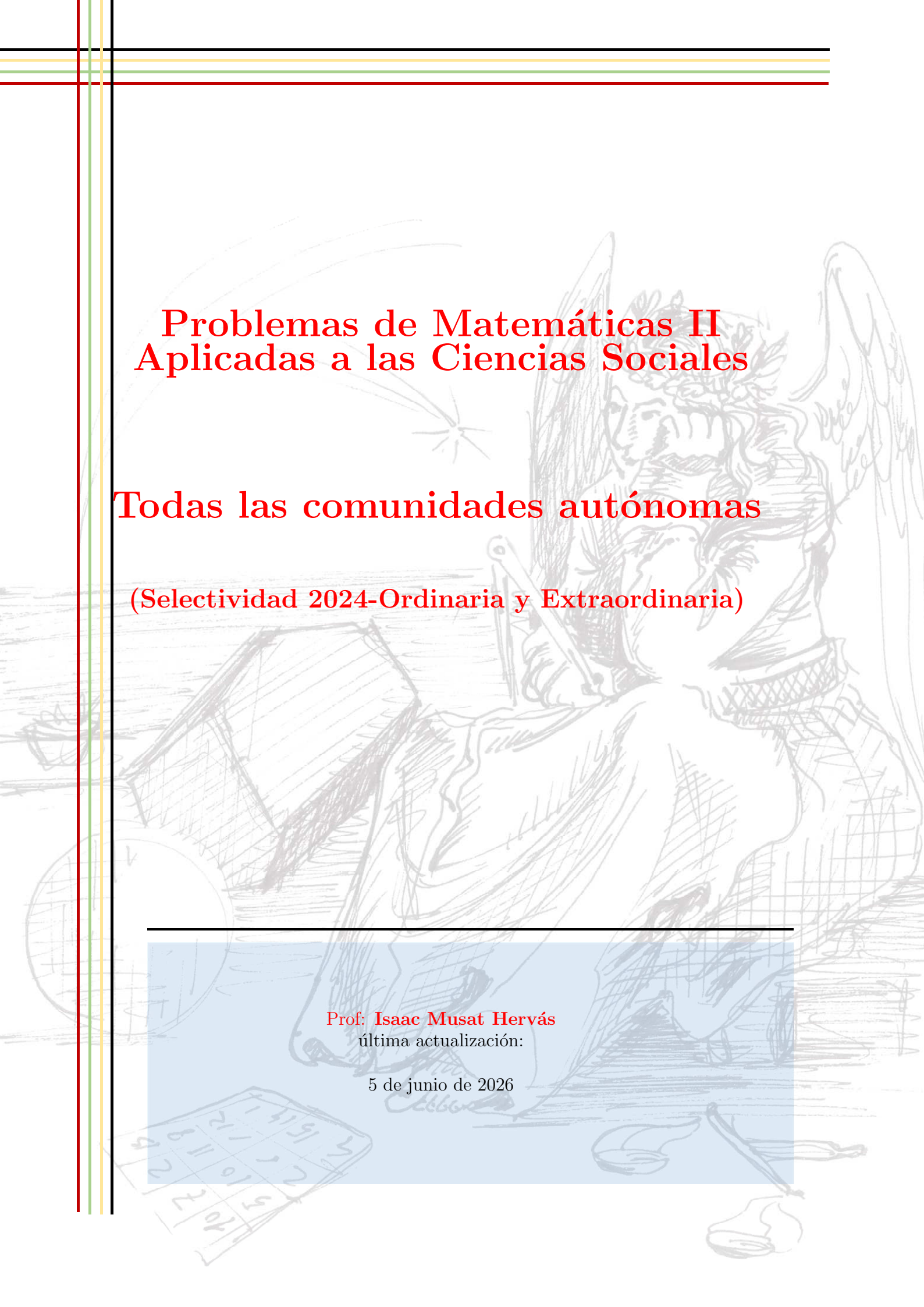


The background features a faint, artistic sketch of a winged figure, possibly an angel or a personification of knowledge, holding a large compass. In the bottom left corner, there is a sketch of a calculator. The entire page is framed by a series of horizontal and vertical lines in red, green, and yellow on the left side, and a red line at the top.

Problemas de Matemáticas II Aplicadas a las Ciencias Sociales

Todas las comunidades autónomas

(Selectividad 2024-Ordinaria y Extraordinaria)

Prof: Isaac Musat Hervás
última actualización:

5 de junio de 2026

“www.musat.net”

*Cuando las leyes de la matemática
se refieren a la realidad,
no son ciertas;
cuando son ciertas,
no se refieren a la realidad.
(Albert Einstein)
A mis amigos Lourdes y José María
Un abrazo*

Índice general

1. Andalucía	7
1.1. Ordinaria	7
1.2. Ordinaria-Coincidente	13
1.3. Ordinaria-Reserva	19
1.4. Extraordinaria	24
1.5. Extraordinaria-Coincidente	30
1.6. Extraordinaria-Reserva	36
2. Aragón	45
2.1. Ordinaria	45
2.2. Extraordinaria	49
3. Asturias	55
3.1. Ordinaria	55
3.2. Extraordinaria	62
4. Cantabria	69
4.1. Ordinaria	69
4.2. Extraordinaria	74
5. Castilla-La Mancha	81
5.1. Ordinaria	81
5.2. Extraordinaria	89
6. Castilla-León	97
6.1. Ordinaria	97
6.2. Extraordinaria	102
7. Cataluña	109
7.1. Ordinaria	109
7.2. Ordinaria-Coincidente	113
7.3. Extraordinaria	117
8. Comunidad Valenciana	123
8.1. Ordinaria	123
8.2. Extraordinaria	128

9. Extremadura	135
9.1. Ordinaria	135
9.2. Extraordinaria	140
10. Galicia	147
10.1. Ordinaria	147
10.2. Extraordinaria	152
11. Islas Baleares	157
11.1. Ordinaria	157
11.2. Extraordinaria	163
12. Islas Canarias	171
12.1. Ordinaria	171
12.2. Extraordinaria	177
13. La Rioja	183
13.1. Ordinaria	183
13.2. Extraordinaria	189
14. Madrid	195
14.1. Modelo	195
14.2. Ordinaria	201
14.3. Ordinaria-Coincidente	207
14.4. Extraordinaria	214
14.5. Extraordinaria-Coincidente	220
15. Murcia	227
15.1. Ordinaria	227
15.2. Extraordinaria	232
16. Navarra	239
16.1. Ordinaria	239
16.2. Extraordinaria	243
17. País Vasco	249
17.1. Ordinaria	249
17.2. Extraordinaria	255
18. Resúmenes teóricos	261
18.1. Álgebra	261
18.2. Análisis	264
18.3. Probabilidad	269
18.4. Estadística	272

Capítulo 1

Andalucía

1.1. Ordinaria

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
- b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
- c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Bloque A

Problema 1.1.1 (2,5 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

- a) (0,75 puntos) Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.
- b) (1,25 puntos) Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X \cdot A - B = C \cdot A$.
- c) (0,5 puntos) Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación $B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$.

Solución:

- a) $|A| = 10 - 2a = 0 \implies a = 5 \implies \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{5\}$

b) Si $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$X \cdot A - B = C \cdot A \Rightarrow X \cdot A = C \cdot A + B \Rightarrow X = (C \cdot A + B)A^{-1} = C + B \cdot A^{-1} =$$

$$(-2 \quad 1 \quad 4) + (-1 \quad 3 \quad 2) \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = (-2 \quad 1 \quad 4) + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

c) $\begin{matrix} B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B \\ 1 \times 3 \quad 3 \times 3 \quad m \times n \quad 3 \times 1 \quad 1 \times 3 \end{matrix} = \begin{matrix} B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B \\ 1 \times 3 \quad m \times n \quad 3 \times 3 \end{matrix} \stackrel{n=3}{=} \begin{matrix} B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B \\ 1 \times 3 \quad m \times 3 \end{matrix} \stackrel{m=1}{=} B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B \Rightarrow$
 $\dim(D) = 1 \times 3$

Problema 1.1.2 (2,5 puntos) Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de 30000 m³ de agua, de 5500 kg de abono y de 3000 kg de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita 1500 m³ de agua, 110 kg de abono y 80 kg de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de 100 kg de abono y 50 kg de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de 5000 kg en secano y 10000 kg en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultivar para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

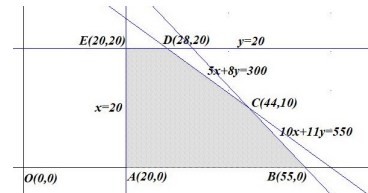
Solución:

Sean x el número de hectáreas de secano e y el número de hectáreas de regadío.

	agua	abono	fitosanitarios	producción
secano	0	100	50	5000
regadío	1500	110	80	10000
	≤ 30000	≤ 5500	≤ 3000	

Región factible:

$$\begin{cases} 1500y \leq 30000 \\ 100x + 110y \leq 5500 \\ 50x + 80y \leq 3000 \\ x \geq 20 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 20 \\ 10x + 11y \leq 550 \\ 5x + 8y \leq 300 \\ x \geq 20 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

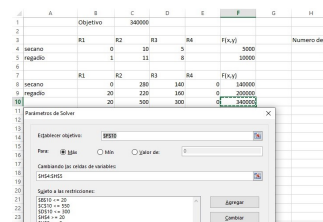


Los vértices a estudiar serán: $A(20, 0)$, $B(55, 0)$, $C(44, 10)$, $D(28, 20)$ y $E(20, 20)$.

Función objetivo: $f(x, y) = 5000x + 10000y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(20, 0) = 100000 \\ f(55, 0) = 275000 \\ f(44, 10) = 320000 \\ f(28, 20) = 340000 \leftarrow \text{máximo} \\ f(20, 20) = 300000 \end{cases}$$



La máxima producción sería de 340000 kg empleando 28 hectáreas de secano y 20 de regadío.

Bloque B

Problema 1.1.3 (2,5 puntos)

a) (1,5 puntos) Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$f(x) = (x^2 + 2)^3 \cdot e^{-2x}, \quad g(x) = \frac{\ln(1 - x^3)}{(1 - 2x^2)^2}$$

b) (1 punto) Halle los valores de a y b para que sea horizontal la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ en el punto $P(1, 2)$.

Solución:

a) $f'(x) = 6x(x^2 + 2)^2 e^{-2x} - 2(x^2 + 2)^3 e^{-2x} = 2(x^2 + 2)^2 (-x^2 + 3x - 2) e^{-2x}$

$$g'(x) = \frac{\frac{-3x^2}{1-x^3}(1-2x^2)^2 - \ln(1-x^3)(-8x(1-2x^2))}{(1-2x^2)^4} = \frac{\frac{-3x^2}{1-x^3}(1-2x^2) - \ln(1-x^3)(-8x)}{(1-2x^2)^3} = \frac{-3x^2(1-2x^2) + 8x(1-x^3)\ln(1-x^3)}{(1-x^3)(1-2x^2)^3}$$

b) $h(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b \implies h'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$

$$\begin{cases} h(1) = 2 \implies 1 + a + 3 + b = 2 \implies a + b = -2 \\ h'(1) = 0 \implies 3 + 2a + 3 = 0 \implies a = -3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases} \implies$$

$$h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

Problema 1.1.4 (2,5 puntos) La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función $v(t)$ expresada en km/h, donde t es el tiempo expresado en horas:

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ -t^2 + 32t - 140 & \text{si } 10 < t \leq 24 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Comprueba que la función v es continua y derivable.

b) (1 punto) Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) (0,75 puntos) La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y 140 Km/h, y rojo para vientos de más de 140 km/h. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa, ¿Se emitiría alerta roja?

Solución:

a) La función es continua en $[0, 10) \cup (10, 24]$ y derivable en $(0, 10) \cup (10, 24)$ por tratarse de polinomios, habrá que analizar en $t = 10$:

☛ Continuidad en $t = 10$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 10^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 10^-} (t^2 - 8t + 60) = 80 \\ \lim_{t \rightarrow 10^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} (-t^2 + 32t - 140) = 80 \\ v(10) = 80 \end{cases} \implies \lim_{t \rightarrow 10^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} v(t) = v(10) = 80 \implies$$

v continua en $t = 10 \implies v$ continua en $[0, 24]$.

• Derivabilidad en $t = 10$:

$$v'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & \text{si } 0 < t < 10 \\ -2t + 32 & \text{si } 10 < t < 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'(10^-) = 12 \\ v'(10^+) = 12 \end{cases} \Rightarrow v'(10^-) = v'(10^+) = 12 \Rightarrow v \text{ es derivable en } (0, 24).$$

• v es continua $[0, 24]$ y derivable en $(0, 24)$.

$$\text{b) } v'(t) = \begin{cases} 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4 & \text{si } 0 < t < 10 \\ -2t + 32 \Rightarrow t = 16 & \text{si } 10 < t < 24 \end{cases}$$

	$(0, 4)$	$(4, 10)$	$(10, 16)$	$(16, 24)$
$v'(t)$	-	+	+	-
$v(t)$	decreciente ↘	creciente ↗	creciente ↗	decreciente ↘

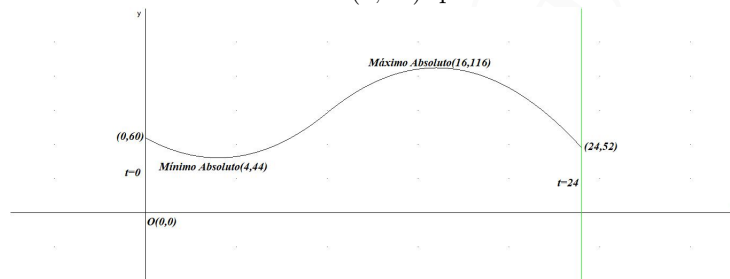
La función es creciente en el intervalo $(4, 16)$

La función es decreciente en el intervalo $(0, 4) \cup (16, 24)$.

Tenemos $v(0) = 60$, $v(4) = 44$, $v(16) = 116$ y $v(24) = 52$

Tiene un máximo relativo en $(16, 116)$ que también es absoluto.

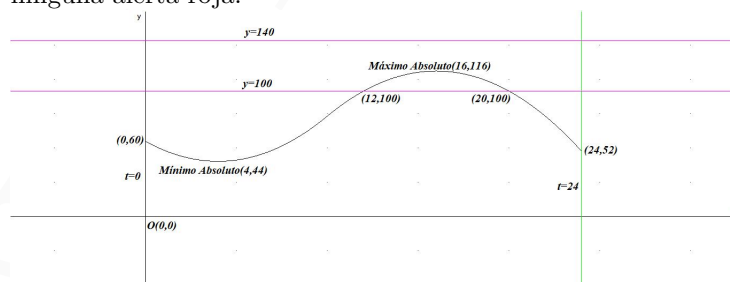
Tiene un mínimo relativo en $(4, 44)$ que también es absoluto.



$$\text{c) } v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 = 100 \Rightarrow t^2 - 8t - 40 = 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ -t^2 + 32t - 140 = 100 \Rightarrow -t^2 + 32t - 240 = 0 & \text{si } 10 < t \leq 24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = -3, 48, t = 11, 48 \text{ soluciones no válidas} & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ t = 12, t = 20 & \text{si } 10 < t \leq 24 \end{cases}$$

Se emitirá una alerta naranja a las 12 horas y durará hasta las 20 horas. No se emitirá ninguna alerta roja.



Bloque C

Problema 1.1.5 (2,5 puntos) Una agencia ha realizado un estudio acerca de la siniestralidad de los vehículos de una región. Se ha dividido a los conductores en dos grupos: *jóvenes* los menores de 30 años y *sénior* el resto de conductores. Asimismo, también se ha dividido a los vehículos en dos grupos: *nuevos* los que tienen menos de 5 años de antigüedad y *viejos* el resto de vehículos. De los 54 siniestros registrados, en 19 de ellos el vehículo implicado era *nuevos* y en 29 los conductores

eran *jóvenes*. Finalmente, 21 de los siniestros se dieron con vehículos *viejos* y conductores *jóvenes*. Se escoge uno de estos siniestros al azar.

- (1 punto) Calcule la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo*.
- (1 punto) Calcule la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo*.
- (0,5 puntos) Determine razonadamente si la siguiente afirmación es cierta: “Los siniestros de este estudio menos probables son aquellos en los que el conductor es *sénior* y el vehículo es *nuevo*”.

Solución:

Sean J *joven*, S *sénior*, N *nuevo* y V *viejo*.

	J	S	Total
N			19
V	21		
Total	29		54

 $\Rightarrow$

	J	S	Total
N	8	11	19
V	21	14	35
Total	29	25	54

- $P(S \cap V) = \frac{14}{54} = \frac{7}{27} \simeq 0,2593$
- $P(J|V) = \frac{P(J \cap V)}{P(V)} = \frac{21/54}{35/54} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} = 0,6$
- A la vista de la tabla de contingencia se observa que el menor número de siniestros se encuentra en $N \cap J$, es decir, vehículo *nuevo* y conductor *joven*, luego la afirmación de este apartado es falsa.

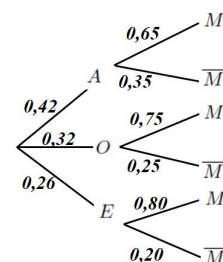
Problema 1.1.6 (2,5 puntos) Un grupo de turistas programa una visita a la Geoda de Pulpí. El 42 % de los turistas del grupo proceden de Andalucía, el 32 % de otras comunidades autónomas y el resto del extranjero. Son mayores de edad el 65 % de los visitantes que proceden de Andalucía y el 75 % de los que proceden de otras comunidades autónomas. Son menores de edad el 20 % de los visitantes extranjeros. Elegido un turista de este grupo al azar, halle la probabilidad de que:

- (1 punto) Sea mayor de edad.
- (0,5 puntos) Proceda de Andalucía y sea menor de edad.
- (1 punto) Sea extranjero sabiendo que es menor de edad.

Solución:

Sean A turista de Andalucía, O de otra Comunidad Autónoma, E extranjero, M mayores de edad y $\bar{M}$ menores de edad.

- $P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|O)P(O) + P(M|E)P(E) = 0,65 \cdot 0,42 + 0,75 \cdot 0,32 + 0,80 \cdot 0,26 = 0,721$
- $P(A \cap \bar{M}) = P(\bar{M}|A)P(A) = 0,35 \cdot 0,42 = 0,147$
- $P(E|\bar{M}) = \frac{P(\bar{M}|E)P(E)}{1 - 0,721} = \frac{0,20 \cdot 0,26}{1 - 0,721} = 0,1864$



Bloque D

Problema 1.1.7 (2,5 puntos)

- a) (1,5 puntos) Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1 , E_2 , E_3 y E_4 . En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2 . En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4 . Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.
- b) (1 punto) Dada la población $\{-3, -1, 2, 5, 7\}$, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

Solución:

- a) En la primera muestra:

$$\frac{25}{500} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 600 \Rightarrow E_2 \text{ tiene 600 individuos.}$$

En la segunda muestra:

$$\frac{80}{400} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 500 \Rightarrow E_4 \text{ tiene 500 individuos.}$$

El número total de individuos es: $500 + 600 + 400 + 500 = 2000$ individuos.

En la primera muestra la proporción es $\frac{25}{500} = \frac{1}{20} \Rightarrow$ se eligen 25 de E_1 y 30 de E_2 . En E_3 son $\frac{1}{20}400 = 20$ y E_4 son $\frac{1}{20}500 = 25$

En la segunda muestra la proporción es $\frac{80}{400} = \frac{1}{5} \Rightarrow$ se eligen $\frac{1}{5}500 = 100$ de E_1 , $\frac{1}{5}600 = 120$ de E_2 , 80 de E_3 y $\frac{1}{5}500 = 100$ de E_4 .

- b) La media de la muestra coincide con la de la población:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{-3 - 1 + 2 + 5 + 7}{5} = 2$$

La varianza poblacional es:

$$Var(X) = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{9 + 1 + 4 + 25 + 49}{5} - 4 = \frac{88}{5} - 4 = \frac{68}{5} = 13,6$$

La varianza de la distribución de las muestras de tamaño dos sería $\frac{13,6}{2} = 6,8$

Problema 1.1.8 Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.

- a) (1,25 puntos) Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95 %, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible.

- b) (0,75 puntos) Para un nivel de confianza del 97 % y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1 %.
- c) (0,5 puntos) Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.

Solución:

$$n = 2500 \quad \hat{p} = \frac{1825}{2500} = 0,73, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,27$$

a) $NC = 95 \% = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96 \sqrt{\frac{0,73 \cdot 0,27}{2500}} = 0,0174$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,73 - 0,0174; 0,73 + 0,0174) = (0,7126; 0,7474) = (71,26 \%, 74,74 \%)$$

b) $NC = 97 \% = 0,97 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Rightarrow 0,01 = 2,17 \sqrt{\frac{0,73 \cdot 0,27}{n}} \Rightarrow n \geq 9281,2419 \Rightarrow n = 9282$$

- c) Si disminuye el tamaño de la muestra aumenta el error y, por tanto, aumenta la amplitud del intervalo de confianza.

1.2. Ordinaria-Coincidente

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
- b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
- c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Bloque A

Problema 1.2.1 (2,5 puntos) Se consideran las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (1,5 puntos) Halle la matriz A que satisface la ecuación $P^{-1} \cdot A \cdot P = J$.

b) (1,25 punto) Compruebe que $A^3 = P \cdot J^3 \cdot P^{-1}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } P^{-1} \cdot A \cdot P = J &\Rightarrow A = P \cdot J \cdot P^{-1} = \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A^2 &= (P \cdot J \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot J \cdot P^{-1}) = P \cdot J^2 \cdot P^{-1} \\ A^3 &= A^2 \cdot A = (P \cdot J^2 \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot J \cdot P^{-1}) = P \cdot J^3 \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

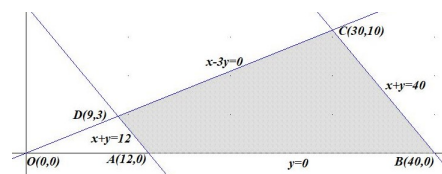
Problema 1.2.2 (2,5 puntos) A una tienda de decoración le han encargado decorar las mesas de un salón de celebraciones con centros florales y candelabros. En el salón se montan siempre entre 12 y 40 mesas. En cada mesa solo se puede colocar un centro floral o un candelabro y, además, el número de candelabros no puede ser superior a una tercera parte de los centros florales. Si el precio de cada centro floral es de 32 € y el de cada candelabro de 35 €, ¿cuántos artículos de cada tipo debe seleccionar la tienda para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos?

Solución:

Sean x el número de centros florales e y el número de candelabros.

Región factible:

$$\begin{cases} x + y \leq 40 \\ x + y \geq 12 \\ y \leq \frac{x}{3} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 40 \\ x + y \geq 12 \\ x - 3y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(12,0)$, $B(40,0)$, $C(30,10)$ y $D(9,3)$.

Función objetivo: $f(x,y) = 32x + 35y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(12,0) = 384 \\ f(40,0) = 1280 \\ f(30,10) = 1310 \leftarrow \text{máximo} \\ f(9,3) = 393 \end{cases}$$

Los máximos ingresos serían de 1310 € con 30 centros florales y 10 candelabros.

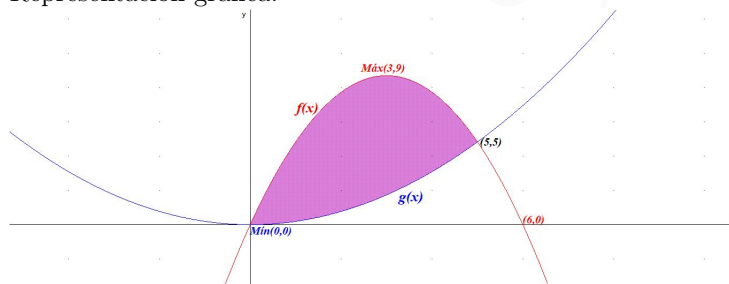
Bloque B

Problema 1.2.3 (2,5 puntos) La superficie de ampliación de un parque de atracciones, en decámetros cuadrados, coincide con el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 6x$ y $g(x) = \frac{x^2}{5}$

- a) (1 punto) Represente gráficamente la superficie de ampliación del parque de atracciones.
- b) (1,5 puntos) Si el coste para acondicionar el nuevo suelo es de 75 €/m², calcule el área de ampliación del parque y el coste total del acondicionamiento.

Solución:

- a)  la función f es una parábola que corta a los ejes coordenados en los puntos $(0, 0)$ y $(6, 0)$. Tenemos $f'(x) = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ y como $f''(x) = -2 \Rightarrow f'(3) = -2 < 0 \Rightarrow (3, 9)$ es un máximo relativo.
-  la función g es una parábola que corta a los ejes coordenados en el punto $(0, 0)$. Tenemos $f'(x) = \frac{2x}{5} = 0 \Rightarrow x = 0$ y como $f''(0) = 2 \Rightarrow f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow (0, 0)$ es un mínimo relativo.
-  Los puntos de corte de las dos gráficas: $f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 6x = \frac{x^2}{5} \Rightarrow 6x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 5$. Los puntos son $(0, 0)$ y $(5, 5)$
-  Representación gráfica:



- b) El recinto de integración es $S_1 : [0, 5]$ de $f(x) - g(x)$. El resultado de la integral será positiva al estar f por encima de g en ese intervalo.

$$S_1 = \int_0^5 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^5 \left(-x^2 + 6x - \frac{x^2}{5} \right) dx = \int_0^5 \left(6x - \frac{6x^2}{5} \right) dx = \left[3x^2 - \frac{2x^3}{5} \right]_0^5 = 25 \Rightarrow S = |S_1| = 25 \text{ Dm}^2$$

$$S = 2500 \text{ m}^2 \Rightarrow \text{Coste} = 2500 \cdot 75 = 187500 \text{ €}.$$

Problema 1.2.4 (2,5 puntos) Se consideran las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (x - 2)^2 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases} ; \quad g(x) = 1 \text{ si } -1 \leq x \leq 3$$

- a) (1 punto) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f y g en sus dominios.
- b) (1,5 puntos) Represente el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcule su área.

Solución:

- a)  La función g es continua en $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$ por ser una función constante.
-  Continuidad de f : Las ramas de la función son polinomios y, por tanto, continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2)^2 = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \quad \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)}$$

f es continua en $x = 1$ y por tanto en $[-1, 3]$.

-  Derivabilidad de f : Las ramas son polinomios y, por tanto, derivables en $(-1, 1) \cup (1, 3)$. Hay que estudiar la derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2(x-2) & \text{si } 1 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = -2 \end{cases} \xrightarrow{f'(1^-) = f'(1^+) = -2}$$

f es derivable en $x = 1 \Rightarrow f$ es derivable en $(-1, 3)$

- b)  La función f corta a los ejes en $(2, 0)$, $(0, 2)$ y pasa por el $(1, 1)$, tiene un máximo relativo en $(0, 2)$ y un mínimo relativo en $(2, 0)$.
-  la función g es una recta horizontal $y = 1$.
-  Los puntos de corte de las dos funciones son:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \begin{cases} 2 - x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x = 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

Hay dos recintos de integración $S_1 : [-1, 1]$ y $S_2 : [1, 3]$ las gráficas de la función cambian de posición de un intervalo a otro.

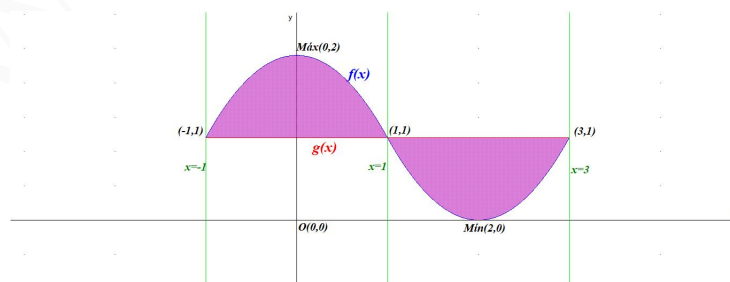
$$S_1 = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - 1) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

(La función f está por encima de g)

$$S_2 = \int_1^3 ((x-2)^2 - 1) dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3} - x \right]_1^3 = -\frac{4}{3}$$

(La función f está por debajo de g)

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \simeq 2,6667 \text{ u}^2$$



Bloque C

Problema 1.2.5 (2,5 puntos) En una encuesta realizada en una librería se ha determinado que el 45 % de sus clientes compran novelas históricas, mientras que el 40 % no compra novelas de fantasía. Además, de los clientes que compran novelas de fantasía, sólo el 30 % compran también novelas históricas. Elegido un cliente al azar, calcule la probabilidad de que:

- (0,75 puntos) Compre novelas históricas y de fantasía.
- (1 punto) No compre novelas históricas y tampoco de fantasía.
- (0,75 puntos) Compre una novela de fantasía, sabiendo que no ha comprado ninguna novela histórica.

Solución:

Sean H compra novela histórica y F compra novela de fantasía.

Tenemos: $P(H) = 0,45$, $P(\bar{F}) = 0,40$ y $P(H|F) = 0,3$.

- $P(H \cap F) = P(H|F)P(F) = P(H|F)(1 - P(\bar{F})) = 0,3 \cdot (1 - 0,4) = 0,18$
- $P(\bar{H} \cap \bar{F}) = P(\overline{H \cup F}) = 1 - P(H \cup F) = 1 - (P(H) + P(F) - P(H \cap F)) = 1 - (0,45 + 0,6 - 0,18) = 0,13$
- $P(F|\bar{H}) = \frac{P(F \cap \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{P(F) - P(H \cap F)}{1 - P(H)} = \frac{0,6 - 0,18}{0,55} = 0,7636$

Problema 1.2.6 (2,5 puntos) Una fábrica dispone de 3 máquinas A , B y C para la fabricación de una cierta pieza. El 25 % de las piezas son fabricadas por la máquina A , el 35 % por B y el resto por C . Tras un estudio se determina que el 2,05 % del total de las piezas fabricadas son defectuosas y que el 1 % de las piezas fabricadas por B son defectuosas.

- (1,25 puntos) Se selecciona una pieza al azar y resulta no ser defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que fuera fabricada por la máquina B ?
- (1,25 puntos) Si A y C tienen la misma probabilidad de fabricar una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que una pieza sea fabricada por A sabiendo que es defectuosa?

Solución:

Sean A fabricado por la máquina A , B por la B , C por la C , D defectuosa y $\bar{D}$ no defectuosa.

Tenemos $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,35$, $P(C) = 1 - (0,25 + 0,35) = 0,4$, $P(D) = 0,0205$ y

$$P(D|B) = 0,01 = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} \implies P(B \cap D) = 0,01 \cdot 0,35 = 0,0035$$

	A	B	C	total
D		0,0035		0,0205
$\bar{D}$		0,3465		0,9795
total	0,25	0,35	0,4	1

 $\implies$

	A	B	C	total
D	a	0,0035	$0,0170 - a$	0,0205
$\bar{D}$	$0,25 - a$	0,3465	$0,3830 + a$	0,9795
total	0,25	0,35	0,4	1

- $P(B|\bar{D}) = \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0,3465}{0,9795} = 0,3538$
- $P(D|A) = P(D|C) \implies \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} \implies \frac{a}{0,25} = \frac{0,0170 - a}{0,4} \implies a = 0,0065$
 $P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{a}{0,0205} = \frac{0,0065}{0,0205} = 0,3189$

Bloque D

Problema 1.2.7 (2,5 puntos) Se ha administrado un determinado medicamento a una muestra de 220 enfermos de una población que padece una cierta enfermedad y se ha observado una respuesta positiva en 165 de ellos.

- a) (1,5 puntos) Estime, mediante un intervalo de confianza del 97,5 %, la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se administrase a la población de la que se ha extraído la muestra. Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el porcentaje de enfermos que responderían positivamente al medicamento administrado es del 70 %.
- b) (1 punto) Con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea menor que el 2,5 %?

Solución:

$$n = 220 \quad \hat{p} = \frac{165}{220} = 0,75, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,25$$

$$\text{a) } NC = 97,5 \% = 0,975 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,025 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,0125$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9875 \implies z_{\alpha/2} = 2,24$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,24 \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{220}} = 0,0654$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,75 - 0,0654; 0,75 + 0,0654) = (0,6846; 0,8154) = (68,46 \%, 81,54 \%)$$

El 70 % se encuentra dentro del intervalo de confianza y podemos admitir la afirmación de que el 70 % de los enfermos reaccionarían positivamente a la medicación con una confianza del 97,5 %.

b)

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \implies 0,025 = 2,24 \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{n}} \implies n \geq 1505,28 \implies n = 1506 \text{ enfermos}$$

Problema 1.2.8 Un atleta obtiene los siguientes tiempos, en minutos, de 10 repeticiones cronometradas de una prueba:

2,71 3,84 3,26 2,28 2,86 3,08 3,07 2,46 2,54 2,58

Por experiencias anteriores se sabe que el tiempo en cada repetición sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0,36 minutos.

- a) (1,25 puntos) Calcule un intervalo de confianza para el tiempo medio de estas repeticiones con un 93,5 % de confianza.
- b) (1,25 puntos) ¿Cuántas repeticiones como mínimo se tendrán que cronometrar si se quiere obtener un error en la estimación del tiempo medio inferior a 0,05 minutos manteniendo el mismo nivel de confianza?

Solución:

$$\bar{X} = \frac{2,71 + 3,84 + 3,26 + 2,28 + 2,86 + 3,08 + 3,07 + 2,46 + 2,54 + 2,58}{10} = 2,868$$

$$N(\mu; 0,36)$$

a) $\bar{X} = 2,868$, $n = 10$ y $NC = 93,5\% = 0,935 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,065 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0325$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9675 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,845$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,845 \frac{0,36}{\sqrt{10}} = 0,21$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (2,868 - 0,21; 2,868 + 0,21) = (2,658; 3,078)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,05 = 1,845 \frac{0,36}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq 176,4647 \Rightarrow n = 177 \text{ repeticiones}$$

1.3. Ordinaria-Reserva

Bloque A

Problema 1.3.1 (2,5 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (2 puntos) Resuelva la siguiente ecuación $A \cdot B \cdot X \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) (0,5 puntos) Halle las dimensiones de las matrices D y E para que tenga sentido la igualdad

$$A \cdot D = E \cdot B$$

Solución:

a) $(AB)XC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = (AB)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} =$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1 & -1/5 \\ -4/5 & 1 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$b) \underbrace{A}_{2 \times 3} \cdot \underbrace{D}_{m \times n} = \underbrace{E}_{p \times q} \cdot \underbrace{B}_{3 \times 2} \xrightarrow{m=3} \underbrace{AD}_{2 \times n} \xrightarrow{p=2 \text{ y } q=3} \underbrace{EB}_{2 \times 2} \Rightarrow n=2 \Rightarrow \underbrace{D}_{3 \times 2} \text{ y } \underbrace{E}_{2 \times 3}.$$

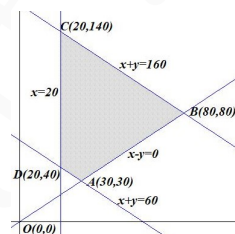
Problema 1.3.2 (2,5 puntos) Un centro de bricolaje, que almacena bidones de pintura de interior y de exterior, cuenta con una capacidad máxima de almacenaje de 160 bidones. Por una cuestión logística, en el almacén deben mantenerse al menos 60 bidones, siendo como mínimo 20 bidones de pintura interior. Además, el número de bidones de pintura exterior almacenados no podrá ser inferior al de pintura interior. Se sabe que el gasto diario por almacenar cada bidón de pintura interior es de 1,50€ y por cada bidón de pintura exterior es de 0,90€. Calcule cuántos bidones de cada tipo se deben almacenar para que el gasto diario sea mínimo e indique cuánto supone ese gasto mínimo.

Solución:

Sean x el número de bidones de pintura interior e y el número de bidones de pintura exterior.

Región factible:

$$\begin{cases} x + y \leq 160 \\ x + y \geq 60 \\ x \leq y \\ x \geq 20 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 160 \\ x + y \geq 60 \\ x - y \leq 0 \\ x \geq 20 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(30,30)$, $B(80,80)$, $C(20,140)$ y $D(20,40)$.

Función objetivo: $f(x,y) = 1,5x + 0,9y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(30,30) = 72 \\ f(80,80) = 192 \\ f(20,140) = 156 \\ f(20,40) = 66 \leftarrow \text{mínimo} \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo	66					
2		R1	R2	R3	R4	f(x,y)		Numero de
3	interior	1	1	1	1	1,5		30
4	exterior	1	1	1	1	0,9		40
5		R1	R2	R3	R4	f(x,y)		
6	interior	20	20	20	0	30		
7	exterior	40	40	40	0	36		
8		60	60	20	0	80		

Los mínimos gastos serían de 66 € con 20 bidones de pintura interior y 40 de exterior.

