10V$. ¿Cuál es la distribución de la tensión media de cuatro líneas eléctricas de ese tipo, tomadas al azar y con independencia?

Solución:

$$\overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(100, \frac{10}{\sqrt{4}}\right) = N(100, 5)$$

5.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.13.3 ***(2 puntos)*** Se supone que el peso en kilogramos de los alumnos de un colegio de Educación Primaria el primer día del curso se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2,8 kg. Una muestra aleatoria simple de 8 alumnos de ese colegio proporciona los siguientes resultados (en kg):

$$26 \;\; 27,5 \;\; 31 \;\; 28 \;\; 25,5 \;\; 30,5 \;\; 32 \;\; 31,5.$$

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el peso medio de los alumnos de ese colegio el primer día de curso.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,9 kg con un nivel de confianza del 97 %.

Solución:

a) Tenemos $n = 8$, $\overline{X} = 29$, $\sigma = 2,8$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (27{,}372; 30{,}628)$$

b) Tenemos $E = 0{,}9$, $\sigma = 20$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}17$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 45{,}577$$

Luego $n = 46$.

Opción B

Problema 5.13.4 ***(2 puntos)*** Se supone que el gasto que hacen los individuos de una determinada población en regalos de Navidad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (251,6 ; 271,2) para μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ. Calcúlese el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) $N(\mu, 45)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$IC = (251{,}6; 271{,}2) = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X} - E = 251{,}6 \\ \overline{X} + E = 271{,}2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X} = 261{,}4 \\ E = 9{,}8 \end{cases}$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 81$$

b) $n = 64$, $z_{\alpha/2} = 1{,}645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9{,}253$$

5.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.13.5 ***(2 puntos)*** El consumo anual de carne en un cierto país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal con desviación típica 16 kg.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 residentes y se obtiene un consumo medio de 42 kg de carne al año. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el consumo anual medio de carne en dicho país.

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener la muestra para garantizar, con el mismo nivel de confianza, que el error de la estimación del consumo anual medio sea menor que 1 kg?

Solución:

a) Tenemos $n = 64$, $\overline{X} = 42$, $\sigma = 16$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (38{,}71; 45{,}29)$$

b) Tenemos $E = 1$, $\sigma = 16$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 692{,}34$$

Luego $n = 693$.

Opción B

Problema 5.13.6 ***(2 puntos)*** Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media en una muestra aleatoria simple de tamaño 100 elementos.

a) Determínese el valor de σ sabiendo que $I = (125, 2; 144, 8)$ es un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional μ.

b) Si $\sigma = 20$, calcúlese la probabilidad $P(1 < \mu - \overline{X} < 4)$.

Solución:

a) $N(\mu,\sigma)$, $n=100$, $z_{\alpha/2}=1{,}96$, $E=\dfrac{144{,}8-125{,}2}{2}=9{,}8$:

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 9{,}8=1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{100}} \Longrightarrow \sigma=50$$

b) $P(1<\mu-\overline{X}<4)=P(0,5<Z<2)=P(Z<2)-P(Z<0{,}5)=0,286$

5.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.13.7 ***(2 puntos)*** La duración en kilómetros de los neumáticos de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3000 kilómetros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 neumáticos y se obtiene una media muestral de 48000 kilómetros. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.

b) Calcúlese el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor o igual a 1000 kilómetros con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Solución:

a) Tenemos $n=100$, $\overline{X}=48000$, $\sigma=3000$ y $z_{\alpha/2}=1{,}645$

$$IC=\left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(47506{,}5;48493{,}5)$$

b) Tenemos $E=1000$, $\sigma=3000$ y $z_{\alpha/2}=1{,}96$

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n=34{,}577$$

Luego $n=35$.

Opción B

Problema 5.13.8 ***(2 puntos)*** El tiempo de espera para ser atendido en un cierto establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 121.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea mayor que 0,5 minutos.

b) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ, si la media de la muestra es igual a 7 minutos.

Solución:

a)

$$P(|\overline{X}-\mu|\geq 5)=P(|Z|\geq\frac{5}{3/11})=2(1-P(Z\leq 1{,}83))=0{,}0672$$

b) $N(\mu,3)$, $z_{\alpha/2}=1{,}96$:

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0{,}5345454545 \quad IC=(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=(6{,}465;7{,}535)$$

5.14. Año 2013

5.14.1. Modelo

Opción A

Problema 5.14.1 ***(2 puntos)*** El peso en gramos del contenido de las cajas de cereales de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 5 gramos. Se toma una muestra de tamaño 144.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor de 1 gramo.

b) Si la media muestral obtenida es igual a 499,5 gramos, determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el peso medio de ese tipo de cajas de cereales.

Solución:

a) Tenemos $E = 1$, $\sigma = 5$ y $n = 144$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = 2{,}4$$

$$P(Z < 2{,}4) = 0{,}9918$$

b) Tenemos $\overline{x} = 499{,}5$, $\sigma = 5$, $n = 144$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (498{,}8146, 500{,}1854)$$

Opción B

Problema 5.14.2 ***(2 puntos)*** La altura de los árboles de una determinada comarca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y varianza 25 cm. Se toma una muestra aleatoria simple y, para un nivel de confianza del 95 %, se construye un intervalo de confianza para la media poblacional cuya amplitud es de 2,45 cm.

a) Determínese el tamaño de la muestra seleccionada.

b) Determínese el límite superior y el inferior del intervalo de confianza si la altura media para la muestra seleccionada fue de 170 cm.

Solución:

$$N(\mu, 5); \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96; \quad E = \frac{2{,}45}{2} = 1{,}225$$

a)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq \left(\frac{1{,}96 \cdot 5}{1{,}225}\right)^2 = 64 \Longrightarrow n = 64$$

b) Tenemos $\overline{x} = 170$, $E = 1{,}225$ y $n = 144$

$$IC = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (168{,}775; 171{,}225)$$

5.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.14.3 ***(2 puntos)*** El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por el grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil con la tarifa AA se puede aproximar por una distribución normal con media 3,5 Mb y una desviación típica igual a 1,4 Mb. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 24.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior de 3,37 Mb?.

b) Supóngase ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestral toma el valor de 3,42 Mb. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población.

Solución:

$$N(3{,}5; 1{,}4),\ \ n = 24 \longrightarrow N\left(3{,}5; \frac{1{,}4}{\sqrt{24}}\right) = N(3{,}5; 0{,}28)$$

a)

$$P(\overline{X} < 3{,}37) = P\left(Z < \frac{3{,}37 - 3{,}5}{0{,}28}\right) = P(Z < -0{,}46) = 1 - P(Z < 0{,}46) = 0{,}3228$$

b) $N(\mu, 1{,}4)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $\overline{X} = 3{,}42$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,56$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (2{,}86; 3{,}98)$$

Opción B

Problema 5.14.4 ***(2 puntos)*** La duración en horas de un determinado tipo de bombillas se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1940 h. Se toma una muestra aleatoria simple.

a) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada $\overline{X}$ de esas bombillas sea inferior a 100 h?

b) Si el tamaño de la muestra es 225 y la duración media observada $\overline{X}$ es de 12415 h, obténgase un intervalo de confianza al 90 % para μ.

Solución:

$$N(\mu, 1940);\ \ z_{\alpha/2} = 1{,}96;\ \ E = \frac{2{,}45}{2} = 1{,}225$$

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 1445{,}82 \Longrightarrow n = 1446$$

b) $n = 225$, $\overline{X} = 12415$, $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 212{,}75 \Longrightarrow IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (12202{,}25; 12627{,}75)$$

5.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.14.5 ***(2 puntos)*** La altura en centímetros de los individuos de una población se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 20 cm.

a) En una muestra aleatoria simple de 500 individuos se ha obtenido una altura media de 174 cm. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para μ

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ; al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 5 cm?

Solución:

$$N(\mu; 20)$$

a) $n = 500$, $\overline{X} = 174$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{20}{\sqrt{100}} = 1,753$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (172,247; 175,753)$$

b) $E = 2,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$2,5 = 1,645\frac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,645 \cdot 20}{2,5}\right)^2 = 173,1856 \Longrightarrow n = 174$$

Opción B

Problema 5.14.6 ***(2 puntos)*** Una envasadora empaqueta naranjas en bolsas. Para realizar un control de calidad, se tomó una muestra del peso real de 8 bolsas y se obtuvieron los siguientes resultados:

$$2,4 \quad 1,8 \quad 2 \quad 2,4 \quad 2,2 \quad 2 \quad 1,6 \quad 2,2$$

El peso de las bolsas que salen de esa planta de envasado se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 0,5 kg.

a) Obténgase un intervalo de confianza, al 95 %, para la media poblacional μ

b) Hállese el error máximo que se cometería en la estimación de μ usando el intervalo de confianza anterior.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 2,075$, $\sigma = 0,5$, $n = 8$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1,729; 2,421)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,5}{\sqrt{8}} = 0,346$$

b) $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,346$

5.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.14.7 ***(2 puntos)*** El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0,4 años.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 400 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1,75 años. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0,02 años con un nivel de confianza del 90 % .

Solución:

$$N(\mu; 0,4)$$

a) $n = 49,\ \overline{X} = 1,75 \longrightarrow N\left(1,75; \frac{0,4}{7}\right) = N(1,75; 0{,}057)$

$$NC = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,0392 \Longrightarrow IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (1,7108; 1,7892)$$

b) $N(\mu, 1{,}4)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $\overline{X} = 3{,}42$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,02 = 1{,}645\frac{0,4}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n > 1082,41$$

$$n = 1083$$

Opción B

Problema 5.14.8 ***(2 puntos)*** Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 210. Se toma una muestra aleatoria simple de 64 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 22.

b) Determínese un intervalo de confianza del 99 % para μ, si la media muestral es igual a 1532.

Solución:

$$N(\mu, 210); \quad n = 64$$

a)

$$P(|\overline{X} - \mu| \geq 22) = P\left(\frac{|\overline{X} - \mu|}{210/8} \geq \frac{22}{210/8}\right) =$$

$$2P(Z \geq 0,84) = 2(1 - P(Z \leq 0,84)) = 2(1 - 0,7995) = 0,401$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 67,59 \Longrightarrow IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1464,41; 1599,59)$$

5.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.14.9 ***(2 puntos)*** La longitud alcanzada por un lanzador de disco se puede aproximar por una variable aleatoria normal con media μ desconocida y desviación típica igual a 2 metros. El lanzador hace 10 lanzamientos en una prueba atlética. Considérense esos 10 lanzamientos como una muestra aleatoria simple.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la distancia media obtenida por el lanzador en los 10 intentos y μ sea menor que 0, 75 metros.

b) Si la media de las distancias alcanzadas en los lanzamientos durante la prueba ha sido de 65 metros, determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la distancia media μ de los lanzamientos de este atleta.

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $n = 10$, $\overline{X} \approx N\left(\mu; \dfrac{2}{\sqrt{10}}\right) = N(\mu; 0, 63)$

$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 0, 75) = P\left(-\frac{0, 75}{2/\sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{0, 75}{2/\sqrt{10}}\right) =$$

$$P(-1, 19 \leq Z \leq 1, 19) = P(Z \leq 1, 19) - P(Z \leq -1, 19) =$$

$$2P(Z \leq 1, 19) - 1 = 2 \cdot 0, 89 - 1 = 0, 78$$

b) $\overline{X} = 65$, $E = z_{\alpha/2} = 1, 96$ y $n = 10$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1, 96\frac{2}{\sqrt{10}} = 1, 24$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (63, 76; 66, 24)$$

Opción B

Problema 5.14.10 ***(2 puntos)*** El peso de las lubinas de un año producidas en una piscifactoría se puede aproximar por una distribución normal con media 600 gramos y desviación típica 100 gramos. Las lubinas de un año están en un recinto aislado.

a) Considérese una muestra aleatoria simple de 20 lubinas de un año en la piscifactoría, calcúlese la probabilidad de que su peso medio sea superior a 650 gramos.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 lubinas de un año. Hállese el nivel de confianza con el que se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la media: (580,4; 619,6).