Bloque B

Problema 1.3.3 (2,5 puntos) Se desea analizar la evolución de la población de una localidad. Se conoce que la función f aproxima el número de habitantes que tiene la población para cada tiempo t , medido en meses, con $t \in [0,60]$. El crecimiento de esta población viene dado por la siguiente expresión:

$$f'(t) = 400 + 30\sqrt{t}$$

También se sabe que la población en la actualidad, $t = 0$, es de 90000 habitantes.

a) (1,25 puntos) ¿Cuál será la población dentro de 9 meses?

b) (0,75 puntos) Calcule $\int_9^{16} f'(t) dt$ e interprete el resultado.

c) (0,5 puntos) Si se entrega una ayuda de 150 € por cada nuevo habitante durante los tres primeros años, calcule la cuantía total aproximada de la ayuda que recibirá la localidad.

Solución:

- a) $f(t) = \int (400 + 30t^{1/2}) dt = 400t + \frac{30t^{3/2}}{3/2} + C = 400t + 20t\sqrt{t} + C$
 $f(0) = 90000 \implies C = 90000 \implies f(t) = 400t + 20t\sqrt{t} + 90000$
 $f(9) = 94140$ habitantes.
- b) $\int_9^{16} f'(t) dt = f(16) - f(9) = 97680 - 94140 = 3540$ habitantes. Es decir, entre los meses 9 y 16 hubo un incremento de 3540 habitantes.
- c) 3 años son 36 meses y la ayuda será $150(f(36) - f(0)) = 150(108720 - 90000) = 2808000$ €

Problema 1.3.4 (2,5 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 + e^x & \text{si } x < 1 \\ x^2 + ax + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determine el valor de a para que la función f sea continua en $\mathbb{R}$. Para ese valor de a , ¿es f derivable?
- b) (0,5 puntos) Para $a = -3$, calcule la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.
- c) (1 punto) Si $a = -3$, represente la región limitada por la gráfica de f , las rectas $x = 2$, $x = 4$ y el eje de abscisas. Calcule el área de dicha región.

Solución:

- a) La rama $x < 1$ es una exponencial, luego es continua y la rama $x \geq 1$ es un polinomio, luego es continua. Imponemos la continuidad en $x = 1$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3 + e^x) = 3 + e \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + 2) = 3 + a \\ f(1) = 3 + a \end{cases} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)}$$

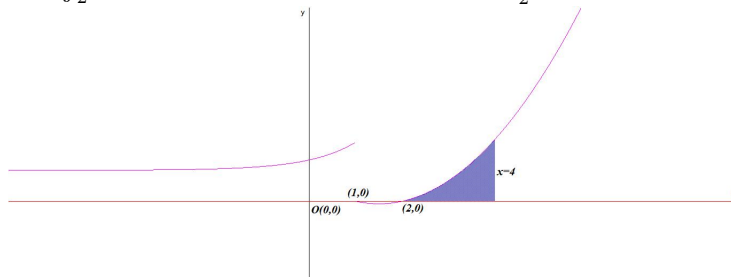
$3 + e = 3 + a \implies a = e$. Luego la función es continua en $\mathbb{R}$ cuando $a = e$ y sería la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 + e^x & \text{si } x < 1 \\ x^2 + ex + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ 2x + e & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como $f'(1^-) = e \neq f'(1^+) = 2 + e \implies f$ no es derivable en $x = 1$, si lo sería en $\mathbb{R} - \{1\}$

- b) Si $a = -3 \implies f(x) = 3 + e^x$ cuando $x < 1$.
 $f(0) = 4 \implies (a, b) = (0, 4)$ es el punto de tangencia.
 $f'(x) = e^x \implies m = f'(0) = 1$
 $y - b = m(x - a) \implies y - 4 = 1 \cdot (x - 0) \implies y = x + 4$.
- c) Si $a = -3 \implies f(x) = x^2 - 3x + 2$ cuando $x \geq 1$.
 $x^2 - 3x + 2 = 0 \implies x = 1$ y $x = 2$, luego solo tenemos un recinto de integración $S : [2, 4]$:

$$S = \int_2^4 (x^2 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_2^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \simeq 4,6666$$



Bloque C

Problema 1.3.5 (2,5 puntos) Una tienda vende ropa de tallas M , L y XL . Se sabe que el 65 % de sus clientes son mujeres. El 50 % de las mujeres que compran ropa en esa tienda usan la talla M y el 10 % la talla XL . De los hombres, el 40 % usan la talla L y el 45 % la XL .

- (1 punto) ¿Qué porcentaje de mujeres que compran ropa en esa tienda no usan la talla XL ?
- (0,75 puntos) Halle el porcentaje de clientes que no usan la talla L .
- (0,75 puntos) De los clientes que usan la talla M , ¿qué porcentaje son mujeres?

Solución:

Sean H hombre, $\bar{H}$ mujer, M usa la talla M , L usa la talla L y XL usa la talla XL .

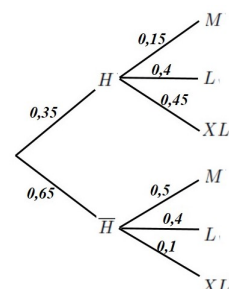
$$a) P(\bar{XL}|\bar{H}) = P(M|\bar{H}) + P(L|\bar{H}) = 0,5 + 0,4 = 0,9 \implies 90\%$$

$$b) P(L) = P(L|H)P(H) + P(L|\bar{H})P(\bar{H}) = 0,4 \cdot 0,35 + 0,4 \cdot 0,65 = 0,4$$

$$P(\bar{L}) = 1 - P(L) = 1 - 0,4 = 0,6 \implies 60\%$$

$$c) P(\bar{H}|M) = \frac{P(M|\bar{H})P(\bar{H})}{P(M)} = \frac{P(M|\bar{H})P(\bar{H})}{P(M|H)P(H) + P(M|\bar{H})P(\bar{H})} =$$

$$\frac{0,5 \cdot 0,65}{0,15 \cdot 0,35 + 0,5 \cdot 0,65} \simeq 0,8609 \implies 86,09\%$$



Problema 1.3.6 (2,5 puntos) El 75 % de los estudiantes de un centro aprueba la asignatura A y un 55 % aprueba la asignatura B . Además, un 35 % del total de estudiantes aprueba ambas. Elegido un estudiante al azar de este centro, calcule las siguientes probabilidades:

- (1 punto) No apruebe B sabiendo que ha aprobado A .
- (0,25 puntos) Aprueba alguna de estas asignaturas.
- (0,5 puntos) No apruebe ni A ni B .
- (0,5 puntos) Haya aprobado A si se sabe que ha aprobado alguna de estas dos asignaturas.
- (0,25 puntos) Estudie si los sucesos “aprobar A ” y “aprobar B ” son independientes.

Solución:

Sean A aprueba A y B aprueba B .

Tenemos $P(A) = 0,75$, $P(B) = 0,55$ y $P(A \cap B) = 0,35$.

- a) $P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,75 - 0,35}{0,75} = \frac{8}{15} \simeq 0,5333$
- b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,75 + 0,55 - 0,35 = 0,95.$
- c) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,95 = 0,05.$
- d) $P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,75}{0,95} = \frac{15}{19} \simeq 0,7895$
- e) $P(A \cap B) = 0,35 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,75 \cdot 0,55 = 0,4125 \implies A \text{ y } B \text{ no son independientes.}$

Bloque D

Problema 1.3.7 (2,5 puntos)

- a) (1,25 puntos) Para estimar la proporción de mujeres matriculadas en carreras STEM en Andalucía, se realiza una encuesta a 2000 universitarias andaluzas elegidas al azar y se obtiene que 710 de ellas están matriculadas en carreras STEM. Con un nivel de confianza del 96,5 %, calcule un intervalo de confianza para estimar la proporción de mujeres matriculadas en carreras STEM en Andalucía.
- b) (1,25 puntos) En otra comunidad autónoma, al seleccionar una muestra de universitarias, se observa que el porcentaje de mujeres matriculadas en carreras STEM es del 37 %. Con un nivel de confianza del 98 %, calcule el tamaño mínimo de esa nueva muestra para que el error máximo cometido sea del 1,5 %.

Solución:

a) $n = 2000 \quad \hat{p} = \frac{710}{2000} = 0,355, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,645$
 $NC = 96,5 \% = 0,965 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,035 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,0175$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9825 \implies z_{\alpha/2} = 2,11$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,11 \sqrt{\frac{0,355 \cdot 0,645}{2000}} = 0,0226$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,355 - 0,0226; 0,355 + 0,0226) = (0,3324; 0,3776) = (33,24 \%, 37,76 \%)$$

b) $\hat{p} = 0,37, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,63$
 $NC = 98 \% = 0,98 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,02 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,01$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99 \implies z_{\alpha/2} = 2,33$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \implies 0,015 = 2,33 \sqrt{\frac{0,37 \cdot 0,63}{n}} \implies n \geq 5624,3404 \implies n = 5625 \text{ mujeres}$$

Problema 1.3.8 (2,5 puntos) La cuota mensual de las hipotecas en una ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica igual a 140€.

- a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de hipotecas en dicha ciudad y se obtiene que el intervalo de confianza al 95 % para la media de las cuotas mensuales es (517,65 ; 551,95). Calcule el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
- b) (0,5 puntos) Escogida otra muestra de 78 hipotecas en esa ciudad y con un nivel de confianza del 97 %, calcule el error máximo cometido para estimar la cuota mensual media.
- c) (1 punto) Si en otra ciudad la cuota mensual de las hipotecas sigue una distribución Normal de media 540€ y desviación típica de 150€, calcule la probabilidad de que la cuota de una hipoteca elegida al azar en dicha ciudad esté comprendida entre 600 y 700 euros.

Solución:

$$N(\mu; 140)$$

- a) $\bar{X} = \frac{517,65 + 551,95}{2} = 534,8$
 $NC = 95\% = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$
 $P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$
 $E = \frac{551,95 - 517,65}{2} = 17,5$
 $E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 17,5 = 1,96 \frac{140}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq 245,8624 \Rightarrow n = 246$ hipotecas
- b) $n = 78$ y $NC = 97\% = 0,97 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015$
 $P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$
 $E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \frac{140}{\sqrt{78}} = 34,3986$
- c) $N(540; 150)$
 $P(600 \leq X \leq 700) = P\left(\frac{600 - 540}{150} \leq Z \leq \frac{700 - 540}{150}\right) = P(0,4 \leq Z \leq 1,07) =$
 $P(Z \leq 1,07) - P(Z \leq 0,4) = 0,8577 - 0,6554 = 0,2023$

1.4. Extraordinaria

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
- b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
- c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Bloque A

Problema 1.4.1 (2,5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

resuelva la ecuación $A^2 \cdot X + A^4 = A$

Solución:

$$A^2 \cdot X + A^4 = A \Rightarrow A^2(X + A^2) = A \Rightarrow A(X + A^2) = I \Rightarrow X + A^2 = A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} - A^2 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -8/9 & 2/9 & -40/9 \\ 40/9 & -10/9 & 2/9 \\ 38/9 & 40/9 & -8/9 \end{pmatrix}$$

Problema 1.4.2 (2,5 puntos) Una empresa tiene un presupuesto de 78000 € para promocionar un producto y quiere contratar la emisión de anuncios por radio y televisión. El coste de emisión de un anuncio de radio es de 2400 € y de un anuncio de televisión de 3600 €. La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10 y que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total. Si la emisión de un anuncio de radio llega a 34000 personas y de un anuncio de televisión a 72000 personas, ¿cuántas emisiones de cada tipo debe contratar para que la audiencia sea la mayor posible? ¿A cuánto ascendería dicha audiencia?

Solución:

Sea x anuncios en la radio e y en la televisión.

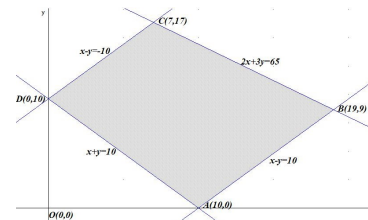
	coste	audiencia
radio	2400	34000
televisión	3600	72000
	≤ 78000	

$$S : \begin{cases} 2400x + 3600y \leq 78000 \\ x + y \geq 10 \\ |x - y| \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 65 \\ x + y \geq 10 \\ x - y \leq 10 \\ x - y \geq -10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(10,0)$, $B(19,9)$, $C(7,17)$ y $D(0,10)$.

$$f(x, y) = 34000x + 72000y$$

$$\begin{cases} f(10,0) = 340000 \\ f(19,9) = 1294000 \\ f(7,17) = 1462000 \Leftarrow \text{Máximo} \\ f(0,10) = 720000 \end{cases} \Rightarrow$$



Solución por solver :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4	radio	B1	B2	B3	B4	F1(x)		Número de
5	tv	3	1	-1	-1	72000		7
6								
7								
8	radio	B1	B2	B3	B4	F1(x)		
9	tv	3	1	-1	-1	72000		
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								

La mayor audiencia sería de 1462000 personas con 7 anuncios en la radio y 17 en la televisión.

Bloque B

Problema 1.4.3 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{2x-6}{2-x}$

- a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.
- b) (0,75 puntos) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.
- c) (1 punto) Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

Solución:

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

Como cociente de polinomios la función es continua y derivable en todos los puntos reales salvo los que anula el denominador, es decir la función es continua y derivable en todo el dominio de la función $\mathbb{R} - \{2\}$.

Asíntotas:

☛ Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-6}{2-x} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-6}{2-x} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

☛ Horizontales: $y = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-6}{2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-6}{2-x} = -2$$

☛ Oblicuas: no hay por haber horizontales.

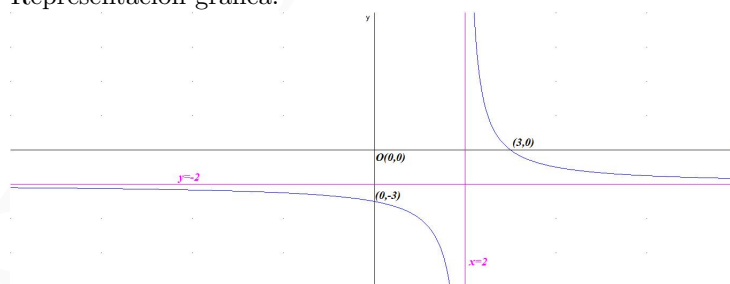
- b) $f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2} < 0 \Rightarrow f$ es siempre decreciente en $\mathbb{R} - \{2\}$. Como $f'(x) \neq 0 \Rightarrow$ la función no tiene extremos relativos.

- c) Puntos de corte:

☛ Con el eje OY hacemos $x = 0 \Rightarrow (0, -3)$

☛ Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3, 0)$

Representación gráfica:



Problema 1.4.4 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

- a) (0,75 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad.
- b) (0,75 puntos) Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
- c) (1 punto) Represente la región del plano limitada por la gráfica de f , las rectas $x = 3$, $x = 5$ y el eje de abscisas. Calcule su área.

Solución:

- a) Las dos ramas de la función son polinomios y, por tanto, continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 4$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (-x^2 + 4x + 3) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (2x - 5) = 3 \\ f(4) = 3 \end{array} \right. \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) = 3$$

f es continua en $x = 4 \implies f$ es continua en $\mathbb{R}$

Las dos ramas de la función son polinomios y, por tanto, derivables. Hay que estudiar la derivabilidad en $x = 4$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x < 4 \\ 2 & \text{si } x > 4 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(4^-) = -4 \\ f'(4^+) = 2 \end{cases} \quad \underline{\underline{f'(4^-) \neq f'(4^+)}}$$

f no es derivable en $x = 4 \implies f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{4\}$

$$b) f'(x) = \begin{cases} -2x + 4 = 0 \implies x = 2 & \text{si } x < 4 \\ 2 \neq 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ y decreciente en el $(2, 4)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(2, 7)$ y un mínimo relativo en el $(4, 3)$.

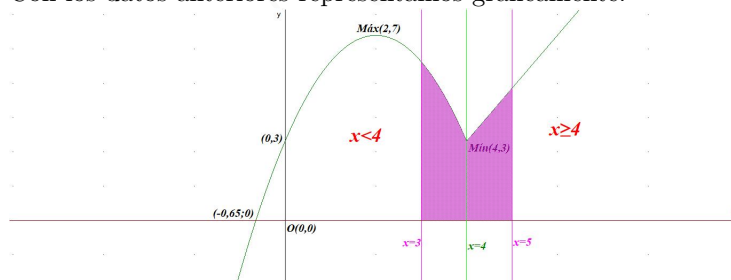
- c) Calculamos los puntos de corte:

☛ Con el eje OY hacemos $x = 0 \implies (0, 3)$

☛ Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies$

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 3 = 0 \implies x = -0,65; 4,65 \text{ no válida} & \text{si } x < 4 \\ 2x - 5 = 0 \implies x = 2,5 \text{ no válida} & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \implies (-0,65; 0)$$

Con los datos anteriores representamos gráficamente:



El área será:

$$S = \int_3^4 (-x^2 + 4x + 3) dx + \int_4^5 (2x - 5) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right) \Big|_3^4 + (x^2 - 5x) \Big|_4^5 = \frac{14}{3} + 4 = \frac{26}{3} \simeq 8,6667 \text{ u}^2$$

Bloque C

Problema 1.4.5 (2,5 puntos) El 7 % de los habitantes de una ciudad no tienen ni coche ni moto. De entre los que tienen coche el 36 % tienen moto y de entre los que no tienen coche el 28 % no tienen moto. Se elige al azar un habitante de esa ciudad.

- (1 punto) Calcule la probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos.
- (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que al menos tenga uno de los dos vehículos.
- (0,5 puntos) Si tiene coche, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga moto?
- (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “tener coche” y “no tener moto”? ¿Son incompatibles?

Solución:

Sean C tiene coche y M tiene moto. Tenemos:

$$\bullet P(\overline{C} \cap \overline{M}) = 0,07, P(M|C) = 0,36 \text{ y } P(\overline{M}|\overline{C}) = 0,28$$

$$\bullet P(\overline{M}|\overline{C}) = \frac{P(\overline{C} \cap \overline{M})}{P(\overline{C})} \Rightarrow P(\overline{C}) = \frac{P(\overline{C} \cap \overline{M})}{P(\overline{M}|\overline{C})} = \frac{0,07}{0,28} = 0,25$$

$$\text{Luego } P(\overline{C}) = 0,25 \Rightarrow P(C) = 0,75$$

$$\bullet P(M|C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} \Rightarrow P(M \cap C) = P(M|C)P(C) = 0,36 \cdot 0,75 = 0,27$$

$$\bullet P(\overline{C} \cap \overline{M}) = P(\overline{C \cup M}) = 1 - P(C \cup M) = 0,07 \Rightarrow P(C \cup M) = 0,93$$

$$\bullet P(C \cup M) = P(C) + P(M) - P(C \cap M) \Rightarrow P(M) = P(C \cup M) + P(C \cap M) - P(C) = 0,93 + 0,27 - 0,75 = 0,45$$

$$\text{Luego } P(M) = 0,45 \Rightarrow P(\overline{M}) = 0,55$$

$$\text{a) } P(M \cap \overline{C}) + P(\overline{M} \cap C) = P(M) - P(M \cap C) + P(C) - P(M \cap C) = P(M) + P(C) - 2P(M \cap C) = 0,45 + 0,75 - 2 \cdot 0,27 = 0,66$$

$$\text{b) } P(C \cup M) = 0,93$$

$$\text{c) } P(\overline{M}|C) = \frac{P(\overline{M} \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C) - P(C \cap M)}{P(C)} = \frac{0,75 - 0,27}{0,75} = 0,64$$

$$\text{d) } P(C) \cdot P(\overline{M}) = 0,75 \cdot 0,55 = 0,4125 \text{ y } P(C \cap \overline{M}) = P(C) - P(C \cap M) = 0,75 - 0,27 = 0,48. \\ \text{Luego } P(C \cap \overline{M}) \neq P(C) \cdot P(\overline{M}) \Rightarrow C \text{ y } \overline{M} \text{ no son independientes.} \\ \text{Como } P(C \cap \overline{M}) \neq 0 \Rightarrow C \text{ y } \overline{M} \text{ no son incompatibles.}$$

Problema 1.4.6 (2,5 puntos) Se ha realizado un estudio a personas que están teletrabajando actualmente. De estos, el 72 % trabajan por cuenta ajena con contrato indefinido, el 11 % lo hacen por cuenta ajena con contrato temporal y el resto trabajan por cuenta propia. El 87 % de los que tienen contrato indefinido y el 86 % de los que trabajan por cuenta propia piensan que el teletrabajo mejora la conciliación familiar. Además, este estudio ha revelado que el 12,51 % de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar. Seleccionado un teletrabajador al azar, determine la probabilidad de que:

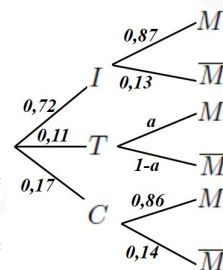
- (1,5 puntos) Opine que el teletrabajo si mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal.
- (1 punto) No esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar.

Solución:

Sean I trabaja con contrato indefinido, T con contrato temporal, C cuenta propia, M mejora la conciliación familiar y $\bar{M}$ no mejora la conciliación familiar.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\bar{M}) &= 0,1251 \implies P(M) = 1 - 0,1251 = 0,8749 \\ P(M) &= P(M|I)P(I) + P(M|T)P(T) + P(M|C)P(C) \implies \\ 0,8749 &= 0,87 \cdot 0,72 + a \cdot 0,11 + 0,86 \cdot 0,17 \implies \\ a &= P(M|T) = 0,93 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(I \cup T|M) &= \frac{P((I \cup T) \cap M)}{P(M)} = \frac{P((I \cap M) \cup (T \cap M))}{P(M)} = \\ \frac{P(M|I)P(I) + P(M|T)P(T)}{P(M)} &= \frac{0,87 \cdot 0,72 + 0,93 \cdot 0,11}{0,8749} = \\ 0,8329 \end{aligned}$$

**Bloque D**

Problema 1.4.7 (2,5 puntos) La altura de un cierto tipo de plantas de maíz sigue una distribución Normal de media 145 cm y desviación típica 22 cm.

- (1 punto) ¿Qué porcentaje de plantas tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm?
- (0,5 puntos) ¿Qué altura, como mínimo, debe tener una planta para estar entre el 50 % de las más altas?
- (1 punto) Se selecciona una muestra aleatoria de 16 plantas. Halle la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm.

Solución:

$$N(145; 22)$$

- $P(135 \leq X \leq 155) = P\left(\frac{135 - 145}{22} \leq Z \leq \frac{155 - 145}{22}\right) = P(-0,45 \leq Z \leq 0,45) =$
 $P(Z \leq 0,45) - P(Z \leq -0,45) = P(Z \leq 0,45) - (1 - P(Z \leq 0,45)) = 2P(Z \leq 0,45) - 1 =$
 $2 \cdot 0,6736 - 1 = 0,3472 \implies 34,72 \%$
- Por la simetría de la distribución normal el 50 % corresponde a la media de la distribución, es decir, 145 cm de altura como mínimo.
- $n = 16 \implies \bar{X} \overset{N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\approx} N(145; 5,5)$
 $P(140 \leq \bar{X} \leq 151) = P\left(\frac{140 - 145}{5,5} \leq Z \leq \frac{151 - 145}{5,5}\right) = P(-0,91 \leq Z \leq 1,09) =$
 $P(Z \leq 1,09) - P(Z \leq -0,91) = P(Z \leq 1,09) - (1 - P(Z \leq 0,91)) =$
 $0,8621 - (1 - 0,8186) = 0,6807$

Problema 1.4.8 (2,5 puntos) Se desea estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 300 viajeros, obteniéndose que 12 de ellos viajan con su mascota.

- (1,25 puntos) Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97 %, para estimar la proporción de personas que viajan con su mascota
- (1,25 puntos) Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuántas personas que viajan en tren deberán seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2 %?

Solución:

$$n = 300 \quad \hat{p} = \frac{12}{300} = 0,04, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,96$$

$$\text{a) } NC = 97\% = 0,97 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,03 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,015$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \implies z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,17 \sqrt{\frac{0,04 \cdot 0,96}{300}} = 0,0246$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,04 - 0,0246; 0,04 + 0,0246) = (0,0154; 0,0646) = (1,54\%, 6,46\%)$$

$$\text{b) } E = 0,02, \quad NC = 0,95 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,05 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \implies Z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$0,02 = 1,96 \sqrt{\frac{0,04 \cdot 0,96}{n}} \implies n > \left(\frac{1,96}{0,02} \right)^2 (0,04 \cdot 0,96) = 368,7936 \implies$$

$$n = 369$$

1.5. Extraordinaria-Coincidente

Bloque A

Problema 1.5.1 (2,5 puntos) Se consideran las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } V = \begin{pmatrix} 5 - a^2 \\ a - 1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \text{ siendo } a \text{ un número real.}$$

$$\text{a) } (0,75 \text{ puntos}) \text{ Halle el valor de } a \text{ para que se verifique que } M^t \cdot V = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}^t.$$

$$\text{b) } (1,25 \text{ puntos}) \text{ Calcule } M^{-1} \text{ y resuelva la ecuación matricial } X \cdot M - I_3 = N.$$

$$\text{c) } (0,5 \text{ puntos}) \text{ Razone si las operaciones } 2 \cdot V \cdot N^t \text{ y } (N + M^t) \cdot V \text{ se pueden realizar y, en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante.}$$

Solución:

$$\text{a) } M^t \cdot V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 - a^2 \\ a - 1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{pmatrix} 2a + 3 \\ a^2 + a - 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \implies a = 1$$

$$b) M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot M - I_3 = N \Rightarrow X = (N + I_3)M^{-1} =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $2 \cdot \underbrace{V}_{3 \times 1} \cdot \underbrace{N^t}_{3 \times 3}$ no se pueden multiplicar.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \cdot \underbrace{V}_{3 \times 1} = \underbrace{(N + M^t)}_{3 \times 3} \cdot \underbrace{V}_{3 \times 1} = \underbrace{(N + M^t) \cdot V}_{3 \times 1}$$

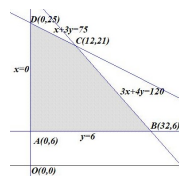
Problema 1.5.2 (2,5 puntos) Para un proyecto de software libre se dispone de 150 desarrolladores de Javascript y 120 de Python. Es necesario formar equipos de trabajo de dos tipos. El primer tipo estará compuesto por 2 desarrolladores de Javascript y 3 de Python, y el segundo tipo por 6 de Javascript y 4 de Python. Se requieren al menos 6 equipos del segundo tipo. Determine cuántos equipos de cada tipo se podrán formar para obtener el mayor número de equipos posible. En tal caso, ¿cuántos desarrolladores de Javascript y Python se utilizarán?

Solución:

Sea x el número de equipos de primer tipo e y el número de equipos de segundo tipo.

	Javascript	Python
primer tipo	2	3
segundo tipo	6	4
	≤ 150	≤ 120

$$S : \begin{cases} 2x + 6y \leq 150 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y \leq 75 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 6 \end{cases}$$

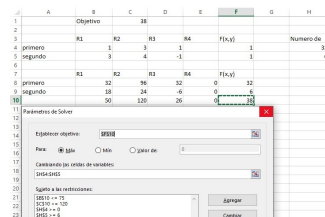


Los vértices a estudiar serán: $A(0,6)$, $B(32,6)$, $C(12,21)$ y $D(0,25)$.

$$f(x, y) = x + y$$

$$\begin{cases} f(0,6) = 6 \\ f(32,6) = 38 \leftarrow \text{Máximo} \\ f(12,21) = 33 \\ f(0,25) = 25 \end{cases} \Rightarrow$$

Solución por solver :



El mayor número de equipos será 38, de los cuales 32 serán del primer tipo y 6 del segundo.

Bloque B

Problema 1.5.3 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = 1 - \frac{4}{3+x}$

a) (0,75 puntos) Halle el dominio de f y los puntos de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas.

- b) (0,5 puntos) Calcule las asíntotas de la función f .
- c) (0,75 puntos) Obtenga los puntos donde la recta tangente a la gráfica de f tiene pendiente 1.
- d) (0,5 puntos) Estudie la curvatura de la función f .

Solución:

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$.

Corte con el eje de ordenadas OY : hacemos $x = 0 \Rightarrow \left(0, -\frac{1}{3}\right)$

Corte con el eje de abscisas OX : hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow (1, 0)$

- b) $\bullet$ Verticales: $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(1 - \frac{4}{3+x}\right) = \left[1 - \frac{4}{0^-}\right] = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -3^+} \left(1 - \frac{4}{3+x}\right) = \left[1 - \frac{4}{0^+}\right] = -\infty$$

- $\bullet$ Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{3+x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{3+x}\right) = 1$$

- $\bullet$ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

- c) $f'(x) = \frac{4}{(3+x)^2} = 1 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ y } x = -5$

Los puntos de tangencia son $A(-1, f(-1)) = A(-1, -1)$ y $B(-5, f(-5)) = B(-5, 3)$

La tangente en A es $y + 1 = 1(x + 1) \Rightarrow y = x$.

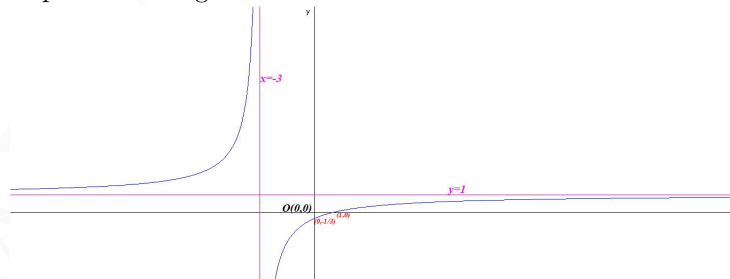
La tangente en B es $y - 3 = 1(x + 5) \Rightarrow y = x + 8$.

- d) $f'(x) = -\frac{8}{(3+x)^3}$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, \infty)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	cóncava $\cup$	convexa $\cap$

La función es cóncava $\cup$ el intervalo $(-\infty, -3)$ y convexa $\cap$ en el $(-3, \infty)$

Representación gráfica:



Problema 1.5.4 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de f .
- b) (1,5 punto) Represente el recinto limitado por las rectas $y = 2x$, $x = -1$, $x = 1$ y la gráfica de f . Calcule su área.

Solución:

- a) Las dos ramas de la función son polinomios y, por tanto, continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 2x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 0}$$

f es continua en $x = 2 \implies f$ es continua en $\mathbb{R}$

Las dos ramas de la función son polinomios y, por tanto, derivables. Hay que estudiar la derivabilidad en $x = 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(2^-) = -2 \\ f'(2^+) = 2 \end{cases} \xrightarrow{f'(2^-) \neq f'(2^+)}$$

f no es derivable en $x = 2 \implies f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$

- b) Como $x \in [-1, 1]$ está en la primera rama $f(x) = -x^2 + 2x$ que corta a $y = 2x$ en $f(x) = -x^2 + 2x = 2x \implies x = 0$.

Tenemos dos recintos de integración $S_1 : [-1, 0]$ y $S_2 : [0, 1]$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x - 2x) dx = \int_{-1}^0 (-x^2) dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{3}$$

La integral es negativa por estar la recta por encima de la función.

$$S_2 = \int_0^1 (-x^2 + 2x - 2x) dx = \int_0^1 (-x^2) dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

La integral es positiva por estar la recta por debajo de la función.

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \simeq 0,6667 \text{ u}^2$$

Calculamos los puntos de corte:

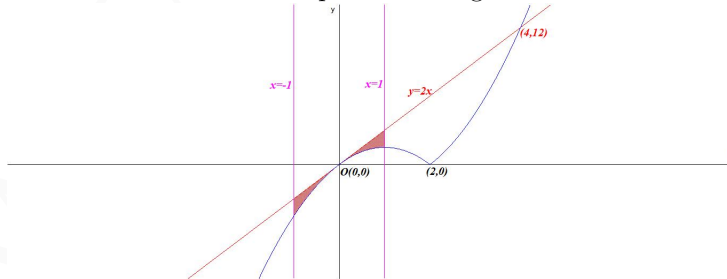
☛ Con el eje OY hacemos $x = 0 \implies (0, -2)$

☛ Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies$

$$\begin{cases} -x^2 + 2x = 0 \implies x = 0; \quad x = 2 \text{ no válida} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x = 0 \implies x = 0 \text{ no válida } x = 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \implies (0, 0) \text{ y } (2, 0)$$

La recta $y = 2x$ corta con f en $\begin{cases} -x^2 + 2x = 2x \implies x = 0 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x = 2x \implies x = 0 \text{ no válida } x = 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \implies (4, 12)$

Con los datos anteriores representamos gráficamente:



Bloque C

Problema 1.5.5 (2,5 puntos) Un grupo de 15 amigas se van a pasar un fin de semana a una casa rural. Al llegar reparten las tareas: 3 irán al mercado, 2 a comprar leña y el resto se quedarán en la casa. Para realizar el reparto de las tareas se introducen 15 papeletas en una urna de las que 3 tienen la palabra “mercado”, 2 la palabra “leña” y el resto la palabra “casa”. Cada una coge una papeleta de forma ordenada y sin reposición. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) (0,75 puntos) Las dos primeras papeletas extraídas tienen escrita la palabra “mercado”.
- b) (0,75 puntos) Las dos primeras papeletas extraídas no tienen escrita la palabra “casa”.
- c) (1 punto) Si la segunda papeleta extraída tiene escrita “leña”, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también tenga escrita “leña”?

Solución:

Sean M_1 sacan “mercado” en la primera extracción, L_1 sacan “leña” en la primera extracción, C_1 sacan “casa” en la primera extracción, M_2 sacan “mercado” en la segunda extracción, L_2 sacan “leña” en la segunda extracción y C_2 sacan “casa” en la segunda extracción. La extracción segunda es sin reemplazamiento.

a) $P(M_1 \cap M_2) = \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{1}{35} \simeq 0,0286$

b) $P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21} \simeq 0,0952$

c)
$$P(L_1|L_2) = \frac{P(L_1 \cap L_2)}{P(L_2)} = \frac{\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{14}}{\frac{1}{35} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{14} + \frac{10}{15} \cdot \frac{2}{14}} = \frac{\frac{1}{105}}{\frac{1}{35} + \frac{2}{21} + \frac{10}{15} \cdot \frac{2}{14}} = \frac{\frac{1}{105}}{\frac{2}{21}} = \frac{1}{14} \simeq 0,0714$$

Problema 1.5.6 (2,5 puntos) Una empresa ha instalado 50 alarmas de las que 30 son de tipo básico y el resto de tipo superior. Se sabe que el 80 % de todas las alarmas no presentan incidencias y que de las de tipo básico un 30 % presentan alguna incidencia. Se elige al azar una de estas alarmas. Calcule la probabilidad de que:

- a) (1 punto) Sea de tipo básico y no presente incidencias.
- b) (0,5 puntos) No presente incidencias siendo de tipo superior.
- c) (0,5 puntos) Teniendo incidencias sea de tipo básico.
- d) (0,5 puntos) Sea de “tipo básico y tenga incidencias” o sea de “tipo superior y no tenga incidencias”.

Solución:

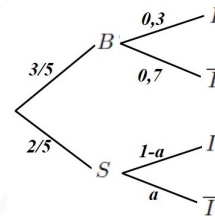
Sean B alarma de tipo básico, S alarma de tipo superior, I produce incidencia y $\bar{I}$ no produce incidencia.

$$a) P(B \cap \bar{I}) = P(\bar{I}|B)P(B) = 0,7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{50} = 0,42$$

$$b) P(\bar{I}) = P(\bar{I}|B)P(B) + P(\bar{I}|S)P(S) = 0,7 \cdot \frac{3}{5} + a \cdot \frac{2}{5} = 0,8 \Rightarrow \\ a = P(\bar{I}|S) = \frac{19}{20} = 0,95$$

$$c) P(B|I) = \frac{P(I|B)P(B)}{P(I)} = \frac{0,3 \cdot \frac{3}{5}}{1 - 0,8} = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$d) P((B \cap I) \cup (S \cap \bar{I})) = P(B \cap I) + P(S \cap \bar{I}) - P((B \cap I) \cap (S \cap \bar{I})) = \\ P(I|B)P(B) + P(\bar{I}|S)P(S) - P(\emptyset) = 0,3 \cdot \frac{3}{5} + 0,95 \cdot \frac{2}{5} = \frac{14}{25} = 0,56$$



Bloque D

Problema 1.5.7 (2,5 puntos) Una tienda decide evaluar a su empresa de transporte para determinar si está cumpliendo con sus estándares de calidad. Para ello, se analizan 400 de sus envíos y se comprueba que 370 han sido entregados a tiempo.

- a) (1,5 puntos) Si los estándares de calidad de dicha empresa requieren que al menos el 88 % de los envíos sean entregados a tiempo, estime, mediante un intervalo de confianza al 93 % si la empresa de transporte cumple con los estándares de calidad.
- b) (1 punto) Si se mantiene la misma proporción muestral y se aumenta el nivel de confianza al 95 %, ¿cuántos envíos, como mínimo, habrá que analizar para que la amplitud del intervalo de confianza sea inferior a 0,03?

Solución:

$$\hat{p} = \frac{370}{400} = 0,925 \Rightarrow \hat{p} = 1 - \hat{p} = 0,075$$

$$a) NC = 93 \% = 0,93 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,07 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,035$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,965 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,81$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,81 \sqrt{\frac{0,925 \cdot 0,075}{400}} = 0,0238$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,925 - 0,0238; 0,925 + 0,0238) = (0,9012; 0,9488) = (90,12 \%, 94,88 \%)$$

Con una confianza del 93 % se podemos asegurar que el porcentaje de envíos que llegan a tiempo se encuentra entre el 90,12 % y el 94,88 %. Luego se cumplen los estándares de calidad.

$$b) NC = 95 \% = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \quad P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow \\ z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96 \sqrt{\frac{0,925 \cdot 0,075}{n}} = 0,015 \Rightarrow n \geq 1184,4933 \Rightarrow n = 1185$$

Problema 1.5.8 (2,5 puntos)

- a) (1,25 puntos) El tiempo que un carpintero necesita para fabricar una mesa sigue una distribución Normal de media 60 minutos y desviación típica de 30 minutos. Si en un mes ese carpintero ha fabricado 100 mesas, calcule la probabilidad de que el tiempo medio de fabricación de las mesas de esa muestra sea superior a 54 minutos.

- b) (1,25 puntos) El tiempo que un carpintero necesita para fabricar una puerta sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica de 20 minutos. En un mes ese carpintero ha fabricado 25 puertas, obteniendo un tiempo medio de fabricación de 40 minutos. Halle un intervalo de confianza para el tiempo medio de fabricación de una puerta con un nivel de confianza del 97 %. Determine el error máximo cometido al realizar la estimación.

Solución:

- a) $N(60, 30), n = 100 \Rightarrow \bar{X} \overset{N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\approx} N(60; 3)$
 $P(\bar{X} \geq 54) = P\left(Z \geq \frac{54 - 60}{3}\right) = P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) = 0,9772$
- b) $N(\mu, 20), n = 25, \bar{X} = 40$ y $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015$
 $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$
 $E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \frac{20}{\sqrt{25}} = 8,68$
 $IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (40 - 8,68; 40 + 8,68) = (31,32; 48,68)$

1.6. Extraordinaria-Reserva

Bloque A

Problema 1.6.1 (2,5 puntos) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Determine las matrices X e Y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$2X - Y = 4A, \quad X + Y = B$$

- b) (0,75 puntos) Calcule la matriz C^{2024}
- c) (0,75 puntos) Si D es una matriz de dimensión 2×3 , razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y, en aquellos casos en los que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:

$$A^t \cdot B + D \cdot D^t \quad D \cdot B^t + A \quad D^t \cdot A^t + D.$$

Solución:

a) $\begin{cases} 2X - Y = 4A \\ X + Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{4A + B}{3} \\ Y = \frac{-4A + 2B}{3} \end{cases}$

$$X = \frac{4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{-4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \dots, C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2024 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \underbrace{A^t}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{B}_{2 \times 2} + \underbrace{D}_{2 \times 3} \cdot \underbrace{D^t}_{3 \times 2} = \underbrace{A^t \cdot B}_{2 \times 2} + \underbrace{D \cdot D^t}_{2 \times 2} = \underbrace{A^t \cdot B + D \cdot D^t}_{2 \times 2} \Rightarrow \text{Si se puede hacer.}$$

$$\underbrace{D}_{2 \times 3} \cdot \underbrace{B^t}_{2 \times 2} + \underbrace{A}_{2 \times 2} \Rightarrow \text{No se puede hacer } D \cdot B^t.$$

$$\underbrace{D^t}_{3 \times 2} \cdot \underbrace{A^t}_{2 \times 2} + \underbrace{D}_{2 \times 3} = \underbrace{D^t \cdot A^t}_{3 \times 2} + \underbrace{D}_{2 \times 3} \Rightarrow \text{No se puede hacer la suma.}$$

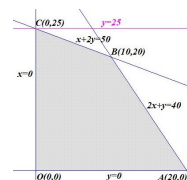
Problema 1.6.2 (2,5 puntos) Un joyero desea fabricar dos tipos de pulseras, A y B , y para ello dispone de 50 g de oro, 40 g de platino y 25 g de plata. Para fabricar las del tipo A necesita 1 g de oro y 2 g de platino, mientras que para las del tipo B requiere 2 g de oro, 1 g de platino y 1 g de plata. Cada pulsera del tipo A se vende por 150 € y cada una del tipo B por 200 €. Si se vende toda la producción, ¿cuántas pulseras de cada tipo debe fabricar para maximizar los ingresos y a cuánto ascienden éstos? ¿Qué cantidad de cada metal sobrará cuando se fabrique el número de joyas que proporciona el máximo beneficio?

Solución:

Sea x cantidad de pulseras A e y pulseras B .

	Au	Pt	Ag	Precio
A	1	2	0	150
B	2	1	1	200
	≤ 50	≤ 40	≤ 25	

$$S : \begin{cases} x + 2y \leq 50 \\ 2x + y \leq 40 \\ y \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

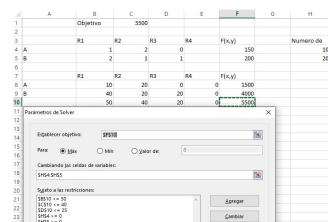


Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(20,0)$, $B(10,20)$ y $C(0,25)$.

Solución por solver :

$$f(x, y) = 150x + 200y$$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(20,0) = 3000 \\ f(10,20) = 5500 \Leftarrow \text{Máximo} \\ f(0,25) = 5000 \end{cases} \Rightarrow$$



La mayor venta sería de 5500 € con 10 pulseras del tipo A y 20 de la B .

	Au	Pt	Ag
10A	10	20	0
20B	40	20	20
total	50	40	20
existencias	50	40	25
sobrante	0	0	5

La cantidad de material utilizado sería $10A + 20B$:

Sobrarían 5 g de plata, el oro y el platino se emplearían en su totalidad.

Bloque B

Problema 1.6.3 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x-1}{3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ con

a y b números reales.

- a) (1,5 puntos) Determine los valores de a y b para que f sea continua. Para dichos valores, estudie la derivabilidad de f .
- b) (1 punto) Para $a = 5$ y $b = 2$, represente el recinto limitado por la gráfica de f , las rectas $x = 2$, $x = 4$ y el eje OX . Calcule su área.

Solución:

- a) Dos ramas de la función son polinomios y, por tanto, continuas y la segunda no contiene el cero y también es continua. Hay que estudiar la continuidad en $x = 1$ y $x = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax - 1) = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b}{x} = b \\ f(1) = a \end{array} \right. \quad \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)}$$

f es continua en $x = 1$ si $a = b$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{b}{x} = \frac{b}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{3} = \frac{2}{3} \\ f(3) = \frac{2}{3} \end{array} \right. \quad \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)}$$

f es continua en $x = 3$ si $b = 2$

Luego la función es continua en $\mathbb{R}$ si $a = b = 2$.

Por las mismas razones de la continuidad la función es derivable en las tres ramas, hay que estudiar la derivabilidad en $x = 1$ y $x = 3$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } 1 < x < 3 \\ \frac{1}{3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{En } x = 1 : \left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 4 \\ f'(1^+) = -2 \end{array} \right. \xrightarrow{f'(1^-) \neq f'(1^+)} f \text{ no es derivable en } x = 1$$

$$\text{En } x = 3 : \left\{ \begin{array}{l} f'(3^-) = -\frac{2}{9} \\ f'(3^+) = \frac{1}{3} \end{array} \right. \xrightarrow{f'(3^-) \neq f'(3^+)} f \text{ no es derivable en } x = 3.$$

En conclusión: para $a = b = 2$ la función es derivable en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$

b) Entre $x = 2$ y $x = 4$ la función es $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x-1}{3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Como se vió en el apartado anterior la función sería continua en el intervalo $[2, 4]$.

Buscamos si hay puntos de corte con el eje de abscisas:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} = 0 \text{ sin solución} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x-1}{3} = 0 \implies x = 1 \text{ no válida} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Luego la función no corta al eje OX en el intervalo $[2, 4]$.

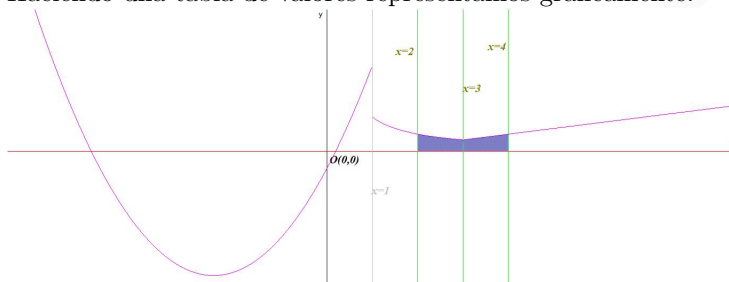
Habrá dos recintos $S_1 : [2, 3]$ de $f_1(x) = \frac{2}{x}$ y $S_2 : [3, 4]$ de $f_2(x) = \frac{x-1}{3}$

$$S_1 = \int_2^3 \frac{2}{x} dx = 2 \ln x \Big|_2^3 = 2 \ln 3 - 2 \ln 2$$

$$S_2 = \int_3^4 \frac{x-1}{3} dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_3^4 = \frac{5}{6}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 2 \ln \frac{3}{2} + \frac{5}{6} \simeq 1,6443 \text{ u}^2$$

Haciendo una tabla de valores representamos gráficamente:



Problema 1.6.4 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- (1,5 puntos) Estudie la continuidad, derivabilidad y monotonía de f . Represente gráficamente dicha función.
- (1 punto) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f , las rectas $x = 0$, $x = 4$ y el eje OX .

Solución:

- Continuidad: La rama $x < 2$ es un polinomio y, por tanto, continua. La rama $x > 2$ es una fracción cuyo denominador se anula en $x = 1$ que no pertenece a esa rama y es continua. Luego f es continua en las dos ramas y hay que estudiar la continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 1 \\ f(2) = 1 \end{cases} \quad \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)} \quad$$

f es continua en $x = 2 \implies f$ continua en $\mathbb{R}$.

- Derivabilidad: La rama $x < 2$ es un polinomio y, por tanto, derivable. La rama $x > 2$ es una fracción cuyo denominador se anula en $x = 1$ que no pertenece a esa rama y es derivable. Luego f es derivable en las dos ramas y hay que estudiar la derivabilidad en $x = 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 2 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(2^-) = -1 \\ f'(2^+) = -1 \end{cases} \xrightarrow{f'(2^-) = f'(2^+) = -1} f \text{ es derivable en } x = 2. \text{ Luego } f \text{ es derivable en } \mathbb{R}.$$

- Monotonía:

$$f'(x) = \begin{cases} -x + 1 = 0 \implies x = 1 & \text{si } x < 2 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} < 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \implies$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘

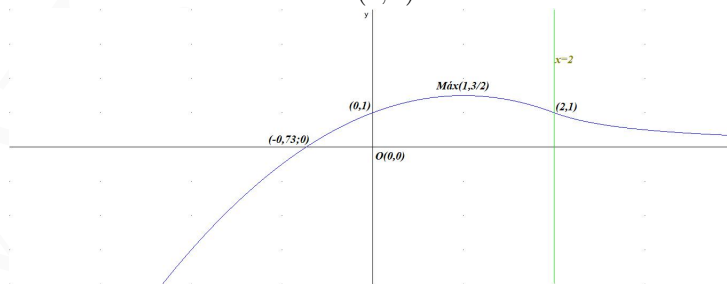
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el $(1, \infty)$, con un máximo relativo en $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

- Representación gráfica:

Los puntos de corte de f son:

$$\text{Con } OX \implies \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0 \implies x = -0,73, \quad x = x,73 \text{ no válida} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} = 0 \text{ sin solución} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Con OY : hacemos $x = 0 \implies (0, 1)$.

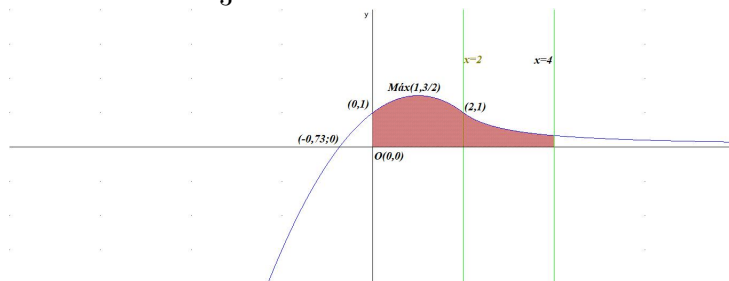


- b) Por lo visto en el apartado anterior hay dos recintos de integración $S_1 : [0, 2]$ de $f_1 = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ y $S_2 : [2, 4]$ de $f_2 = \frac{1}{x-1}$.

$$S_1 = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$S_2 = \int_2^4 \frac{1}{x-1} dx = \ln(x-1) \Big|_2^4 = \ln 3$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{8}{3} + \ln 3 \simeq 3,7653 u^2$$



Bloque C

Problema 1.6.5 (2,5 puntos) En cierta localidad el 30 % de los habitantes profesan la religión A y el 50 % profesan otras religiones diferentes de A . De los que profesan la religión A el 40 % son mujeres. De las mujeres el 25 % profesa la religión A . Se elige un habitante al azar de esa localidad. Calcule la probabilidad de que:

- (0,5 puntos) No profese ninguna religión.
- (1 punto) Sea hombre.
- (1 punto) Solo verifique uno de los siguientes sucesos: “profesa la religión A ”; “es mujer”.

Solución:

Sean A profesa la religión A , B profesan otras religiones y M es mujer y H es hombre.

Tenemos: $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$, $P(M|A) = 0,4$ y $P(A|M) = 0,25$

$$P(M|A) = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap M) = P(M|A)P(A) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$$

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} \Rightarrow P(M) = \frac{P(A \cap M)}{P(A|M)} = \frac{0,12}{0,25} = 0,48$$

- Suponemos que un habitante no practica dos religiones a la vez, es decir, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$
 $P(A \cap B) = 0$
 $P(\overline{A \cup B}) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,3 + 0,5 - 0) = 0,2$
- $P(H) = 1 - P(M) = 1 - 0,48 = 0,52$
- $P(A \cap \overline{M}) + P(\overline{A} \cap M) = P(A) + P(M) - 2P(A \cap M) = 0,3 + 0,48 - 0,24 = 0,54$

Problema 1.6.6 (2,5 puntos) En una empresa, el 30 % de los empleados ejercen de economistas y el 25 % ejercen de abogados. El 75 % de los economistas y el 60 % de los abogados ocupan puestos directivos, mientras que, de los empleados que no ejercen ni de economistas ni de abogados, el 15 % ocupa un puesto directivo.

Seleccionado un empleado al azar de esta empresa, calcule la probabilidad de que:

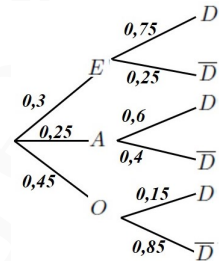
- (1,5 puntos) No ocupe un puesto directivo.
- (1 punto) Ejercza de economista sabiendo que ocupa un puesto directivo.

Solución:

Sean E economistas, A abogados, O otros, D directivo y $\bar{D}$ no es directivo.

$$\text{a) } P(\bar{D}) = P(\bar{D}|E)P(E) + P(\bar{D}|A)P(A) + P(\bar{D}|O)P(O) = 0,25 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,25 + 0,85 \cdot 0,45 = 0,5575$$

$$\text{b) } P(E|D) = \frac{P(D|E)P(E)}{P(D)} = \frac{0,75 \cdot 0,3}{1 - 0,5575} = 0,5085$$

**Bloque D**

Problema 1.6.7 (2,5 puntos) En un invernadero de Almería se realiza un estudio sobre dos de sus productos, melones y sandías.

- a) (1 punto) De los 4000 melones recolectados en un determinado periodo, 1420 son de la variedad A , 980 de la B , 720 de la C y el resto de la D . Si se selecciona una muestra de 200 de estos melones, ¿cuál debe ser la composición que debe tener dicha muestra si se realiza mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional?
- b) (1,5 puntos) El peso de las sandías sigue una distribución Normal de media 3,85 kg y desviación típica 1,32 kg. Se selecciona, de forma aleatoria, una muestra de 121 sandías.
- b.1 (0,5 puntos) Indique la distribución que sigue la media muestral del peso de las sandías.
- b.2 (1 punto) Calcule la probabilidad de que el peso medio de la muestra esté comprendido entre 3,6 kg y 4 kg.

Solución:

- a) Tenemos 1420 de la variedad A , 980 de la B , 720 de la C y $4000 - (1420 + 980 + 720) = 880$ de la D . Si queremos tomar una muestra de 200 melones tendríamos:

☛ De la variedad A : $\frac{1420}{4000} \cdot 200 = 71$

☛ De la variedad B : $\frac{980}{4000} \cdot 200 = 49$

☛ De la variedad C : $\frac{720}{4000} \cdot 200 = 36$

☛ De la variedad D : $\frac{880}{4000} \cdot 200 = 44$

- b) $N(3,85; 1,32)$ y $n = 121$

b.1 $\bar{X} \overset{N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\approx} N(3,85; 0,12)$

b.2 $P(3,6 \leq \bar{X} \leq 4) = P\left(\frac{3,6 - 3,85}{0,12} \leq Z \leq \frac{4 - 3,85}{0,12}\right) = P(-2,08 \leq Z \leq 1,25) = P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq -2,08) = P(Z \leq 1,25) - (1 - P(Z \leq 2,08)) = 0,8944 - (1 - 0,9812) = 0,8756$

Problema 1.6.8 (2,5 puntos) Una empresa farmacéutica desea revisar la efectividad de un nuevo medicamento antipirético (reduce la fiebre). Se conoce que el tiempo en el que este medicamento comienza a hacer efecto sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica de 5 minutos. Para estimar la media poblacional, se ha seleccionado una muestra aleatoria de 10 individuos con fiebre y tras administrarse el medicamento, se han anotado los tiempos en los que comienza a remitir. Los tiempos obtenidos, en minutos, fueron: 20, 25, 30, 35, 35, 20, 20, 25, 30, 30

- a) (1,5 puntos) Determine un intervalo, con un nivel de confianza del 98% para estimar el tiempo medio de respuesta de este medicamento. Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el tiempo medio en el que el medicamento comienza a hacer efecto es superior a 35 minutos.
- b) (1 punto) Un estudio posterior ha revelado que el tiempo de respuesta a este medicamento sigue una ley Normal de media 27,2 minutos y desviación típica de 5 minutos. Determine la probabilidad de que a un paciente con fiebre que ha ingerido el medicamento no le haya hecho efecto hasta pasados 20 minutos.

Solución:

$$N(\mu; 5), n = 10 \text{ y } \bar{X} = \frac{20 + 25 + 30 + 35 + 35 + 20 + 20 + 25 + 30 + 30}{10} = 27$$

$$a) NC = 98\% = 0,98 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,02 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,01$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99 \implies z_{\alpha/2} = 2,325$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325 \frac{5}{\sqrt{10}} = 3,6761$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (27 - 3,6761; 27 + 3,6761) = (23,3239; 30,6761)$$

No se admite la hipótesis de que el medicamento tarde en hacer el efecto más de 35 minutos, ya que no está en el intervalo de confianza.

$$b) N(27,2; 5).$$

$$P(X \geq 20) = P\left(Z \geq \frac{20 - 27,2}{5}\right) = P(Z \geq -1,44) = P(Z \leq 1,44) = 0,9251$$

“www.musat.net”

Capítulo 2

Aragón

2.1. Ordinaria

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma por tres.

Problema 2.1.1 (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

- a) (5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $AX + 3B = C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X .
- b) (5 puntos) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones: de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2,50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?

Solución:

a) $A \cdot X + 3B = C \implies m = 2 \text{ y } n = 3 \implies X_{2 \times 3}$
Como $|A| = -1 \implies \exists A^{-1}$.
 $AX + 3B = C \implies AX = C - 3B \implies X = A^{-1}(C - 3B) =$
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 14 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

- b) Sean x las participaciones de 10 euros vendidas, y las de 25 euros y z las de 5 euros.

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ 10x + 25y + 5z = 7100 \\ x + y + z = 430 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 430 \\ 2x - y = 0 \\ 2x + 5y + z = 1420 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 110 \\ y = 220 \\ z = 100 \end{cases} \implies$$

$$\text{una ganancia de } \begin{cases} 110 \cdot 2,50 = 275\text{€} \\ 220 \cdot 5 = 1100\text{€} \\ 100 \cdot 1 = 100\text{€} \end{cases} \quad \text{en total } 275 + 1100 + 100 = 1475\text{€}$$

Resolvemos el sistema matricialmente:

$$AX = B \implies X = A^{-1}B \implies$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 220 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Problema 2.1.2 (10 puntos) Una empresa produce dos productos, A y B , con ganancias de 30 € y 40 € por unidad producida, respectivamente. La producción de A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material, mientras que la producción de B requiere 2 horas de mano de obra y 3 unidades de material. Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material. Además, debido a requisitos de distribución, se establece que la producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos. Se pide:

- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la ganancia total y a cuánto ascendería dicha ganancia.
- (2 puntos) Considerando la región factible del apartado a) y una nueva función objetivo dada por: $\max f(x, y) = 30x + by$, donde b es un valor desconocido. Razone que $(40, 40)$ no puede ser solución óptima del nuevo problema. Análogo con $(20, 20)$.

Solución:

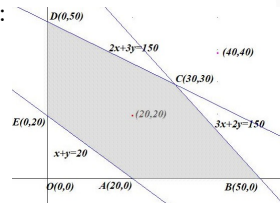
Sea x el n.º de productos A e y el n.º de productos B .

	horas	unidades	ganancia
A	3	2	30
B	2	3	40
	≤ 150	≤ 150	

- a) $f(x, y) = 30x + 40y$ en el recinto S :

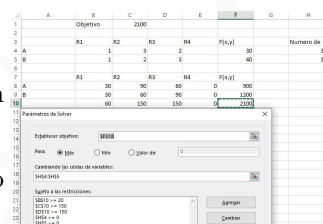
$$\begin{cases} x + y \geq 20 \\ 3x + 2y \leq 150 \\ 2x + 3y \leq 150 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{Los v\u00e9rtices a estudiar ser\u00e1n:}$$

$A(20, 0)$, $B(50, 0)$, $C(30, 30)$, $D(0, 50)$ y $E(0, 20)$.



$$\begin{cases} f(20, 0) = 600 \\ f(50, 0) = 1500 \\ f(30, 30) = 2100 \\ f(0, 50) = 2000 \\ f(0, 20) = 800 \end{cases} \Rightarrow$$

Soluci\u00f3n por solver :



La m\u00e1xima ganancia ser\u00e1 de 2100\u20ac y se alcanza con 30 unidades de A y 30 de B .

- b) El punto $(40, 40)$ est\u00e1 fuera de la regi\u00f3n factible y no puede ser soluci\u00f3n del problema planteado.
El punto $(20, 20)$ s\u00ed se encuentra dentro de la regi\u00f3n factible y pertenecer\u00eda al conjunto de soluciones, pero no ser\u00eda la \u00f3ptima.

Problema 2.1.3 (10 puntos) Dada la funci\u00f3n $f(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50$, $0 \leq x \leq 8$.

- a) (4 puntos) Calcule el valor m\u00e1ximo y m\u00ednimo de $f(x)$ cuando $x \in [0, 8]$ y la abscisa donde se obtienen dichos valores, especificando si se corresponde con extremos relativos y/o absolutos.
b) (3 puntos) $\dot{f}(x)$ tiene alg\u00fan punto de inflexi\u00f3n? Analice la concavidad y convexidad de $f(x)$.
c) (3 puntos) Calcule $\int_1^3 f(x) dx$.

Soluci\u00f3n:

- a) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 40 > 0 \Rightarrow$ no hay extremos relativos, la funci\u00f3n es siempre creciente. Tenemos $f(0) = 50 \Rightarrow$ hay un m\u00ednimo absoluto en $(0, 50)$ y $f(8) = 306 \Rightarrow$ hay un m\u00e1ximo absoluto en $(8, 306)$
b) $f''(x) = 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$ como $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(3) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = 3$ es un punto de inflexi\u00f3n $(3, 116)$.

	$(0, 3)$	$(3, 8)$
$f''(t)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	c\u00f3ncava $\cup$

La funci\u00f3n es convexa $\cap$ en el intervalo $(0, 3)$ y c\u00f3ncava $\cup$ en el $(3, 8)$

c)

$$\int_1^3 (x^3 - 9x^2 + 40x + 50) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 20x^2 + 50x \right]_1^3 = \frac{1077}{4} - \frac{269}{4} = 202$$

Problema 2.1.4 (10 puntos) La obsolescencia tecnol\u00f3gica implica una disminuci\u00f3n del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t) > 0$ viene dado por $V(t) = 200 - \frac{100t}{10 + 2t}$ \u20ac, siendo t los a\u00f1os transcurridos desde la compra del dispositivo.

- a) (3 puntos) Calcule el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.
- b) (4 puntos) Calcule $V'(t)$ y justifique que $V(t)$ es decreciente. Utilice esta conclusión y los resultados obtenidos en a) para argumentar que no será posible que el valor de $V(t)$ sea igual a 125 €.
- c) (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el dispositivo tenga un valor de 175 €?

Solución:

- a) $V(0) = 200$ € en su valor inicial y en un horizonte infinito $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(200 - \frac{100t}{10 + 2t} \right) = 200 - 50 = 150$ €
- b) $V'(t) = -\frac{250}{(t+5)^2} < 0 \implies V(t)$ es decreciente en todo el dominio de la función.
Por el apartado anterior la función decrecerá infinitamente pero no llegará a los 125 €.
- c) $V(t) = 200 - \frac{100t}{10 + 2t} = 175 \implies \frac{100t}{10 + 2t} = 25 \implies t = 5$ años

Problema 2.1.5 (10 puntos) Juan va a hacer un examen de Geografía que tiene 4 preguntas. Juan piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0,7 y que cada pregunta es independiente de las demás.

- a) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas?
- b) (4 puntos) Juan aprobará el examen si contesta, al menos, 2 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Juan de aprobar el examen?
- c) (3 puntos) Si Juan ha aprobado el examen, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho contestando correctamente todas las preguntas?

Solución:

$$B(4; 0, 7)$$

- a) $P(X = 4) = \binom{4}{4} 0,7^4 \cdot 0,3^0 = 0,2401$.
- b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$
 $1 - \left(\binom{4}{0} 0,7^0 \cdot 0,3^4 + \binom{4}{1} 0,7^1 \cdot 0,3^3 \right) = 0,9163$.
- c) $P(X = 4 | X \geq 2) = \frac{P(\{X = 4\} \cap \{X \geq 2\})}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X = 4)}{P(X \geq 2)} = \frac{0,2401}{0,9163} = 0,2620$

Problema 2.1.6 (10 puntos) En una ciudad se presentan dos personas a la alcaldía: Rupérez y García.

- a) (5 puntos) Se ha realizado una encuesta sobre la intención de voto, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria simple de 200 votantes y 120 de ellos van a votar a Rupérez, mientras que el resto votarán a García. Calcule un intervalo de confianza a nivel 98 % para la proporción de votantes de la ciudad que votarán a Rupérez.
- b) (2 puntos) El periódico de la ciudad afirma que Rupérez obtendrá un 75 % de los votos. A la vista de los resultados del apartado a), ¿es razonable tal afirmación?

- c) (3 puntos) Una vez realizada la votación, Rupérez ha ganado con el 62 % de los votos. Si elegimos a 3 votantes con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez.

Solución:

$$p = \frac{120}{200} = 0,6 \quad q = 1 - p = 1 - \frac{80}{200} = 0,4 \quad n = 200$$

a) $NC = 98 \% = 0,98 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,325$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,325 \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{200}} = 0,0805$$

$$IC = (p - E, p + E) = (0,6 - 0,0805; 0,6 + 0,0805) = (0,5195; 0,6805) = (51,95 \%; 68,05 \%)$$

- b) El 75 % no está dentro del intervalo de confianza, luego la afirmación no es razonable con una confianza del 98 %

- c) Ahora $n = 3$, $p = 0,62$ y $q = 0,38$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} 0,62^0 \cdot 0,38^3 = 0,9451$$

2.2. Extraordinaria

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma por tres.

Problema 2.2.1 (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

- a) (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $AX - IX = B$, despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.
- b) (5 puntos) Un producto llamado “TechGadget” puede ser adquirido a través de tres canales de venta: en tienda física (a un precio de 10 €), en tienda online (a un precio de 6 €), y en tienda de segunda mano (a un precio de 5 €). Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto. Además, se sabe que el número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física, y que por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física. Plantee un sistema de ecuaciones para obtener el número de unidades del producto que se han vendido este mes por cada canal de venta y resuelva dicho anterior utilizando técnicas matriciales.

Solución:

a) $AX - IX = B \Rightarrow (A - I)X = B \Rightarrow X = (A - I)^{-1}B =$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

- b) Sean x las unidades vendidas en tienda física, y en tienda online y z en tienda de segunda mano.

$$\begin{cases} 10x + 6y + 5z = 1600 \\ y = 5x \\ 5z = 800 + 10x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - z = -160 \\ 5x - y = 0 \\ 10x + 6y + 5z = 1600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 80 \\ z = 192 \end{cases}$$

Se han vendido 16 unidades en tienda física, 80 en tienda online y 192 en tienda de segunda mano.

Resolvemos por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -160 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 5 & 1600 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -160 \\ 0 & -2 & 5 & 800 \\ 0 & 6 & 10 & 2400 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -160 \\ 0 & -2 & 5 & 800 \\ 0 & 0 & 25 & 4800 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 25z = 4800 \Rightarrow z = 192 \\ -2y + 960 = 800 \Rightarrow y = 80 \\ 2x - 192 = -160 \Rightarrow x = 16 \end{cases}$$

Problema 2.2.2 (10 puntos) Javier disfruta mucho de los partidos de fútbol y de los conciertos, y su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros. Con la condición de asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos y acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año, responda a las siguientes preguntas:

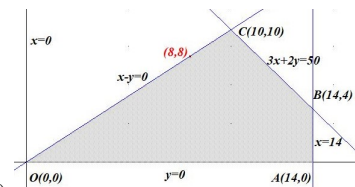
- a) (2 puntos) ¿Puede Javier asistir a 8 partidos de fútbol y a 8 conciertos? En caso afirmativo, ¿gasta todo su presupuesto?
- b) (8 puntos) Si Javier busca maximizar el número de salidas para divertirse, plantee y resuelva un problema de programación lineal para determinar cuántas veces puede ir a cada sitio. ¿Cuántas escapadas disfrutará en total?

Solución:

Sea x partidos de fútbol e y conciertos.

$$\begin{cases} f(x, y) = x + y \text{ en el recinto } S: \\ \begin{cases} 60x + 40y \leq 1000 \\ x \geq y \\ x \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y \leq 50 \\ x - y \geq 0 \\ x \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0, 0)$, $A(14, 0)$, $B(14, 4)$ y $C(10, 10)$.

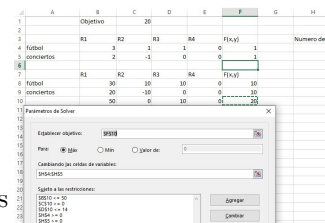


Solución por solver :

• Máximo de $f(x, y) = x + y$

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f(14, 0) = 14 \\ f(14, 4) = 18 \\ f(10, 10) = 20 \end{cases} \Rightarrow$$

El máximo de 20 salidas que corresponden a 10 partidos y 10 conciertos.



- a) El punto $(8, 8)$ se encuentra dentro de la región factible y cumple todas las restricciones. Se encuentra sobre la recta $x - y = 0$. No se gastaría el total de los 1000 euros de presupuesto: $8 \cdot 60 + 8 \cdot 40 = 800$ €.

- b) El máximo de 20 salidas que corresponden a 10 partidos y 10 conciertos tiene un gasto de $10 \cdot 60 + 10 \cdot 40 = 1000$ €.

Problema 2.2.3 (10 puntos) El cálculo del índice de progreso real (IPR) de un país viene determinado por la función $IPR(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6000$ siendo $t \in [0, 62]$ el número de años transcurridos desde 1.932. Se pide:

- a) (4 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento del IPR del país.
- b) (3 puntos) ¿En qué año el IPR alcanza su valor máximo y cuál es dicho valor? Asimismo ¿en qué año el IPR registra su valor mínimo y cuál es dicho valor?
- c) (3 puntos) Analice la concavidad y convexidad de la función $IPR(t)$, e identifique, si existe, algún punto de inflexión.

Solución:

- a) $IPR'(t) = -3t^2 + 108t + 480 = 0 \implies t = 40$ y $t = -4$ (no válida)

	(0, 40)	(40, 62)
$IPR'(t)$	+	-
$IPR(t)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo (0, 40) años (1932, 1972) y decreciente en el (40, 62) años (1972, 1994). Tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $t = 40$ años (en 1972).

- b) Tenemos: $IPR(0) = 6000$, $IPR(40) = 47600$ y $IPR(62) = 5008$. Al máximo absoluto se llega a los 40 años con un índice de 47600 (en 1972) y al mínimo absoluto se llega a los 62 años con 5008 (en 1994).
- c) $IPR''(t) = -6t + 108 = 0 \implies t = 18$.

	(0, 18)	(18, 62)
$IPR''(t)$	+	-
$IPR(t)$	cóncava ∩	convexa ∪

La función es cóncava en el intervalo (0, 18) ∩ de (1932, 1950) y convexa en el (18, 62) ∪ de (1950, 1994) con un punto de inflexión en $t = 18$ años (en 1950) con un $IPR(18) = 26304$

Problema 2.2.4 (10 puntos) sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$.
- b) (3 puntos) Calcule $\int_0^1 f(x) dx$.
- c) (4 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Solución:

- a) En la rama $x < 2$ la función es siempre continua. El punto que anula el denominador es $x = 2$ y no pertenece a la rama.
 En la rama $x > 2$ la función es siempre continua. Si $x > 2 \implies x^2 - 2x > 0$.
 Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - \sqrt{x^2 - 2x}) = 2 \implies \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ f(2) = 1 \end{cases}$$

En $x = 2$ hay una discontinuidad no evitable con un salto infinito.
 La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

b) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2-x} dx = -\ln|2-x| \Big|_0^1 = -(0 - \ln 2) = \ln 2$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 2x})(x + \sqrt{x^2 - 2x})}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} =$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = 1$

Problema 2.2.5 (10 puntos) En España, el 30 % de la población tiene menos de 30 años, el 50 % tiene entre 30 y 65 años y el 20 % tiene más de 65 años. Un estudio afirma que, de las personas de menos de 30 años, un 70 % tiene teléfono móvil, que de las personas entre 30 y 65 años, un 95 % tiene teléfono móvil y que de las personas de más de 65 años, un 50 % tiene teléfono móvil.

- a) (3 puntos) Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.
 b) (2 puntos) Elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono móvil?
 c) (2 puntos) Elegimos una persona al azar y resulta que tiene teléfono móvil. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?
 d) (3 puntos) Elegimos a una persona de cada uno de los tres grupos de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres tengan teléfono móvil? (Puede suponerse independencia entre las tres personas).

Solución:

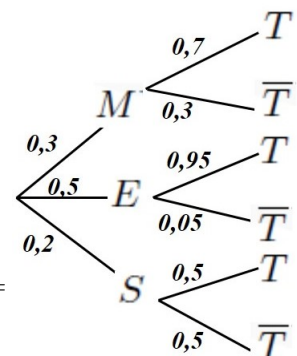
Sean M menos de 30 años, E entre 30 y 65 años, S más de 65 años, T tiene teléfono móvil y $\bar{T}$ no tiene teléfono móvil.

a) $P(S \cap T) = P(T|S)P(S) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$

b) $P(T) = P(T|M)P(M) + P(T|E)P(E) + P(T|S)P(S) =$
 $0,7 \cdot 0,3 + 0,95 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,785$

c) $P(S|T) = \frac{P(T|S)P(S)}{P(T)} = \frac{0,1}{0,785} = 0,1274$

d) $P(\text{los tres tienen teléfono móvil}) = P(T|M) \cdot P(T|E) \cdot P(T|S) =$
 $0,7 \cdot 0,95 \cdot 0,5 = 0,3325$



Problema 2.2.6 (10 puntos) Responda a las siguientes preguntas:

- a) (2 puntos) En una ciudad, según los datos del INE, el 52 % de los habitantes son mujeres y el 48 % son hombres. Se eligen cuatro personas de esa ciudad con reemplazamiento. Sea X la variable que cuenta el número de hombres seleccionados. ¿Qué distribución tiene la variable X ? Calcule $P(X = 2)$.
- b) (8 puntos) Queremos realizar una encuesta entre los aficionados de un equipo de fútbol para estimar, mediante un intervalo de confianza, qué proporción piensa que su equipo va a ascender a primera división el año que viene. Usaremos un nivel de confianza del 95 %.
- b.1 (4 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud de más de 0,08, ¿cuál es el número mínimo de aficionados a los que tenemos que preguntar?
- b.2 (4 puntos) Decidimos preguntar a 120 aficionados, de los cuales 80 dicen que piensan que el equipo ascenderá. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender.