Solución:

$$N(600; 100)$$

a) Tenemos $n = 20$ y $\overline{X} \approx N\left(600; \dfrac{100}{\sqrt{20}}\right) = N(600; 22,36)$

$$P(\overline{X} \geq 650) = P\left(Z \geq \frac{650 - 600}{100/\sqrt{20}}\right) = P(Z \geq 2,24) = 1 - P(Z \leq 2,24) =$$

$$1 - 0,9875 = 0,0125$$

b) Tenemos $n = 100$ y $E = \dfrac{619,6 - 580,4}{2} = 19,6$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 19,6 = z_{\alpha/2}\frac{100}{\sqrt{100}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %

5.15. Año 2014

5.15.1. Modelo

Opción A

Problema 5.15.1 ***(2 puntos)*** El contenido en alquitrán de una determinada marca de cigarrillos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 4 mg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 22 mg. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el contenido medio de alquitrán en un cigarrillo de la citada marca.

b) Determínese el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mg, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 22$, $\sigma = 4$, $n = 20$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (20,528; 23,471)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{4}{\sqrt{20}} = 1,4713$$

b) $E = 0,5$, $\sigma = 4$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$0,5 = 1,645\frac{5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 173,18$$

Luego $n = 174$.

Opción B

Problema 5.15.2 ***(2 puntos)*** El nº de kilómetros recorridos en un día determinado por un conductor de una empresa de transportes se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media μ.

a) Se obtuvo una muestra aleatoria simple, con los siguientes resultados:

$$40 \quad 28 \quad 41 \quad 102 \quad 95 \quad 33 \quad 108 \quad 20 \quad 64$$

Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ si la variable aleatoria X tiene una desviación típica igual a 30 km.

b) ¿Cuál sería el error de estimación de μ usando un intervalo de confianza con un nivel del 90 % , construido a partir de una muestra de tamaño 4, si la desviación típica de la variable aleatoria X fuera de 50 km?

Solución:

$$N(\mu, 5); \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96; \quad E = \frac{2{,}45}{2} = 1{,}225$$

a) $n = 9$, $\overline{x} = 59$, $\sigma = 30$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{30}{\sqrt{9}} = 19{,}6$$

$$IC = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (39{,}4, 78{,}6)$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1{,}645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645\frac{50}{\sqrt{4}} = 41{,}125$$

5.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.15.3 ***(2 puntos)*** La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada colonia de gusanos de seda se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 48 gusanos de seda y se obtiene una media muestral igual a 36 mm. Determínese un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los gusanos de seda con un nivel de confianza del 95 %.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 1 mm con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 36$, $\sigma = 3$, $n = 48$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (35,151; 36,849)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{3}{\sqrt{48}} = 0,849$$

b) $E = 1$, $\sigma = 3$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$1 = 1,645\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 24,35$$

Luego $n = 25$.

Opción B

Problema 5.15.4 ***(2 puntos)*** El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza $(16,33; 19,27)$ para estimar μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

a) $(16,33; 19,27) \Longrightarrow \overline{x} = 17,80$, $E = 1,47$ como $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,47 = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 16$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $n = 64$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{3}{\sqrt{64}} = 0,735$$

5.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.15.5 ***(2 puntos)*** La cantidad de azúcar, en gramos, del contenido de las botellas de un litro de una conocida bebida refrescante se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 2 gramos.

a) Se ha realizado un análisis de control de los contenidos de una muestra aleatoria simple de 100 de esas botellas y se ha obtenido una cantidad media de azúcar igual a 70 gramos. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ, al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 2 gramos?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 70$, $\sigma = 2$, $n = 100$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (69,61; 70,39)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{2}{\sqrt{100}} = 0,392$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$ y $E = 1$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,645\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(1,645 \cdot \frac{2}{1}\right)^2 = 10,82 \Longrightarrow n = 11$$

Opción B

Problema 5.15.6 ***(2 puntos)*** El peso, en gramos, del contenido de las cajas de una conocida marca de cereales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 20 de esas cajas de cereales para realizar un estudio y la media de los pesos de sus contenidos ha sido $\overline{x} = 500$. Calcúlese un intervalo de confianza del 95 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 500$, calcúlese la probabilidad de que la media muestral de los pesos de una muestra aleatoria simple de 20 cajas sea inferior a 495 gramos.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 500$, $\sigma = 10$, $n = 20$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (495,62; 504,38)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{20}} = 4,38$$

b) $\mu = 500$, $n = 20$ y $\overline{X} \approx N\left(500; \frac{10}{\sqrt{20}}\right) = N(500; 2,236)$:

$$P(\overline{X} \leq 495) = P(Z \leq \frac{495 - 500}{2,236}) =$$

$$P(Z \leq -2,24) = 1 - P(Z \leq 2,24) = 1 - 0,9875 = 0,0125$$

5.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.15.7 ***(2 puntos)*** La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 16$ cm.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 625 individuos obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 169$ cm. Hállese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 4 cm, con un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 169$, $\sigma = 16$, $n = 625$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (167,512; 170,488)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{16}{\sqrt{625}} = 1,488$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$4 = 1,645\frac{16}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 43,2964 \Longrightarrow n = 44$$

Opción B

Problema 5.15.8 ***(2 puntos)*** El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ, con un error máximo de 3,290 y un nivel de confianza del 90 %, supera en 7500 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95 % y el error máximo fuera de 7,840.
Exprésense los tamaños muéstrales en función de la desviación típica σ y calcúlense la desviación típica de la población y los tamaños muéstrales respectivos.
Nota: Utilícese $z_{0,05} = 1,645$.
Solución:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$3,290 = 1,645\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} \Longrightarrow n_1 = 0,25\sigma^2$$

$$7,840 = 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} \Longrightarrow n_2 = 0,0625\sigma^2$$

$$n_1 = n_2 + 7500 \Longrightarrow 0,25\sigma^2 = 0,0625\sigma^2 + 7500 \Longrightarrow \sigma = 200$$

Luego $n_1 = 0,25 \cdot 40000 = 10000$ y $n_2 = 0,0625 \cdot 40000 = 2500$.

5.15.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.15.9 ***(2 puntos)*** La capacidad vital forzada es una medida para calcular el volumen de los pulmones de las personas adultas que se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica 1 litro.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 144 personas adultas que dieron una media de capacidad vital forzada de 4 litros. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Cuál es el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral obtenido a partir de una muestra de tamaño 81, con un nivel de confianza del 99 % ?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 4$, $\sigma = 1$, $n = 144$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (3,84; 4,16)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1}{\sqrt{144}} = 0,16$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{1}{\sqrt{81}} = 0,286$$

Opción B

Problema 5.15.10 ***(2 puntos)*** El peso en kilogramos de la cabeza humana en adultos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 0, 75 kilogramos.

a) Una muestra aleatoria simple de 16 individuos a los que se les ha realizado una densitometría, prueba diagnóstica que permite medir el peso de la cabeza, proporcionó una media muestral de 5,137 kilogramos. Determínese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) ¿Cuántas densitometrías como mínimo deben realizarse para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 100 gramos, con el mismo nivel de confianza del 98 %?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 5,137$, $\sigma = 0,75$, $n = 16$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (4,701; 5,573)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{0,75}{\sqrt{16}} = 0,436$$

b) $E = 0,1$ kg

$$0,1 = 2,325\frac{0,75}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,325 \cdot 0,75}{0,1}\right)^2 = 304,066 \Longrightarrow n = 305$$

5.16. Año 2015

5.16.1. Modelo

Opción A

Problema 5.16.1 ***(2 puntos)*** El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 1,2 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. Calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6,6 kW, si $\mu = 6,3kW$.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza $(6,1; 6,9)$ para la media del consumo familiar diario.

Solución:

a) $\overline{X} \approx N\left(6,3; \frac{1,2}{\sqrt{50}}\right) = N(6,3; 0,17)$:
$P(6 < \overline{X} < 6,6) = P\left(\frac{6-6,3}{0,17} < Z < \frac{6,6-6,3}{0,17}\right) = P(-1,77 < Z < 1,77) = 0,9232.$

b) $2z_{\alpha/2}\frac{1,2}{\sqrt{50}} = 6,9 - 6,1 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,36$ Luego el nivel de confianza es del 98 %.

Opción B

Problema 5.16.2 ***(2 puntos)*** Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

$$290 \quad 275 \quad 290 \quad 325 \quad 285 \quad 365 \quad 375 \quad 310 \quad 290 \quad 300$$

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34,5 días.

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

$$N(\mu; 34{,}5)$$

a) $n = 10$, $\overline{x} = 310{,}5$, $\sigma = 34,5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{34{,}5}{\sqrt{10}} = 21{,}383$$

$$IC = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (289{,}2, 331{,}88)$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{34{,}5}{\sqrt{n}} = 10 \Longrightarrow n \geq 45{,}725 \Longrightarrow n = 46$$

5.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.16.3 ***(2 puntos)*** El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250$ ms.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(701; 799)$, expresado en ms, para μ con un nivel del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80 %.

Solución:

a) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$ e $IC = (701; 799) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - E = 701 \\ \overline{X} + E = 799 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 750 \\ E = 49 \end{array} \right.$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 49 = 1,96\frac{250}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 100$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,285$;

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,285\frac{250}{\sqrt{25}} = 64,25$$

Opción B

Problema 5.16.4 ***(2 puntos)*** La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido $\overline{x} = 8000h$. Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral este comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que $\mu = 8100h$?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 8000$, $\sigma = 1000$, $n = 81$ y $z_{\alpha/2} = 2,575$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (7713,89; 8286,11)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{1000}{\sqrt{81}} = 286,11$$

b) $\overline{X} \approx N\left(8100, \dfrac{1000}{\sqrt{100}}\right) = N(8100; 100)$

$$P(7904 \leq \overline{X} \leq 8296) = P\left(\frac{7904 - 8100}{100} \leq Z \leq \frac{8296 - 8100}{100}\right) =$$

$$P(-1,96 \leq Z \leq 1,96)) = P(Z \leq 1,96) - P(Z \leq -1,96) =$$

$$P(Z \leq 1,96) - (1 - P(Z \leq 1,96)) = 2P(Z \leq 1,96) - 1 = 0,95$$

5.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.16.5 ***(2 puntos)*** El consumo de agua, medido en litros, en una ducha puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 10$ litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 duchas, obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 100$ litros. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar μ mediante la media muestral, el error cometido sea menor que 2 litros, con un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 100$, $\sigma = 2$, $n = 25$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (96,08; 103,92)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{25}} = 3,92$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$ y $E = 2$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2 = 2,575\frac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(2,575 \cdot \frac{10}{2}\right)^2 = 165,77 \Longrightarrow n = 166$$

Opción B

Problema 5.16.6 ***(2 puntos)*** El nivel de colesterol total en sangre en adultos de 50 años, medido en miligramos por decilitro (mg/dl), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 20mg/dl$.

a) A partir de una muestra aleatoria simple se obtiene el intervalo de confianza $(191,2; 210,8)$, expresado en mg/dl, para estimar μ con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra considerada.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100. Calcúlese la amplitud del intervalo de confianza al 98 % para μ.