Solución:

- a) Se trata de una binomial $B(4; 0,48)$, $n = 4$, $p = 0,48$ y $q = 1 - p = 0,52$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} 0,48^2 \cdot 0,52^2 = 0,3738$$

- b.1 Como no tenemos dato de p utilizamos $\hat{p} = 0,5$. Como la amplitud del intervalo es el doble del error tenemos $E = 0,04$. Y como el nivel de confianza es $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Rightarrow 0,04 = 1,96 \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \Rightarrow n \geq 600,25 \Rightarrow n = 601$$

- b.2 $\hat{p} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$, $\hat{q} = \frac{1}{3}$, $n = 120$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96 \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{120}} = 0,0843$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,6667 - 0,0843; 0,6667 + 0,0843) = (0,5823; 0,751) = (58,23 \%, 75,10 \%)$$

“www.musat.net”

Capítulo 3

Asturias

3.1. Ordinaria

- Responde en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Problema 3.1.1 (2,5 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

- a) (1,25 puntos) Si $\frac{1}{3}(A + B \cdot C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) (1,25 puntos) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para $m = 1$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{3}(A + B \cdot C) \cdot D &= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + my = 3 \\ mx + 4y = 3m \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 3 \\ m & 4 & 3m \end{array} \right) \Rightarrow |A| = 4 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$$

- Si $m \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) = \text{número de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)}$
- Si $m = -2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado (el sistema tiene infinitas soluciones)}$
- Si $m = 2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado (el sistema tiene infinitas soluciones)}$

- c) Si $m = 1$ el sistema es compatible determinado y tiene solución única:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Problema 3.1.2 (2,5 puntos) Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

- a) (1,75 puntos) ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?
- b) (0,75 puntos) Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

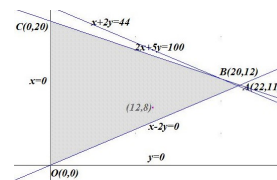
Solución:

Sean x el nº de gorros e y el nº de bufandas.

	blanco	negro
gorros	50	40
bufandas	100	100
	2200	2000

- a) Dibujamos la región factible:

$$\begin{cases} 50x + 100y \leq 2200 \\ 40x + 100y \leq 2000 \\ x \leq 2y \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 44 \\ 2x + 5y \leq 100 \\ x - 2y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(22,11)$, $B(20,12)$ y $C(0,20)$.

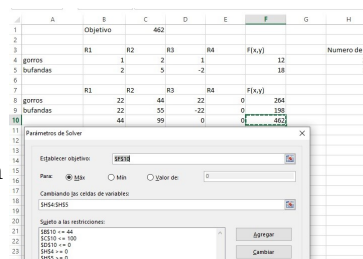
El punto $P(12,8)$ se encuentra dentro de la región factible. Luego se trata de una solución posible aunque no sería la óptima.

- b) $f(x, y) = 12x + 18y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(22,11) = 462 \\ f(20,12) = 456 \\ f(0,20) = 360 \end{cases} \Rightarrow$$

Se deberán tejer 22 gorros y 11 bufandas con unos ingresos máximos de 462 €.



Problema 3.1.3 (2,5 puntos) Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas

siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -60x^2 + 160x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{10}{3}(x^2 - 14x + 48) & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

- a) (1,75 puntos) Estudia y representa gráficamente la función f entre las 0 y las 5 horas.
- b) (0,75 puntos) Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir a las 3 horas de la ingesta? ¿Y a las 5 horas?, ¿cuál sería el nivel de etanol en sangre en ese momento?

Solución:

- a) Las ramas son polinomios y son continuas en el dominio de la función. Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-60x^2 + 160x) = 80 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10}{3}(x^2 - 14x + 48) = 80 \\ f(2) = 80 \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 80 \implies$$

f es continua en $x = 2$ y, por tanto, en $[0, 5]$.

Monotonía: $f'(x) = \begin{cases} -120x + 160 = 0 \implies x = \frac{4}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{10}{3}(2x - 14) = 0 \implies x = 7 \text{ no válida} & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$

	$(0, 4/3)$	$(4/3, 2)$	$(2, 5)$
$f'(x)$	+	-	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ (aumenta la cantidad de etanol en sangre)

y decreciente en el $\left(\frac{4}{3}, 5\right)$, con un máximo relativo (en nuestro caso absoluto) a las

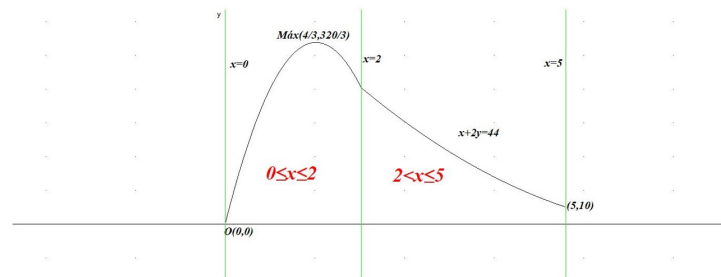
$x = \frac{4}{3}$ h con un nivel de etanol $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{320}{3} \simeq 106,67$ mg/dl

Curvatura: $f''(x) = \begin{cases} -120 \neq 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{20}{3} \neq 0 & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$

	$(0, 2)$	$(2, 5)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función es convexa " $\cap$ " en el intervalo $(0, 2)$ y cóncava " $\cup$ " en el $(2, 5)$. La función cambia de curvatura en el $(2, 80)$ punto de inflexión.

➤ Además tenemos: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ y $f(5) = 10 \Rightarrow (5, 10)$



b) Si $x = 3 \Rightarrow f(3) = 50$ mg/dl, luego todavía está por encima del nivel permitido y no podría conducir.

Si $x = 5 \Rightarrow f(5) = 10$ mg/dl y estaría por debajo del nivel permitido y sí podría conducir.

Problema 3.1.4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$, se pide:

a) (0,5 puntos) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 0$.

b) (2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 1$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= \int (x^3 - 2x^2 - 3x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C \\ F(2) &= -\frac{22}{3} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{22}{3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{22}{3}$$

b) ➤ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

➤ Puntos de corte en:

- Con OY : hacemos $x = 0 \Rightarrow (0, 0)$

- Con OX : hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow (0, 0), (-1, 0)$ y $(3, 0)$

➤ $f'(x) = 3x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1,87$ y $x = -0,54$

$f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow f''(1,87) > 0 \Rightarrow (1,87; -6,06)$ es un mínimo relativo.

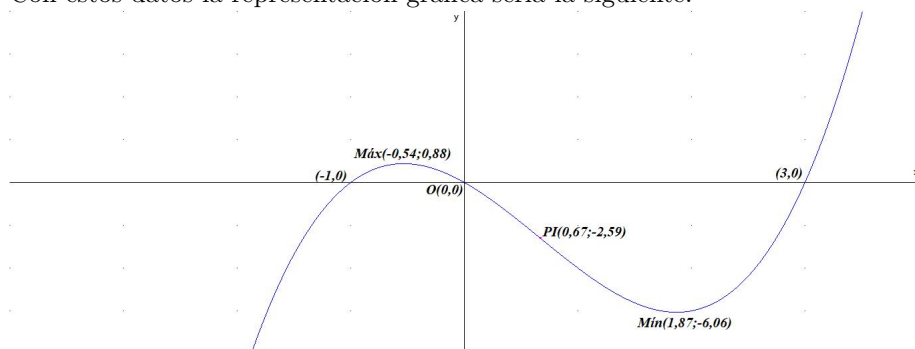
$f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow f''(-0,54) < 0 \Rightarrow (-0,54; 0,88)$ es un máximo relativo.

➤ $f''(x) = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ y como $f'''(x) = 6 \neq 0 \forall x \Rightarrow (0,67; -2,59)$ es un punto de inflexión.

	$(-\infty; 0,67)$	$(0,67; \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa “ $\frown$ ” en el intervalo $(-\infty; 0,67)$ y cóncava “ $\smile$ ” en el $(0,67; \infty)$.

Con estos datos la representación gráfica sería la siguiente:



c) Tendríamos tres recintos: S_1 en $[-2, -1]$ y S_2 en $[-1, 0]$ y S_3 en $[0, 1]$ con $S = |S_1| + |S_2| + |S_3|$

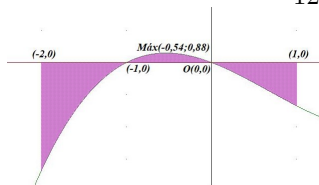
Tenemos: $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{22}{3}$.

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} f(x) dx = F(-1) - F(-2) = -\frac{7}{12} - \frac{10}{3} = -\frac{47}{12}$$

$$S_2 = \int_{-1}^0 f(x) dx = F(0) - F(-1) = 0 + \frac{7}{12} = \frac{7}{12}$$

$$S_3 = \int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = -\frac{23}{12} - 0 = -\frac{23}{12}$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{47}{12} + \frac{7}{12} + \frac{23}{12} = \frac{77}{12} \simeq 6,4167 u^2$$



Problema 3.1.5 (2,5 puntos) Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del «Reino Rosa» y el resto de personajes del «Reino Gris». Por otro lado, uno de cada tres cromos del «Reino Rosa» y uno de cada cinco del «Reino Gris» tienen el borde dorado.

a) (1,25 puntos) Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado?

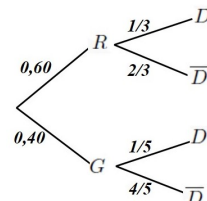
b) (1,25 puntos) Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del «Reino Rosa»?

Solución:

Sean R cromo de personaje del «Reino Rosa», G cromo de personaje del «Reino Gris», D con borde dorado y $\bar{D}$ sin borde dorado.

a) $P(D) = P(D|R)P(R) + P(D|G)P(G) = \frac{1}{3} \cdot 0,60 + \frac{1}{5} \cdot 0,40 = 0,28$

b) $P(R|\bar{D}) = \frac{P(\bar{D}|R)P(R)}{P(\bar{D})} = \frac{2/3 \cdot 0,60}{1 - 0,28} = 0,5556$



Problema 3.1.6 (2,5 puntos) Los estudiantes extranjeros que durante el curso viven en residencia universitaria suponen el 10 % de todos los estudiantes de una universidad. El 80 % de todos los estudiantes no son extranjeros y de ellos, el 75 % no viven en residencia universitaria durante el curso.

- (1,25 puntos) Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar ni sea extranjero, ni viva en residencia universitaria durante el curso.
- (1,25 puntos) Elegido al azar un estudiante entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que no viva en residencia universitaria durante el curso?

Solución:

Sean E extranjero y R vive en residencia.

Tenemos: $P(E \cap R) = 0,1$, $P(\bar{E}) = 0,8$ y $P(\bar{R}|\bar{E}) = 0,75 \implies P(\bar{E} \cap \bar{R}) = 0,75 \cdot 0,8 = 0,6$

	R	$\bar{R}$	
E	0,1		
$\bar{E}$		0,6	0,8
Total			1

 $\implies$

	R	$\bar{R}$	
E	0,1	0,1	0,2
$\bar{E}$	0,2	0,6	0,8
Total	0,3	0,7	1

- $P(\bar{E} \cap \bar{R}) = 0,6$
- $P(\bar{R}|E) = \frac{P(\bar{R} \cap E)}{P(E)} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5$

Problema 3.1.7 (2,5 puntos) Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.

- (1 punto) ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95 %?
- (1,5 puntos) Finalmente, se analizaron 300 tabletas y, de ellas, 264 tenían el contenido en leche indicado. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado, con un nivel de confianza del 90 %.

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Solución:

- Como el valor de p es desconocido se considera el caso más desfavorable $\hat{p} = 0,5$ con el que su desviación típica sería la mayor posible.
 $NC = 95\% = 0,95 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,05 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \implies z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \implies 0,05 = 1,96 \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \implies n \geq 384,16 \implies n = 385$$

b) Ahora $\hat{p} = \frac{264}{300} = 0,88$, $\hat{q} = 0,12$ y $n = 300$
 $NC = 90\% = 0,90 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,1 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \implies z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,645 \sqrt{\frac{0,88 \cdot 0,12}{300}} = 0,0309$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,88 - 0,0309; 0,88 + 0,0309) = (0,8491; 0,9109) = (84,91\%; 91,09\%)$$

Problema 3.1.8 (2,5 puntos) El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1,2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo que el nivel medio de esa hormona en sangre fue de 8,7 UI/l.

- (1,5 puntos) Determina, a partir de esa muestra, un intervalo de confianza para el nivel medio poblacional de la hormona en sangre al nivel de confianza del 90 %.
- (0,5 puntos) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación?
- (0,5 puntos) Uno de los dos intervalos siguientes: (8.5681, 8.8319) y (8.5514, 8.8486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88 % de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %.

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Solución:

$$N(\mu; 1,2), \quad n = 200, \quad \bar{X} = 8,7$$

a) $NC = 90\% = 0,90 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,1 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \implies z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \frac{1,2}{\sqrt{200}} = 0,1396$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (8,7 - 0,1396; 8,7 + 0,1396) = (8,56; 8,84)$$

b) $E = 0,1396$

- c) Al disminuir el nivel de confianza disminuye el error y la amplitud del intervalo.

El primer intervalo tiene un error $\frac{8,8319 - 8,5681}{2} = 0,1319 < 0,1396$

pero en el segundo $\frac{8,8486 - 8,5514}{2} = 0,1486 > 0,1396$ ha aumentado el error.

Luego el intervalo con nivel de confianza del 88 % tiene que ser (8,5681; 8,8319)

3.2. Extraordinaria

- Responde en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.
- Indica en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderás: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Problema 3.2.1 (2,5 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) Si $(A \cdot B - C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) (1,5 puntos) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = -1$.

Solución:

a) $(A \cdot B - C) \cdot D = E \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (m-1)x+y=1 \end{cases}$

b) $\overline{M} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow |M| = -m+2=0 \Rightarrow m=2$

- Si $m \neq 2 \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\overline{M}) = 2 = \text{Rango}(M) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)

- Si $m = 2$: $\overline{M} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

- Si $m = 1$:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

- En conclusión: El sistema es siempre compatible con infinitas soluciones para $m = 2$ y solución única para $m \in \mathbb{R} - \{2\}$. La solución para $m = 1$ es $x = 0$ e $y = 1$.

Problema 3.2.2 (2,5 puntos) El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas. En global, el número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores y el número de menores, al menos, la mitad del número de adultos. Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará. Cada entrada infantil cuesta 10 euros y cada una de adulto, 18 euros.

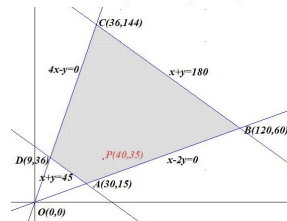
- a) (1,75 puntos) ¿Cuántos adultos y cuántos menores pueden asistir al espectáculo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?
- b) (0,75 puntos) Para maximizar ingresos, ¿cuántos adultos y cuántos menores deberían asistir? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Solución:

Sea x el nº de adultos e y el nº de niños.

a) La región factible es

$$\begin{cases} x + y \leq 180 \\ x \geq \frac{y}{4} \\ y \geq \frac{x}{2} \\ x + y \geq 45 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 180 \\ 4x - y \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + y \geq 45 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(30, 15)$, $B(120, 60)$, $C(36, 144)$ y $D(9, 36)$.

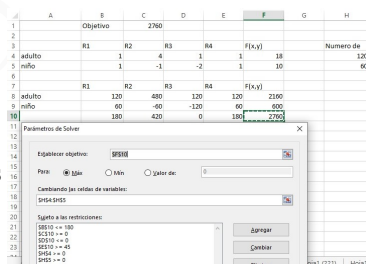
El punto $P(40, 35)$ se encuentra dentro de la región factible. Luego se trata de una solución posible, aunque no sea la óptima.

b) $f(x, y) = 18x + 10y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(30, 15) = 690 \text{ €} \\ f(120, 60) = 2760 \text{ €} \\ f(36, 144) = 2088 \text{ €} \\ f(9, 36) = 522 \text{ €} \end{cases} \Rightarrow$$

Se deberán vender 120 entradas de adulto y 60 niños con un beneficio máximo esperado de 2760 €.



Problema 3.2.3 (2,5 puntos) El tiempo en minutos que un empleado tarda en completar cierta tarea (f) se puede expresar en función de las horas de experiencia (x) como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{2000} + 50 & \text{si } 0 \leq x \leq 200 \\ \frac{x^2}{1000} - \frac{3x}{5} + a & \text{si } 200 < x \leq 300 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Determina el valor de « a » para que el tiempo de ejecución de la tarea sea continuo entre 0 y 300 horas.

b) (1,75 puntos) Considerando el valor de « a » obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, 300]$. ¿Cuál es el tiempo máximo que puede tardar un empleado en realizar la tarea? ¿Y el mínimo?

Solución:

a) Continuidad de f :

- Las dos ramas son polinomios y, por tanto, son continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 200$

☛ Continuidad en $x = 200$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 200^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 200} \left(\frac{-x^2}{2000} + 50 \right) = 30 \\ \lim_{x \rightarrow 200^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 200} \left(\frac{x^2}{1000} - \frac{3x}{5} + a \right) = a - 80 \\ f(200) = 30 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 200^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 200^+} f(x) = f(200) \implies 30 = a - 80 \implies a = 110.$$

☛ La función es continua en $\text{Dom}(f) = [0, 300]$ siempre que $a = 110$.

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{2000} + 50 & \text{si } 0 \leq x \leq 200 \\ \frac{x^2}{1000} - \frac{3x}{5} + 110 & \text{si } 200 < x \leq 300 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{1000} & \text{si } 0 < x < 200 \\ \frac{x}{500} - \frac{3}{5} & \text{si } 200 < x \leq 300 \end{cases}$$

Tenemos $f(0) = 50$, $f(200) = 30$ y $f(300) = 20$.

Por otra parte:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{1000} = 0 \implies x = 0 & \text{si } 0 < x < 200 \\ \frac{x}{500} - \frac{3}{5} = 0 \implies x = 300 & \text{si } 200 < x \leq 300 \end{cases}$$

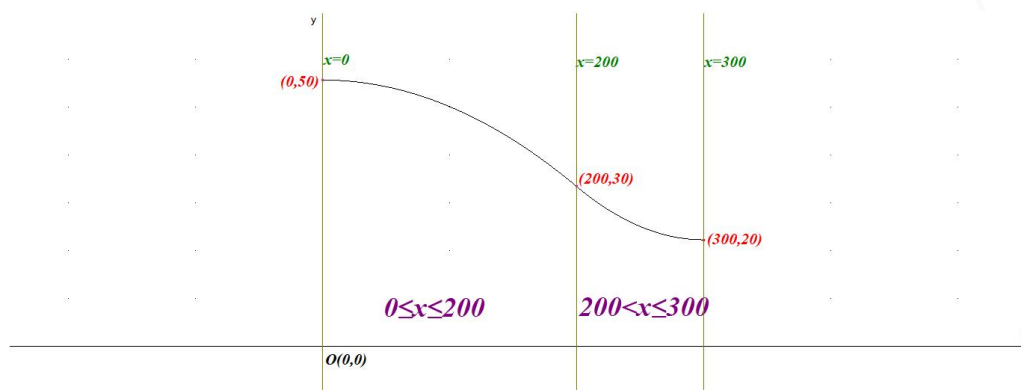
	$(0, 200)$	$(200, 300)$
$f'(x)$	—	—
$f(x)$	decreciente ↘	decreciente ↘

La función es decreciente en todo el dominio de f con un máximo relativo (también es absoluto) en $(0, 50)$ y un mínimo relativo (también absoluto) en $(300, 20)$

$$\text{Por otra parte: } f''(x) = \begin{cases} \frac{-1}{1000} < 0 & \text{si } 0 < x < 200 \\ \frac{1}{500} > 0 & \text{si } 200 < x \leq 300 \end{cases}$$

	$(0, 200)$	$(200, 300)$
$f''(x)$	—	+
$f(x)$	convexa ↘	cóncava ∪

La función es convexa “ $\smile$ ” en el intervalo $(0, 200)$ y cóncava “ $\cup$ ” en el $(200, 300)$. La función cambia de curvatura en el $(200, 30)$ punto de inflexión. Con estos datos representamos gráficamente:



El tiempo máximo corresponde a un trabajador sin ninguna experiencia con 50 horas, mientras que tiempo mínimo corresponde a un trabajador con 300 horas de experiencia y tardaría 20 horas.

Problema 3.2.4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, se pide:

- (0,5 puntos) Encontrar la primitiva F de f verificando $F(1) = 1$.
- (2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = -2$ y $x = 2$.

Solución:

$$a) F(x) = \int (-x^2 - 2x + 3) dx = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$$

$$F(1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + C = 1 \implies C = -\frac{2}{3} \implies F(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - \frac{2}{3}$$

- La función tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ con puntos de corte en:

• Con OY : hacemos $x = 0 \implies (0, 3)$

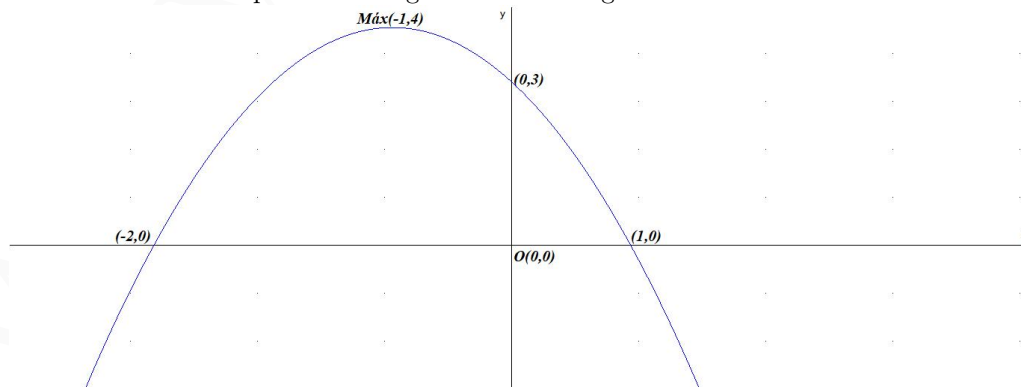
• Con OX : hacemos $f(x) = 0 \implies -x^2 - 2x + 3 = 0 \implies (-3, 0)$ y $(1, 0)$

$f'(x) = -2x - 2 = 0 \implies x = -1$ Se trata de un máximo en $(-1, 4)$.

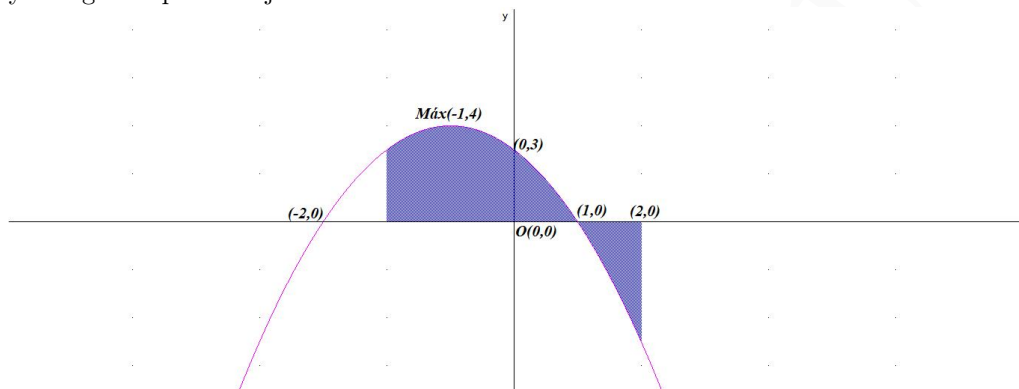
$f''(x) = -2 < 0 \implies \cap$ la función es cóncava en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.

Asíntotas: No tiene asíntotas

Con estos datos la representación gráfica sería la siguiente:



La función tiene un punto de corte con el eje de abscisas en $x = 1 \in [-2, 2]$. Habrá dos recintos de integración $S_1 : [-2, 1]$ y $S_2 : [1, 2]$. El primero está por encima del eje de abscisas y el segundo por debajo:



$$S_1 = \int_{-2}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-2}^1 = 9$$

$$S_2 = \int_1^2 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_1^2 = -\frac{7}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3} \simeq 11,3333 \text{ u}^2$$

Problema 3.2.5 (2,5 puntos) El 60 % de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan, el resto se venden. Por otra parte, el 30 % de las viviendas que se alquilan y el 60 % de las que se venden son chalés. El resto son pisos.

- (1,25 puntos) Si se elige un piso al azar en esa inmobiliaria, ¿cuál es la probabilidad de que se alquile?
- (1,25 puntos) Si se elige una vivienda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté en venta o sea un chalé?

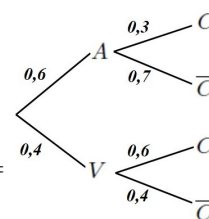
Solución:

Sean A se alquila, V se vende, C chalé y $\bar{C}$ piso.

$$a) P(\bar{C}) = P(\bar{C}|A)P(A) + P(\bar{C}|V)P(V) = 0,7 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,58$$

$$P(A|\bar{C}) = \frac{P(\bar{C}|A)P(A)}{P(\bar{C})} = \frac{0,7 \cdot 0,6}{0,58} = 0,7241$$

$$b) P(V \cup C) = P(V) + P(C) - P(V \cap C) = P(V) + P(C) - P(C|V)P(V) = 0,4 + (1 - 0,58) - 0,6 \cdot 0,4 = 0,58$$



Problema 3.2.6 (2,5 puntos) De cierta región se sabe que el 40 % de los habitantes tienen hijos, el 20 % de los habitantes tienen estudios superiores y el 5 % de los habitantes tienen tanto hijos, como estudios superiores.

- (1,25 puntos) Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga ni hijos, ni estudios superiores?
- (1,25 puntos) Elegido al azar un habitante de entre los que tienen estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga hijos?

Solución:

Sean H tiene hijos, $\bar{H}$ no tiene hijos, S tiene estudios superiores y $\bar{S}$ no tiene estudios superiores.

	H	$\bar{H}$	
S	0,05		0,2
$\bar{S}$			
	0,4		1

 $\Rightarrow$

	H	$\bar{H}$	
S	0,05	0,15	0,2
$\bar{S}$	0,35	0,45	0,8
	0,4	0,6	1

a) $P(\bar{H} \cap \bar{S}) = 0,45$

b) $P(\bar{H}|S) = \frac{P(\bar{H} \cap S)}{P(S)} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75$

Problema 3.2.7 (2,5 puntos) El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera sigue distribución normal con desviación 35 miles de euros.

- a) (1,5 puntos) Para estimar el importe medio poblacional, se considera una muestra aleatoria de 150 hipotecas, para las que el importe medio fue de 138 miles de euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el importe medio poblacional, con un nivel de confianza del 90 %.
- b) (1 punto) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero importe medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 5000 euros y un nivel de confianza del 95 %?

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Solución:

$$N(\mu; 35000)$$

a) $n = 150$, $\bar{X} = 138000$ y $NC = 90\% = 0,90 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,64$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,64 \frac{35000}{\sqrt{150}} = 4686,690374$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (138000 - 4686,69; 138000 + 4686,69) = (133313,31; 142686,69)$$

b) $NC = 95\% = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5000 = 1,96 \frac{35000}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq 188,2384 \Rightarrow n = 189$$

Problema 3.2.8 (2,5 puntos) Una empresa de telecomunicaciones hace una encuesta antes de instalar fibra en una región. Para ello selecciona al azar a 180 hogares de la zona y, tras mostrarles su oferta, anota si el hogar contrataría la fibra con esa empresa o no. El resultado del sondeo es que 130 de los hogares encuestados contratarían su fibra.

- a) (1,5 puntos) Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de hogares que contratarían su fibra, con un nivel de confianza del 95 %.
- b) (1 punto) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, basándonos en la misma muestra, aumentásemos el nivel de confianza?

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1, 28) = 0,90$; $F(1, 64) = 0,95$; $F(1, 96) = 0,975$; $F(2, 33) = 0,99$ y $F(2, 58) = 0,995$.

Solución:

$$a) \quad NC = 95\% = 0,95 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,05 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \implies z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$\hat{p} = \frac{130}{180} = 0,72222, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,2778$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96 \sqrt{\frac{\frac{130}{180} \cdot \frac{50}{180}}{180}} = 0,0654$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,72222 - 0,0654; 0,72222 + 0,0654) = (0,6568; 0,7877) = (65,68\%; 78,77\%)$$

- b) Como se vio en el apartado anterior $E = 0,0654$. Si aumentamos el nivel de confianza $z_{\alpha/2}$ aumentaría y, por tanto, el error también aumentaría, el error es directamente proporcional al nivel de confianza. La longitud del intervalo de confianza se haría mayor.

Capítulo 4

Cantabria

4.1. Ordinaria

INDICACIONES

- a) El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).
- b) En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
- c) La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2,5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0,75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.
- d) Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
- e) Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.

Problema 4.1.1 (2,5 puntos) Una empresa de jardinería necesita adquirir 300 kg de tierra, 200 kg de piedras decorativas y 100 kg de semillas para completar un proyecto de diseño de jardines. Al comparar precios entre dos proveedores, A y B , obtiene las siguientes ofertas: El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €. El proveedor B , que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A , el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A . Además, se sabe que para el proveedor A , el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas.

- a) (0,9 puntos) Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio por kilogramo de la tierra, las piedras decorativas y las semillas en el proveedor A .
- b) (0,8 puntos) Analice la compatibilidad de dicho sistema.
- c) (0,8 puntos) Resuélvalo.

Solución:

- a) Sean x el precio de un kg de tierra del proveedor A ,
 y el precio de un kg de piedras decorativas del proveedor A y
 z el precio de un kg de semillas del proveedor A .

$$\begin{cases} 300x + 200y + 100z = 13000 \\ \frac{300}{3}x + \frac{200}{2}y + \frac{100}{5}z = 13000 - 8800 \\ z = 2(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 130 \\ 5x + 5y + z = 210 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 130 \\ 5 & 5 & 1 & 210 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - 5F_1 \\ 3F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 130 \\ 0 & 5 & -2 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & -260 \end{array} \right) = \\ & \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 130 \\ 0 & 5 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -21 & -1260 \end{array} \right) \Rightarrow \\ & \text{Sistema compatible determinado. (Solución única)} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \begin{cases} z = \frac{1260}{21} = 60 \\ 5y - 120 = -20 \Rightarrow y = 20 \\ 3x + 40 + 60 = 130 \Rightarrow x = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ €} \\ y = 20 \text{ €} \\ z = 60 \text{ €} \end{cases}$$

Problema 4.1.2 (2,5 puntos) La editorial “EcoReads”, comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción. Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

- a) (0,75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
- b) (1 punto) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
- c) (0,5 puntos) ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?
- d) (0,25 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:

Sea x el número de guías prácticas sobre sostenibilidad e y libros de cocina vegetariana.

	reciclado	bambú	beneficio
guía sostenibilidad	60	20	5
cocina vegetariana	70	10	4
	4000	800	

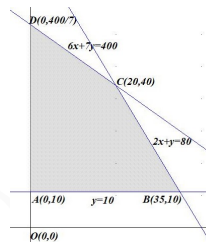
a) $f(x, y) = 5x + 4y$ sujeto a

$$\begin{cases} 60x + 70y \leq 4000 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ x \geq 0 \\ y \geq 10 \end{cases} \implies \begin{cases} 6x + 7y \leq 400 \\ 2x + y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

b) Representación y vértices:

Los vértices a estudiar serán:

$$A(0, 10), B(35, 10), C(20, 40) \text{ y } D\left(0, \frac{400}{7}\right)$$



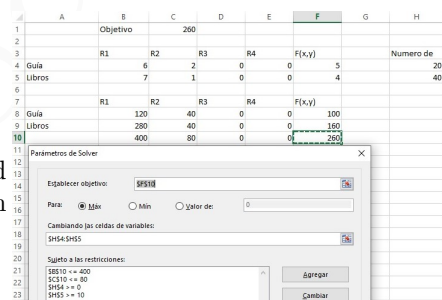
c) Sustituyendo en la función objetivo $f(x, y) = 5x + 4y$:

$$\begin{cases} f(0, 10) = 40 \\ f(35, 10) = 215 \\ f(20, 40) = 260 \leftarrow \text{Máximo} \\ f\left(0, \frac{400}{7}\right) = \frac{1600}{7} \simeq 228,57 \end{cases} \implies$$

deben fabricar 20 guías prácticas sobre sostenibilidad y 40 libros de cocina vegetariana, para obtener un beneficio máximo.

d) El beneficio máximo es de 260 €.

Solución por solver :



Problema 4.1.3 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 3x + 5 & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ \frac{x - b}{x^2 + 1} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) (1,5 puntos) Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

b) (1 punto) Calcule la integral definida $I = \int_0^2 f(x) dx$

Solución:

a) Las ramas son continuas, hay que estudiar la continuidad en $x = -1$ y en $x = 3$:

En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax + 2) = -a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 3x + 5) = 9 \\ f(-1) = -a + 2 \end{cases} \implies -a + 2 = 9 \implies a = -7$$

☛ En $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x + 5) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-b}{x^2+1} = \frac{3-b}{10} \\ f(3) = 5 \end{cases} \implies 5 = \frac{3-b}{10} \implies b = -47$$

$$\text{b) } I = \int_0^2 (x^2 - 3x + 5) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x \right]_0^2 = \frac{20}{3} \simeq 6,6667$$

Problema 4.1.4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2}$

- a) (0,25 puntos) Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY .
 b) (1 punto) Identifique las asíntotas de la función.
 c) (1,25 puntos) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

- a) Con OX hacemos $f(x) = 0 \implies \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} = 0 \implies 2x^2 + 4x + 2 = 0 \implies x = -1 \implies (-1, 0)$
 Con OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -1 \implies (0, -1)$

b) Asíntotas:

☛ Verticales: $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} = \left[\frac{18}{0^-} \right] = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} = \left[\frac{18}{0^+} \right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} = +\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 - 2x} = 2$$

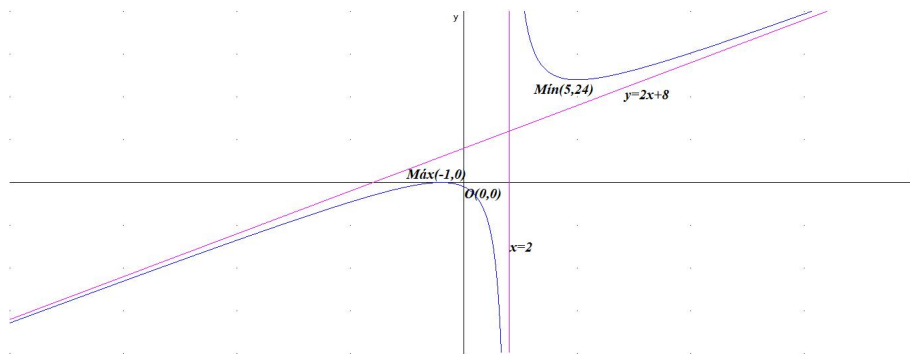
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 4x + 2}{x - 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 2}{x - 2} = 8$$

$$y = 2x + 8$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{2(x^2 - 4x - 5)}{(x - 2)^2} = 0 \implies x = -1 \text{ y } x = 5$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ y decreciente en el $(-1, 2) \cup (2, 5)$, con un máximo relativo en el punto $(-1, 0)$ y un mínimo relativo en el $(5, 24)$



Problema 4.1.5 (2,5 puntos) Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

- (1,25 puntos) Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.
- (1,25 puntos) ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

$$\text{a) } n = 100, \bar{X} = 90 \text{ y } NC = 93\% = 0,93 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,07 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,035$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,965 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,815$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,815 \frac{10}{\sqrt{100}} = 1,815$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (90 - 1,815; 90 + 1,815) = (88,185; 91,815)$$

$$\text{b) } NC = 97\% = 0,97 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = 2 \Rightarrow 2 = 2,17 \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq \left(\frac{2,17 \cdot 10}{2} \right)^2 = 117,7225 \Rightarrow n = 118$$

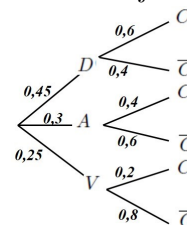
Problema 4.1.6 (2,5 puntos) En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

- a) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?
- b) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?
- c) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?
- d) (0,75 puntos) Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

Solución:

Sean D practican algún deporte, A participan en actividades artísticas, V participan en actividades de voluntariado, C pertenecen al consejo estudiantil y $\bar{C}$ no pertenecen al consejo estudiantil.

- a) $P(D \cap C) = P(C|D)P(D) = 0,6 \cdot 0,45 = 0,27$
- b) $P(A \cap \bar{C}) = P(\bar{C}|A)P(A) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$
- c) $P(C) = P(C|D)P(D) + P(C|A)P(A) + P(C|V)P(V) = 0,6 \cdot 0,45 + 0,4 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,25 = 0,44$
- d) $P(V|\bar{C}) = \frac{P(\bar{C}|V)P(V)}{P(\bar{C})} = \frac{0,8 \cdot 0,25}{1 - 0,44} = 0,3571$



4.2. Extraordinaria

INDICACIONES

- a) El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera).
- b) En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
- c) La puntuación máxima de cada ejercicio es de 2,5 puntos (dentro de cada ejercicio, la puntuación máxima de cada apartado se indica entre corchetes). La nota del examen será el resultado de dividir por 0,75 la suma de la puntuación obtenida en los tres ejercicios.
- d) Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
- e) Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.

Problema 4.2.1 (2,5 puntos) Una organización encargada de un evento deportivo tiene un presupuesto de 500 euros para adquirir material promocional. El material incluye banderas, camisetas y gorras. Los precios de cada artículo por unidad son de 5, 6 y 2 euros, respectivamente. La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras, y la suma de banderas y camisetas debe ser 70.

- a) (0,9 puntos) Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

b) (0,8 puntos) Analice la compatibilidad de dicho sistema.

c) (0,8 puntos) Resuélvalo.

Solución:

a) Sea x el número de banderas, y el número de camisetas y z el número de gorras.

$$\begin{cases} 5x + 6y + 2z = 500 \\ y = \frac{z}{2} \\ x + y = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 70 \\ 2y - z = 0 \\ 5x + 6y + 2z = 500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 30 \\ z = 60 \end{cases}$$

$$\text{b) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 500 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 5F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 150 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 300 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible determinado.}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5z = 300 \Rightarrow z = 60 \text{ gorros} \\ 2y - 60 = 0 \Rightarrow y = 30 \text{ camisetas} \\ x + 30 = 70 \Rightarrow x = 40 \text{ banderas} \end{cases}$$

Problema 4.2.2 (2,5 puntos) Una empresa de catering ofrece dos tipos de menús: Estándar (A) y Gourmet (B). Preparar un menú A lleva 2 horas y deja un beneficio de 50 euros; un menú B requiere 3 horas y deja un beneficio de 70 euros. La empresa quiere preparar al menos 15 menús, pero no quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B . Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús.

a) (0,75 puntos) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) (1 punto) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

c) (0,5 puntos) ¿Cuántos menús de cada tipo debe preparar la empresa para maximizar sus beneficios?

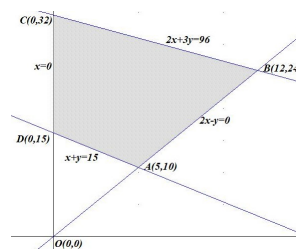
d) (0,25 puntos) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:

Sea x el n° de menús A e y el n° de menús B .

a) $f(x, y) = 50x + 70y$ sujeto a

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 96 \\ x + y \geq 15 \\ x \leq \frac{y}{2} \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 96 \\ x + y \geq 15 \\ 2x - y \leq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



- b) Los vértices de estudio son:
 $A(5, 10)$, $B(12, 24)$, $C(0, 32)$ y $D(0, 15)$
- c) Sustituyendo en la función objetivo $f(x, y) = 50x + 70y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(5, 10) = 950 \\ f(12, 24) = 2280 \leftarrow \text{máximo} \\ f(0, 32) = 2240 \\ f(0, 15) = 1050 \end{cases} \Rightarrow$$

debe preparar 12 menús A y 24 menús B para obtener el máximo beneficio.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo	2280					
2		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
3		2	1	2		50		12
4	menú A	3	1	-1		70		24
5	menú B							
6		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
7		24	12	34	0	600		
8	menú A	72	24	-24	0	1680		
9	menú B	96	36	0	0	2280		

Parámetros de Solver

Establecer objetivo: \$F\$10

Para: ☒ Máx ☐ Min ☐ Valor de: 0

Cambiando las celdas de variables: \$H\$4:\$H\$5

Sujeto a las restricciones:

\$B\$10:\$B\$10 <= \$B\$11

\$C\$10:\$C\$10 <= \$C\$11

\$D\$10:\$D\$10 <= \$D\$11

\$E\$10:\$E\$10 <= \$E\$11

\$F\$10:\$F\$10 <= \$F\$11

\$G\$10:\$G\$10 <= \$G\$11

\$H\$10:\$H\$10 <= \$H\$11

Botones: Agregar, Cambiar

- d) El beneficio máximo es de 2280€.

Problema 4.2.3 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$

- a) (0,5 puntos) Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY .
- b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- c) (1 punto) Dibuje la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = x + 2$. Calcule el área de esta región.

Solución:

- a) Puntos de corte:

• Con el eje OY : $x = 0 \Rightarrow (0, f(0)) = (0, 2)$

• Con el eje OX : $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (-2, 0)$ y $(1, 0)$

- b) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$ y creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 4)$ y un mínimo relativo en $(1, 0)$

- c) Calculamos los puntos de corte entre la función y la recta:

$$x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$$

Luego hay dos recintos de integración: $S_1 : [-2, 0]$ y $S_2 : [0, 2]$

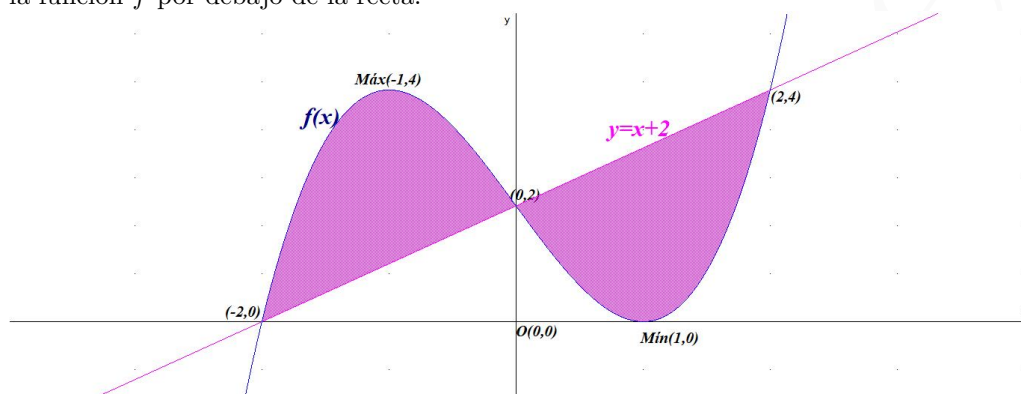
$$F(x) = \int (x^3 - 4x) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + C$$

$$S_1 = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx = F(0) - F(-2) = 4$$

$$S_2 = \int_0^2 (x^3 - 4x) dx = F(2) - F(0) = -4$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4 + 4 = 8 \text{ u}^2$$

S_1 es positiva por estar f por encima de la recta. Por el contrario, S_2 es negativa por estar la función f por debajo de la recta.



Problema 4.2.4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$

- (0,75 puntos) ¿En qué puntos es discontinua $f(x)$? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?
- (1,25 puntos) Identifique las asíntotas de la función.
- (0,5 puntos) Esboce la gráfica de $f(x)$, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY

Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$. La función es continua en todo el dominio y sólo presenta discontinuidades en $x = \pm 1$.

En $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 2}{2x} = 2$$

En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable (un agujero)

En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{-4}{0^-} \right] = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{-4}{0^+} \right] = -\infty$$

En $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable, un salto infinito. Se trata de una asíntota vertical.

- Como se ha visto en el apartado anterior, la función presenta una asíntota vertical en $x = 1$. Hay una asíntota horizontal en $y = 1$:

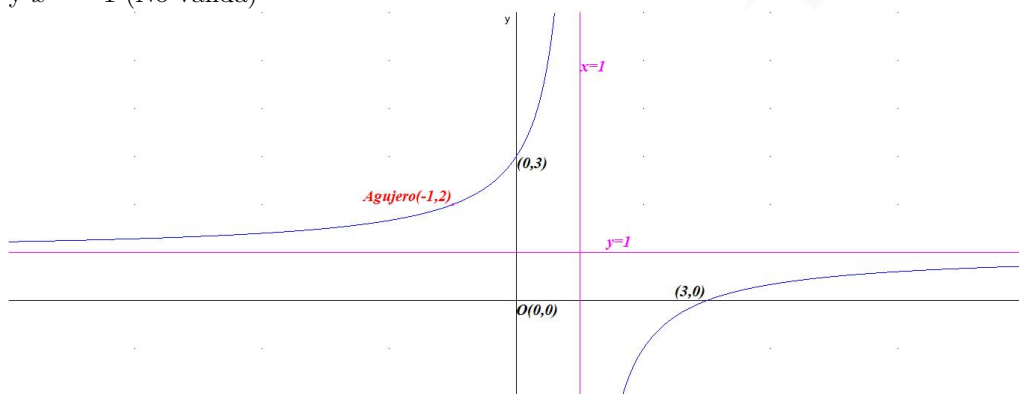
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = 1$$

No hay asíntotas oblicuas al haber horizontales.

c) Puntos de corte:

Con OY hacemos $x = 0 \Rightarrow (0, 3)$

Con OX hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3, 0)$
y $x = -1$ (No válida)



Problema 4.2.5 (2,5 puntos) En un estudio sobre bebidas energéticas, se ha determinado que el porcentaje de cafeína por lata sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,45 %. Se ha tomado una muestra aleatoria de 120 latas de distintas marcas, y se ha encontrado que el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata es de 8,75 %.

- (1,25 puntos) Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata.
- (1,25 puntos) ¿Cuál es el número mínimo de latas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de cafeína por lata, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 0,1 %?

Solución:

$$\text{a) } NC = 95\% = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$n = 120 \text{ y } \bar{X} = 0,0875 \text{ y } \sigma = 0,0045$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{0,0045}{\sqrt{120}} = 0,00081$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (0,0875 - 0,00081; 0,0875 + 0,00081) = (0,0867; 0,0883) = (8,67\%; 8,83\%)$$

$$\text{b) } NC = 97\% = 0,97 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,001 = 2,17 \frac{0,0045}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq 95,355 \Rightarrow n = 96$$

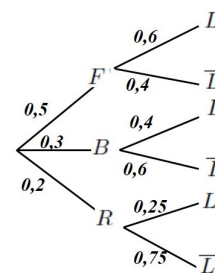
Problema 4.2.6 (2,5 puntos) En una encuesta sobre hábitos de lectura, se encontró que el 50 % de los lectores prefieren los libros de ficción, el 30 % prefieren los libros de biografías y el resto prefieren los libros de poesía. Además, se descubrió que el 60 % de los que prefieren la ficción, el 40 % de los que prefieren biografías y el 25 % de los que prefieren poesía también participan en eventos de lectura. Si se escoge al azar una persona:

- (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura?
- (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura?
- (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que participe en eventos de lectura?
- (0,75 puntos) Si no participa en eventos de lectura, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción?

Solución:

Sean F lector de libros de ficción, B lector de libros de biografía, R lector de libros de poesía, L participa en eventos de lectura y $\bar{L}$ no participa en eventos de lectura.

- $P(F \cap L) = P(L|F)P(F) = 0,6 \cdot 0,50 = 0,3$
- $P(R \cap \bar{L}) = P(\bar{L}|R)P(R) = 0,75 \cdot 0,2 = 0,15$
- $P(L) = P(L|F)P(F) + P(L|B)P(B) + P(L|R)P(R) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,2 = 0,47$
- $P(F|\bar{L}) = \frac{P(\bar{L}|F)P(F)}{P(\bar{L})} = \frac{0,4 \cdot 0,5}{1 - 0,47} = 0,3774$



“www.musat.net”

Capítulo 5

Castilla-La Mancha

5.1. Ordinaria

El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones.

Sólo están permitidas las calculadoras tipo I y II. Se puede hacer uso de colores salvo el color rojo. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

Problema 5.1.1 (1,5 puntos) Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m² de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0,20 m² de cartón y 0,30 m de cinta de goma y se vende a 2,10€ la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0,15 m² de cartón y 0,27 m de cinta de goma y se vende a 1,50€ la unidad.

- (1,25 puntos) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.
- (0,25 puntos) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo.

Solución:

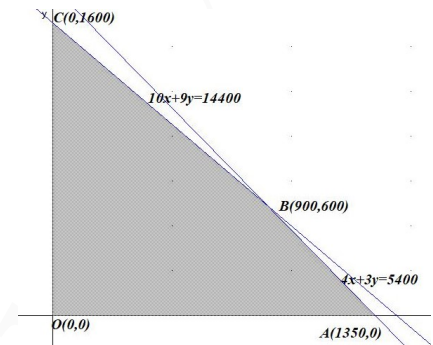
Sean x número de carpetas tamaño folio e y las de tamaño cuartilla.

	cartón m ²	cinta m	venta
tamaño folio	0,20	0,30	2,10
tamaño cuartilla	0,15	0,27	1,50
	≤ 270	≤ 432	

- Tenemos:

$f(x, y) = 2, 10x + 1, 5y$ sujeto a

$$\begin{cases} 0, 2x + 0, 15y \leq 270 \\ 0, 3x + 0, 27y \leq 432 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y \leq 5400 \\ 10x + 9y \leq 14400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Solución por solver :

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(1350,0)$, $B(900,600)$ y $C(0,1600)$.
Sustituyendo en $f(x, y) = 2, 10x + 1, 5y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(1350,0) = 2835 \\ f(900,600) = 2790 \\ f(0,1600) = 2400 \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo	2835					
2		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
3			4	10		2,1		Numero de
4	cartón		3	9		1,5		1350
5	cinta							0
6		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
7			5400	13500	0	0	2835	
8	cartón		0	0	0	0	0	
9	cinta		0	0	0	0	0	
10			5400	13500	0	0	2835	

Establecer objetivo:	\$F\$10
Para:	☒ Máx ☐ Min ☐ Valor de: 0
Cambiando las celdas de variables:	\$H\$14:\$H\$15
Sujeto a las restricciones:	
\$B\$10 <= \$400	Agregar
\$C\$10 <= 14400	
\$H\$14 >= 0	Cambiar
\$H\$15 >= 0	

- b) El máximo se produce con la elaboración de 1350 carpetas tamaño folio y 0 de tamaño cuartilla con una venta máxima de 2835€.

Problema 5.1.2 (1,5 puntos) En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

- a) (0,75 puntos) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten.
b) (0,75 puntos) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

- a) Sean x medallas de oro, y de plata y z de bronce.

$$\begin{cases} x + y + z = 36 \\ z = 3x \\ 2(y - 2) = z + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 36 \\ 3x - z = 0 \\ 2y - z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -3 & -4 & -108 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + 2F_2 \end{array} \right] = \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -3 & -4 & -108 \\ 0 & 0 & -11 & -198 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado. Solución única:} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z = \frac{-198}{-11} = 18 \\ -3y - 72 = -108 \implies y = 12 \\ x + 12 + 18 = 36 \implies x = 6 \end{cases}$$

Se reparten 6 medalla de oro, 12 de plata y 18 de bronce.

Bloque 2

Problema 5.1.3 (1,5 puntos) La evolución de la rentabilidad de un fondo de inversión a lo largo del tiempo, x en años, viene definida por la función

$$R(x) = \begin{cases} -(x + (t - 3))^2 + (t + 27) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + 5x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- (0,5 puntos) ¿Para qué valores de t la rentabilidad del fondo, $R(x)$; es una función continua en $x = 3$?
- (0,5 puntos) Para $t = -2$, ¿cuándo se tiene la mayor rentabilidad en el fondo a partir del tercer año?
- (0,5 puntos) Para $t = -2$, determina en qué intervalos de tiempo la rentabilidad del fondo crece y en cuáles decrece a partir del tercer año.

Solución:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3^-} R(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-(x + (t - 3))^2 + (t + 27)) = -t^2 + t + 27 = R(3) \text{ y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} R(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(-\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + 5x - 3 \right) = 3 - 9t \implies$$

$$-t^2 + t + 27 = 3 - 9t \implies t^2 - 10t - 24 = 0 \implies t = -2 \text{ y } t = 12$$

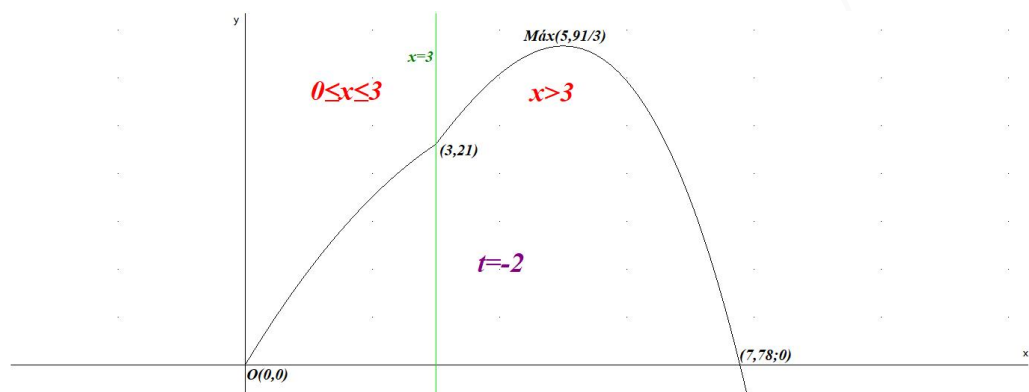
- A partir del tercer año $R(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 3 \implies R'(x) = -x^2 + 4x + 5 = 0 \implies x = 5$
y $x = -1$ (No válida)
 $R''(x) = -2x + 4 \implies R''(5) = -6 < 0 \implies x = 5$ es un máximo relativo.
El mayor rendimiento es a los 5 años.

- Cuando $t = -2$:

$$R(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases} \implies R'(x) = \begin{cases} 10 - 2x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

	$(3, 5)$	$(5, \infty)$
$R'(x)$	+	-
$R(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(3, 5)$ y decreciente en el $(5, \infty)$. A partir del tercer año la función es creciente hasta el quinto, donde se produce la máxima rentabilidad, y momento en el que empieza a decrecer de forma continua.



Problema 5.1.4 (1,5 puntos) Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, encuentra el valor de los parámetros a , b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto $(-1, 0)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 0$ es $y = x$.

Solución:

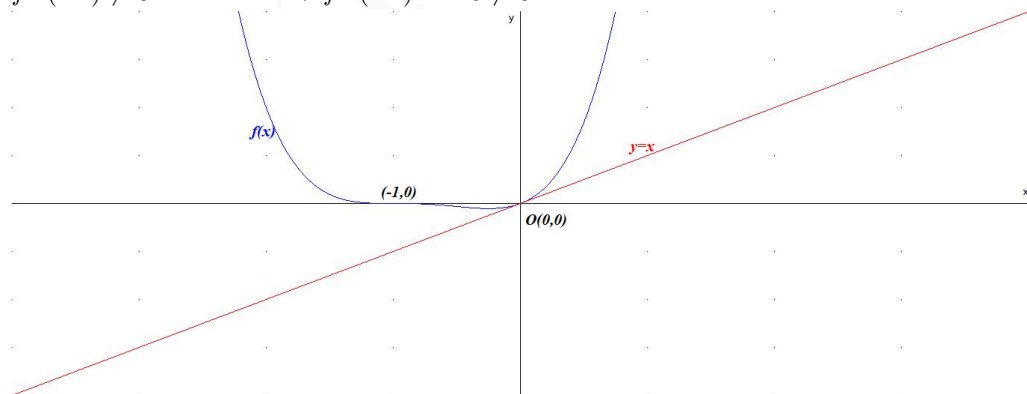
$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \implies f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \implies f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$$

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \implies 1 - a + b - c = 0 \\ f'(-1) = 0 \implies -4 + 3a - 2b + c = 0 \\ m = f'(0) = 1 \implies c = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$$

Quedaría por comprobar que $x = -1$ es un extremo, es decir, $f''(-1) \neq 0$ $\xrightarrow{f''(x)=12x^2+18x+6}$ $f''(-1) = 0 \implies$ en $x = -1$ no hay extremo, en ese punto la función tiene tangente horizontal pero pasa de decrecer a crecer. De hecho se trata de un punto de inflexión:

$$f'''(-1) \neq 0 \xrightarrow{f'''(x)=24x+18} f'''(-1) = -6 \neq 0$$



Sección 2 (3,5 puntos) Bloque 1

Problema 5.1.5 (1,5 puntos) Una empresa de consultoría tiene dos sedes, una en Toledo y otra en Cuenca. La sede de Toledo está formada por 6 analistas y 6 desarrolladores, mientras que la de Cuenca la forman 4 analistas y 6 desarrolladores. Además, se sabe que el 30 % de los analistas y el 50 % de los desarrolladores de la empresa usan MacBooks en su trabajo diario.

- a) (0,75 puntos) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook?

- b) (0,75 puntos) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador?

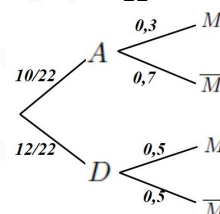
Solución:

Sean A analistas, D desarrolladores, M usa MacBook y $\bar{M}$ no usa MacBook.

En total $6 + 4 = 10$ analistas y $6 + 6 = 12$ desarrolladores. Luego $P(A) = \frac{10}{22}$ y $P(D) = \frac{12}{22}$.

$$\text{a) } P(\bar{M}) = P(\bar{M}|A)P(A) + P(\bar{M}|D)P(D) = 0,7 \cdot \frac{10}{22} + 0,5 \cdot \frac{12}{22} = \frac{13}{22} = 0,5909$$

$$\text{b) } P(D|M) = \frac{P(M|D)P(D)}{P(M)} = \frac{0,5 \cdot \frac{12}{22}}{1 - \frac{13}{22}} = \frac{2}{3} = 0,6667$$



Problema 5.1.6 (2 puntos) Un fabricante de microprocesadores ha tomado una muestra aleatoria de 144 chips y ha medido el tiempo de ejecución de una operación, proporcionando una media de 142 milisegundos. Si se sabe que el tiempo de ejecución de los chips sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 42$ milisegundos,

- a) (1 punto) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de ejecución de los chips con un nivel de confianza del 94,64 %.
- b) (1 punto) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94,12 %, el error máximo admisible sea menor que 8 milisegundos.

Solución:

$$N(\mu; 42)$$

$$\text{a) } n = 144, \bar{X} = 142 \text{ y } NC = 94,64\% = 0,9464 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,0536 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,0268$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9732 \implies z_{\alpha/2} = 1,93$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,93 \frac{42}{\sqrt{144}} = 6,755$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (142 - 6,755; 142 + 6,755) = (135,245; 148,755)$$

$$\text{b) } NC = 94,12\% = 0,9412 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,0588 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,0294$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9706 \implies z_{\alpha/2} = 1,89$$

$$8 = 1,89 \frac{42}{\sqrt{n}} \implies n \geq 98,456 \implies n = 99$$

Bloque 2

Problema 5.1.7 (1,5 puntos) En una clase se celebran elecciones para delegada y se presentan dos candidatas, Inés y Nerea. Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto. Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: $D = d \cdot c + r$). El 5 % del total de votos emitidos es nulo.

a) (0,75 puntos) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular el número de votos nulos y los que recibieron Inés y Nerea.

b) (0,75 puntos) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sea x número de votos de Inés, y número de votos de Nerea y z número de votos nulos.

$$\begin{cases} 4y - 3x = 1 + z \\ \frac{x}{y} = 1 + \frac{7}{y} \\ 0,05(x + y + z) = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + z = -1 \\ x - y = 7 \\ x + y - 19z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 7 \\ x + y - 19z = 0 \\ 3x - 4y + z = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -19 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -19 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & -22 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -19 & -7 \\ 0 & 0 & -17 & -51 \end{array} \right) \Rightarrow$$

sistema compatible determinado. Solución única:

$$\begin{cases} -17z = -51 \Rightarrow z = 3 \\ 2y - 57 = -7 \Rightarrow y = 25 \\ x - 25 + 0 = 7 \Rightarrow x = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 32 \text{ votos para Inés} \\ y = 25 \text{ votos para Nerea} \\ z = 3 \text{ votos nulos} \end{cases}$$

Problema 5.1.8 (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (0,75 puntos) Calcula, si es posible, $C + A \cdot B$

b) (1,25 puntos) ¿Son iguales $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ y $(C + A \cdot B)^{-1}$.

Solución:

$$\text{a) } C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/7 & -1 \\ 1/7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 & 0 \\ -6/7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C + A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}. \text{ Luego } C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} \neq (C + A \cdot B)^{-1}$$

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

Problema 5.1.9 (1,5 puntos) En un instituto el 64% de los estudiantes aprueban Matemáticas, el 72 % aprueban Inglés y el 78 % aprueban Matemáticas o Inglés o ambas.

a) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de suspender alguna de las dos asignaturas?

b) (0,75 puntos) ¿Son independientes los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Inglés? Justifica la respuesta.

Solución:

Sean M aprueba matemáticas e I aprueba inglés.

Tenemos: $P(M) = 0,64$, $P(I) = 0,72$ y $P(M \cup I) = 0,78$

$$\text{a) } P(\overline{M} \cup \overline{I}) = P(\overline{M}) + P(\overline{I}) - P(\overline{M} \cap \overline{I}) = 0,36 + 0,28 - P(\overline{M} \cup \overline{I}) = 0,64 - (1 - P(M \cup I)) = 0,64 - (1 - 0,78) = 0,42$$

$$\text{b) } P(M \cap I) = P(M) + P(I) - P(M \cup I) = 0,64 + 0,72 - 0,78 = 0,58.$$

$$P(M) \cdot P(I) = 0,64 \cdot 0,72 = 0,4608$$

Luego $P(M \cap I) \neq P(M) \cdot P(I) \Rightarrow M$ e I no son independientes.

Problema 5.1.10 (2 puntos) La edad de los usuarios de un juego online sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ años². Se ha tomado una muestra de 10 usuarios y sus edades eran 16, 19, 21, 15, 14, 18, 20, 15, 14 y 18 años.

- a) (1 punto) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la edad de los usuarios con un nivel de confianza del 97 %.
- b) (0,5 puntos) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con menor amplitud para el mismo nivel de confianza.
- c) (0,5 puntos) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 81 y un nivel de confianza del 95,44 %?

Solución:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = 4 \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow N(\mu; 2)$$

$$\text{a) } n = 10, \overline{X} = \frac{16 + 19 + 21 + 15 + 14 + 18 + 20 + 15 + 14 + 18}{10} = 17 \text{ y } NC = 97\% = 0,97 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \frac{2}{\sqrt{10}} = 1,3724$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (17 - 1,3724; 17 + 1,3724) = (15,6275; 18,3724)$$

- b) La amplitud del intervalo de confianza es dos veces el error, luego hay que disminuir el error. Como el error es directamente proporcional al nivel de confianza y a la desviación estándar, datos que se mantienen inalterables hay que incidir en el tamaño de la muestra que es inversamente proporcional al error. Si aumentamos el tamaño muestral el error disminuye y la amplitud del intervalo de confianza también.

$$\text{c) } NC = 95,44\% = 0,9544 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,0456 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0228$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9722 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \frac{2}{\sqrt{81}} = 0,4444$$

Bloque 2

Problema 5.1.11 (1,5 puntos) Durante una tormenta, la altura, $A(x)$; que han alcanzado las olas del mar, en metros, se puede expresar con respecto al tiempo (x en horas) mediante la función

$$A(x) = \begin{cases} -(2x+t)^2 + (11+t) & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 8x + 19 + t & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

- a) (0,75 puntos) Halla los valores de t para que la función de la altura de las olas sea continua en $x = 2$.
- b) (0,75 puntos) Representa gráficamente la función de la altura de las olas, $A(x)$, para el valor $t = -1$.

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} A(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-(2x+t)^2 + (11+t)) = -t^2 - 7t - 5$ y
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} A(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 8x + 19 + t) = t + 7 = A(2) \Rightarrow$
 $-t^2 - 7t - 5 = t + 7 \Rightarrow t^2 + 8t + 12 = 0 \Rightarrow t = -6 \text{ y } t = -2.$

b) Si $t = -1 \Rightarrow A(x) = \begin{cases} -4x^2 + 4x + 9 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 8x + 18 & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \end{cases}$

Puntos de corte:

Con OY : hacemos $x = 0 \Rightarrow A(0) = 9 \Rightarrow (0, 9)$

Con OX : hacemos $A(x) = 0 \Rightarrow$

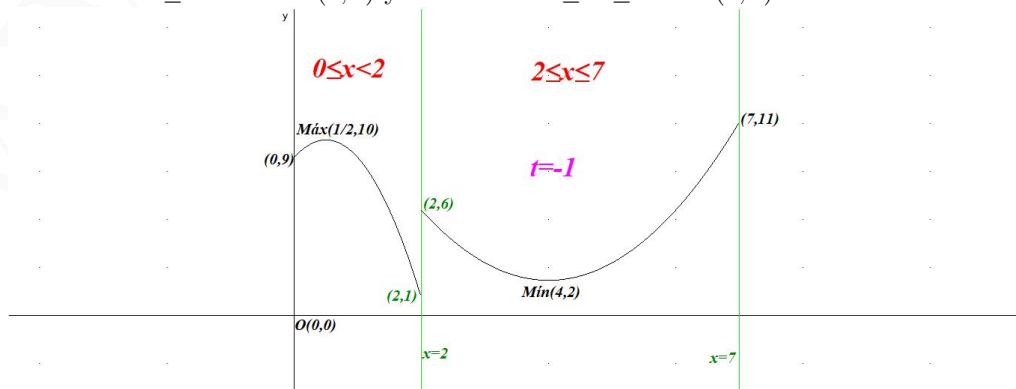
$$\begin{cases} -4x^2 + 4x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2} & \text{no válidas si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 8x + 18 > 0 & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \end{cases} \Rightarrow$$

No hay cortes con el eje OX y $A(7) = 11 \Rightarrow (7, 11).$

Monotonía: $A'(x) = \begin{cases} -8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4 & \text{si } 2 < x < 7 \end{cases}$

	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$	$(2, 4)$	$(4, 7)$
$A'(x)$	+	-	-	+
$A(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (4, 7)$ y decreciente en el $\left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, 4)$ con un máximo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2}, 10\right)$ y un mínimo relativo en $(4, 2)$. Con un salto en $x = 2$, en la rama $0 \leq x < 2 \Rightarrow (2, 1)$ y en la rama $2 \leq x \leq 7 \Rightarrow (2, 6)$



Problema 5.1.12 (2 puntos) La evolución del número de socios de un determinado club de fútbol desde el año de su fundación, 1965 ($t = 0$), hasta su desaparición en 2018 ($t = 53$) viene dada por la expresión $S(t) = -0,5(2t^3 - 34t^2 - 3968t - 60)$ donde t se expresa en años.

- a) (0,5 puntos) ¿Cuántos socios tenía el club en el año del mundial en España, 1982?
- b) (1,5 puntos) ¿En qué momento de la existencia del club se alcanzan el máximo y mínimo número de socios? ¿Cuáles son los valores del máximo y mínimo número de socios?

Solución:

- a) En 1982 $\implies t = 17 \implies S(17) = 33758$ socios.
- b) $S'(t) = -3x^2 + 34x + 1984 = 0 \implies t = 32$ y $t = -\frac{62}{3}$ (no válida)
 $S''(x) = -6x + 34 \implies S''(32) = -158 < 0 \implies (32, 48158)$ es un máximo relativo.
Además $S(0) = 30$ socios y $S(53) = 4058$ socios.
Es decir la mayor cantidad de socios se produce a los 32 años en el año 1997 con 48158 socios y la menor cantidad a los 0 años en el 1965 con 30 socios.

5.2. Extraordinaria

El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

Problema 5.2.1 (1,5 puntos) Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere 4 horas de trabajo y 60€ en gasto de material y arroja unos beneficios de 45€, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone 7 horas de trabajo y tiene un gasto de 48€ siendo el beneficio de 30€. Cada semana, la industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2088€ en material y está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio.

- a) (1,25 puntos) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.
- b) (0,25 puntos) Determina cuántos kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo.

Solución:

Sean x kg de planchas de acero e y de aluminio.

	horas	gasto	beneficio
plancha de acero	4	60	45
plancha de aluminio	7	48	30
	≤ 200	≤ 2088	

a) Tenemos:

$$f(x, y) = 45x + 30y \text{ sujeto a}$$

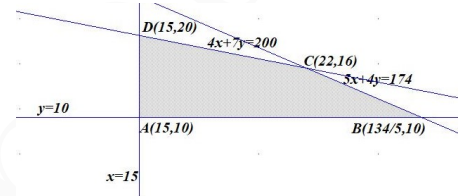
$$\begin{cases} 4x + 7y \leq 200 \\ 60x + 48y \leq 2088 \\ x \geq 15 \\ y \geq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 7y \leq 200 \\ 5x + 4y \leq 174 \\ x \geq 15 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(15, 10)$, $B(134/5, 10)$, $C(22, 16)$ y $D(15, 20)$.

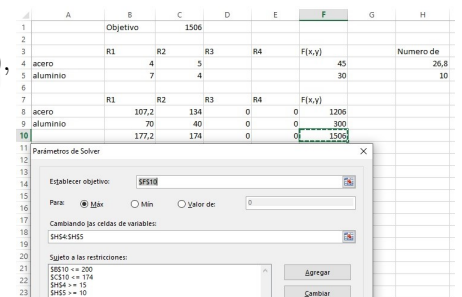
b) Sustituyendo en $f(x, y) = 45x + 30y$:

$$\begin{cases} f(15, 10) = 975 \\ f(134/5, 10) = 1506 \\ f(22, 16) = 1470 \\ f(15, 20) = 1275 \end{cases} \Rightarrow$$

El máximo beneficio es de 1506€ y se consigue fabricando $\frac{134}{5} = 26,8$ kg de plancha de acero y 10 kg de plancha de aluminio.



Solución por solver:



Problema 5.2.2 (1,5 puntos) Tras la Semana Santa, la cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm³. El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset y además, el embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután.

- a) (0,75 puntos) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de agua hay embalsada en cada embalse.
- b) (0,75 puntos) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sean x hm³ de Torre de Abraham, y hm³ de Gasset y z hm³ de Azután.

$$\begin{cases} x + y + z = 156 \\ z = 2(x - y) \\ y = \frac{1}{3}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 156 \\ 2x - 2y - z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 156 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 156 \\ 0 & -4 & -3 & -312 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) = \\ & \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 4F_3 + 3F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 156 \\ 0 & -4 & -3 & -312 \\ 0 & 0 & -13 & -936 \end{array} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

sistema compatible determinado. Solución única:

$$\begin{cases} -13z = -936 \implies z = 72 \\ -4y - 216 = -312 \implies y = 24 \\ x + 24 + 72 = 156 \implies x = 60 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 60 \text{ hm}^3 \\ y = 24 \text{ hm}^3 \\ z = 72 \text{ hm}^3 \end{cases}$$

El embalse de de Torre de Abraham tiene 60 hm^3 , el de Gasset tiene 24 hm^3 y el de Azután 72 hm^3 .

Bloque 2

Problema 5.2.3 (1,5 puntos) El precio, $P(x)$ (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días ($x \equiv$ días) viene expresado por la función

$$P(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 & \text{si } 0 \leq x \leq c \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 & \text{si } c < x < 10 \end{cases}$$

- (0,5 puntos) ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$?
- (0,5 puntos) Para $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día?
- (0,5 puntos) Para $c = 2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow c^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow c} (18x^2 - 100x + 162) = 18c^2 - 100c + 162 \\ \lim_{x \rightarrow c^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow c} (-x^3 + 18x^2 - 96x + 162) = -c^3 + 18c^2 - 96c + 162 \\ P(c) = 18c^2 - 100c + 162 \end{cases} \implies \\ 18c^2 - 100c + 162 = -c^3 + 18c^2 - 96c + 162 \implies c^3 - 4c = 0 \implies c = 0 \text{ (si es válida), } c = -2 \text{ (no válida) y } c = 2 \text{ que si es válida.} \end{aligned}$$

$$\text{b) Si } c = 2 \implies P(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 & \text{si } 2 < x < 10 \end{cases} \implies$$

$$P'(x) = \begin{cases} 36x - 100 = 0 \implies x = \frac{25}{9} > 2 \text{ (no válida)} & \text{si } 0 < x < 2 \\ -3x^2 + 36x - 96 = 0 \implies x = 4, x = 8 & \text{si } 2 < x < 10 \end{cases}$$

A partir del segundo día tenemos:

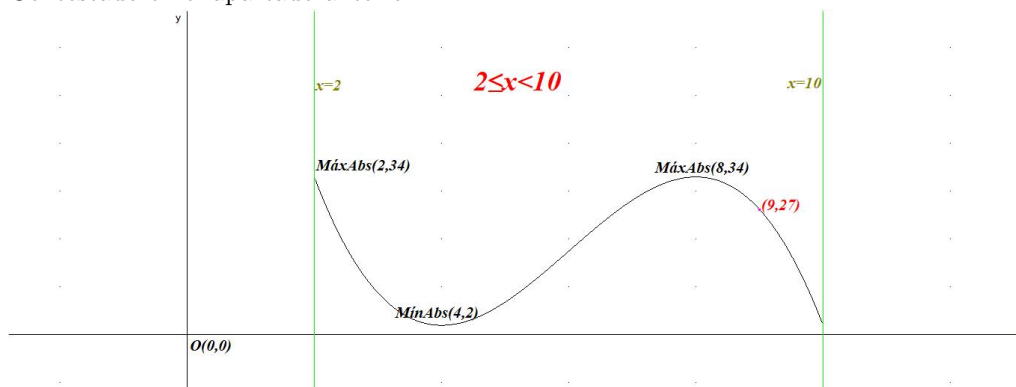
	(2, 4)	(4, 8)	(8, 10)
$P'(x)$	-	+	-
$P(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo (4, 8) y decreciente en el (2, 4) $\cup$ (8, 10) con un mínimo relativo en el punto (4, 2) y un máximo relativo en el (8, 34).