Solución:

a) $\overline{X} = \dfrac{191,2 + 210,8}{2} = 201$, $E = \dfrac{210,8 - 191,2}{2} = 9,8$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 9{,}8 = 1,96\frac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 20}{9,8}\right)^2 = 16$$

b) $n = 100$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$:
$E = 2,325\dfrac{20}{100} = 4,65 \Longrightarrow$ la amplitud será de 9,3.

5.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.16.7 ***(2 puntos)*** La cantidad de fruta, medida en gramos, que contienen los botes de mermelada de una cooperativa con producción artesanal se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica de 10 gramos.

a) Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 botes de mermelada, y la cantidad total de fruta que contenían fue de 16.000 gramos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la media μ.

b) A partir de una muestra aleatoria simple de 64 botes de mermelada se ha obtenido un intervalo de confianza para la media μ con un error de estimación de 2, 35 gramos. Determínese el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

a) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$,n=100 y $\overline{X} = 160$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{10} = 1,96$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (160 - 1,96; 160 + 1,96) = (158,04; 161,96)$$

b) $n = 64$ y $E = 2,35$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,35 = z_{\alpha/2}\frac{10}{8} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,88$$

$$P(Z \leq 1,88) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9699 \Longrightarrow \alpha = 0,0602$$

El nivel de confianza será $1 - \alpha = 1 - 0,0602 = 0,9398$ del 93,98 %.

Opción B

Problema 5.16.8 ***(2 puntos)*** En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medido en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

a) Determínese el mínimo tamaño muestral necesario para que al estimar la media del gasto familiar en gas natural, μ, mediante un intervalo de confianza al 95 %, el error máximo cometido sea inferior a 15 euros.

b) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ, es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 81 familias, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral,$\overline{X}$, sea superior a 230 euros?

Solución:

a) Tenemos $E = 15$, $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq \left(\frac{1,96 \cdot 75}{15}\right)^2 = 96,04 \Longrightarrow n = 97$$

b) Tenemos $\mu = 250$ y $n = 81 \Longrightarrow N\left(\overline{X}; \frac{75}{9}\right)$:

$$P(\overline{X} \geq 230) = P\left(Z \geq \frac{230 - 250}{75/9}\right) =$$

$$P(Z \geq -2,4)) = 1 - P(Z \leq -2,4) = P(Z \leq 2,4) = 0,9918$$

5.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.16.9 ***(2 puntos)*** La producción por hectárea, medida en kg/ha (kilogramos por hectárea) del olivar de alta densidad en cultivo intensivo de Córdoba se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 kg/ha.

a) A partir de una muestra aleatoria simple de 400 parcelas de una hectárea se ha obtenido $(9917,75; 10082,25)$ como intervalo de confianza para la media μ, expresado en kg/ha. Determínese la media de la muestra y el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

b) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 98 % tenga de amplitud a lo sumo 50 kg/ha.

Solución:

a) $\begin{cases} \overline{X} - E = 9917,75 \\ \overline{X} + E = 10082,25 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X} = 10000 \\ E = 82,25 \end{cases}$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 82,25 = z_{\alpha/2}\frac{1000}{\sqrt{400}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$p(Z \leq 1,645) = 0,9495 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,1$$

Luego el nivel de confianza es del 90 %.

b) $z_{\alpha/2} = 2,325$, $2E = 50 \Longrightarrow E = 25$:
$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 25 = 2,325\dfrac{1000}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\dfrac{2,325 \cdot 1000}{25}\right)^2 = 8649$
Luego $n = 8649$.

Opción B

Problema 5.16.10 ***(2 puntos)*** El peso, en gramos, del contenido de las bolsas de patatas fritas de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 50 de esas bolsas de patatas y la media de pesos de sus contenidos ha sido de $\overline{X} = 100$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 100$ gramos, calcúlese la probabilidad de que el total de los pesos de los contenidos de una muestra aleatoria simple de 25 bolsas sea menor o igual que 2625 gramos.

Solución:

a) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1,645$,n=100 y $\overline{X} = 160$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{10}{\sqrt{50}} = 2,326$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (100 - 2,326; 100 + 2,326) = (97,674; 102,326)$$

b) $\mu = 100$,$n = 25$ y $\overline{X} = 2625/25 = 105$:
$P(\overline{X} \leq 105) = P\left(Z \leq \dfrac{105 - 100}{10/\sqrt{25}}\right) = P(Z \leq 2,5) = 0,9938$

5.17. Año 2016

5.17.1. Modelo

Opción A

Problema 5.17.1 ***(2 puntos)*** El tiempo diario que los adultos de una determinada ciudad dedican a actividades deportivas, expresado en minutos, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos.

a) Para una muestra aleatoria simple de 250 habitantes de esa ciudad se ha obtenido un tiempo medio de dedicación a actividades deportivas de 90 minutos diarios. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe de tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 1 minuto con el mismo nivel de confianza del 90 %?

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 1,64$, $\overline{X} \approx N\left(90; \frac{20}{\sqrt{250}}\right) = N(90; 1,265)$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,64\frac{20}{\sqrt{250}} = 2,07$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (87,93; 92,07)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,64$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,64\frac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 1075,85 \Longrightarrow n = 1076$$

Opción B

Problema 5.17.2 ***(2 puntos)*** El precio (en euros) del metro cuadrado de las viviendas de un determinado municipio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 650$euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza (2265,375; 2424,625) para μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 225. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral con un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

$$N(\mu; 650)$$

a) $\sigma = 650$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$\begin{cases} \overline{X} - E = 2265,375 \\ \overline{X} + E = 2424,625 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X} = 2345 \\ E = 79,625 = 1,96\frac{650}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 256 \end{cases}$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 2,57$:

$$E = 2,57\frac{650}{\sqrt{225}} = 111,367$$

5.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.17.3 ***(2 puntos)*** La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas,$\overline{X}$, sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 5$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{50}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n > 384,16$$

$$n = 385$$

b) $n = 25$, $\mu = 950$: $\overline{X} \approx N\left(950; \frac{50}{\sqrt{25}}\right) = N(950; 10)$

$$P(\overline{X} \leq 940) = P\left(Z \leq \frac{940 - 950}{10}\right) = P(Z \leq -1) =$$

$$1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

Opción B

Problema 5.17.4 ***(2 puntos)*** El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\overline{X} = 70$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.

Solución:

$$N(\mu; 650)$$

a) $\sigma = 5$, $n = 25$, $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $\overline{X} = 70$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{5}{\sqrt{25}} = 1,96$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (68,04; 71,96)$$

b) $\mu = 70$, $n = 12 \Longrightarrow 855/12 = 71,25$ la probabilidad pedida sería

$$P\left(\overline{X} \geq 71,25\right) = P\left(Z \geq \frac{71,25 - 70}{5/\sqrt{12}}\right) = P\left(Z \geq 0,87\right) = 1 - P\left(Z \leq 0,87\right) =$$

$$1 - 0,8078 = 0,1922$$

5.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.17.5 ***(2 puntos)*** El peso en kilogramos (kg) de los recién nacidos en 2014 en cierta ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 0,60$ kg.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100 y se obtiene un peso medio para los recién nacidos de esa ciudad de $\overline{X} = 3,250$ kg. Determínese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) Determínese el tamaño mínimo de la muestra aleatoria simple para que el error cometido en la estimación de μ, con un nivel de confianza del 95 %, sea a lo sumo de 0,2 kg.

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 2,325$, $n = 100$ y $\overline{X} = 3,25$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{0,6}{\sqrt{100}} = 1,325$$
$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} - E) = (3,1105; 3,3895)$$

b) $E = 0,2$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$0,2 = 1,96\frac{0,6}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 34,5744 \Longrightarrow n = 35$$

Opción B

Problema 5.17.6 ***(2 puntos)*** La distancia diaria recorrida, en kilómetros (km), por un taxi en una gran ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 16$ km.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 taxis y se obtiene el intervalo de confianza (159; 165). Determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

b) Si la media de la distancia recorrida fuera $\mu = 160$ km, y se toma una muestra aleatoria simple de 64 taxis, calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, sea mayor que 156 km.

Solución:

$$N(\mu; 650)$$

a) $\sigma = 16$, $n = 81$ y $IC = (159; 165)$

$$\begin{cases} \overline{X} - E = 159 \\ \overline{X} + E = 165 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X} = 162 \\ E = 3 \end{cases}$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3 = z_{\alpha/2}\frac{16}{\sqrt{81}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,6875$$
$$P(Z \leq 1,69) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9545 \Longrightarrow$$
$$\alpha = 0,091 \Longrightarrow NC = 1 - 0,091 = 0,909 = 90,9\,\%$$

b) $\mu = 160$, $n = 64$, $\overline{X} \approx N\left(160, \dfrac{16}{\sqrt{64}}\right) = N(160, 2)$

$$P(\overline{X} \geq 156) = P\left(Z \geq \frac{156 - 160}{2}\right) =$$

$$P(Z \geq -2) = 1 - P(Z \leq -2) = 1 - (1 - P(Z \leq 2)) = P(Z \leq 2) = 0,9772$$

5.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.17.7 ***(2 puntos)*** El tiempo, en minutos, que los empleados de unos grandes almacenes tardan en llegar a su casa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 empleados y su media muestral es $\overline{X} = 30$ minutos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 99 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 minutos?

Solución:

a) $n = 64$, $\overline{X} = 30$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (28,775; 31,225)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{5}{\sqrt{64}} = 1,225$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$ y $E = 5$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{5}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq 6,63$$

$$n = 7$$

Opción B

Problema 5.17.8 ***(2 puntos)*** El tiempo, en meses, que una persona es socia de un club deportivo, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 9$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 personas que han sido socias de ese club y se obtuvo una estancia media de $\overline{X} = 8'1$ meses. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 144 personas se ha obtenido un intervalo de confianza (7'766; 10'233) para μ, determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 9)$$

a) $\sigma = 9$, $n = 100$, $z_{\alpha/2} = 1,645$ y $\overline{X} = 8,1$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{9}{\sqrt{100}} = 1,4805$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (6,6195; 9,5805)$$

b) $n = 144$ e $IC = (7,766; 10,233) \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \overline{X} - E = 7,766 \\ \overline{X} + E = 10,233 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X} = 8,9995 \\ E = 1,2335 \end{cases}$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1,2335 \cdot \sqrt{144}}{9} = 1,645$$

Por el apartado anterior corresponde a un nivel de confianza del 90 %

5.18. Año 2017

5.18.1. Ordinaria

Opción A

Problema 5.18.1 ***(2 puntos)*** El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,9 kg.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue $x = 7,8$ kg. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99,2 % para μ.

b) Determínese el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 0,2 kg.

Solución:

a) $\sigma = 0,9$, $n = 324$, $z_{\alpha/2} = 2,65$ y $\overline{X} = 7,8$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,65\frac{0,9}{\sqrt{324}} = 0,1325$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (7,6675; 7,9325)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 0,1$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,9}{\sqrt{n}} = 0,1 \Longrightarrow n \geq 311,1696$$

$$n = 312$$

Opción B

Problema 5.18.2 ***(2 puntos)*** El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ T. Se toma una muestra aleatoria simple de 484 contenedores.

a) Si la media de la muestra es $\overline{x} = 25,9$ T, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 23$ T. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000 T.

Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $\sigma = 3$, $n = 484$, $z_{\alpha/2} = 1,645$ y $\overline{X} = 25,9$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{3}{\sqrt{484}} = 0,2243$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (25,676; 26,9124)$$

b) $\mu = 23$, $n = 484 \Longrightarrow \overline{X} = 11000/484 = 22,73$ la probabilidad pedida sería

$$P\left(\overline{X} \leq 22,73\right) = P\left(Z \geq \frac{22,73 - 23}{3/\sqrt{484}}\right) = P\left(Z \leq -2\right) = 1 - P\left(Z \leq 2\right) =$$

$$1 - 0,9772 = 0,0228$$

5.18.2. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.18.3 ***(2 puntos)*** La producción diaria de cemento, medida en toneladas, de una factoría cementera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 9$ toneladas.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 2 toneladas.

b) Se toman los datos de producción de 16 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\overline{X}$, sea menor o igual a 197,5 toneladas si sabemos que $\mu = 202$ toneladas.

Solución:

$$N(\mu; 9)$$

a) $E = 1$ (la mitad de la amplitud del intervalo de confianza) y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{9}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq (1,96 \cdot 9)^2 = 311,1696 \Longrightarrow n = 312.$$

b) $n = 16$ y $\mu = 202 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(202; 2,25)$

$$P(\overline{X} \leq 197,5) = P\left(Z \leq \frac{197,5 - 202}{2,25}\right) =$$

$$P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Opción B

Problema 5.18.4 ***(2 puntos)*** El peso, en gramos (gr), de la bandeja de salmón crudo que se vende en una gran superficie, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 25$ gr. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 10 bandejas.

a) Si la media muestral de los pesos ha sido $\overline{X} = 505$ gr, calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 500$ gr. Calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 10 bandejas sea mayor o igual a 5030 gr.

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 2,575$, $n = 10$ y $\overline{X} = 505$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{25}{\sqrt{10}} = 20,357$$
$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} - E) = (484,643; 525,357)$$

b) $\mu = 500$ y $\overline{X} = \dfrac{5030}{10} = 503$:

$$P(\overline{X} \geq 503) = P\left(Z \geq \frac{503 - 500}{25/\sqrt{10}}\right) = P(Z \geq 0,38) = 1 - P(Z \leq 0,38) =$$
$$1 - 0,6480 = 0,3520$$

5.18.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.18.5 ***(2 puntos)*** El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ, y desviación típica $\sigma = 24$ horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16. Calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral del tiempo,$\overline{X}$, supere las 48 horas, si $\mu = 36$ horas.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo $(24,24; 47,76)$ para μ.

Solución:
$N(\mu, 24)$ y $n = 16$

a) $P(\overline{X} \geq 48) = P\left(Z \geq \dfrac{48 - 36}{24/\sqrt{16}}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

b) $E = \dfrac{47,76 - 24,24}{2} = 11,76$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 11,76 = z_{\alpha/2}\frac{24}{\sqrt{16}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %:

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = P(Z \leq 1,96) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 95\,\%$$

Opción B

Problema 5.18.6 ***(2 puntos)*** La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0,6$ cm.

a) Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\overline{X} = 7$ cm. Calcúlese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea a lo sumo de 0,1 cm, con un nivel de confianza del 98 %?

Solución:

$$N(\mu; 0,6)$$

a) $\sigma = 0,6$, $n = 100$, $z_{\alpha/2} = 2,325$ y $\overline{X} = 7$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{0,6}{\sqrt{100}} = 0,1395$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (6,8605; 7,1395)$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,325$ y $E = 0,1$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{0,6}{\sqrt{n}} = 0,1 \Longrightarrow n \geq 194,6025$$

$$n = 195$$

5.18.4. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.18.7 ***(2 puntos)*** El precio, en euros, de un cierto producto en las diferentes tiendas de una determinada ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 15$ euros.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez tiendas de esa ciudad y se ha anotado el precio del producto en cada una de ellas. Estos precios son los siguientes:

$$140;\quad 125;\quad 140;\quad 175;\quad 135;\quad 165;\quad 175;\quad 110;\quad 150;\quad 130.$$

Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) Calcúlese el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido al estimar μ por la media muestral sea a lo sumo de 8 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

$N(\mu, 15)$

a) y $n = 10$, $\overline{X} = 144,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{15}{\sqrt{10}} = 9,297$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (135,203; 153,797)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 8$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{15}{\sqrt{n}} = 8 \Longrightarrow n \geq 13,51$$
$$n = 14$$

Opción B

Problema 5.18.8 ***(2 puntos)*** El consumo de combustible, en litros cada 100 kilómetros (l/100km), de los vehículos nuevos matriculados en España se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 1,2$ l/100km. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49.

a) Calcúlese el nivel de confianza con el que se ha obtenido el intervalo de confianza $(4,528; 5,2)$ para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 4,8$ l/100km. Calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, esté comprendida entre $4,5$ y $5,1$ l/100km.

Solución:

$$N(\mu; 1,2)$$

a) $\sigma = 1,2$, $n = 49$, $IC = (4,528; 5,2) \Longrightarrow E = \dfrac{5,2 - 4,528}{2} = 0,336$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0,336\sqrt{49}}{1,2} = 1,96$$

$$P\left(Z \leq 1,96\right) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 95\,\%$$

b) $\mu = 4,8$:

$$P(4,5 \leq \overline{X} \leq 5,1) = P\left(\frac{4,5 - 4,8}{1,2/\sqrt{49}} \leq Z \leq \frac{5,1 - 4,8}{1,2/\sqrt{49}}\right) =$$
$$P(-1,75 \leq Z \leq 1,75) = 2P(z \leq 1,75) - 1 = 2 \cdot 0,9599 - 1 = 0,9198$$

5.19. Año 2018

5.19.1. Modelo

Opción A

Problema 5.19.1 ***(2 puntos)*** Un determinado partido político desea estimar la proporción de votantes, p, que actualmente se decantaría por él.

a) Asumiendo que $p = 0,5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de votantes para garantizar que, con una confianza del 90 %, el margen de error en la estimación no supere el 2 %(±2 %).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 1200 votantes de los cuales 240 afirmaron que votarían por el partido en cuestión. Obténgase un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de votantes de ese partido en la población.

Solución:

a) $p = 0,5$, $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1,645\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,02 \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,645 \cdot 0,5}{0,02}\right)^2 = 1691,27 \Longrightarrow n = 1692$$

b)

$$p_r = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5} \Longrightarrow q_r = 1 - p_r = \frac{4}{5} \text{ y } z_{\alpha/2} = 1,96:$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{1200}} = 0,023$$

$$IC = (p_r - E, p_r + E) = (0,1774; 0,2226)$$

Entre el 17,74 % y el 22,26 %

Opción B

Problema 5.19.2 ***(2 puntos)*** El peso, en kilogramos, de los niños de diez años en la comunidad de Madrid se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de μ desconocida y desviación típica $\sigma = 3$ kilogramos.

a) Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ si se ha tomado una muestra aleatoria simple de 9 niños de diez años y se han obtenido los siguientes pesos en kilogramos:

$$37,\ 40,\ 42,\ 39,\ 41,\ 40,\ 39,\ 42,\ 40$$

b) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media muestral sea menor que 1 kilogramo con un nivel de confianza 98 %.

Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $\sigma = 3$, $n = 9$, $\overline{X} = 40$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{3}{\sqrt{9}} = 1,96$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (40 - 1,96, 40 + 1,96) = (38,04; 41,96)$$

b) $E = 1$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{3}{\sqrt{n}} = 1 \Longrightarrow n \geq (3 \cdot 2,325)^2 = 48,65 \Longrightarrow n = 49$$

5.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.19.3 ***(2 puntos)*** La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media μ gramos y desviación típica $\sigma = 0,5$ gramos.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0,25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral, $\overline{X}$, pese más de 12,25 gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.

Solución:

a) $E = 0,25$, $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,25 = 1,96\frac{0,5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 0,5}{0,25}\right)^2 = 15,37 \Longrightarrow n = 16$$

b) $n = 25$, $\mu = 12 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(12; 0,1)$

$P(\overline{X} \geq 12,25) = P\left(Z \geq \frac{12,25 - 12}{0,1}\right) = P(Z \geq 2,5) = 1 - P(Z \leq 2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062$

Opción B

Problema 5.19.4 ***(2 puntos)*** El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica $\sigma = 20$ descargas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99,5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Supóngase que $\mu = 100$ descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 horas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.

Solución:

$$N(\mu; 20)$$

a) $\sigma = 20$, $n = 40$, $\overline{X} = 99,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{20}{\sqrt{40}} = 6,198$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (99,5 - 6,198, 99,5 + 6,198) = (93,302; 105,698)$$

b) $n = 10$, $\mu = 100 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(100; 6,32)$

$P(100 \leq \overline{X} \leq 110) = P\left(\frac{100 - 100}{6,32} \leq Z \leq \frac{110 - 100}{6,32}\right) = P(0 \leq Z \leq 1,58) = P(Z \leq 1,58) - P(Z \leq 0) = 0,9429 - 0,5 = 0,4429$

5.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.19.5 ***(2 puntos)*** El tiempo diario, medido en horas (h), que pasa una persona de 18 años viendo la televisión, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0,25$ h.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 15 individuos y se obtiene una media muestral $\overline{X} = 2$ h. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Supóngase que $\mu = 2$ h. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 20 individuos, el tiempo medio de visionado diario de televisión, $\overline{X}$, esté entre 1,85 y 2,15 horas.

Solución:

a) $\sigma = 0,25$, $n = 15$, $\overline{X} = 2$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,25}{\sqrt{15}} = 0,127$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (2 - 0,127, 2 + 0,127) = (1,873; 2,127)$$

b) $n = 20$, $\mu = 2 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(2; 0,056)$

$P(1,85 \leq \overline{X} \leq 2,15) = P\left(\frac{1,85-2}{0,056} \leq Z \leq \frac{2,15-2}{0,056}\right) = P(-2,68 \leq Z \leq 2,68) = P(Z \leq 2,68) - (1 - P(Z \leq 2,68)) = 2P(Z \leq 2,68) - 1 = 0,9926$

Opción B

Problema 5.19.6 ***(2 puntos)*** El peso en kilogramos (kg) del ejemplar de lubina de estero tras un mes de crianza, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0,2$ kg.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0,05 kg, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la suma total de sus pesos sea mayor que 32 kg, sabiendo que $\mu = 1,5$ kg.

Solución:

$$N(\mu; 0,2)$$

a) $E = 0,05$, $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,05 = 1,96\frac{0,2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 0,2}{0,05}\right)^2 = 61,47 \Longrightarrow n = 62$$

b) $n = 20$, $\mu = 1,5 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(1,5; 0,045)$ y $\overline{X} = \dfrac{32}{20} = 1,6$

$P(\overline{X} \geq 1,6) = P\left(Z \geq \dfrac{1,6-1,5}{0,045}\right) = P(Z \geq 2,22) = 1 - P(Z \leq 2,22) = 1 - 0,9868 = 0,0132$

5.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.19.7 ***(2 puntos)*** La distancia anual, en kilómetros (km), que recorren las furgonetas de una empresa de reparto, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica $\sigma = 24000$ km.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la amplitud del intervalo de confianza al 95 % para μ sea a lo sumo de 23 550 km. .

b) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 furgonetas. Suponiendo que $\mu = 150000$ km, calcúlese la probabilidad de que la distancia media anual observada, $\overline{X}$, esté entre 144240 km y 153840 km.

Solución:

a) Amplitud$= 23550 \Longrightarrow E = 11775$, $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 11775 = 1,96\frac{24000}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 24000}{11775}\right)^2 = 15,959 \Longrightarrow n = 16$$

b) $n = 25$, $\mu = 150000 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(150000; 4800)$

$P(144240 \leq \overline{X} \leq 153840) = P\left(\dfrac{144240-150000}{4800} \leq Z \leq \dfrac{153840-150000}{4800}\right) = P(-1,2 \leq Z \leq 0,8) = P(Z \leq 0,8) - P(Z \leq -1,2) = 0,7881 - (1 - 0,8849) = 0,673$

Opción B

Problema 5.19.8 ***(2 puntos)*** Una empresa quiere lanzar un producto al mercado. Por ello desea estimar la proporción de individuos, P, que estarían dispuestos a comprarlo.

a) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 3 % (± 3 %).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 individuos de los cuales 90 afirmaron que comprarían el producto. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a comprar el producto.

Solución:

a) $E = 0,03$, $p = 0,5$, $q = 0,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 (0,5 \cdot 0,5) = 1067,11$$

Luego $n = 1068$.

b) $n = 450$, $z_{\alpha/2} = 1,645$ y $p = \dfrac{90}{450} = 0,2 \Longrightarrow q = 0,8$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,645\sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{450}} = 0,031$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (0,2 - 0,031; 0,2 + 0,031) = (0,169; 0,231) = (16,9\,\%; 23,1\,\%)$$

5.20. Año 2019

5.20.1. Modelo

Opción A

Problema 5.20.1 ***(2 puntos)*** Una plataforma de televisión quiere lanzar un nuevo paquete de contenidos de pago. Por ello desea estimar la proporción de clientes, P, que estarían dispuestos a contratarlo.

a) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 2 % ($\pm 2\,\%$).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 500 clientes de los cuales 85 afirmaron que contratarían el paquete. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a contratar el paquete.

Solución:

a) $p = 0,5$, $q = 1 - p = 0,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,02 \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 0,5}{0,02}\right)^2 = 2401 \Longrightarrow n = 2401$$

b)

$$p_r = \frac{85}{500} = 0,17 \Longrightarrow q_r = 1 - p_r = 0,83 \text{ y } z_{\alpha/2} = 1,645:$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} = 1,645\sqrt{\frac{0,17 \cdot 0,83}{500}} = 0,0283$$

$$IC = (p_r - E, p_r + E) = (0,142; 0,198)$$

Entre el 14,2 % y el 19,8 %

Opción B

Problema 5.20.2 ***(2 puntos)*** El contenido en azúcares, medido en kilogramos (kg), de los botes de 1 kg de miel natural del Valle de Valdeón se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0,1$ kg.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0,025 kg, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Sabiendo que $\mu = 0,7$ kg, calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la media del contenido en azúcares de esos botes sea menor que 0,65 kg.

Solución:

$$N(\mu; 0,1)$$

a) $E = 0,025$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,1}{\sqrt{n}} = 0,025 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{0,1 \cdot 1,96}{0,025}\right)^2 = 61,47 \Longrightarrow$$

$$n = 62$$

b) $\mu = 0,7$, $\sigma = 0,1$ y $n = 20$.

$$P(\overline{X} \leq 0,65) = P\left(Z \leq \frac{0,65 - 0,7}{0,1/\sqrt{20}}\right) = P(Z \leq -2,24) =$$

$$1 - P(Z \leq 2,24) = 1 - 0,9875 = 0,0125$$

5.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.20.3 ***(2 puntos)*** El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.

a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99,2 % para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

Solución:

$N(\mu; 7)$ ya que $\sigma^2 = Var(X) = 49 \Longrightarrow \sigma = 7$

a) $n = 64$, $\overline{X} = 34$ y $NC = 0,992$:
$1 - \alpha = 0,992 \Longrightarrow \alpha = 0,008 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 0,004$
$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,004 = 0,996 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 2,65$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,65\frac{7}{\sqrt{64}} = 2,319 \Longrightarrow$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (34 - 2,319; 34 + 2,319) = (31,681; 36,319)$$

b) $E = 3$ y $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3 = 1,96\frac{7}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(1,96\frac{7}{3}\right)^2 = 20,91 \Longrightarrow n = 21$$

Opción B

Problema 5.20.4 ***(2 puntos)*** El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1,5$ kilogramos.

a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0,49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.

b) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5,75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

Solución:

$$N(\mu; 1,5)$$

a) $2E = 0,49 \Longrightarrow E = 0,245$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1,5}{\sqrt{n}} = 0,245 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,5 \cdot 1,96}{0,245}\right)^2 = 144 \Longrightarrow$$

$$n = 144$$

b) $\mu = 6$, $\sigma = 1,5$ y $n = 225$.

$$P(\overline{X} \geq 5,75) = P\left(Z \geq \frac{5,75 - 6}{1,5/\sqrt{225}}\right) = P(Z \geq -2,5) =$$

$$1 - P(Z \leq -2,5) = 1 - (1 - P(Z \leq 2,5)) = P(Z \leq 2,5) = 0,9938$$

5.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.20.5 ***(2 puntos)*** El tiempo que dura una sesión de rehabilitación de hombro, en minutos (min), se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 10$ min.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 5 min, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Supóngase que $\mu = 40$ min. Calcúlese el tamaño que debe tener una muestra aleatoria simple para que $P(\overline{X} \leq 38) = 0,1587$.

Solución:

$N(\mu; 10)$

a) $E = 5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 10}{5}\right)^2 = 15,3664 \Longrightarrow$$

$$n = 16$$

b) $\mu = 40 \Longrightarrow \overline{X} \approx \left(40, \frac{10}{\sqrt{n}}\right)$

$$P(\overline{X} \leq 38) = P\left(Z \leq \frac{38-40}{10/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \leq \frac{-2\sqrt{n}}{10}\right) =$$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0,1587 \Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0,8413 \Longrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{n}}{5} = 1 \Longrightarrow n = 25$$

Opción B

Problema 5.20.6 ***(2 puntos)*** En la zona centro de una ciudad, el alquiler mensual de los locales comerciales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica σ euros.

a) Suponiendo $\mu = 3000$ euros, determínese σ para que al elegir una muestra aleatoria simple de tamaño 49, la probabilidad de que el alquiler medio mensual de la muestra supere los 3125 euros sea $0,20$.

b) Suponiendo una desviación típica poblacional igual a 1000 euros y el valor de μ desconocido, determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ, basado en la información de una muestra aleatoria simple de 100 locales comerciales en la que se observó un alquiler mensual medio de 3300 euros.

Solución:

$$N(\mu; \sigma)$$

a) $\mu = 3000$ y $n = 49$. $\overline{X} \approx N\left(3000, \frac{\sigma}{\sqrt{49}}\right) = N\left(3000, \frac{\sigma}{7}\right)$

$$P(\overline{X} \geq 3125) = P\left(Z \geq \frac{3125-3000}{\sigma/7}\right) = P\left(Z \geq \frac{875}{\sigma}\right) =$$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{875}{\sigma}\right) = 0,20 \Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{875}{\sigma}\right) = 0,8 \Longrightarrow$$

$$\frac{875}{\sigma} = 0,845 \Longrightarrow \sigma = 1035,5$$

b) $\sigma = 1000$, $n = 100$, $\overline{X} = 3300$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1000}{10} = 196$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (3300 - 196, 3300 + 196) = (3104, 3496)$$

5.20.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.20.7 ***(2 puntos)*** Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

Solución:

$$N(\mu; 25)$$

a) $n = 15$, $\overline{X} = 560$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{25}{\sqrt{15}} = 12,652$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (547,348; 572,652)$$

b) $\mu = 560 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(560, \frac{25}{\sqrt{50}}\right) = N(560; 3,54)$

$$P(\overline{X} \geq 565) = P\left(Z \geq \frac{565 - 560}{3,54}\right) = P(Z \geq 1,41) =$$

$$1 - P(Z \leq 1,41) = 1 - 0,9207 = 0,0793$$

Opción B

Problema 5.20.8 ***(2 puntos)*** Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0,22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.

b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

Solución:

a) $p = 0,22$, $q = 0,78$ y $z_{\alpha/2} = 2,576$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,576}{0,04}\right)^2 (0,22 \cdot 0,78) = 711,69$$

Luego $n = 712$.

b) $n = 1000$, $z_{\alpha/2} = 1,96$ $p = \dfrac{250}{1000} = 0,25 \Longrightarrow q = 0,75$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{1000}} = 0,0268$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (0,25 - 0,0268; 0,25 + 0,0268) =$$
$$(0,2232; 0,2768) = (22,32\,\%; 27,68\,\%)$$

5.20.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.20.9 ***(2 puntos)*** En las especificaciones de una máquina tragaperras se establece que la proporción P de veces que la máquina devuelve algo a quien la use es $1/4$.

a) Utilice la aproximación por la distribución normal para calcular la probabilidad de obtener al menos 20 devoluciones de 100 veces que se juega.

b) Sin tomar en cuenta las especificaciones, si en 100 juegos la máquina devolvió algo al jugador sólo en 15 ocasiones, calcúlese un intervalo de confianza del 99 % para la proporción P.

Solución:

a) $p = \dfrac{1}{4}$, $q = \dfrac{3}{4}$ y $n = 100$. Como $n > 10$, $np = 100 \cdot 0,25 = 25 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0,75 = 75 > 5$ podemos utilizar la aproximación a una normal:

$$X \approx B(n; p) \Longrightarrow X \approx N(np; \sqrt{npq})$$
$$X \approx B(100; 0,25) \Longrightarrow X \approx N(25; 4,33)$$
$$P(X \geq 20) = P\left(Z > \frac{19,5 - 25}{4,33}\right) = P(Z > -1,27) = 1 - P(Z < -1,27)$$
$$= 1 - (1 - P(Z < 1,27)) = P(Z < 1,27) = 0,8980$$

b) $n = 100$, $z_{\alpha/2} = 2,575$, $\hat{p} = \dfrac{15}{100} = 0,15 \Longrightarrow \hat{q} = 0,85$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,575\sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{100}} = 0,092$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,15 - 0,092; 0,15 + 0,092) =$$
$$(0,058; 0,242) = (5,8\,\%; 24,2\,\%)$$

Opción B

Problema 5.20.10 ***(2 puntos)*** La factura, en euros, de una cena para una persona, reservando en pucherodelujo.com, se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media $\mu = 25$ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) Calcúlese la probabilidad de que el coste medio por comensal, de 9 personas escogidas al azar que reserven en la página, no sea mayor que 30 euros.

b) Determínese el número mínimo de comensales que debería tener una muestra aleatoria simple para que el coste medio por comensal no exceda los 30 euros con probabilidad no inferior a 0,95.

Solución:

$$N(25; 5)$$

a) $n = 9 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(25, \dfrac{5}{3}\right)$

$$P(\overline{X} \leq 30) = P\left(Z < \frac{30-25}{5/3}\right) = P(Z < 3) = 0,9987$$

b) $P\left(\overline{X} \leq 30\right) \geq 0,95 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{30-25}{5/\sqrt{n}}\right) \geq 0,95 \Longrightarrow \sqrt{n} \geq 1,645 \Longrightarrow n \geq 2,7 \Longrightarrow n = 3.$

5.21. Año 2020

5.21.1. Modelo

Opción A

Problema 5.21.1 ***(2 puntos)*** La cantidad de principio activo en las pastillas de una determinada marca de detergente puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ mg y varianza 0,09 mg^2.

a) Si una muestra aleatoria simple de 400 pastillas proporcionó una cantidad media de principio activo de 13 mg, halle un intervalo de confianza al 99 % para la media poblacional.

b) Determine el tamaño muestral mínimo para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor de 0,05 mg con un nivel de confianza del 98 %.