Además tenemos: $P(2) = 34$ y $P(10) = 2$.

Luego el máximo absoluto es el día 2 y el 8 con 34€ alcanzando el mínimo relativo de 2€ el día 4, a partir de este momento las acciones tienden a recuperarse hasta el día 8 con un máximo relativo de 34€. A partir de ese día las acciones vuelven a devaluarse y alcanzaría el mínimo absoluto de 2€ el día 10 pero no está en el dominio de la función, si elegimos el día 9 el valor de las acciones sería 27€, podemos concluir con que el mínimo relativo el día 4 es absoluto.

c) Contestado en el apartado anterior:



Problema 5.2.4 (1,5 puntos) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, encuentra el valor de los parámetros a , b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $(1, 8)$ es $y = 2x + 6$.

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \implies f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \implies c = 3 \\ f(1) = 8 \implies a + b + c = 8 \\ f'(1) = 2 \implies 3a + 2b = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -8 \\ b = 13 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = -8x^3 + 13x^2 + 3$$

Sección 2 (3,5 puntos) Bloque 1

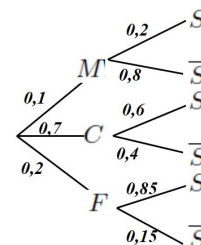
Problema 5.2.5 (1,5 puntos) En un taller el 10 % de las reparaciones se realizan a motos, el 70 % a coches y el resto a furgonetas. Se sabe que un 20 % de las reparaciones a motos, un 60 % de las reparaciones a coches y un 85 % de las reparaciones a furgonetas las paga el seguro.

- (0,75 puntos) Elegido un vehículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la reparación no la pague el seguro?
- (0,75 puntos) Si se sabe que una reparación la ha pagado el seguro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de una moto?

Solución:

Sean M motos, C coches, F furgonetas, S tiene seguro y $\bar{S}$ no tiene seguro.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\bar{S}) &= P(\bar{S}|M)P(M) + P(\bar{S}|C)P(C) + P(\bar{S}|F)P(F) = \\ &= 0,8 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,7 + 0,15 \cdot 0,2 = 0,39 \\ \text{b) } P(M|S) &= \frac{P(S|M)P(M)}{P(S)} = \frac{0,2 \cdot 0,1}{1 - 0,39} = 0,0328 \end{aligned}$$



Problema 5.2.6 (2 puntos) Las horas de sueño de la población adolescente española sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ horas². Se ha tomado una muestra de 12 adolescentes y las horas de sueño registradas han sido 6,5, 8,4, 9,6, 7,4, 7,1, 6,8, 8,8, 8,3, 8,0, 7,1, 7,8 y 9,0 horas.

- a) (1 punto) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de las horas de sueño con un nivel de confianza del 95,96 %.
- b) (1 punto) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de 64 adolescentes y un nivel de confianza del 96,52 %?

Solución:

$$Var(X) = \sigma^2 = 4 \implies \sigma = 2 \implies N(\mu, 2)$$

$$\text{a) } n = 12, \bar{X} = \frac{6,5 + 8,4 + 9,6 + 7,4 + 7,1 + 6,8 + 8,8 + 8,3 + 8,0 + 7,1 + 7,8 + 9,0}{12} = 7,9$$

horas y $NC = 95,96\% = 0,9596 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,0404 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,0202$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9798 \implies z_{\alpha/2} = 2,05$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,05 \frac{2}{\sqrt{12}} = 1,1836 \text{ horas}$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (7,9 - 1,1836; 7,9 + 1,1836) = (6,7164; 9,0836)$$

$$\text{b) } NC = 96,52\% = 0,9652 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,0348 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,0174$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9826 \implies z_{\alpha/2} = 2,11$$

$$E = 2,11 \frac{2}{\sqrt{64}} = 0,5275.$$

Bloque 2

Problema 5.2.7 (1,5 puntos) De los bebés inscritos en el mes de mayo en Castilla-La Mancha, 72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David. Sabemos que el número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba. Además, se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo.

- a) (0,75 puntos) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántos bebés han sido inscritos con cada uno de los nombres.
- b) (0,75 puntos) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

- a) Sea x con el nombre de Alba, y con el de Pablo y z con el de David.

$$\begin{cases} x + y + z = 72 \\ z = y - x \\ x = z + \frac{y}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 72 \\ x - y + z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72 \\ 0 & -2 & 0 & -72 \\ 0 & -4 & -6 & -216 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema compatible determinado. Solución única:

$$\begin{cases} -2y = -72 \Rightarrow y = 36 \\ -144 - 6z = -216 \Rightarrow z = 12 \\ x + 36 + 12 = 72 \Rightarrow x = 24 \end{cases}$$

24 se llaman Alba, 36 se llaman Pablo y 12 David.

Problema 5.2.8 (1,5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$,

- a) (1 punto) Comprueba que $A^2 = 2A - I$; siendo I la matriz identidad de orden 3.
b) (1 punto) Usando la fórmula anterior, expresa A^4 a partir de las matrices A e I y calcula su valor.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } A^2 &= \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I &= 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ \text{Luego } A^2 &= 2A - I. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A^3 &= AA^2 = A(2A - I) = 2A^2 - A = 2(2A - I) - A = 3A - 2I \\ A^4 &= AA^3 = A(3A - 2I) = 3A^2 - 2A = 3(2A - I) - 2A = 4A - 3I \\ A^4 &= 4A - 3I = 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sección 3 (3,5 puntos) Bloque 1

Problema 5.2.9 (1,5 puntos) El 70 % de los usuarios de una plataforma de streaming ve series, el 20 % ve documentales y el 12 % ve series y documentales.

- a) (0,75 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de usuarios que no ve ni series ni documentales?
b) (0,75 puntos) Si elegido un usuario al azar, indica que ve series, ¿cuál es la probabilidad de que vea documentales?

Solución:

Sean S ve series y D ve documentales.

$P(S) = 0,7$, $P(D) = 0,2$ y $P(S \cap D) = 0,12$

- a) $P(\overline{S} \cap \overline{D}) = P(\overline{S \cup D}) = 1 - P(S \cup D) = 1 - (P(S) + P(D) - P(S \cap D)) = 1 - (0,7 + 0,2 - 0,12) = 0,22 \Rightarrow 22\%$
b) $P(D|S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{0,12}{0,7} = 0,1714$

Problema 5.2.10 (2 puntos) En una empresa de telefonía, el número de llamadas al día que reciben de clientes para hacer reclamaciones sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 280$ llamadas. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 días proporcionando una media de 486 llamadas de clientes al día.

- (1 punto) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de llamadas con un nivel de confianza del 95 %.
- (0,5 puntos) Explica, justificando la respuesta, qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra.
- (0,5 puntos) ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de llamadas al día es de 500 con un nivel de confianza del 99 %? Justifica la respuesta.

Solución:

$$N(\mu; 280)$$

$$a) \ n = 100, \bar{X} = 486 \text{ llamadas y } NC = 95\% = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{280}{\sqrt{100}} = 54,88 \text{ llamadas}$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (486 - 54,88; 486 + 54,88) = (431,12; 540,88)$$

- La amplitud del intervalo de confianza es dos veces el error, luego hay que disminuir el error. Como el error es directamente proporcional al nivel de confianza y a la desviación estandar, datos que se mantienen inalterables hay que incidir en el tamaño de la muestra que es inversamente proporcional al error. Si aumentamos el tamaño muestral el error disminuye y la amplitud del intervalo de confianza también.
- La afirmación de una media de 500 es aceptada para un nivel de confianza del 95 % ($500 \in IC$) y si aumentamos esta confianza aumenta el error y la amplitud del nuevo intervalo de confianza luego seguirá dentro del intervalo.

Bloque 2

Problema 5.2.11 (1,5 puntos) En una empresa farmacéutica, el rendimiento económico, $R(x)$ (en millones de euros), de un fármaco en función del tiempo, x (en años), desde su lanzamiento

viene expresado por la función
$$R(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (5 + t)x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ -(x + t)^2 + (14 + t)x - 30 & \text{si } 5 < x \leq 11 \end{cases}$$

- (0,75 puntos) ¿Existe algún valor de t para el que el rendimiento económico del fármaco sea continuo en $x = 5$?
- (0,75 puntos) Representa gráficamente el rendimiento económico del fármaco para $t = 0$.

Solución:

a) En $x = 5$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^-} R(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} ((5+t)x - 1) = 5t + 24 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} R(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (-(x+t)^2 + (14+t)x - 30) = -t^2 - 5t + 15 \implies \\ R(5) = 5t + 24 \end{cases}$$

$$5t + 24 = -t^2 - 5t + 15 \implies t^2 + 10t + 9 = 0 \implies t = -1 \text{ y } t = -9.$$

b) Si $t = 0$:

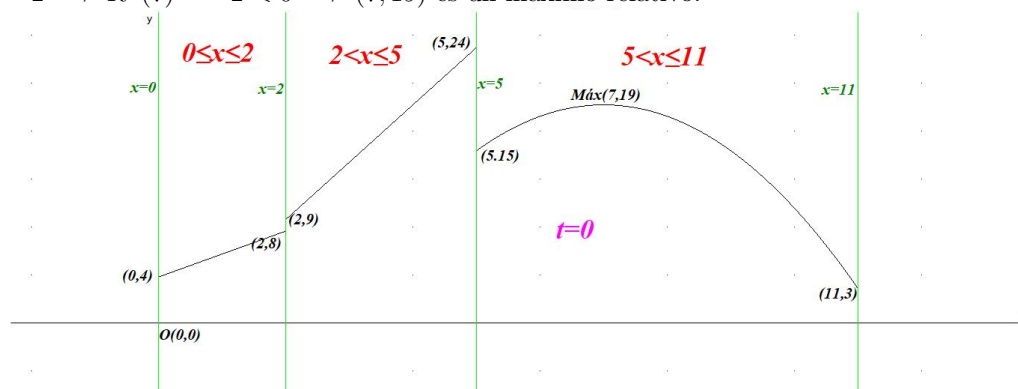
$$R(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 5x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ -x^2 + 14x - 30 & \text{si } 5 < x \leq 11 \end{cases}$$

La rama: $0 \leq x \leq 2$ es un segmento que une los puntos $(0, 4)$ y $(2, 8)$.

La rama: $2 < x \leq 5$ es un segmento que une los puntos $(2, 9)$ (no pertenece a la rama) y $(5, 24)$.

La rama: $5 < x \leq 11$ es una parábola que se inicia en $(5, 15)$ (no pertenece a la rama) y finaliza en el $(11, 3)$.

El vértice de la parábola será: $R'(x) = -2x + 14 = 0 \implies x = 7 \implies (7, 19)$ como $R''(x) = -2 \implies R''(7) = -2 < 0 \implies (7, 19)$ es un máximo relativo.



Problema 5.2.12 (2 puntos) El número de turistas que visitan una ciudad durante un día determinado se ajusta a la función $P(t) = 432t - t^3$ donde t es la hora del día entre las 8 de la mañana y las 8 de la tarde ($8 \leq t \leq 20$) y $P(t)$ indica el número de visitantes.

a) (1,25 puntos) ¿En qué momento del día se produce una máxima afluencia? ¿Cuál es esa máxima afluencia?

b) (0,75 puntos) ¿En qué intervalos de horas sube y en cuáles baja la afluencia de visitantes?

Solución:

a) $P'(t) = 432 - 3t^2 = 0 \implies t = \pm 12$ (la solución negativa no es válida)

	(8, 12)	(12, 20)
$P'(t)$	+	-
$P(t)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(8, 12)$ y decreciente en el $(12, 20)$. Presenta un máximo relativo en el punto $(12, 3456)$; $P(12) = 3456$ turistas.

Tenemos: $P(8) = 2944$ turistas y $P(20) = 640$ turistas. Luego el mínimo absoluto estaría en la hora 20 con 640 turistas, y el máximo absoluto sería de 3456 turistas a las 12 horas.

b) Sube la cantidad de turistas entre las 8 y las 12 horas y desciende entre las 12 y las 20 horas.

Capítulo 6

Castilla-León

6.1. Ordinaria

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

Problemas a elegir tres

(Números y álgebra)

Problema 6.1.1 (3 puntos) En una concentración deportiva, el médico indica que cada deportista debe tomar entre un mínimo de 110 mg y un máximo de 250 mg de vitamina C al día, y también entre 80 y 150 mg de magnesio. Los deportistas toman comprimidos de VITAMIN que contienen, cada uno, 40 mg de vitamina C y 10 mg de magnesio. Asimismo, ingieren comprimidos MAGNE con 10 mg de vitamina C y 20 mg de magnesio cada uno. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de comprimidos de cada tipo que son necesarios si se desea tomar el menor número posible de comprimidos e ingerir la dosis necesaria de vitamina C y de magnesio.

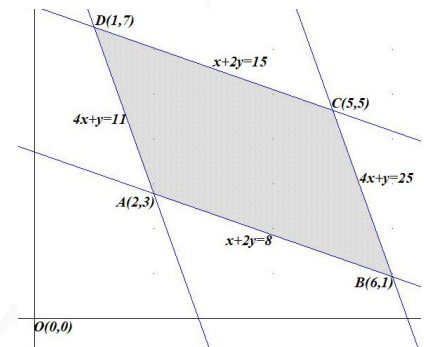
Solución:

Sean x número de comprimidos VITAMIN e y número de comprimidos MAGNE.

	C	Mg
VITAMIN	40	10
MAGNE	10	20
	$110 \leq C \leq 250$	$80 \leq Mg \leq 150$

Región factible:

$$\begin{cases} 40x + 10y \leq 250 \\ 40x + 10y \geq 110 \\ 10x + 20y \leq 150 \\ 10x + 20y \geq 80 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y \leq 25 \\ 4x + y \geq 11 \\ x + 2y \leq 15 \\ x + 2y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



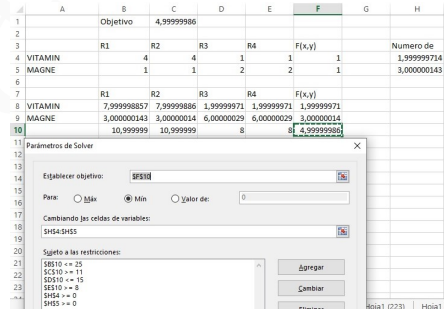
Los vértices de la región factible son: $A(2,3)$, $B(6,1)$, $C(5,5)$ y $D(1,7)$

función objetivo: $f(x, y) = x + y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(2, 3) = 5 \\ f(6, 1) = 7 \\ f(5, 5) = 10 \\ f(1, 7) = 8 \end{cases}$$

La menor cantidad de comprimidos serían 5, 2 de VITAMIN y 3 de MAGNE.



(Números y álgebra)

Problema 6.1.2 (3 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ ky + (5 - k)z = -10 \\ x - 3y + kz = 10 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de k .

b) Resolver el sistema para $k = 1$

Solución:

$$\text{a) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & k & 5-k & -10 \\ 1 & -3 & k & 10 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = k^2 - 5k = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 5 \end{cases}$$

Si $k \in \mathbb{R} - \{0, 5\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{número de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)}$

Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 1 & -3 & 0 & 10 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

☛ Si $k = 5$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 1 & -3 & 5 & 10 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow$$

sistema incompatible

b) Si $k = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -10 \\ 1 & -3 & 1 & 10 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4z = 10 \Rightarrow z = -\frac{5}{2} \\ y - 10 = -10 \Rightarrow y = 0 \\ x - \frac{25}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{25}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{2} \\ y - 10 = -10 \Rightarrow y = 0 \\ -4z = 10 \Rightarrow z = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

(Análisis)

Problema 6.1.3 (3 puntos) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Determinar el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.
 b) Para $a = 1$, estudiar los puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

En la rama $x \leq 1$ la función es un polinomio y, por tanto, continua en toda la rama.

En la rama $x > 1$ el logaritmo siempre tiene valor real $\Rightarrow$ continua en toda la rama.

Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a + \ln x) = a \\ f(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \\ \xRightarrow{\hspace{1cm}} a = 0 \end{matrix}$$

b) Si $a = 1$ la función no es continua en $x = 1$ y tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

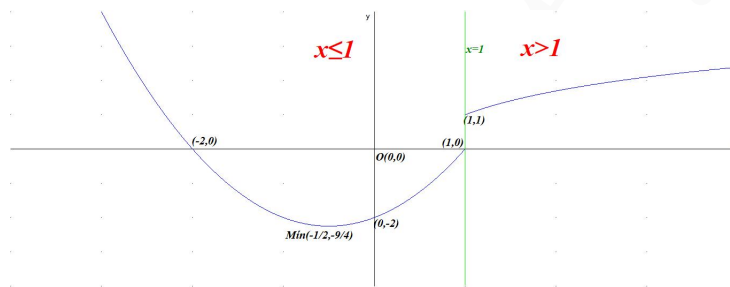
☛ Corte con el eje OY : hacemos $x = 0$ que está en la rama $x \leq 1 \Rightarrow (0, -2)$

☛ Corte con el eje OX : hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (-2, 0), (1, 0) & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + \ln x = 0 \Rightarrow (e^{-1}, 0) \text{ no válido} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\bullet f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} > 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$ y decreciente en el $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ con un mínimo relativo en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$



(Análisis)

Problema 6.1.4 (3 puntos) La temperatura (en grados centígrados) del agua del mar Mediterráneo ha cambiado con el tiempo según la función $T(x)$, donde x representa los años transcurridos desde el inicio de 2010:

$$T(x) = \begin{cases} 22 + 5,5x - 1,5x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- Estudiar si la temperatura del agua ha cambiado de forma continua a lo largo de los años.
- Hallar la temperatura del agua al inicio del año 2014 y razonar cuál se prevé que será la temperatura del agua dentro de muchos años.

Solución:

- Las dos ramas son continuas, la rama $0 \leq x < 3$ es un polinomio y la rama $x \geq 3$ es un cociente de polinomios y su denominador no se anula nunca. Hay que estudiar la continuidad en $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (22 + 5,5x - 1,5x^2) = 25 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} = 25 \\ T(3) = 25 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} T(x) = T(3)$$

T continua en $x = 3 \Rightarrow T$ continua en $\mathbb{R}$

La temperatura ha cambiado de forma continua a lo largo de los años.

b) En 2014 es $x = 4 \implies T(4) = \frac{51}{2} = 25,5^\circ\text{C}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} = \frac{52}{2} = 26^\circ\text{C}$$

La temperatura tiende a estabilizarse en 26°C cuando pasen muchos años.

(Estadística y probabilidad)

Problema 6.1.5 (3 puntos) El número de viajes realizados anualmente por habitantes de Castilla y León a comunidades limítrofes sigue una distribución normal cuya desviación típica es $\sigma = 10$. Si seleccionamos una muestra de 625 viajeros, la media de viajes realizados por los mismos es de 16.

a) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media de viajes anuales en toda la población para un nivel de significación del 4 %?

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

a) $N(\mu; 10)$, $n = 625$, $\bar{X} = 16$ y $\alpha = 0,04 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,02$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,98 \implies Z_{\alpha/2} = 2,055$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,055 \frac{10}{\sqrt{625}} = 0,822$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (16 - 0,822; 16 + 0,822) = (15,178; 16,822)$$

b) $E = 0,02$ y $NC = 0,90 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,1 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \implies Z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies E = 1,645 \frac{10}{\sqrt{500}} = 0,7357$$

(Estadística y probabilidad)

Problema 6.1.6 (3 puntos) En un instituto, 44 de cada 100 chicas y 5 de cada 10 chicos de segundo curso de Bachillerato están matriculados en la asignatura *Empresa y diseño de modelos de negocio*. Hay 150 chicas y 75 chicos en segundo curso de Bachillerato.

a) Si se elige un estudiante al azar de segundo curso de Bachillerato, hallar la probabilidad de que no esté matriculado en *Empresa y diseño de modelos de negocio*.

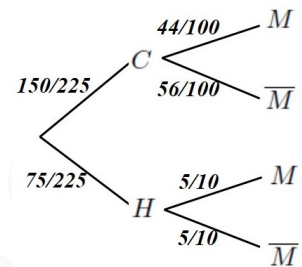
b) Sabiendo que el estudiante elegido está matriculado en *Empresa y diseño de modelos de negocio*, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Solución:

Sean C chica, H chico, M matriculado en *Empresa y diseño de modelos de negocio* y $\bar{M}$ no matriculado en *Empresa y diseño de modelos de negocio*.

$$\text{a) } P(\overline{M}) = P(\overline{M}|C)P(C) + P(\overline{M}|H)P(H) = \frac{56}{100} \cdot \frac{150}{225} + \frac{5}{10} \cdot \frac{75}{225} = \frac{27}{50} = 0,54$$

$$\text{b) } P(C|M) = \frac{P(M|C)P(C)}{P(M)} = \frac{\frac{44}{100} \cdot \frac{150}{225}}{1 - \frac{27}{50}} = \frac{44}{69} = 0,6377$$



Cuestiones a elegir una
(Números y álgebra)

Problema 6.1.7 (1 puntos) Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $C(A+X) = B - 2X$

Solución:

$$C(A+X) = B - 2X \implies CA + CX = B - 2X \implies CX + 2X = B - CA \implies$$

$$(C + 2I)X = B - CA \implies X = (C + 2I)^{-1}(B - CA)$$

(Análisis)

Problema 6.1.8 Calcular el área bajo la curva $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ y el eje OX en el intervalo $[-2, -1]$

Solución :

Comprobamos si la función corta al eje de abscisas dentro del intervalo $(-2, -1)$.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \implies x = 0,7321 \notin (-2, -1), x = -2,7321 \notin (-2, -1) \text{ y } x = -1 \notin (-2, -1)$$

$$S = \left| \int_{-2}^{-1} (x^3 + 3x^2 - 2) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - 2x \right]_{-2}^{-1} \right| = \left| \frac{5}{4} \right| = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ u}^2$$

(Estadística y probabilidad)

Problema 6.1.9 (1 puntos) Se lanza tres veces una moneda no trucada. Calcular la probabilidad de que salgan al menos dos caras seguidas.

Solución:

Sean C sale cara y X sale cruz.

$$P(\text{dos caras seguidas}) = P(CCX) + P(XCC) + P(CCC) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} = 0,375$$

6.2. Extraordinaria

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones

gráficas.

Problemas a elegir tres

(Números y álgebra)

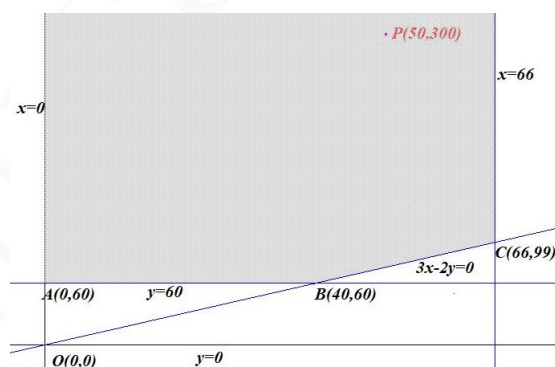
Problema 6.2.1 (3 puntos) Una academia de idiomas ofrece dos cursos de portugués: elemental (A1) y avanzado (A2). Por motivos de organización se puede admitir como máximo 66 estudiantes en el A1, aunque en el A2 se deben admitir 60 o más estudiantes. Por razones de espacio, el número de estudiantes del curso A1 debe ser inferior o igual a dos tercios del número de estudiantes del A2. Por cada estudiante matriculado, los beneficios mensuales del curso A1 y del curso avanzado A2 son de 145 euros y 150 euros, respectivamente. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de estudiantes de cada curso que la academia ha de matricular para maximizar el beneficio mensual y cuál es ese beneficio máximo.

Solución:

Sean x : n° alumnos en A1 e y : n° alumnos en A2.

☛ La región factible es:

$$\begin{cases} x \leq 66 \\ y \geq 60 \\ x \leq \frac{2}{3}y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 66 \\ y \geq 60 \\ 3x - 2y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



☛ Los vértices son: $A(0, 60)$, $B(40, 60)$ y $C(66, 99)$.

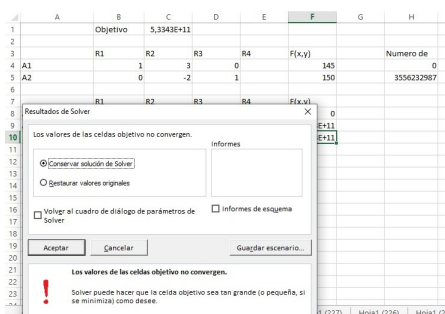
La región factible no tiene cota superior, para valorar los valores de esa región elegimos el punto $P(50, 300)$

☛ La función objetivo: $f(x, y) = 145x + 150y$

$$\begin{cases} f(0, 60) = 9000 \\ f(40, 60) = 14800 \\ f(66, 99) = 24420 \\ f(50, 300) = 52250 \text{ Máximo} \end{cases}$$

Luego el valor de máximo beneficio no recae en los vértices, sino en infinitos puntos de la región factible. Luego no podemos optimizar el beneficio.

Solución por solver :



(Números y álgebra)

Problema 6.2.2 (3 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente

del parámetro real a :
$$\begin{cases} x - y + az = 3 \\ x + 5y - 2az = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a .
- b) (1,5 puntos) Resolver el sistema para $a = -1$.

Solución:

a) $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 3 \\ 1 & 5 & -2a & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$ y $|A| = -3a - 6 = 0 \Rightarrow a = -2$

• Si $a \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

• Si $a = -2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -8 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 6F_3 - 5F_2 \end{array} \right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -38 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$$

b) Si $a = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & -8 \end{array} \right) =$$
$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 6F_3 - 5F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -38 \end{array} \right) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} -3z = -38 \Rightarrow z = \frac{38}{3} \\ 6y + 38 = -2 \Rightarrow y = -\frac{20}{3} \\ x + \frac{20}{3} - \frac{38}{3} = 3 \Rightarrow x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -\frac{20}{3} \\ z = \frac{38}{3} \end{cases}$$

(Análisis)

Problema 6.2.3 (3 puntos) Se considera la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4$.

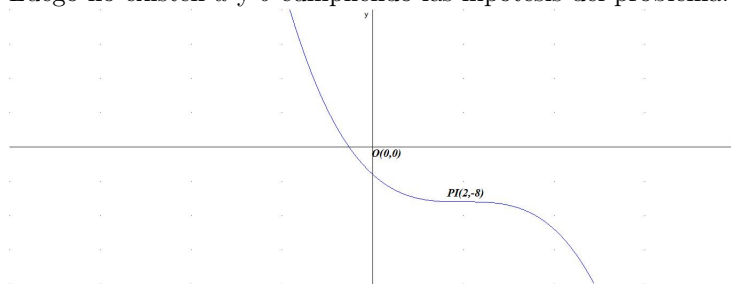
- a) (1,5 puntos) Averiguar los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto $(2, -8)$.
- b) (1,5 puntos) Si $a = 0$ y $b = -11$, hallar el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo $[4, 5]$.

Solución:

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 6x + b \Rightarrow f''(x) = 6ax + 6$$

$$a) \begin{cases} f(2) = -8 \Rightarrow 8a + 12 + 2b - 4 = -8 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 12 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 6x - 4$$

Comprobamos si $x = 2$ es un extremo, sustituyendo en $f''(x) \xrightarrow{f''(x)=-3x+6} f''(2) = 0 \Rightarrow (2, -8)$ no es un extremo se trata de un punto de inflexión. $f'''(x) = -3 \Rightarrow f'''(2) = -3 \neq 0$. Luego no existen a y b cumpliendo las hipótesis del problema.



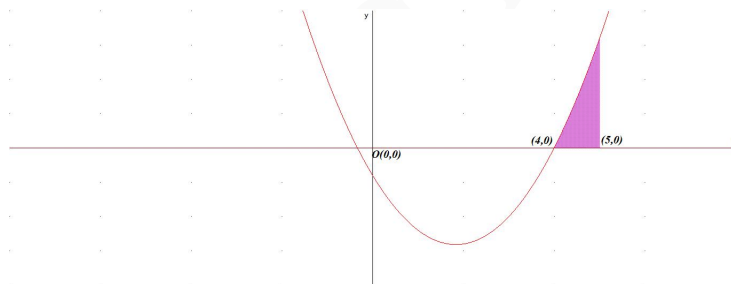
b) Si $a = 0$ y $b = -11 \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 11x - 4$. Analizamos si la función tiene algún punto de corte dentro del intervalo $[4, 5]$:

$f(x) = 3x^2 - 11x - 4 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} \notin (4, 5)$ y $4 \notin (4, 5)$. Luego sólo hay un intervalo de integración:

$$S_1 = \int_4^5 (3x^2 - 11x - 4) dx = \left[x^3 - \frac{11x^2}{2} - 4x \right]_4^5 = \frac{15}{2}$$

El resultado es positivo al estar la función por encima del eje de abscisas.

$$S = |S_1| = \left| \frac{15}{2} \right| = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ u}^2$$



(Análisis)

Problema 6.2.4 (3 puntos) Una empresa tiene un gran servidor web cuya velocidad de respuesta (Gigabits por segundo, Gbps) viene dada por la función $f(x) = 8,5 + \frac{3x}{1+x^2}$ para $x \geq 0$ donde x (terabytes) es la memoria requerida en cada momento.

- (2 puntos) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad de respuesta del servidor según la memoria requerida. ¿Cuánta es la memoria requerida al alcanzar la velocidad de respuesta máxima? Calcular esa velocidad máxima.
- (1 puntos) ¿Cuál es el límite de velocidad de respuesta del servidor a medida que aumenta la memoria requerida?

Solución:

- a) $f'(x) = -\frac{3(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = \pm 1$, la solución negativa está fuera del dominio de la función y es irrelevante.

	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La velocidad de respuesta es creciente en el intervalo $(0, 1)$ terabyte y decreciente en el $(1, \infty)$ terabyte con un máximo relativo en $x = 1$ terabyte con una velocidad de respuesta de 10 Gigabits $(1, 10)$. Tenemos $f(0) = 8,5$ Gigabits por lo que el máximo $(1, 10)$ es absoluto. Podemos asegurar que la velocidad máxima es de 10 Gigabits con una memoria de 1 terabyte.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(8,5 + \frac{3x}{1 + x^2} \right) = 8,5$

Aunque se aumente indefinidamente la memoria requerida la velocidad de respuesta tiende a ser de 8,5 Gigabits.

(Estadística y probabilidad)

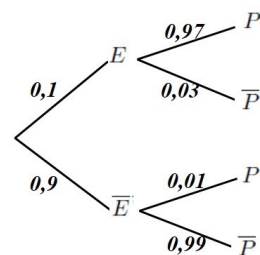
Problema 6.2.5 (3 puntos) El 10 % de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. El único test disponible para detectar esa enfermedad resulta positivo en el 97 % de las personas con la enfermedad. Este test también resulta positivo en el 1 % de las personas que no padecen la enfermedad. Si se realiza el test a una persona elegida al azar de dicha región, determinar:

- a) (1,5 puntos) La probabilidad de que el test resulte positivo.
 b) (1,5 puntos) Si el test resulta negativo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad?

Solución:

Sean E enferma, $\bar{E}$ sana, P test positivo, y $\bar{P}$ test negativo.

- a) $P(P) = P(P|E)P(E) + P(P|\bar{E})P(\bar{E}) = 0,97 \cdot 0,1 + 0,01 \cdot 0,9 = 0,106$
 b) $P(E|\bar{P}) = \frac{P(\bar{P}|E)P(E)}{P(\bar{P})} = \frac{0,03 \cdot 0,1}{1 - 0,106} = 0,0034$

**(Estadística y probabilidad)**

Problema 6.2.6 (3 puntos) Una máquina envasadora rellena sacos de cemento. El peso (en kg) de cada saco sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 2,25 kg.

- a) (1,5 puntos) Suponiendo que μ toma el valor de 24 kg, ¿cuál es la probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25,1250 kg?
 b) (1,5 puntos) Se toma una muestra de 15 sacos y se obtiene una media muestral del peso de 25,65 kg. Determinar, al nivel de confianza del 97 %, un intervalo para la media poblacional μ .

Solución:

$$N(\mu; 2, 25)$$

$$\text{a) } \mu = 24, n = 36 \implies \bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(24; 0, 375)$$

$$P(\bar{X} \geq 25, 1250) = P\left(Z \geq \frac{25, 1250 - 24}{0, 375}\right) = P(Z \geq 3) = 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0, 9987 = 0, 0013$$

$$\text{b) } NC = 97\% = 0, 97 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0, 03 \implies \frac{\alpha}{2} = 0, 015$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0, 985 \implies Z_{\alpha/2} = 2, 17$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2, 17 \frac{2, 25}{\sqrt{15}} = 1, 2607$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (25, 65 - 1, 2607; 25, 65 + 1, 2607) = (24, 3893; 26, 9107)$$

Cuestiones a elegir una
(Números y álgebra)

Problema 6.2.7 (1 punto) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si B^t es la matriz traspuesta de B , determinar la dimensión de la matriz X que es solución de la ecuación $(A + B^t)X = C$

Solución:

$$\begin{pmatrix} A & + & B^t \end{pmatrix} \begin{matrix} X \\ \hline \end{matrix} = \begin{matrix} C \\ \hline \end{matrix} \implies \begin{pmatrix} A & + & B^t \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} X \\ \hline \end{matrix} = \begin{matrix} C \\ \hline \end{matrix} \implies m = 3 \text{ y } n = 1$$

(Análisis)

Problema 6.2.8 (1 punto) ¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x^3}{x(x^2 - 1)}$?

Justificar la respuesta.

Solución :

El denominador de la función se anula en $x(x^2 - 1) = 0 \implies x = 0, x = \pm 1 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, -1, 1\}$

(Estadística y probabilidad)

Problema 6.2.9 (1 punto) Una tienda de mascotas realiza un sorteo con papeletas de tres cifras. Sabiendo que el número premiado se elige extrayendo al azar cada cifra, por separado y con reemplazamiento, de una bolsa que contiene bolas del 0 al 9, calcular la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

Solución:

Si 5 es el suceso sale 5 tenemos $P(5) = \frac{1}{10}$

$$P(\text{termina en } 55) = P(055) + P(155) + \dots + P(955) = 10 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{10}{1000} = 0, 01$$

“www.musat.net”

Capítulo 7

Cataluña

7.1. Ordinaria

Responda a **CUATRO** de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Problema 7.1.1 (2,5 puntos) Dos compañías de taxi, A y B , ofrecen distintas tarifas. La compañía A ofrece un coste fijo de 20 € más 0,4 € por kilómetro recorrido, mientras que el precio de la compañía B sigue la función $g(x) = 0,01x^2 + 0,1x + 10$, en la que x representa el número de kilómetros recorridos.

- a) (1 punto) ¿Cuál de las dos compañías ofrece la tarifa más económica si se hace un recorrido de 10 km? ¿Y si se hace de 80 km? Calcule la diferencia de precio en cada caso. ¿Hay algún coste fijo en la tarifa de la compañía B solo por subirse al taxi?
- b) (1,5 puntos) Determine para qué número de kilómetros recorridos las dos tarifas coinciden. Si se consideran solo los trayectos inferiores a esta cantidad, ¿para qué número de kilómetros la diferencia de precio entre una tarifa y la otra es máxima? ¿Cuál es esta diferencia máxima de precio?

Solución:

- a) La función que representa a la compañía A es $f(x) = 0,4x + 20$ y a la B es $g(x) = 0,01x^2 + 0,1x + 10$. Tenemos: $f(10) = 24$ € y $g(10) = 12$ €, luego es más económica la compañía B para un trayecto de 10 Km, con una diferencia de 12 €.
Si hace 80 Km tenemos $f(80) = 52$ € y $g(80) = 82$ €, luego es más económica la compañía A para un trayecto de 80 Km, con una diferencia de 30 €.
Hacemos $x = 0 \Rightarrow g(0) = 10$ € de coste fijo en la tarifa de la compañía B .
- b) $f(x) = g(x) \Rightarrow 0,4x + 20 = 0,01x^2 + 0,1x + 10 \Rightarrow 0,01x^2 - 0,3x - 10 = 0 \Rightarrow x = 50$ Km y $x = -20$ (no válida)
Sea $h(x) = f(x) - g(x) = -0,01x^2 + 0,3x + 10 \Rightarrow h'(x) = -0,02x + 0,3 = 0 \Rightarrow x = 15$

Como $h''(x) = -0,02 \implies h''(15) = -0,02 < 0 \implies x = 15$ Km es un máximo relativo con una diferencia de precios de $h(15) = 12,25$ €

Problema 7.1.2 (2,5 puntos) Una empresa de muebles dispone de tres fábricas que producen un determinado modelo de sofá. El mes pasado se fabricaron un total de 1.260 unidades de este modelo y se sabe que la segunda fábrica produjo tantos sofás como las otras dos juntas.