Solución:

$$\sigma^2 = Var(X) = 0,09 \Longrightarrow \sigma = 0,3 \Longrightarrow N(\mu; 0,3)$$

a) $n = 400$, $\overline{X} = 13$ y $z_{\alpha/2} = 2,575$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{0,3}{\sqrt{400}} = 0,038625$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (13 - 0,038625; 13 + 0,038625)$$

$$IC = (12,961375; 13,038625)$$

b) $E = 0,05$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,05 = 2,325\frac{0,3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{2,325 \cdot 0,3}{0,05}\right)^2 = 194,6025 \Longrightarrow n = 195$$

Opción B

Problema 5.21.2 ***(2 puntos)*** En verano, en Madrid, se instalan puestos callejeros de venta de melones y sandías. Se sabe que el peso de las sandías puede aproximarse por una variable con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 450$g.

a) Si se toma una muestra de 25 sandías y se obtiene una media muestral de $\overline{X} = 2700$g, calcule un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.

b) Si el peso medio de las sandías es $\mu = 3000$g, calcule la probabilidad de que el peso medio de una muestra de cuatro sandías escogidas al azar esté entre 3000 g y 3450 g.

Solución:

$$N(\mu; 450)$$

a) $n = 25$, $\overline{X} = 2700$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{450}{\sqrt{25}} = 176,4$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (2700 - 176,4; 2700 + 176,4) = (2523,6; 2876,4)$$

b) $\mu = 3000$ y $n = 4$

$$P(3000 \leq X \leq 3450) = P\left(\frac{3000 - 3000}{450/\sqrt{4}} < Z < \frac{3450 - 3000}{450/\sqrt{4}}\right) =$$

$$P(0 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 0) = 0,9772 - 0,5 = 0,4772$$

5.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.21.3 ***(2 puntos)*** La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.

b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

Solución:

$$N(\mu; 0,5)$$

a) $z_{\alpha/2} = 2$ y $E = 0,05$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\frac{0,5}{\sqrt{n}} = 0,05 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2 \cdot 0,5}{0,05}\right)^2 = 400$$

Luego $n = 400$.

b) Tenemos $N(2; 0,5)$, $n = 16$ y $\overline{X} = \dfrac{30}{16} = 1,875$

$$P(\overline{X} \geq 1,875) = P\left(Z \geq \frac{1,875}{0,5/\sqrt{16}}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0,8413$$

Opción B

Problema 5.21.4 ***(2 puntos)*** Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

$$40 \quad 45 \quad 38 \quad 44 \quad 41 \quad 40 \quad 35 \quad 50 \quad 40 \quad 37$$

Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 7)$$

a) $n = 10$, $\overline{X} = 41$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{7}{\sqrt{10}} = 3,64136$$

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (37,36; 44,64)$$

b) $n = 64$ y $L = 2E = 5 \Longrightarrow E = 2,5$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,5 = z_{\alpha/2}\frac{7}{\sqrt{64}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2,5 \cdot 8}{7} = 2,8571$$

$$P(Z \leq 2,86) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9979 \Longrightarrow \alpha = 0,0042 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,9958$$

$$NC = 99,58\,\%$$

www.matesat.net

5.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.21.5 ***(2 puntos)*** El salario medio bruto mensual en España en 2019 se puede aproximar por una distribución normal con $\sigma = 900$ euros.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, $\overline{X}$, sea a lo sumo de 200 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 1889$ euros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 64 individuos, la media muestral, $\overline{X}$, sea mayor que 1900 euros.

Solución:

$$N(\mu; 900)$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 200$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{900}{\sqrt{n}} = 200 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 900}{200}\right)^2 = 77,7924$$

Luego $n = 78$.

b) $\mu = 1889$ y $n = 64$ $P(\overline{X} > 1900) = P\left(Z > \dfrac{1900 - 1889}{900/\sqrt{64}}\right) = P(Z > 0,1) = 1 - P(Z < 0,1) = 1 - 0,5398 = 0,4602$

Opción B

Problema 5.21.6 ***(2 puntos)*** Se estima que el coste medio anual de la cesta de la compra de una familia tipo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 500$.

a) Se ha analizado el consumo de 100 familias tipo, obteniéndose un coste medio estimado de 5100 euros anuales. Calcule un intervalo de confianza al 90 % para la media μ.

b) A partir de una muestra de 36 familias tipo, se ha obtenido un intervalo de confianza para μ con un error de estimación de 160 euros. Determine el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 500)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 5100$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{500}{\sqrt{100}} = 82,25$$
$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (5017,75; 5182,25)$$

b) $n = 36$ y $E = 160$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 160 = z_{\alpha/2}\frac{500}{\sqrt{36}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,92$$

$$P(Z < 1,92) = 0,9726 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,0548 \Longrightarrow 1 - \alpha = 0,9452$$
$$NC = 94,52\,\%$$

5.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.21.7 ***(2 puntos)*** El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \leq 220) = 0,9940$.

Solución:

$$N(\mu; 60)$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 20$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{60}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 60}{20}\right)^2 = 34,57$$

Luego $n = 35$.

b) $P(X \leq 220) = P\left(Z \leq \dfrac{220-\mu}{60/\sqrt{100}}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{220-\mu}{6}\right) = 0,9940 \Longrightarrow \dfrac{220-\mu}{6} = 2,51 \Longrightarrow$ $\mu = 204,94 \simeq 205$.

Opción B

Problema 5.21.8 ***(2 puntos)*** Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarda en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26,9; 37,1)$, expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ, con un nivel de confianza del 98,92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.

b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $E = \dfrac{37,1-26,9}{2} = 5,1$ y $\overline{X} = \dfrac{37,1+26,9}{2} = 32$.
$NC = 0,9892 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0108 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0054 \Longrightarrow P\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1-\dfrac{\alpha}{2} =$ $1 - 0,0054 = 0,9946 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,55$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,55\frac{10}{\sqrt{n}} = 5,1 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,55 \cdot 10}{5,1}\right)^2 = 25$$

Luego $n = 25$.

b) $\mu = 30$ y $n = 16$:

$P(25 \leq \overline{X} \leq 35) = P\left(\dfrac{25-30}{10/\sqrt{16}} \leq Z \leq \dfrac{35-30}{10/\sqrt{16}}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 2)) = 2P(Z \leq 2) - 1 = 0,9544$

5.22. Año 2021

5.22.1. Modelo

Opción A

Problema 5.22.1 ***(2 puntos)*** El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 30$ y $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{20}} = 4,383$$

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (30 - 4,383; 30 + 4,383) = (25,617; 34,383)$$

b) $\mu = 28$ y $n = 10$:

$$P\left(28 \leq \overline{X} \leq 30\right) = P\left(\frac{28-28}{10/\sqrt{10}} \leq \overline{X} \leq \frac{30-28}{10/\sqrt{10}}\right) =$$

$$P(0 \leq Z \leq 0,63) = P(Z \leq 0,63) - P(Z \leq 0) = 0,7357 - 0,5 = 0,2357$$

Opción B

Problema 5.22.2 ***(2 puntos)*** Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

Solución:

$$N(\mu; 300)$$

a) $E = 100$, $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{300}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 300}{100}\right)^2 = 34,5744$$

Luego $n = 35$.

b) $\mu = 3000$ y $n = 50$

$$P\left(\overline{X} \geq 2700\right) = P\left(\overline{X} \geq \frac{2700 - 3000}{300/\sqrt{50}}\right) =$$

$$P(Z \geq -7,07) = 1 - P(Z \leq -7,07) = 1 - (1 - P(Z \leq 7,07)) = 1 - (1 - 1) = 1$$

5.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.22.3 ***(2 puntos)*** Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.

b) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

Solución:

a) $p = \dfrac{320}{500} = \dfrac{16}{25} = 0,64$, $q = 1 - p = 0,36$ y $n = 500$.

$$NC = 0,96 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,04 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,02$$

$$P\left(Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,02 = 0,98 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,055\sqrt{\frac{0,64 \cdot 0,36}{500}} = 0,0441$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,64 - 0,0441; 0,64 + 0,0441) =$$

$$(0,5959; 0,6841) = (59,59\,\%; 68,41\,\%)$$

b)

$$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P\left(Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 1,96\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,05 \Longrightarrow n \geq \frac{1,96^2 \cdot 0,5^2}{0,05^2} = 384,16$$

$$\Longrightarrow n = 385$$

Opción B

Problema 5.22.4 ***(2 puntos)*** El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza $(117,3444; 124,6556)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 20)$$

a) $n = 36$:

$$P(\overline{X} \leq 120) = P\left(Z \leq \frac{125-120}{20/\sqrt{36}}\right) = P(Z \leq 1,5) = 0,9332$$

b) $E = \dfrac{124,6556 - 117,3444}{2} = 3,6556$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{3,6556 \cdot \sqrt{81}}{20} = 1,645$$

$$P(Z \leq 1,645) = 0,95 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow NC = 0,9 = 90\,\%$$

5.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.22.5 ***(2 puntos)*** Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

a) Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

Solución:

$$N(\mu; 4)$$

a) $n = 15$, $\overline{X} = 254$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{4}{\sqrt{15}} = 2,02428$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (254 - 2,02428; 254 + 2,02428) = (251,97572; 256,02428)$$

b) $\mu = 250$ y $n = 25$ $P(\overline{X} \geq 248) = P\left(Z \geq \dfrac{248-250}{4/\sqrt{25}}\right) = P(Z \geq -2,5) = 1 - P(Z \leq -2,5) = 1 - (1 - P(Z \leq 2,5)) = P(Z \leq 2,5) = 0,9938$

Opción B

Problema 5.22.6 ***(2 puntos)*** Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0,2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.

b) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

Solución:

a) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$ y $E = 0,08$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Longrightarrow 0,08 = 2,575\sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{n}} \Longrightarrow$$

$$n \geq 0,2 \cdot 0,8\left(\frac{2,575}{0,08}\right)^2 = 165,765625$$

Luego $n = 166$.

b) $p = \dfrac{25}{200} = 0,125$, $n = 200$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,125 \cdot 0,875}{200}} = 0,04584$$

$$IC = (p - E; p + E) = (0,125 - 0,04584; 0,125 + 0,04584) \Longrightarrow$$

$$(0,07916; 0,17084)$$

5.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.22.7 ***(2 puntos)*** El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 60$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{8}{\sqrt{20}} = 3,5062$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (60 - 3,5062; 60 + 3,5062) = (56,4938; 63,5062)$$

b) $\mu = 59$ y $n = 10$

$P(57 \leq \overline{X} \leq 61) = P\left(\dfrac{57 - 59}{8/\sqrt{10}} \leq Z \leq \dfrac{61 - 59}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0,79 \leq Z \leq 0,79) = P(Z \leq 0,79) - P(Z \leq -0,79) = P(Z \leq 0,79) - (1 - P(Z \leq 0,79)) = 2P(Z \leq 0,79) - 1 = 2 \cdot 0,7852 - 1 = 0,5704$

Opción B

Problema 5.22.8 ***(2 puntos)*** El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que 30,5 minutos.

Solución:

$$N(\mu, 3)$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

y $E = 1$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 3}{1}\right)^2 = 34,5744$$

Luego $n = 35$.

b) $\mu = 32$ y $n = 16$

$P(\overline{X} \leq 30,5) = P\left(Z \leq \dfrac{30,5 - 32}{3/\sqrt{16}}\right) = P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 - 1 = 0,0228$

5.23. Año 2022

5.23.1. Modelo

Opción A

Problema 5.23.1 ***(2 puntos)*** El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0,25 horas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere las 2,9 horas si $\mu = 2,75$ horas.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza (2,9388;3,0613) para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 0,25)$$

a) $n = 25$, $\overline{X} \overset{N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(2,75; 0,05)$

$$P(\overline{X} \leq 2,9) = P\left(Z \leq \frac{2,9 - 2,75}{0,05}\right) = P(Z \leq 3) = 0,9987$$

b) $\overline{X} = \dfrac{2,9388 + 3,0613}{2} = 3,00005$ y $2E = 3,0613 - 2,9388 = 0,1225 \Longrightarrow E = 0,06125$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,06125 = z_{\alpha/2}\frac{0,25}{\sqrt{64}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{8 \cdot 0,06125}{0,25} = 1,96$$

$$P\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = P(Z \leq 1,96) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,95$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %.

Opción B

Problema 5.23.2 ***(2 puntos)*** Una empresa que gestiona una aplicación de movilidad sostenible sabe que el tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 6$ minutos.

a) Una muestra aleatoria simple de 81 universitarios proporciona un tiempo medio de traslado hasta la universidad de 44 minutos. Calcule el intervalo de confianza al 90 % para estimar μ.

b) Determine el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para obtener un intervalo de confianza para μ de amplitud a lo sumo de 3 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

$$N(\mu; 6)$$

a) Tenemos $\overline{X} = 44$, $n = 81$ y $NC = 90\,\%$

$$NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{6}{\sqrt{81}} = 1,0967$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (44 - 1,0967; 44 + 1,0967) = (42,9033; 45,0967)$$

b) $E = \dfrac{3}{2} = 1,5$ y $NC = 95\,\%$

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{6}{\sqrt{n}} = 1,5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 6}{1,5}\right)^2 = 61,4656$$

Luego $n = 62$.

5.23.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.23.3 ***(2 puntos)*** Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99 % para el peso medio de un saco de cemento.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilogramo, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu, 2)$$

a) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\dfrac{2}{\sqrt{20}} = 1,1516$

$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (50 - 1,1516, 50 + 1,1516) = (48,8484; 51,1516)$

b) $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,645\dfrac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq (1,645 \cdot 2)^2 = 10,8241 \Longrightarrow n = 11.$

Opción B

Problema 5.23.4 ***(2 puntos)*** Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

a) Determine el valor de σ sabiendo que $I = (58,2; 73,8)$ es un intervalo de confianza del 95 % para μ.

b) Si $\sigma = 20$, calcule $P(-10 < \overline{X} - \mu < 10)$.

Solución:

$$N(\mu; \sigma)$$

a) $n = 10$, $E = \dfrac{73,8 - 58,2}{2} = 7,8$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 7,8 = 1,96\dfrac{\sigma}{\sqrt{10}} \Longrightarrow \sigma = \dfrac{7,8\sqrt{10}}{1,96} = 12,58$

b) $n = 10$ y $\sigma = 20 \Longrightarrow X : N(\mu;\sigma) \longrightarrow \overline{X} : N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \dfrac{20}{\sqrt{10}}\right) = N(\mu; 6,32)$
$P(-10 < \overline{X} - \mu < 10) = P\left(\dfrac{-10}{6,32} < Z < \dfrac{-10}{6,32}\right) =$
$P(-1,58 < Z < 1,58) = P(z < 1,58) - P(z < -1,58) =$
$P(z < 1,58) - (1 - P(z < 1,58)) = 2P(z < 1,58) - 1 = 2 \cdot 0,9429 - 1 = 0,8858$

5.23.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.23.5 ***(2 puntos)*** Para estimar la proporción poblacional de las familias que tienen internet en una determinada ciudad se ha tomado una muestra de familias al azar.

a) Si la proporción poblacional fuese $P = 0,8$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de familias para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 6 %.

b) Tomada al azar una muestra de 200 familias, se encontró que 170 tenían internet. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de familias que tienen internet.

Solución:

a) $p = 0,8 \Longrightarrow q = 1 - p = 0,2$
$NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,575\sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{n}} = 0,06$$

$$n \geq \frac{2,575^2 \cdot 0,8 \cdot 0,2}{0,06^2} = 294,694 \Longrightarrow n = 295$$

b) $n = 200$ y $p = \dfrac{170}{200} = 0,85 \Longrightarrow q = 1 - 0,85 = 0,15$
$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,85 \cdot 0,15}{200}} = 0,04949$$

$$IC = (p - E, p + E) = (0,85 - 0,04949; 0,85 + 0,04949) =$$

$$(0,80051, 0,89949) = (80,051\,\%; 89,949\,\%)$$

Opción B

Problema 5.23.6 ***(2 puntos)*** Sea una población donde observamos la variable aleatoria X con distribución normal de media 20 y desviación típica 5. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 25.

a) ¿Cuál es la distribución de $\overline{X}$?

b) Calcule $P(19 < \overline{X} < 22)$.

Solución:

$$N(20,5)$$

a) $\overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(20;1)$

b) $P(19 < \overline{X} < 22) = P\left(\dfrac{19-20}{1} < Z < \dfrac{22-20}{1}\right) = P(-1 < Z < 2) =$
$P(Z < 2) - P(Z < -1) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1)) = P(Z < 2) + P(Z < 1) - 1 =$
$0,9772 + 0,8413 - 1 = 0,8185$

5.23.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.23.7 ***(2 puntos)*** Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95 % para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0,2 y 0,3 los extremos de dicho intervalo.

a) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.

b) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

Solución:

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

a) $IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,2; 0,3) \Longrightarrow 2E = 0,1 \Longrightarrow E = 0,05$ y $\hat{p} = 0,25$

b) $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,25 \cdot 0,75}{700}} = 0,03208$

Opción B

Problema 5.23.8 ***(2 puntos)*** Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.

a) Calcule el valor de la media muestral.

b) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

Solución:

$$N(\mu; 15)$$

a) $IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (157,125; 182,875) \Longrightarrow$
$\overline{X} = \dfrac{157,125 + 182,875}{2} = 170$
$E = \dfrac{182,875 - 157,125}{2} = 12,875$

b) $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 12,875 = Z_{\alpha/2}\dfrac{15}{\sqrt{9}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = \dfrac{12,875}{5} = 2,575$
$P(Z \leq 2,575) = 0,9950 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow NC = 99\,\%$

5.23.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.23.9 ***(2 puntos)*** El peso en gramos de ciertas bolsas de palomitas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200. Determine un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de dichas bolsas de palomitas.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 gramos, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\dfrac{10}{\sqrt{20}} = 4,3827$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (200 - 4,3827; 200 + 4,3827) = (195,6173; 204,3827)$

b) $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,5 = 1,645\dfrac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\dfrac{16,45}{0,5}\right)^2 = 1082,41 \Longrightarrow n = 1083$

Opción B

Problema 5.23.10 ***(2 puntos)*** El 64 % de los individuos de una población tienen una misma característica. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con esa característica de la muestra?

b) Halle la probabilidad de que más del 70 % de los individuos de la muestra posean dicha característica.

Solución:

a) Se trata de $B(120; 0,64)$, como $n = 120 > 10$, $np = 76,8 > 5$ y $nq = 43,2 > 5$ se puede aproximar mediante una normal $N(np; \sqrt{npq}) = N(76,8; 5,26)$
Como lo que se pide es la distribución de una proporción con $n = 120 > 30$, $np = 76,8 > 5$ y $nq = 43,2 > 5$, sería una normal

$$N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N\left(0,64; \sqrt{\frac{0,64 \cdot 0,36}{120}}\right) = N(0,64; 0,0438)$$

b) $P(X > 0,7) = P\left(Z \geq \frac{0,7 - 0,64}{0,0438}\right) = P(Z \geq 1,37) = 1 - P(Z \leq 1,37) = 1 - 0,9147 = 0,0853$

5.24. Año 2023

5.24.1. Modelo

Opción A

Problema 5.24.1 ***(2 puntos)*** Para una población en la que se observa una variable aleatoria X con distribución normal, de media desconocida y desviación típica igual a 1,5, se tomó una muestra aleatoria simple para estimar la media poblacional y se obtuvo un intervalo de confianza cuyos extremos son 11,0703 y 12,9297.

a) Determine el valor de la media muestral.

b) Si el tamaño de la muestra fue 10, ¿cuál es el nivel de confianza del intervalo obtenido?

Solución:

$$N(\mu; 1,5)$$

a) $\overline{X} = \frac{11,0703 + 12,9297}{2} = 12$

b) y $2E = 12,9297 - 11,0703 = 1,8594 \Longrightarrow E = 0,9297$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,9297 = z_{\alpha/2}\frac{1,5}{\sqrt{10}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{\sqrt{10} \cdot 0,9297}{1,5} = 1,96$$

$$P\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = P(Z \leq 1,96) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,95$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %.

Opción B

Problema 5.24.2 ***(2 puntos)*** Para estimar la proporción de estudiantes de una determinada facultad que utilizan la cafetería se toma una muestra de estudiantes al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de estudiantes para garantizar que, con una confianza del 98,02 %, el margen de error en la estimación no supera el 10 %.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 estudiantes, de los cuales 70 utilizaban la cafetería, determine un intervalo de confianza al 95 %. para la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería.

Solución:

a) Tenemos $NC = 98,02\,\%$

$NC = 0,9802 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0198 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0099$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,0099 = 0,9901 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,33$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,33\sqrt{\frac{0,55 \cdot 0,45}{n}} = 0,1 \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{2,33}{0,1}\right)^2 (0,55 \cdot 0,45) = 134,365275 \Longrightarrow n = 135$$

b) $n = 100$, $\hat{p} = \dfrac{70}{100} = 0,7$ y $NC = 95\,\%$:

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{100}} = 0,0898$$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,7 - 0,0898; 0,7 + 0,0898) = (0,6102; 0,7898) = (61,02\,\%; 78,98\,\%)$

5.24.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.24.3 ***(2 puntos)*** La capacidad en mililitros de un bote de champú se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10 ml.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200 ml. Determine un intervalo de confianza del 95 % para la capacidad media de los botes de champú.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mililitros, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$\overline{X} = 200$ y $n = 10$:
$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\dfrac{10}{\sqrt{20}} = 4,3827$

$$\left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (195,6173; 204,3827)$$

b) $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,5 = 1,645\frac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 1082,41$$

$$n = 1083$$

Opción B

Problema 5.24.4 ***(2 puntos)*** El 30 % de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?

b) Halle la probabilidad de que más del 35 % de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

Solución:

a) $p = 0,3$ y $n = 120$. Tenemos $n > 30$, $np = 36 > 5$ y $nq = 84 > 5 \Longrightarrow \hat{p} \approx N\left(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right) = N(0,3; 0,0418)$

b) $P(\hat{p} \geq 0,35) = \left(Z \geq \dfrac{0,35 - 0,3}{0,0418}\right) = P(Z \geq 1,2) = 1 - P(Z \leq 1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151$

5.24.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.24.5 ***(2 puntos)*** Para estimar el porcentaje de países firmantes de la Agenda 2030 que cumplen en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible se tomó una muestra de países al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,20$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de países para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

b) Si la muestra aleatoria fue de 34 países, de los cuales 10 cumplían al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de países firmantes que cumplen en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible.

Solución:

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$P = 0,20$ y $Q = 0,80$

$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{PQ}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,2 \cdot 0,8}{n}} = 0,05 \Longrightarrow n \geq 245{,}8624 \Longrightarrow n = 246$

b) $\hat{p} = \dfrac{10}{34} = 0,2941$, $\hat{q} = 0,7059$ y $n = 34$

$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,2941 \cdot 0,7059}{34}} = 0,1532$

$$(\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,141; 0,4473)$$

Opción B

Problema 5.24.6 ***(2 puntos)*** El porcentaje de agua en el cuerpo humano se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas, obteniéndose una media muestral de 65 puntos. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 personas, la media muestral, $\overline{X}$, este comprendida entre 65 y 69 puntos.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

$\overline{X} = 65$ y $n = 20$:

$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\dfrac{8}{\sqrt{20}} = 4,6063$

$$\left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (60,3937; 69,6063)$$

b) $N(67; 8) \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(67; \dfrac{8}{\sqrt{10}}\right) = N(67; 2,5298)$

$P(65 \leq \overline{X} \leq 69) = \left(\dfrac{65 - 67}{8/\sqrt{10}} \leq Z \leq \dfrac{69 - 67}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0,79 \leq Z \leq 0,79) = P(Z \leq 0,79) -$
$P(Z \leq -0,79) = 2P(Z \leq 0,79) - 1 = 2 \cdot 0,7852 - 1 = 0,5704$

5.24.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.24.7 (2 puntos) Para estimar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99,01 %, el margen de error en la estimación no supere el 10 %.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

Solución:

a) $NC = 0,9901 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0099 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,00495$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,99505 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$

$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,1 = 2,575\sqrt{\dfrac{0,55 \cdot 0,45}{n}} \Longrightarrow n \geq 164,1079687 \Longrightarrow n = 165.$

b) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$n = 100$, $\hat{p} = \dfrac{70}{100} = 0,7$ y $\hat{q} = 0,3 \Longrightarrow$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,7 \cdot 0,3}{100}} = 0,0898$
$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,7 - 0,0898; 0,7 + 0,0898) = (0,6102; 0,7898)$

Opción B

Problema 5.24.8 (2 puntos) La distancia diaria en kilometros recorrida por un autobus urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribucion normal de media desconocida μ y desviacion tipica igual a 2 kilometros.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilométros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99 % para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilómetro, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 50$ y $NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{2}{\sqrt{20}} = 1,1516$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (50 - 1,1516; 50 + 1,1516) = (48,8484; 51,1516)$$

b) $NC = 90\,\% = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = 1 \Longrightarrow 1 = 1,645\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,645 \cdot 2}{1}\right)^2 = 10,8241 \Longrightarrow n = 11$$

5.24.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.24.9 (2 puntos) La longitud en metros de un coche se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0,2$ metros.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 4 centímetros con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 4$ metros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 36$ coches, la longitud media, $\overline{X}$, sea mayor de 4,04 metros.

Solución:

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,04 = 1,96\dfrac{0,2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 96,04 \Longrightarrow n = 97.$

b) $n = 36$, $\mu = 4$ y $\overline{X} \approx N\left(4; \dfrac{0,2}{\sqrt{36}}\right) = N(4; 0,0333)$
$P(\overline{X} \geq 4,04) = P\left(Z \geq \dfrac{4,04 - 4}{0,0333}\right) = P(Z \geq 1,2) =$
$1 - P(Z \leq 1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151$

Opción B

Problema 5.24.10 (2 puntos) La vida media de una persona medida en semanas se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 300$ semanas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas ya fallecidas, obteniendose una media muestral de 4020 semanas. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para que la longitud del intervalo anterior no sobrepase las 100 semanas?

Solución:

$$N(\mu; 300)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 4020$ y $NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{300}{\sqrt{20}} = 172,7363$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (4020 - 172,7363; 4020 + 172,7363) = (3847,2637; 4192,7363)$$

b) $E = \dfrac{100}{2} = 50 \Longrightarrow 50 = 2,575\dfrac{300}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\dfrac{2,575 \cdot 300}{50}\right)^2 = 238,7025 \Longrightarrow n = 239$

5.25. Año 2024

5.25.1. Modelo

Problema 5.25.1 ***(2 puntos)*** Se sabe que la proporción de hogares españoles con dos o más ordenadores es $p = 0,75$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 140$ hogares. Determine:

a) El número esperado de hogares que no tendrán dos o más ordenadores en la muestra elegida.

b) La probabilidad de que, en la muestra de 140 hogares, el número de ellos con dos o más ordenadores sea entre 98 y 112 hogares.

Solución:

$$B(140; 0,75)$$

a) $E[X] = np = 140 \cdot 0,75 = 105$ hogares tienen dos o más ordenadores, luego $140 - 105 = 35$ hogares no los tendrán.

b) $n = 140 > 30$, $np = 140 \cdot 0,75 = 105 > 5$ y $nq = 140 \cdot 0,25 = 35 > 5 \Longrightarrow$

$$B(140; 0,75) \overset{N(np, \sqrt{npq}}{\approx} N(105; 5,1235)$$

$P(98 \leq X \leq 112) = P\left(\dfrac{97,5 - 105}{5,1235} \leq Z \leq \dfrac{112,5 - 105}{5,1235}\right) = P(-1,46 \leq Z \leq 1,46) = P(Z \leq 1,46) - P(Z \leq -1,46) = 2P(Z \leq 1,46) - 1 = 2 \cdot 0,9279 - 1 = 0,8558$

5.25.2. Ordinaria

Problema 5.25.2 ***(2 puntos)*** La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ ml.

a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 25$, $\overline{X} = 120$ y $NC = 0,95$:
$0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,5 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,25$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,25 = 0,75 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\dfrac{8}{\sqrt{25}} = 3,136$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (120 - 3,136; 120 + 3,136) = (116,864; 123,136)$

b) $NC = 0,90$:
$0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$
$1 = 1,645\dfrac{8}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 173,1856 \Longrightarrow n = 174$

5.25.3. Ordinaria-Coincidente

Problema 5.25.3 ***(2 puntos)*** El tiempo que las películas permanecen en cartelera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 2$ semanas.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple de películas para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de una semana con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 5$ semanas. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ películas el tiempo medio que han permanecido en cartelera, $\overline{X}$, sea mayor de 6 semanas.

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $NC = 0,95$:
$0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,5 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,25$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,25 = 0,75 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\dfrac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 15,3664 \Longrightarrow n = 16$

b) $\overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (5; 0,5)$
$P(\overline{X} \ge 6) = P\left(Z \ge \dfrac{6-5}{0,5}\right) = P(Z \ge 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

www.musat.net

5.25.4. Extraordinaria

Problema 5.25.4 ***(2 puntos)*** El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año y se obtiene que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 65$ y $NC = 0,99$:
$0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\dfrac{8}{\sqrt{20}} = 4,6063$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (65 - 4,6063; 65 + 4,6063) = (60,3937; 69,6063)$

b) $\mu = 67 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(67; \dfrac{8}{\sqrt{10}}\right) = N(67; 2,53)$.
$P(65 \leq \overline{X} \leq 69) = P\left(\dfrac{65 - 67}{2,53} \leq Z \leq \dfrac{69 - 67}{2,53}\right) = P(-0,79 \leq Z \leq 0,79) =$
$P(Z \leq 0,79) - P(Z \leq -0,79) = P(Z \leq 0,79) - (1 - P(Z \leq 0,79)) = 2P(Z \leq 0,79) - 1 =$
$2 \cdot 0,7852 - 1 = 0,5704$

5.25.5. Extraordinaria-Coincidente

Problema 5.25.5 ***(2 puntos)*** Un supermercado ha determinado que el tiempo que pasa un cliente en su establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 32$. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ clientes el tiempo medio que han pasado en su establecimiento, $\overline{X}$, sea menor de 30,5 minutos.

Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $NC = 0,95$:
$0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 34,5744 \Longrightarrow n = 35$$

b) $\mu = 32 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(32; \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = N(32; 0,75)$.

$P(\overline{X} \leq 30,5) = P\left(Z \leq \frac{30,5-32}{0,75}\right) = P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

5.26. Año 2025

5.26.1. Modelo

EJERCICIO 3

(2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: a) o b).

Problema 5.26.1 Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos y ciudadanas. Para ello, se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar.

a) En el primer municipio, la proporción de personas comprometidas con el reciclaje es de $p = 0,7$. Se toma una muestra aleatoria simple de 600 personas de dicho municipio:

   1. (1 punto) Determine el número esperado de personas en la muestra elegida que no estarán comprometidas con prácticas de reciclaje.
   2. (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una normal, calcule la probabilidad de que el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432, ambos inclusive.

b) En el segundo municipio:

   1. (1,25 puntos) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 personas de las cuales 351 se declaran comprometidas con prácticas de reciclaje. Obtenga un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de personas del segundo municipio comprometidas con prácticas de reciclaje.
   2. (1,25 puntos) Asumiendo que la proporción poblacional de los comprometidos con el reciclaje en este segundo municipio es $p = 0,8$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de personas para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el margen de error en la estimación no supere el 3 % (± 3 %).

Solución:

a) En el primer municipio: $n = 600$ y $p = 0,7 \Longrightarrow B(600; 0,7)$

   1. $E[X] = np = 600 \cdot 0,7 = 420$ personas estarán comprometidas con las prácticas de reciclaje. Luego las no comprometidas con estas prácticas serán $600 - 420 = 180$ personas.
   2. Tenemos $n = 600 \geq 30$, $np = 420 > 5$ y $nq = 180 > 5$ luego:

$$B(600; 0,7) \overset{N(np,\sqrt{npq}}{\approx} N(420; 11,225)$$

$P(408 \leq X \leq 432) = P\left(\frac{407,5-420}{11,225} \leq Z \leq \frac{432,5-420}{11,225}\right) = P(-1,11 \leq Z \leq 1,11) =$
$P(Z \leq 1,11) - P(Z \leq -1,11) = 2P(Z \leq 1,11) - 1 = 2 \cdot 0,8665 - 1 = 0,733$

b) En el segundo municipio:

1. $n = 450$, $\hat{p} = \dfrac{351}{450} = 0,78$ y $NC = 0,90$:
   $0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
   $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$
   $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,645\sqrt{\dfrac{0,78 \cdot 0,22}{450}} = 0,0321$
   $IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,78-0,0321; 0,78+0,0321) = (0,7479; 0,8121) = (74,79\,\%; 81,21\,\%)$
2. $\hat{p} = 0,8$, $E = 3\,\% = 0,03$ y $NC = 95\,\%$:
   $0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
   $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
   $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,03 = 1,96\sqrt{\dfrac{0,8 \cdot 0,2}{n}} \Longrightarrow n \geq 682,9511 \Longrightarrow n = 683$ personas.

www.inusa.net

www.musat.net

Agradecimientos

- ✎ **A las Universidades de Madrid por la publicación de los exámenes oficiales en corto espacio de tiempo.**
- ✎ **A Íñigo Zunzunegui Monterrubio (https://aprendeconmigomelon.com) por sus correcciones.**
- ✎ **A María Orfila (URJC) por sus correcciones.**
- ✎ **A Paula Cabildo por el diseño de la portada y contraportada.**

www.inusat.net

www.inusat.net

Prof: Isaac Musat Hervás

Profesor de Matemáticas en el colegio Villaeuropa de Móstoles

Bachillerato y Selectividad en las dos opciones

Ferroviario en la Dirección de Cercanías de Madrid

Diferentes estudios y trabajos

Jubilado en la actualidad

La educación ha sido mi pasión, el recuerdo del aula, el olor a tiza y el pantalón manchado de polvo blanco lo llevo siempre conmigo. Las voces con las preguntas de mis alumnos y mis respuestas, acertadas o no, quedan en nuestros recuerdos valiosos. He sido un afortunado, mi trabajo ha sido mi diversión favorita.