- (1,25 puntos) Con esta información, ¿se puede determinar cuántos sofás produjo cada una de las fábricas? Justifique la respuesta. A continuación, calcule, solo con esta información, cuántos sofás produjo la segunda fábrica.
- (1,25 puntos) Se sabe también que un 10 % de los sofás producidos por la primera fábrica, un 30 % de los producidos por la segunda y un 20 % de los producidos por la tercera eran de color gris, y que en total se fabricaron 284 sofás de este color. Encuentre cuántos sofás produjo cada fábrica el mes pasado.

Solución:

- Sean x unidades fabricadas por la primera fábrica, y unidades fabricadas por la segunda fábrica y z unidades fabricadas por la tercera fábrica.

$$\begin{cases} x + y + z = 1260 \\ y = x + z \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \implies \text{sistema compatible indeterminado. No podemos determinar cuántos sofás produce cada fábrica.}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 630 - \lambda \\ y = 630 \\ z = \lambda \end{cases} \implies \text{la segunda fábrica produce 630 sofás.}$$

- Al sistema anterior añadimos la nueva ecuación $0,1x + 0,3y + 0,2z = 284$ y nos queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 1260 \\ y = x + z \\ 0,1x + 0,3y + 0,2z = 284 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 2840 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 310 \text{ sofás} \\ y = 630 \text{ sofás} \\ z = 320 \text{ sofás} \end{cases}$$

La forma más fácil de resolver el sistema es por sustitución:

$$0,1x + 0,3y + 0,2z = 284 \implies 0,1(630 - \lambda) + 0,3 \cdot 630 + 0,2\lambda = 284 \implies \lambda = 320 \implies x = 630 - 320 = 310, y = 630 \text{ y } z = 320.$$

Problema 7.1.3 (2,5 puntos) Una campesina contrata a un conductor para que lleve un tractor hasta un pueblo que se encuentra a 300 km de distancia. Sabemos que el gasóleo que usa el tractor cuesta 1,96 € por litro y que el conductor cobra 14,70 € la hora. Se supone que el conductor hará todo el trayecto a una velocidad constante y que el consumo de gasóleo (en litros por hora), en función de la velocidad x (en kilómetros por hora), viene dado por la función $G(x) = 5 + \frac{x^2}{98}$

- (1,25 puntos) Calcule el tiempo que el conductor tardará en realizar el viaje y el coste total del viaje si el tractor hace todo el recorrido a 40 km/h (la velocidad máxima permitida para este tipo de vehículo). Compruebe que la función que da el coste total del viaje en función de la velocidad del tractor se puede expresar como $C(x) = \frac{7350}{x} + 6x$.
- (1,25 puntos) Calcule cuál es la velocidad que hace que el coste total del viaje sea mínimo. ¿Cuál es este coste?

Solución:

- a) Tenemos $\frac{300}{40} = 7,5$ h es el tiempo que tarda el conductor, por lo que paga al conductor $7,5 \cdot 14,7 = 110,25$ €

El gasto de gasóleo a 40 Km/h es $G(40) = \frac{1045}{49}$ l/h, luego gastará $7,5 \cdot \frac{1045}{49} = \frac{15675}{98}$ l, lo que tiene un coste de $\frac{15675}{98} \cdot 1,96 = \frac{627}{2} = 313,5$ €

El coste total del viaje será: $110,25 + 313,5 = 423,75$ €

La función $C(40) = \frac{7350}{40} + 240 = 423,75$ € con lo que se obtiene el mismo resultado.

Si la velocidad es x tenemos

$$C(x) = \frac{300}{x} \cdot 14,7 + \frac{300}{x} \left(5 + \frac{x^2}{98} \right) 1,96 = 6x + \frac{7350}{x} \quad qed$$

- b) $C'(x) = -\frac{7350}{x^2} + 6 = 0 \Rightarrow \frac{6x^2 - 7350}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 35$, la solución negativa es irrelevante.

	$(0, 35)$	$(35, \infty)$
$C'(x)$	-	+
$C(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función decrece en el intervalo $(0, 35)$ Km/h y crece en el $(35, \infty)$ Km/h con un mínimo relativo en $x = 35$ Km/h, en nuestro caso absoluto, con un coste de $C(35) = 420$ €

Problema 7.1.4 (2,5 puntos) Se considera que una matriz es mágica si la suma de los elementos de cada fila y de cada columna tiene como resultado en todos los casos el mismo valor, que se denomina constante mágica. Martí ha encontrado una forma de crear matrices mágicas eligiendo tres números cualesquiera y multiplicándolos por las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Martí propone a sus amigos que cada uno construya su matriz mágica particular a partir del día de su cumpleaños, del mes de su cumpleaños y de su edad.

- a) (1,25 puntos) Sabiendo que Martí nació el 10 de marzo y que tiene 18 años, calcule $10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C$. Compruebe que la matriz resultante es mágica e indique cuál es su constante mágica (el valor común de la suma de las filas y las columnas).
- b) (1,25 puntos) Martí ha calculado la matriz mágica de su padre, que celebra su cumpleaños el 8 de septiembre, y ha obtenido que su constante mágica es 153. ¿Qué edad tiene el padre de Martí?

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } D = 10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C &= 10 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 18 \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ D &= \begin{pmatrix} 10 & 41 & 3 \\ 11 & 18 & 25 \\ 33 & -5 & 26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{cases} F_1 : 10 + 41 + 3 = 54 \\ F_2 : 11 + 18 + 25 = 54 \\ F_3 : 33 - 5 + 26 = 54 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} C_1 : 10 + 11 + 33 = 54 \\ C_2 : 41 + 18 - 5 = 54 \\ C_3 : 3 + 25 + 26 = 54 \end{cases} \Rightarrow$$

D es una matriz mágica cuya constante es 54.

b) Sea a la edad de su padre, luego $D = 8 \cdot A + 9 \cdot B + a \cdot C =$

$$8 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 3a - 17 & 9 \\ a + 1 & a & a - 1 \\ 2a - 9 & 17 - a & 2a - 8 \end{pmatrix}$$

Luego $F_1 : 8 + 3a - 17 + 9 = 153 \Rightarrow a = 51$ años son los que cumple el padre de Martí, y sustituyendo tenemos la matriz mágica:

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 136 & 9 \\ 52 & 51 & 50 \\ 93 & -34 & 94 \end{pmatrix}$$

Problema 7.1.5 (2,5 puntos) Guiu y Roc son unos grandes aficionados al cine y ven muchas películas de la plataforma a la que están suscritos. Les gusta tanto que, si se elige una película de la plataforma al azar, la probabilidad de que Guiu la haya visto es de 0,5, la probabilidad de que Roc la haya visto es de 0,6 y la probabilidad de que ambos la hayan visto es de 0,25.

- (1,5 puntos) Si se elige una película al azar, calcule la probabilidad de que al menos uno de los dos la haya visto. Calcule también la probabilidad de que la haya visto Roc pero no Guiu.
- (1 punto) Si se escoge una película al azar, calcule la probabilidad de que Guiu la haya visto si se sabe que al menos uno de los dos la ha visto.

Solución:

Sea G Guiu ha visto la película y R Roc ha visto la película.

Tenemos: $P(G) = 0,5$, $P(R) = 0,6$ y $P(G \cap R) = 0,25$

- $P(G \cup R) = P(G) + P(R) - P(G \cap R) = 0,5 + 0,6 - 0,25 = 0,85$
 $P(R \cap \overline{G}) = P(R) - P(G \cap R) = 0,6 - 0,25 = 0,35$
- $P(G|G \cup R) = \frac{P(G \cap (G \cup R))}{P(G \cup R)} = \frac{P(G)}{P(G \cup R)} = \frac{0,5}{0,85} = 0,5882$

Problema 7.1.6 (2,25 puntos) Se quiere saber el porcentaje de personas que estarían a favor de la construcción de un polideportivo municipal en una población determinada. Se toma una muestra aleatoria de 350 personas, 218 de las cuales se manifiestan a favor de la propuesta y el resto, en contra.

- (1 punto) Dé la estimación puntual de la proporción y del porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo.
- (1,5 puntos) Escriba un intervalo de confianza del 95 % para el porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo en esta población.

Nota: Recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0,1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$. Recuerde también que, para muestras grandes, el intervalo de confianza para una proporción con

un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$ viene dado por $\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$

Solución:

- a) Tenemos $n = 350$ y $p = \frac{218}{350} = 0,6229 \Rightarrow 62,29\%$ de la población están a favor de la construcción del polideportivo.
- b) $IC = \left(0,6229 - 1,96\sqrt{\frac{\frac{218}{350}(1 - \frac{218}{350})}{350}}, 0,6229 + 1,96\sqrt{\frac{\frac{218}{350}(1 - \frac{218}{350})}{350}} \right) = (0,5721; 0,6737) = (57,21\%; 67,37\%)$

7.2. Ordinaria-Coincidente

Responda a **CUATRO** de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Problema 7.2.1 (2,5 puntos) Una empresa de paquetería tiene unas tarifas de envío de paquetes que dependen del peso de cada paquete, aunque no de forma lineal. Se quiere enviar un paquete a una distancia aproximada de 650 km. La información que ofrece la empresa en su web sobre los precios para enviar un paquete a esta distancia es la siguiente:

- ☛ si un paquete pesa hasta 2 kg, el envío tiene un coste fijo de 30 €;
 - ☛ si un paquete pesa más de 2 kg pero menos de 11 kg, los primeros 2 kg cuestan 15 €/kg y el resto de kilogramos se pagan a 12 €/kg;
 - ☛ si un paquete pesa entre 11 y 25 kg, ambos incluidos, los primeros 11 kg cuestan 13 €/kg y el resto cuestan 15 €/kg;
 - ☛ a partir de 25 kg, hay que ponerse en contacto con la empresa.
- a) (1,75 puntos) ¿Cuánto costará enviar un paquete de 9,5 kg? ¿Y uno de 13 kg? Encuentre la función definida a trozos que da el precio del envío de un paquete de hasta 25 kg en función de su peso y estudie su continuidad.
- b) (0,75 puntos) Si se han pagado 162 € por un envío, ¿cuánto pesaba el paquete que se ha enviado?

Solución:

- a) Tenemos $2 \cdot 15 + (9,5 - 2)12 = 120$ € costaría enviar un paquete de 9,5 Kg.
Tenemos $11 \cdot 13 + (13 - 11)15 = 173$ € costaría enviar un paquete de 13 Kg.

La función definida a trozos sería: $C(x) = \begin{cases} 30 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 30 + (x - 2)12 & \text{si } 2 < x < 11 \\ 143 + (x - 11)15 & \text{si } 11 \leq x \leq 25 \end{cases}$

Habría que estudiar la continuidad en $x = 2$ y $x = 11$, ya que las ramas son continuas.

En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 30 = 30 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (30 + (x - 2)12) = 30 \\ f(2) = 30 \end{cases} \quad \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 2^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} C(x) = f(2)}$$

la función es continua en $x = 2$.

En $x = 11$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 11^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 11} (30 + (x-2)12) = 138 \\ \lim_{x \rightarrow 11^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 11} (143 + (x-11)15) = 143 \\ f(11) = 143 \end{cases} \quad \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 11^-} C(x) \neq \lim_{x \rightarrow 11^+} C(x)} \quad$$

la función no es continua en $x = 11$, es discontinua no evitable con un salto finito.

Luego la función es continua en $[0, 11) \cup (11, 25]$

b) El paquete pesa entre 11 y 25 Kg, luego $162 = 143 + (x-11)15 \Rightarrow x = 12,2667$ Kg

Problema 7.2.2 (2,5 puntos) El nuevo modelo de maletas Rodamons dispone de tres tamaños diferentes: pequeño, mediano y grande. El precio de la maleta grande es el mismo que el de la maleta pequeña y la mediana juntas. El lote de una maleta de cada tamaño cuesta 240 €, pero si se compra el lote de dos maletas pequeñas, una mediana y una grande, se obtiene un 10 % de descuento del total y el precio final es de 256,5 €. ¿Cuál es el precio de cada tipo de maleta sin descuento?

Solución:

Sean x el precio de la maleta pequeña, y de la mediana y z de la grande.

$$\begin{cases} z = x + y \\ x + y + z = 240 \\ 0,9(2x + y + z) = 256,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 240 \\ 2x + y + z = 285 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 45 \text{ €} \\ y = 75 \text{ €} \\ z = 120 \text{ €} \end{cases}$$

El precio de la maleta pequeña es de 45 €, el de la mediana es 75 € y el de la grande es 120 €.

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 240 \\ 2 & 1 & 1 & 285 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 240 \\ 0 & -1 & 3 & 285 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema compatible determinado (solución única)

$$\begin{cases} 2z = 240 \Rightarrow z = 120 \\ -y + 360 = 285 \Rightarrow y = 75 \\ x + 75 - 120 = 0 \Rightarrow x = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 45 \text{ €} \\ y = 75 \text{ €} \\ z = 120 \text{ €} \end{cases}$$

Problema 7.2.3 (2,5 puntos) Una empresa de alquiler de vehículos dispone de una flota de 250 vehículos. Si el precio del alquiler diario de un vehículo es de 50 €, consigue alquilarlos todos. Se ha observado que la relación entre el precio del alquiler de los vehículos y el número de vehículos que se alquilan es lineal, de forma que por cada euro que se incrementa el precio diario del alquiler se alquilan dos vehículos menos. Cada vehículo alquilado genera un coste diario de 1 € de mantenimiento.

- (1 punto) Si se denomina x al número de euros que se incrementa el precio del alquiler, escriba la función que determina los beneficios obtenidos en función de x .
- (1,5 puntos) ¿A qué precio hay que alquilar los vehículos para conseguir el máximo de beneficios? ¿Cuál es este beneficio máximo?

Solución:

$$a) B(x) = (250 - 2x)(50 + x) - (250 - 2x) = (250 - 2x)(49 + x) = -2x^2 + 152x + 12250$$

- b) $B'(x) = 152 - 4x = 0 \implies x = 38 \text{ €}$ de aumento de alquiler de cada coche.
 $B''(x) = -4 \implies B''(38) = -4 < 0 \implies x = 38 \text{ €}$ es un máximo relativo, en nuestro caso absoluto, con un beneficio de $B(38) = 15138 \text{ €}$
 El precio de alquiler diario de un coche sería de $50 + 38 = 88 \text{ €}$, con lo que alquilaría $250 - 76 = 174$ coches con un beneficio máximo de $B(38) = 15138 \text{ €}$

Problema 7.2.4 (2,5 puntos) Laia, una aficionada a la artesanía elaborada con madera, montó un pequeño negocio hace un par de meses. En su taller, elabora tres tipos de productos con madera reciclada, que luego pone a la venta: nombres personalizados, palabras decorativas y peonzas. Durante el primer mes, Laia tuvo tres clientes: el primero adquirió 2 nombres personalizados y 3 peonzas; el segundo adquirió 1 nombre personalizado, 2 palabras decorativas y 5 peonzas, y el tercero solo compró 4 peonzas.

- a) (1,5 puntos) Construya la matriz 3×3 correspondiente a las ventas, en la que las filas representen a los clientes ($C1$, $C2$ y $C3$) y las columnas representen los productos que adquirieron. Si durante el primer mes Laia vendió los nombres personalizados (N) a 20 € cada uno, las palabras decorativas (P) a 18 € cada una y las peonzas (B) a 6 € cada una, calcule cuánto facturó a cada cliente por su pedido mediante un producto de matrices.
- b) (1 punto) Para incentivar las ventas, en el segundo mes Laia aplicó un descuento al precio de venta de todos los productos. Durante este mes, también tuvo tres clientes y obtuvo la siguiente matriz de ventas:

N	P	B	
3	1	2	$C1$
2	0	4	$C2$
1	2	3	$C3$

Si durante el segundo mes Laia facturó 78 € al primer cliente, 52 € al segundo cliente y 62 € al tercer cliente, ¿a qué precio vendió cada producto?

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$ y la venta será: $V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 86 \\ 24 \end{pmatrix} \implies$
 El primer cliente $C1$ pagó 58 € , el segundo $C2$ pagó 86 € y el tercero $C3$ pagó 24 € .

b) Ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ con $|A| = -18 \neq 0 \implies \exists A^{-1}$, $B = \begin{pmatrix} 78 \\ 52 \\ 62 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$AX = B \implies X = A^{-1}B = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ 2 & -7 & 8 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 78 \\ 52 \\ 62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Los nuevos precios serían: 18 € los nombres personalizados, 16 € las palabras decorativas y 4 € la peonza.

Problema 7.2.5 (2,5 puntos) En una cafetería, al mediodía, ofrecen la posibilidad de escoger entre el menú del día (opción $A1$) o un plato combinado (opción $A2$). Algunos clientes también toman café (opción $B1$) y otros no (opción $B2$). Si se selecciona a un cliente de la cafetería al azar, la probabilidad de que escoja el menú del día es de $0,6$ y la probabilidad de que escoja un plato combinado es de $0,4$. Por otro lado, la probabilidad de que tome café si escoge el menú del día es de $0,75$, mientras que la probabilidad de que tome café si escoge un plato combinado es de $0,5$.

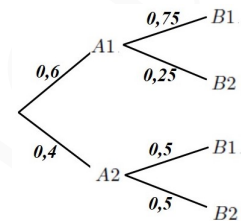
- a) (1,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tome café?

- b) (1,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que haya escogido el menú del día si se sabe que ha tomado café?

Solución:

$$a) P(B1) = P(B1|A1)P(A1) + P(B1|A2)P(A2) = 0,75 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,4 = 0,65$$

$$b) P(A1|B1) = \frac{P(B1|A1)P(A1)}{P(B1)} = \frac{0,75 \cdot 0,6}{0,65} = 0,6923$$



Problema 7.2.6 (2,25 puntos) Se quiere saber el tiempo medio, en minutos, que el alumnado de un instituto pasa diariamente conectado a una determinada red social. Se ha seleccionado una muestra de 175 estudiantes y se les ha pedido que proporcionen este dato. En esta muestra se ha obtenido una media de 90 minutos, con una desviación típica de 7 minutos.

Nota: Para resolver este problema, recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0, 1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$ y $P(-2,58 \leq Z \leq 2,58) = 0,99$. Recuerde también que el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza $\gamma \in (0, 1)$ cuando la variancia σ^2 es desconocida y la muestra es grande viene dado por $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$.

- a) (1 punto) Construya un intervalo de confianza del 95 % para el tiempo medio que el alumnado pasa diariamente conectado a esta red social.
- b) (1,5 puntos) Construya un intervalo de confianza del 99 % para el tiempo medio que el alumnado pasa diariamente conectado a esta red social. Explique por qué este intervalo y el del apartado anterior son diferentes y qué información nos da exactamente cada uno de ellos.

Solución:

- a) Tenemos $n = 175$, $\bar{x} = 90$, $s = 7$ y $NC = 0,95 \implies z_\gamma = 1,96$. Luego

$$IC = \left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = \left[90 - 1,96 \frac{7}{\sqrt{175}}, 90 + 1,96 \frac{7}{\sqrt{175}} \right] = (90 - 1,0371; 90 + 1,0371) = (88,9629; 91,0371)$$

- b) Tenemos $n = 175$, $\bar{x} = 90$, $s = 7$ y $NC = 0,99 \implies z_\gamma = 2,58$. Luego

$$IC = \left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = \left[90 - 2,58 \frac{7}{\sqrt{175}}, 90 + 2,58 \frac{7}{\sqrt{175}} \right] = (90 - 1,3652; 90 + 1,3652) = (88,6348; 91,3652)$$

Como se observa, los dos intervalos están centrados en la media y lo que varía es su amplitud. Como la desviación típica y el tamaño de la muestra es invariante solo varía el nivel de confianza y a medida que crece también crece la amplitud del intervalo. (El error ε sería mayor)

Nota: $IC = (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ con $\varepsilon = z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$

7.3. Extraordinaria

Responda a **CUATRO** de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Problema 7.3.1 (2,5 puntos) Los beneficios o pérdidas diarios de una nueva empresa durante su primer año de funcionamiento vienen dados por la función $B(x) = -x^2 + 260x - 12000$, en la que x representa el día desde el inicio de la actividad de la empresa.

- a) (1 punto) ¿Qué beneficio o pérdida tuvo la empresa el día 45? ¿Qué días obtuvo un beneficio de 4.000 €?
- b) (1,5 puntos) Calcule qué día la empresa obtuvo el beneficio máximo y cuál es este valor. Calcule también entre qué días la empresa no tuvo pérdidas.

Solución:

- a) $B(45) = -2325$ € (pérdidas)
 $B(x) = -x^2 + 260x - 12000 = 4000 \implies -x^2 + 260x - 16000 = 0 \implies x = 100$ y $x = 160$.
Días en los que ganó 4000 €

- b) $B'(x) = -2x + 260 = 0 \implies x = 130$
 $B''(x) = -2 \implies B''(130) = -2 < 0 \implies x = 130$ es un máximo relativo.
Tenemos $B(0) = -12000$, $B(130) = 4900$ y $B(365) = -50325$.
La función B es creciente en el intervalo $(0, 130)$ y decreciente en el $(130, 365)$ por lo que el máximo $(130, 4900)$ es un máximo absoluto.
Concluimos: El día 130 se produce el beneficio máximo de 4900 €.

Estudiamos el signo de la función:

$$B(x) = 0 \implies -x^2 + 260x - 12000 = 0 \implies x = 60 \text{ y } x = 200.$$

	$(0, 60)$	$(60, 200)$	$(200, 365)$
$B(x)$	—	+	—

No se incurre en pérdidas entre los días 60 y 200.

Problema 7.3.2 (2,5 puntos) Una inversora quiere invertir su capital en un banco especializado en criptomonedas que ofrece distintos depósitos con los siguientes intereses:

- ☛ BTC (bitcoin): 15 % anual
- ☛ ETH (ether): 10 % anual
- ☛ LNK (link): 13 % anual

La inversora quiere invertir la misma cantidad en bitcoins que entre las otras dos criptomonedas juntas y desea obtener un rendimiento anual global de un 13 %

- a) (1,25 puntos) ¿Cuál debe ser la relación entre la inversión en ethers y en links?
- b) (1,25 puntos) Si se sabe que la inversión total será de 150.000 €, ¿qué cantidad invertirá en cada criptomoneda?

Solución:

Sean x la cantidad invertida en bitcoin, y en ether y z en link.

$$a) \begin{cases} x = y + z \\ 0,15x + 0,1y + 0,13z = 0,13(x + y + z) \end{cases} \implies \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases}$$

El dinero invertido en bitcoin debe de ser el triple que en link y el dinero invertido en ether tiene que ser el doble del invertido en link.

$$b) \begin{cases} x + y + z = 150000 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 75000 \text{ €} \\ y = 50000 \text{ €} \\ z = 25000 \text{ €} \end{cases}$$

Resolvemos por Gauss:

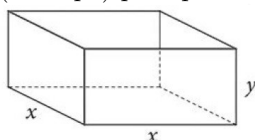
$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150000 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150000 \\ 0 & -2 & -2 & -150000 \\ 0 & -5 & -2 & -300000 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 5F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150000 \\ 0 & -2 & -2 & -150000 \\ 0 & 0 & 6 & 150000 \end{array} \right) \implies \text{sistema compatible determinado}$$

$$\begin{cases} 6z = 150000 \implies z = 25000 \\ -2y - 50000 = -150000 \implies y = 50000 \\ x + 50000 + 25000 = 150000 \implies x = 75000 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 75000 \\ y = 50000 \\ z = 25000 \end{cases}$$

Se invertirán 75000 € en bitcoin, 50000 € en ether y 25000 € en link.

Problema 7.3.3 (2,5 puntos) Ona quiere construir una caja de cartón de base cuadrada y abierta (sin tapa) para poner rotuladores y colores, como la de la siguiente figura:



La caja tiene que tener un volumen de 4 litros.

- a) (0,5 puntos) Exprese la altura de la caja (y) en función de la longitud del lado de la base (x).
- b) (2 puntos) Ona quiere usar el mínimo de cartón posible para construir la caja. ¿Cuántos centímetros debe medir el lado de la base (x) para que la superficie de la caja sea mínima? ¿Cuántos centímetros debe medir la altura (y)? ¿Qué cantidad de cartón usará para construir la caja?

Solución:

$$a) V(x, y) = x^2 y = 4 \text{ dm}^3 = 4000 \text{ cm}^3 \implies y = \frac{4000}{x^2}$$

b) Entiendo que la caja no tiene tapa:

$$S(x, y) = x^2 + 4xy \implies S(x) = x^2 + 4x \frac{4000}{x^2} = \frac{x^3 + 16000}{x}$$

$$S'(x) = \frac{2(x^3 - 8000)}{x^2} = 0 \implies x = 20$$

	$(0, 20)$	$(20, \infty)$
$S'(x)$	$-$	$+$
$S(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función tiene un mínimo relativo, en nuestro caso absoluto, en $x = 20$ cm de lado de la base, con una altura $y = \frac{4000}{400} = 10$ cm y con un área total de $S(20) = 1200$ cm².

Problema 7.3.4 (2,5 puntos) Un cine dispone de dos salas en las que se proyectan dos películas diferentes. La siguiente tabla muestra el número de personas que han asistido a la proyección de cada película en la última semana, agrupadas por franjas de edad:

Franja de edad	Película de la Sala 1	Película de la Sala 2
Menores de 18 años	122	620
18 a 65 años	930	433
Mayores de 65 años	384	281

La información de la tabla anterior se registra con la forma matricial $A = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix}$

- a) (1,5 puntos) Considerando la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcule el producto $A \cdot B$. Explique el significado de la matriz obtenida.

Se sabe que una entrada para menores de 18 años cuesta 5 €, una entrada para adultos de entre 18 y 65 años cuesta 8,5 € y una entrada para mayores de 65 años cuesta 6,5 €. Encuentre una matriz $C = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ de forma que el producto $C \cdot A \cdot B$ dé los ingresos semanales totales obtenidos por la venta de entradas, y calcule los ingresos correspondientes a esta semana.

- b) (1 punto) Al cabo de unos meses, el registro semanal viene dado por la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix}$$

pero hay un valor que se ha borrado, el del número de personas entre 18 y 65 años que han asistido a la segunda película, y lo hemos denotado por x . Calcule el valor de x sabiendo que los ingresos totales de esa semana fueron de 12.076 €.

Solución:

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 + 620 \\ 930 + 433 \\ 384 + 281 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 742 \\ 1363 \\ 665 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 742 \text{ Menores de 18 años} \\ 1363 \text{ de 18 a 65 años} \\ 665 \text{ Mayores de 65 años} \end{cases}$$

Son el número de personas por franja de edad que fueron al cine.

$$C \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 742 \\ 1363 \\ 665 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8,5 & 6,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 742 \\ 1363 \\ 665 \end{pmatrix} = 5 \cdot 742 + 8,5 \cdot 1363 + 6,5 \cdot 665 = 19618 \text{ € de recaudación semanal total.}$$

b) Ahora tenemos: $C \cdot D \cdot B = (5 \quad 8,5 \quad 6,5) \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (5 \quad 8,5 \quad 6,5) \begin{pmatrix} 84 + 23 \\ 338 + x \\ 256 + 408 \end{pmatrix} =$

$$(5 \quad 8,5 \quad 6,5) \begin{pmatrix} 107 \\ 338 + x \\ 664 \end{pmatrix} = 5 \cdot 107 + 8,5 \cdot (338 + x) + 6,5 \cdot 664 = 12076 \implies x = 512 \text{ que}$$

corresponde a la personas con edad entre 18 y 65 años que estuvieron en la sala 2.

Problema 7.3.5 (2,5 puntos) Un centro deportivo tiene dos zonas: la zona de la piscina (A1) y la zona del gimnasio (A2). Los abonados deben escoger a cuál de las dos zonas (solo una) quieren acceder y también si desean ir al centro deportivo en horario de mañana (opción B1) o en horario de tarde (opción B2). Si se selecciona a un abonado del centro al azar, se sabe que la probabilidad de que utilice la zona de la piscina es de 0,4 y la probabilidad de que utilice el gimnasio es de 0,6. Por otro lado, la probabilidad de que esté abonado en horario de mañana, si se sabe que utiliza la zona de la piscina, es de 0,55, mientras que la probabilidad de que esté abonado en horario de mañana, si se sabe que utiliza el gimnasio, es de 0,45.

- a) (1,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo esté abonado en horario de mañana?
- b) (1,25 puntos) Si se sabe que está abonado en horario de mañana, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la zona de piscina?

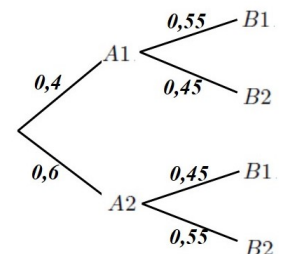
Solución:

Sean A1 utiliza la zona de piscina, A2 utiliza la zona de gimnasio, B1 en el horario de mañana y B2 en el horario de tarde.

$$P(A1) = 0,4, P(A2) = 0,6, P(B1|A1) = 0,55 \text{ y } P(B1|A2) = 0,45$$

a) $P(B1) = P(B1|A1)P(A1) + P(B1|A2)P(A2) =$
 $0,55 \cdot 0,4 + 0,45 \cdot 0,6 = 0,49$

b) $P(A1|B1) = \frac{P(B1|A1)P(A1)}{P(B1)} = \frac{0,55 \cdot 0,4}{0,49} = 0,449$



Problema 7.3.6 (2,5 puntos) Una empresa de autobuses afirma que realiza el trayecto entre el aeropuerto y el centro de la ciudad en 30 minutos. Se ha obtenido una muestra del tiempo, en minutos, que ha tardado en 10 trayectos escogidos al azar:

33, 29, 28, 31, 34, 35, 32, 29, 37, 35

- a) (1,5 puntos) Construya un intervalo de confianza del 95 % para la media del tiempo de trayecto, suponiendo que este tiempo sigue una distribución normal con una desviación típica de 2 minutos.

NOTA: Recuerde que, si Z sigue una distribución normal $N(0,1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$. Recuerde también que el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$ cuando la variancia σ^2 es conocida viene dado por $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$.

- b) (1 punto) A partir del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿puede afirmarse que la información que proporciona la empresa de autobuses es errónea? Justifique la respuesta.

Solución:

- a) Tenemos $N(\mu, 2)$, $\bar{x} = \frac{33 + 29 + 28 + 31 + 34 + 35 + 32 + 29 + 37 + 35}{10} = 32,3$, $n = 10$ y $z_\gamma = 1,96$, luego:

$$IC = \left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[32,3 - 1,96 \frac{2}{\sqrt{10}}, 32,3 + 1,96 \frac{2}{\sqrt{10}} \right] = (31,06; 33,54)$$

- b) $30 \notin (31,06; 33,54) \Rightarrow$ la información de la empresa es errónea con un nivel de confianza del 95%.

“www.musat.net”

Capítulo 8

Comunidad Valenciana

8.1. Ordinaria

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

BAREMO DE EXAMEN: Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Problema 8.1.1 (10 puntos) Una tienda de televisores ha obtenido 247250 euros por la venta de 220 televisores de sus modelos ULED, QLED y LD. Un televisor del modelo ULED cuesta 1250 euros y los otros dos modelos son un 10 % y un 20 % más baratos que el modelo ULED, respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores QLED y de televisores LD vendidos es igual al triple de los televisores ULED vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

Planteamiento (5 puntos) y resolución (5 puntos)

Solución:

Sean x cantidad de modelos ULED, y cantidad de modelos QLED y z cantidad de modelos LD.

$$\begin{cases} x + y + z = 220 \\ 1250x + 0,9 \cdot 1250y + 0,8 \cdot 1250z = 247250 \\ y + z = 3x \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 220 \\ 10x + 9y + 8z = 1978 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 55 \\ y = 108 \\ z = 57 \end{cases}$$

Resolución por Gauss:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 10 & 9 & 8 & 1978 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 10F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & -1 & -2 & -222 \\ 0 & -4 & -4 & -660 \end{array} \right) = \\ \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 4F_2 \end{array} \right] &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & -1 & -2 & -222 \\ 0 & 0 & 4 & 228 \end{array} \right) \implies \text{sistema compatible determinado (solución única)} \\ &\implies \begin{cases} 4z = 228 \implies z = 57 \\ -y - 114 = -222 \implies y = 108 \\ x + 108 + 57 = 220 \implies x = 55 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 55 \text{ ULED} \\ y = 108 \text{ QLED} \\ z = 57 \text{ LD} \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 8.1.2 (10 puntos) Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- (4 puntos) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$
- (4 puntos) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A-B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3.
- (2 puntos) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1} = I$.

Solución:

- $$X^{-1}A + A = B \Rightarrow X(X^{-1}A + A) = XB \Rightarrow A + XA = XB \Rightarrow XA - XB = -A \Rightarrow$$

$$X(A - B) = -A \Rightarrow X = -A(A - B)^{-1} =$$

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$(A - B)Y - AY = I \Rightarrow AY - BY - AY = I \Rightarrow -BY = I \Rightarrow BY = -I \Rightarrow Y =$$

$$B^{-1}(-I) = -B^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
- $$AZA^{-1} = I \Rightarrow AZA^{-1}A = A \Rightarrow AZ = A \Rightarrow A^{-1}AZ = A^{-1}A \Rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 8.1.3 (10 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x(x-3) + (x+1)}$. Se pide:

- (2 puntos) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
- (2 puntos) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- (2 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- (2 puntos) Los máximos y mínimos locales, si existen.
- (2 puntos) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2}$$

a) El denominador se anula en $(x-1)^2 = 0 \implies x = 1 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies (0, 0)$

Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x(x-3) = 0 \implies (0, 0)$ y $(3, 0)$

b) Asíntotas:

• Verticales: $x = 1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-3)}{(x-1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-3)}{(x-1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty \end{cases}$$

• Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = 1$$

• Oblicuas: No hay por haber horizontales

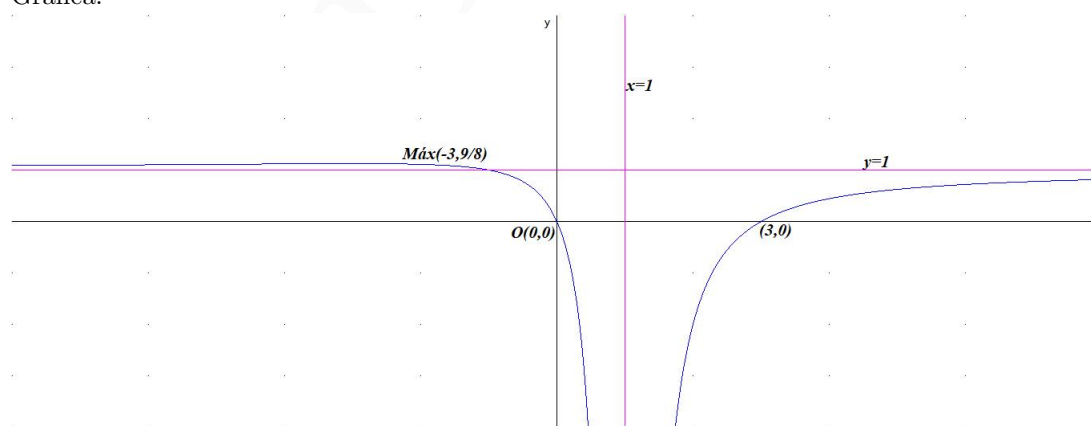
c) $f'(x) = \frac{x+3}{(x-1)^3} = 0 \implies x = -3.$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	crece ↗	decrece ↘	crece ↗

La función crece en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-3, 1)$.

d) La función tiene un máximo relativo en el punto $\left(-3, \frac{9}{8}\right)$.

e) Gráfica:



Problema 8.1.4 (10 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

- a) (2 puntos) Determina el valor de a para que esta función sea continua.
- b) (4 puntos) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.
- c) (4 puntos) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX .

Solución:

- a) Las dos ramas son continuas por se polinomios. Hay que imponer la continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^3 + ax^2 + 24x) = a - 25 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} ((x-1)^2 + 3) = 7 \\ f(-1) = a - 25 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \implies$$

$$a - 25 = 7 \implies a = 32$$

- b) Si $a = 9$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 9x^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases} \implies$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 18x + 24 = 0 \implies x = -4, x = -2 & \text{si } x < -1 \\ 2(x-1) = 0 \implies x = 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

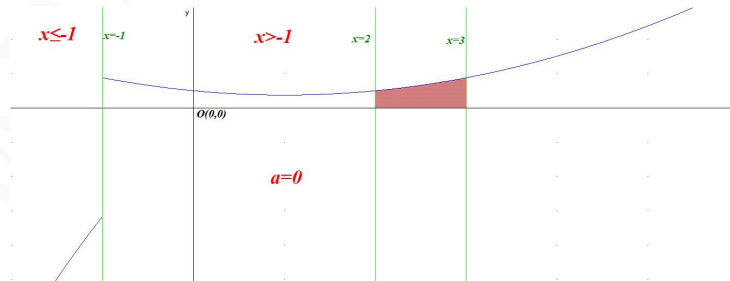
Tenemos $x = -4 \in \left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y $x = -2 \in \left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. En esta rama:

$$f''(x) = 6x + 18 \implies \begin{cases} f''(-4) = -6 < 0 \implies (-4, -16) \text{ Máximo relativo} \\ f''(-2) = 6 > 0 \implies (-2, -20) \text{ Mínimo relativo} \end{cases}$$

- c) La región está limitada al intervalo $[2, 3]$ luego $f(x) = (x-1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 4 > 0 \implies$ la función está siempre por encima del eje de abscisas y no lo corta:

$$S = \int_2^3 (x^2 - 2x + 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x \right]_2^3 = \frac{16}{3} \simeq 5,3333 \text{ u}^2$$

Gráfica con $a = 0$: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 2x + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$



Problema 8.1.5 (10 puntos) Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el 40 % de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

- a) (3 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? (4 puntos)
- b) (3 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés?
- c) (4 puntos) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

Solución:

Sean I sabe inglés y A sabe alemán.

$P(I \cap A) = 0,3$, $P(I) = 0,4$ y $P(I|A) = 0,4$

- a) $P(I|A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{P(I \cap A)}{P(I|A)} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4} = 0,75$
- b) $P(A \cap \bar{I}) = P(A) - P(I \cap A) = 0,75 - 0,3 = 0,45$
- c) $P(I|\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(I) - P(I \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{0,4 - 0,3}{1 - 0,75} = 0,4$

Problema 8.1.6 (10 puntos) Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

- a) (3 puntos) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado?
- b) (4 puntos) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda”.
- c) (3 puntos) ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”?

Solución:

Sean A mayor de 2 en el dado, B menor o igual a 2, C sale cara y X sale cruz. La moneda defectuosa cumple: $P(C) = \frac{3}{4}$ y $P(X) = \frac{1}{4}$ y tendríamos:

$$P(CC|B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}, P(CX|B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}, P(XC|B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \text{ y } P(XX|B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Si la moneda no es defectuosa: $P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$ y tendríamos:

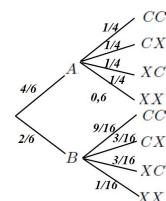
$$P(CC|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, P(CX|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, P(XC|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ y } P(XX|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{4}{6} \text{ y } P(B) = \frac{2}{6}$$

- a) Tenemos:

$$P(CC) = P(CC|A)P(A) + P(CC|B)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6} + \frac{9}{16} \cdot \frac{2}{6} = \frac{17}{48} = 0,3542$$

$$P(A|CC) = \frac{P(CC|A)P(A)}{P(CC)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{17}{48}} = \frac{8}{17} \simeq 0,4706$$



- b) Sea H el suceso “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda” = $\{CC, CX, XC\}$ y tenemos:
 $P(H) = P(H|A)P(A) + P(H|B)P(B)$
 $P(H|B) = \frac{P(H \cap B)}{P(B)} \implies P(H \cap B) = P(H|B)P(B)$
 $P(B \cup H) = P(B) + P(H) - P(B \cap H) = P(B) + P(H|A)P(A) + P(H|B)P(B) - P(H|B)P(B) =$
 $P(B) + P(H|A)P(A) = \frac{2}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{6} \simeq 0,8333$
- c) Tenemos $P(XX) = P(XX|A)P(A) + P(XX|B)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{6} = \frac{3}{16}$
 Sea S obtener un 6 y es $P(S) = \frac{1}{6} \implies P(S) \cdot P(XX) = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{32}$
 $P(S \cap XX) = P(XX|S)P(S) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$
 Luego $P(S \cap XX) \neq P(S) \cdot P(XX) \implies S$ y XX no son independientes.

8.2. Extraordinaria

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

BAREMO DE EXAMEN: Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Problema 8.2.1 (10 puntos) Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2500 unidades de tinta y de 3000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0,5 euros y por cada uno de los sofisticados 0,7 euros.

- a) (8 puntos) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias?
- b) (2 puntos) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas?

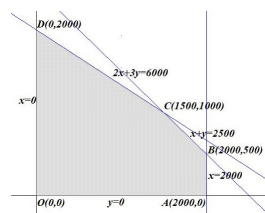
Solución:

Sean x número de bolígrafos sencillos e y número de bolígrafos sofisticados.

	tinta	plástico	beneficio
sencillo	1	1	0,5
sofisticado	1	1,5	0,7
	≤ 2500	≤ 3000	

a) Región factible:

$$\begin{cases} x + y \leq 2500 \\ x + 1,5y \leq 3000 \\ x \leq 2000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 2500 \\ 2x + 3y \leq 6000 \\ x \leq 2000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



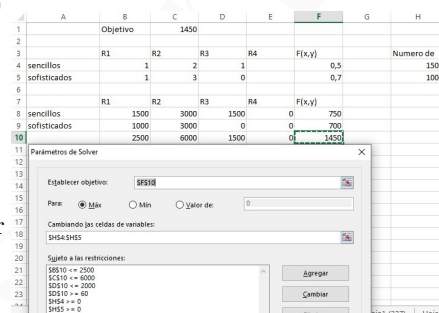
Los vértices de la región factible son: $O(0,0)$, $A(2000,0)$, $B(2000,500)$, $C(1500,1000)$ y $D(0,2000)$

La función objetivo es: $f(x,y) = 0,5x + 0,7y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(2000,0) = 1000 \\ f(2000,500) = 1350 \\ f(1500,1000) = 1450 \leftarrow \text{Máximo} \\ f(0,2000) = 1400 \end{cases} \Rightarrow$$

Para obtener el máximo beneficio debe de producir 1500 bolígrafos sencillos y 1000 sofisticados.

Solución por solver :



b) El beneficio máximo es de 1450€.

Problema 8.2.2 (10 puntos) Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (3 puntos) Analiza si la matriz $AB - 2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) (4 puntos) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B .

c) (3 puntos) Calcula para qué valores de z la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $CD = DC$.

Solución:

$$\text{a) } AB - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|AB - 2I| = 30 \neq 0 \Rightarrow \exists (AB - 2I)^{-1}$$

$$\text{b) } A + 2XC = B^t \Rightarrow 2XC = B^t - A \Rightarrow 2X = (B^t - A)C^{-1} \Rightarrow X = \frac{1}{2}(B^t - A)C^{-1} =$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } CD = DC &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & z-3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ z-3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow z-3=1 \Rightarrow z=4 \end{aligned}$$

Problema 8.2.3 (10 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$. Se pide:

- a) (2 puntos) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
- b) (2 puntos) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- c) (2 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) (2 puntos) Los máximos y mínimos locales, si existen.
- e) (2 puntos) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

- a) El denominador se anula en $(3x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Rightarrow (0, 1)$

Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow$ no hay puntos de corte con el eje de abscisas.

- b) Asíntotas:

• Verticales:

$$\bullet x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}^-} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}^+} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}^-} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}^+} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$$

• Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = 0$$

• Oblicuas: No hay por haber horizontales.

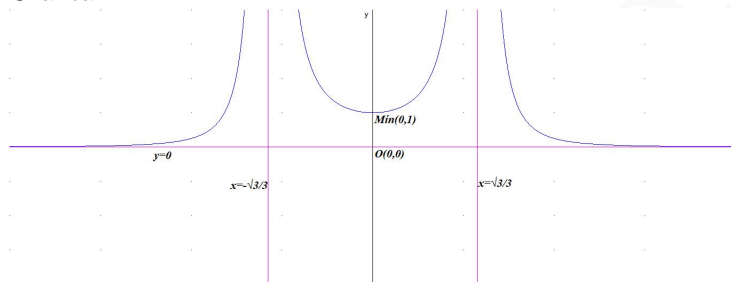
c) $f'(x) = -\frac{12x}{(3x^2 - 1)^3} = 0 \implies x = 0.$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$	$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$f'(x)$	+	-	+	-
$f(x)$	crece ↗	decrece ↘	crece ↗	decrece ↘

La función crece en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y decrece en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right).$

d) La función tiene un mínimo relativo en $(0, 1).$

e) Gráfica:



Problema 8.2.4 (10 puntos) Un agricultor estima que si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2 + 60x + 100$ euros.

- (3 puntos) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos?
- (4 puntos) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos?
- (3 puntos) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos?

Solución:

$$f(x) = -x^2 + 60x + 100$$

- $f'(x) = -2x + 60 = 0 \implies x = 30$ kilos.
 $f''(x) = -2 \implies f''(30) = -2 < 0 \implies x = 30$ es un máximo relativo (en este caso es absoluto)
La cantidad que maximiza los ingresos es de 30 kilos con $f(30) = 1000$ euros.
- $B(x) = f(x) - 12x = -x^2 + 60x + 100 - 12x = -x^2 + 48x + 100$
 $B'(x) = -2x + 48 = 0 \implies x = 24$ kilos.
 $B''(x) = -2 \implies B''(24) = -2 < 0 \implies x = 24$ es un máximo relativo (en este caso es absoluto)
La cantidad que maximiza los beneficios es de 24 kilos con $B(24) = 676$ euros.

c) $B(x) = 0 \implies -x^2 + 48x + 100 = 0 \implies x = -2$ (no válida) y $x = 50 \implies$

	(0, 50)	(50, ∞)
$B(x)$	+	-

 $\implies$

La función presenta beneficios utilizando una cantidad de abono comprendida entre 0 y 50 kilos.

Problema 8.2.5 (10 puntos) Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

- a) (3 puntos) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”.
- b) (4 puntos) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO?
- c) (3 puntos) ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”?

Solución:

Sean E estudiante de la ESO, B de Bachillerato, F elige fútbol, C elige baloncesto y M elige música.

- a) Ordenando los datos en una tabla tenemos:

	F	C	M	Total
E	230	60		310
B			8	
Total	300			400

 $\implies$

	F	C	M	Total
E	230	60	20	310
B	70	12	8	90
Total	300	72	28	400

$$P(E \cup M) = P(E) + P(M) - P(E \cap M) = \frac{310}{400} + \frac{28}{400} - \frac{20}{400} = \frac{159}{200} \simeq 0,795$$

b) $P(E|F \cup C) = \frac{P(E \cap (F \cup C))}{P(F \cup C)} = \frac{\frac{290}{400}}{\frac{372}{400}} = \frac{290}{372} \simeq 0,77957$

c) $P(B) = \frac{90}{400}$ y $P(\bar{C}) = \frac{328}{400} \implies P(B) \cdot P(\bar{C}) = \frac{90}{400} \cdot \frac{328}{400} = \frac{369}{2000} = 0,1845$
 $P(B \cap \bar{C}) = \frac{78}{400} = 0,195$
 Luego $P(B \cap \bar{C}) \neq P(B) \cdot P(\bar{C}) \implies B$ y $\bar{C}$ no son independientes.

Problema 8.2.6 (10 puntos) Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos distintos, A y B , para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A , otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A , el 20 % de las vacunadas por el método B y el 60 % de las no vacunadas. Calcula:

- a) (3 puntos) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios.

- b) (4 puntos) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B .
- c) (3 puntos) La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios”.

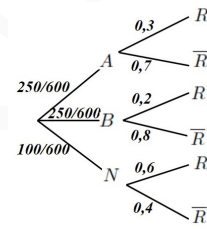
Solución:

Sean A vacunada con método A , B vacunada con método B , N no vacunada, R desarrolla problemas respiratorios y $\bar{R}$ no desarrolla problemas respiratorios.

$$\text{a) } P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) + P(R|N)P(N) = 0,3 \cdot \frac{250}{600} + 0,2 \cdot \frac{250}{600} + 0,6 \cdot \frac{100}{600} = \frac{37}{120} \simeq 0,3083$$

$$\text{b) } P(B|\bar{R}) = \frac{P(\bar{R}|B)P(B)}{P(\bar{R})} = \frac{0,8 \cdot \frac{250}{600}}{1 - \frac{37}{120}} = \frac{40}{83} \simeq 0,48193$$

$$\text{c) } P(N \cap R) = P(R|N)P(N) = 0,6 \cdot \frac{100}{600} = \frac{1}{10} = 0,1$$



“www.musat.net”

Capítulo 9

Extremadura

9.1. Ordinaria

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

Observación importante: Se permitirá una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas.

Problema 9.1.1 (2 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2. Hallar la matriz X que verifique la ecuación matricial $3X - 2I = B^t - AX$ siendo B^t la matriz traspuesta de B . Justificar la respuesta.

Solución:

$$3X - 2I = B^t - AX \implies 3X + AX = B^t + 2I \implies (3I + A)X = B^t + 2I \implies$$

$$X = (3I + A)^{-1}(B^t + 2I) =$$

$$\left[3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 9.1.2 (2 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

- (1,5 puntos) Determinar para qué valores de x existe la inversa de $A \cdot B^t + 3C$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B .
- (0,5 punto) Calcular la inversa de $A \cdot B^t$ para $x = 1$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } A \cdot B^t + 3C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A \cdot B^t + 3C| = -2 - x = \\ &0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \exists (A \cdot B^t + 3C)^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\} \end{aligned}$$

$$\text{b) } |A \cdot B^t| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \exists (A \cdot B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 9.1.3 (2 puntos) Cierta lavadora tiene un programa de 90 minutos de duración que consta de tres etapas: lavado, aclarado y centrifugado. Se sabe que el tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado. Además, el tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado. Calcular, justificando la respuesta, la duración de cada etapa de dicho programa.

Solución:

Sean x tiempo de lavado, y tiempo de aclarado y z tiempo de centrifugado.

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ y = 2z \\ y + z = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 90 \\ y - 2z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -90 \end{array} \right) = \\ \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{array} \right] &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -90 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible determinado} \\ \begin{cases} -9z = -90 \Rightarrow z = 10 \\ y - 20 = 0 \Rightarrow y = 20 \\ x + 20 + 10 = 90 \Rightarrow x = 60 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 60 \text{ minutos de lavado} \\ y = 20 \text{ minutos de aclarado} \\ z = 10 \text{ minutos de centrifugado} \end{cases} \end{aligned}$$

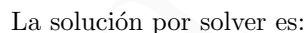
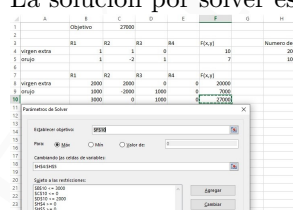
Problema 9.1.4 (2 puntos) Una almazara pequeña comercializa dos tipos de aceite de oliva de excelente calidad: el virgen extra, que se vende a 10 euros el litro y el de orujo, del que cada litro se vende a 7 euros. Sabemos que por motivos de almacenamiento no puede producir más de un total de 3000 litros de aceite al día (entre los dos tipos) ni más de 2000 litros de aceite de orujo y que, para atender a la demanda, la cantidad de aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo. Suponiendo que vende todo el aceite que produce, calcular, justificando las respuestas, el número de litros de cada tipo de aceite de oliva que debe producir diariamente esta almazara para obtener unos ingresos máximos, así como el valor de dichos ingresos máximos.

Solución:

Sea x litros de virgen extra e y litros de orujo.

☛ Región factible:

Los vértices del recinto son: $O(0,0)$, $A(2000,1000)$, $B(1000,2000)$ y $C(0,2000)$.


$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(2000,1000) = 27000 \text{ Máximo} \\ f(1000,2000) = 24000 \\ f(0,2000) = 14000 \end{cases}$$

$$C(t) = \begin{cases} t^2 - 3Bt + 2A & \text{si } 1 \leq t < 4 \\ Bt & \text{si } 4 \leq t \leq 12 \end{cases}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 4^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 4} (t^2 - 3Bt + 2A) = 16 - 12B + 2A \\ \lim_{t \rightarrow 4^+} C(t) = \lim_{t \rightarrow 4} (Bt) = 4B \\ C(4) = 4B \end{array} \right. \quad \xrightarrow{\quad \lim_{t \rightarrow 4^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} C(t) = C(4) \quad}$$

$$\begin{cases} A - 8B = -8 \\ 2A - 9B = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 8 \\ B = 2 \end{cases}$$

137

- b) (0,5 puntos) Representar gráficamente la producción en función de la cantidad de agua destinada al riego.

Solución:

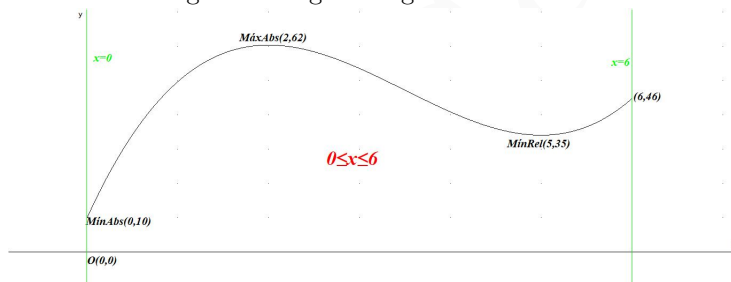
a) $P'(x) = 6x^2 - 42x + 60 = 0 \implies x = 2 \text{ y } x = 5$

	(0, 2)	(2, 5)	(5, 6)
$P'(x)$	+	-	+
$P(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La producción es creciente en el intervalo $(0, 2) \cup (5, 6)$ (si se emplean entre 0 y 2 o entre 5 y 6 litros de agua) y es decreciente en el $(2, 5)$, cuando se emplean entre 2 y 5 litros de agua. Presenta un máximo relativo cuando se riega con 2 litros de agua y una producción de $P(2) = 62$ kg y un mínimo relativo cuando se riega con 5 litros de agua y su producción es de $P(5) = 35$ kg.

Por otra parte tenemos $P(0) = 10$ y $P(6) = 46$. Luego el mínimo absoluto se produce sin riego con una producción de 10 kg y el máximo absoluto coincide con el relativo de 2 litros de agua con una producción de 62 kg.

- b) La evolución seguiría la siguiente gráfica:



Problema 9.1.7 (2 puntos) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

Solución:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \implies x = 2, \quad x = 3 \implies \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

• Verticales:

- En $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x + 2}{2x - 5} = -2$$

luego en $x = 2$ no hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable (un agujero)

- En $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \left[\frac{6}{0^-} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \left[\frac{6}{0^+} \right] = +\infty$$

• Horizontales: No hay.

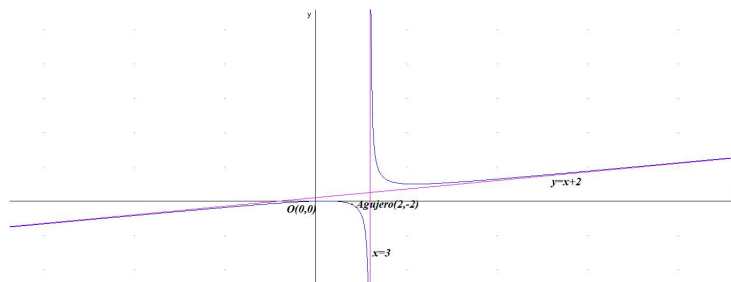
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x - 3} = 2$$

$$y = x + 2$$



Problema 9.1.8 (2 puntos) Se sabe que el 50 % de los libros de una biblioteca son novelas, el 30 % libros de poemas y el resto ensayos. El 60 % de las novelas, el 80 % de los libros de poemas y el 50 % de los ensayos son de autores hispanohablantes. Se pide, razonando las respuestas:

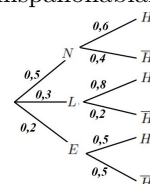
- (1 punto) Calcular la probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante.
- (1 punto) Calcular la probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante.

Solución:

Sean N novelas, L poemas, E ensayos, H hispanohablante y $\bar{H}$ no hispanohablante.

$$a) P(N \cap \bar{H}) = P(\bar{H}|N)P(N) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$$

$$b) P(H) = P(H|N)P(N) + P(H|L)P(L) + P(H|E)P(E) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,64$$



Problema 9.1.9 (2 puntos) En una carretera se han instalado dos radares A y B . En el proceso de calibración, se ha establecido que el radar A sólo detecta al 80 % de los infractores, mientras que el radar B detecta al 85 %. El 95 % de los infractores es detectado por al menos uno de los radares (por A o por B). Se pide, razonando las respuestas:

- (1 punto) La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B .
- (1 punto) Sabiendo que un infractor ha sido detectado por el radar A , ¿cuál es la probabilidad de que también lo detecte el radar B ?

Solución:

Sean A detecta el radar A y B detecta el radar B :

$$P(A) = 0,8, P(B) = 0,85 \text{ y } P(A \cup B) = 0,95$$

$$a) P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,8 + 0,85 - 0,95 = 0,7$$

$$b) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,7}{0,8} = 0,875$$

Problema 9.1.10 (2 puntos) En una asociación cultural hay 4.000 personas entre 18 y 30 años, 5.000 entre 30 y 60 años y 1.000 mayores de 60 años. Se desea obtener una muestra de 500 personas para una encuesta sobre la participación de la asociación en un festival de cine. Se pide, razonando las respuestas:

- (1 punto) ¿Cuántas entrevistas se deberían realizar en cada grupo de edad si atendemos a razones de proporcionalidad?
- (1 punto) Si el número de encuestados entre 30 y 60 años que se han mostrado favorables a participar en el festival de cine es de 150, dar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99 %, para la proporción de socios de este segmento de edad favorables a participar en dicho festival.

Solución:

- Reparto proporcional: $4000 + 5000 + 1000 = 10000$

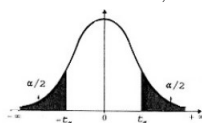
De 18 a 30 años: $\frac{4000}{10000} \cdot 500 = 200$ encuestas.

De 30 a 60 años: $\frac{5000}{10000} \cdot 500 = 250$ encuestas.

Más de 60 años: $\frac{1000}{10000} \cdot 500 = 50$ encuestas.

$$b) \hat{p} = \frac{150}{250} = 0,6, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,4$$

$$NC = 99\% = 0,99 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,01 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,576$$



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0										
0.1										
0.2										
0.3										
0.4										

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,576 \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{250}} = 0,0798$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,6 - 0,0798; 0,6 + 0,0798) = (0,5202; 0,6798)$$

9.2. Extraordinaria

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

Observación importante: Se permitirá una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas.

Problema 9.2.1 (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} AX + I = B \\ 2X + Y = B \end{cases}$$

Solución:

$$AX + I = B \Rightarrow AX = B - I \Rightarrow X = A^{-1}(B - I)$$

$$2X + Y = B \Rightarrow Y = B - 2X$$

$$X = A^{-1}(B - I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Problema 9.2.2 (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, se pide, justificando las respuestas:

a) (1 punto) Calcular los valores del parámetro x para los que la matriz $A \cdot B^t$ tiene inversa.

b) (1 punto) Para $x = -1$, calcular la matriz Y tal que $(A \cdot B^t)Y = 2I$.

Solución:

$$a) A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 2x-2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A \cdot B^t| = x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow |A \cdot B^t| \neq 0 \Rightarrow \exists (A \cdot B^t)^{-1}$$

$$b) \text{ Si } x = -1 \Rightarrow A \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B^t)Y = 2I \Rightarrow Y = (A \cdot B^t)^{-1}2I = 2(A \cdot B^t)^{-1} = 2 \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 9.2.3 (2 puntos) Un artesano del cuero fabrica y vende exclusivamente carteras, bolsos y mochilas. El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Cierta día vende 35 artículos, siendo el número de carteras vendidas el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas. Por esta venta ingresa un total de 450 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de artículos de cada tipo que vendió ese día.

Solución:

Sean x carteras, y bolsos y z mochilas

$$\begin{cases} x + y + z = 35 \\ x = y + 2z \\ 10x + 15y + 20z = 450 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 35 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \text{ carteras} \\ y = 10 \text{ bolsos} \\ z = 5 \text{ mochilas} \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 90 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & -2 & -3 & -35 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & -2 & -3 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible determinado}$$

$$\begin{cases} z = 5 \\ -2y - 15 = -35 \Rightarrow y = 10 \\ x + 10 + 5 = 35 \Rightarrow x = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \text{ carteras} \\ y = 10 \text{ bolsos} \\ z = 5 \text{ mochilas} \end{cases}$$

Problema 9.2.4 (2 puntos) Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta y los organiza en dos tipos de lotes A y B . Cada lote de tipo A contiene 6 chorizos y 6 salchichones, reportándole un beneficio de 20 euros. Por otra parte, cada lote de tipo B está compuesto por 10 chorizos y 16 salchichones, con un beneficio de 36 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de lotes de cada tipo que debe vender para obtener un beneficio máximo y el valor de dicho beneficio máximo.

Solución:

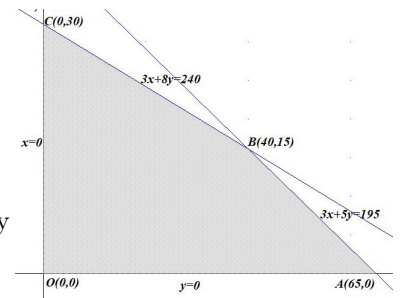
Sea x el número de lotes A e y el número de lotes B .

	chorizos	salchichones	beneficio
A	6	6	20
B	10	16	36
	≤ 390	≤ 480	

☛ Región factible:

$$\begin{cases} 6x + 10y \leq 390 \\ 6x + 16y \leq 480 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y \leq 195 \\ 3x + 8y \leq 240 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices del recinto son: $O(0,0)$, $A(65,0)$, $B(40,15)$ y $C(0,30)$.



☛ Función objetivo: $f(x,y) = 20x + 36y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(65,0) = 1300 \\ f(40,15) = 1340 \text{ Máximo} \\ f(0,30) = 1080 \end{cases}$$

La solución por solver es:

☛ Para obtener el máximo beneficio se deben vender 40 lotes A y 15 lotes B , con unos beneficios máximos de 1340€.

Problema 9.2.5 (2 puntos) En una determinada población, el tiempo de ocupación hospitalaria por accidentes de tráfico, $N(x)$ en días, depende de la cantidad de dinero, x en miles de euros, que el ayuntamiento dedica a la seguridad vial según la siguiente función:

$$N(x) = \begin{cases} -x^2 + 3Ax + 3B & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ -x + 39 & \text{si } 4 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que la función es continua y que, cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Razona la respuesta.

Solución:

Las dos ramas son continuas por ser polinomios, hay que imponer la continuidad en $x = 4$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} N(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (-x^2 + 3Ax + 3B) = -16 + 12A + 3B \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} N(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (-x + 39) = 35 \\ N(4) = 35 \end{array} \right. \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} N(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} N(x) = N(4)$$

$$-16 + 12A + 3B = 35 \implies 4A + B = 17$$

Por otra parte: $N(3) = 36 \implies -9 + 9A + 3B = 36 \implies 3A + B = 15$. Luego:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4A + B = 17 \\ 3A + B = 15 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} A = 2 \\ B = 9 \end{array} \right.$$

Problema 9.2.6 (2 puntos) Cierta bebida contiene una cantidad de aditivo, x , que puede oscilar entre 1 y 6 gramos. Se sabe que el consumo anual medio por persona, $C(x)$ en litros, depende de la cantidad de aditivo de acuerdo con la función:

$$C(x) = 30 + 6x^2 - x^3 \quad 1 \leq x \leq 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

- (1,5 puntos) Determinar para qué cantidades de aditivo se alcanza el consumo máximo y mínimo de dicha bebida y a cuántos litros ascienden estos consumos máximo y mínimo.
- (0,5 puntos) Representar gráficamente la evolución del consumo en función de la cantidad de aditivo que contiene la bebida.

Solución:

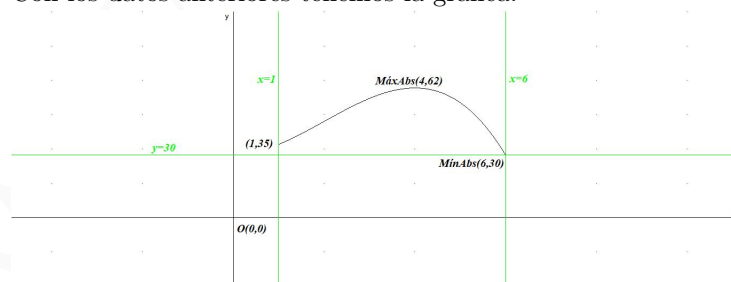
- $C'(x) = 12x - 3x^2 = 0 \implies x = 0 \notin \text{Dom}(C)$ y $x = 4$.
Recurriendo a la segunda derivada $C''(x) = 12 - 6x$

☛ $C''(4) = -12 < 0 \implies x = 4$ es un máximo relativo. El punto es $(4, C(4)) = (4, 62)$

☛ Además $C(6) = 30$ y $C(1) = 35$

En conclusión: El mínimo consumo se alcanza con 6 gramos de aditivo, este consumo es de 30 litros. El consumo máximo se alcanza con 4 gramos de aditivo, este consumo es de 62 litros.

- Con los datos anteriores tenemos la gráfica:



Problema 9.2.7 (2 puntos) Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 1$ y el eje OX entre los valores $x = -2$ y $x = 3$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

Solución:

Buscamos los puntos de corte de f con el eje de abscisas: $-x^2 + 1 = 0 \implies x = -1$ y $x = 1$. El punto $x = -1$ y el $x = 1$ se encuentran dentro del intervalo $[-2, 3]$ de integración, luego tendremos tres recintos de integración S_1 en $[-2, -1]$, S_2 en $[-1, 1]$ y S_3 en $[1, 3]$.

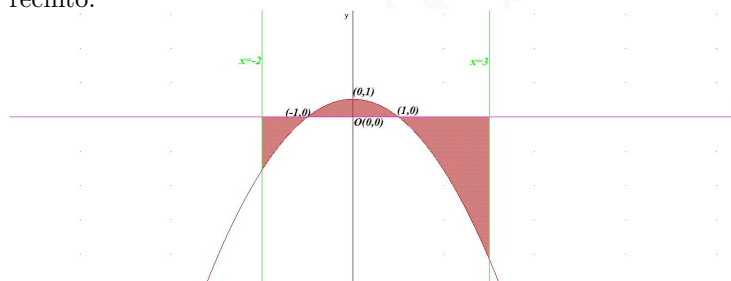
$$S_1 = \int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-2}^{-1} = -\frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

$$S_3 = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_1^3 = -\frac{20}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \left| -\frac{4}{3} \right| + \left| \frac{4}{3} \right| + \left| -\frac{20}{3} \right| = \frac{28}{3} \simeq 9,3333 u^2$$

Cuando la gráfica de la función está por debajo del eje de abscisas el resultado de la integral debe de ser negativo, por el contrario, cuando la gráfica de la función está por encima del eje de abscisas el resultado tiene que ser positivo. Para resolver este problema hacemos el valor absoluto de cada recinto.



Para dibujar la gráfica: hemos calculado el punto de corte con el eje de ordenadas $(0, 1)$, con el de abscisas son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ y el extremo relativo $f'(x) = -2x = 0 \implies x = 0$ y como $f''(x) = -2 < 0 \implies (0, 1)$ es un máximo relativo.

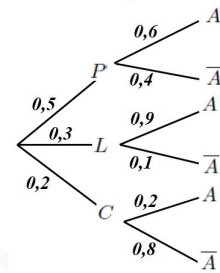
Problema 9.2.8 (2 puntos) Las llamadas telefónicas que recibe un usuario se dividen en tres tipos: personales (50 %), laborales (30 %) y comerciales (20 %). Los usuarios atienden adecuadamente un 60 % de las llamadas personales, un 90 % de las laborales y un 20 % de las comerciales. Se pide, justificando las respuestas:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente.
- (1 punto) Sabiendo que una llamada es atendida adecuadamente, calcular la probabilidad de que sea comercial.

Solución:

Sean P personal, L laboral, C comercial, A adecuadamente y $\bar{A}$ inadecuadamente.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\bar{A}) &= P(\bar{A}|P)P(P) + P(\bar{A}|L)P(L) + P(\bar{A}|C)P(C) = \\ &= 0,4 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,39 \\ \text{b) } P(C|A) &= \frac{P(A|C)P(C)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,2}{1 - 0,39} = 0,0656 \end{aligned}$$



Problema 9.2.9 (2 puntos) Los clientes de un banco pueden contratar dos tipos de productos para el ahorro: conservadores y de riesgo. El 75 % de los clientes contrata los productos conservadores, de estos clientes sólo el 20 % contrata un producto con riesgo. Se pide, justificando las respuestas:

- (1 punto) ¿Qué porcentaje de clientes del banco contrata ambos tipos de productos de ahorro?
- (1 punto) Si el 90 % de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata un producto de ahorro de riesgo?

Solución:

Sean C contrata conservadores y R contrata de riesgo
Tenemos: $P(C) = 0,75$ y $P(R|C) = 0,2$

- $P(R \cap C) = P(C)P(R|C) = 0,75 \cdot 0,2 = 0,15 \Rightarrow 15\%$
- $P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) \Rightarrow 0,9 = P(R) + 0,75 - 0,15 \Rightarrow P(R) = 0,3$

Problema 9.2.10 (2 puntos) El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 hogares elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:

- (1,5 puntos) Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90 %, para el gasto medio mensual en electricidad de dicha localidad.
- (0,5 punto) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad?

Solución:

$$N(\mu; 16)$$

$$\text{a) } n = 81, \bar{X} = 72 \text{ y } NC = 90\% = 0,90 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \frac{16}{\sqrt{81}} = 2,9244$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (72 - 2,9244; 72 + 2,9244) = (69,0756; 74,9244)$$

- $70 \in (69,0756; 74,9244) \Rightarrow$ no se puede afirmar que se superó los 70 euros en dicha localidad, si que se puede afirmar que la media se encuentra entre 70 y 74 euros lo que incluye 70 euros.

“www.musat.net”

Capítulo 10

Galicia

10.1. Ordinaria

El examen consta de 6 ejercicios, todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos), de los que puede realizar un MÁXIMO DE 3 combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, sólo se corregirán los tres primeros realizados.

Problema 10.1.1 Considere la ecuación matricial $X \cdot A + B = A \cdot B^t$, en donde B^t denota la matriz traspuesta de B , siendo A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y el rango de la matriz B .
b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial y, a continuación, calcule su valor.

Solución:

a) $|A| = -1 \neq 0 \implies \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$|B| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(B) = 2$$

b) $XA + B = AB^t \implies XA = AB^t - B \implies X = (AB^t - B)A^{-1} =$
$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 7 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 10.1.2 Considere el sistema de inecuaciones dado por:

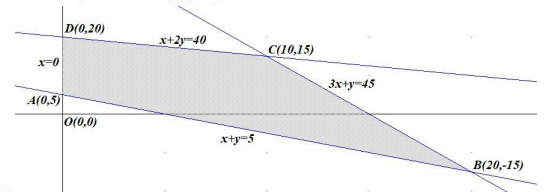
$$x + 2y \leq 40 \quad x + y \geq 5 \quad 3x + y \leq 45 \quad x \geq 0$$

- a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.
- b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x, y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

Solución:

☛ La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ x + y \geq 5 \\ 3x + y \leq 45 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



☛ Los vértices son: $A(0, 5)$, $B(20, -15)$, $C(10, 15)$ y $D(0, 20)$.

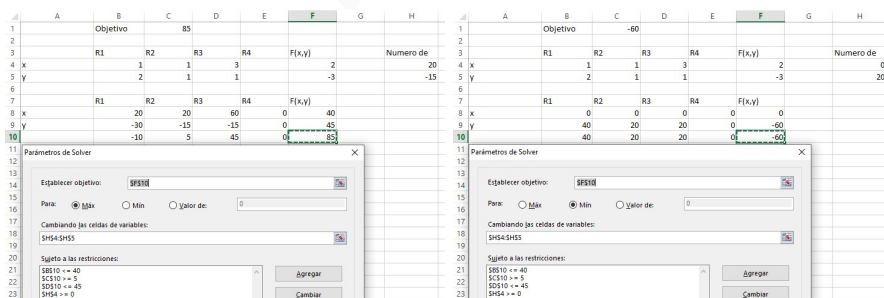
☛ La función objetivo es:

$$f(x, y) = 2x - 3y$$

$$\begin{cases} f(0, 5) = -15 \\ f(20, -15) = 85 \text{ Máximo} \\ f(10, 15) = -25 \\ f(0, 20) = -60 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El máximo es 85 y se consigue en el punto $B(20, -15)$ y el mínimo es de -60 y se consigue en el punto $D(0, 20)$.

Solución por solver :



Problema 10.1.3 El número de vehículos vendidos por un concesionario a lo largo del último año se estima que viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 28 - (t - 4)^2 & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ (t - 10)^2 + 8 & \text{si } 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

- a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del número de vehículos vendidos. ¿Cuál ha sido el mayor número de vehículos vendidos? ¿Y el menor? ¿En qué momentos se han producido? Justifique sus respuestas.
- b) Con la información del apartado anterior, represente la gráfica de la función.
- c) ¿Hubo algún período del año en el que el número de vehículos vendidos haya sido inferior a 12 unidades? Justifique su respuesta.

Solución:

- a) La función es continua en $[0, 12]$, las ramas son polinomios y en $t = 6$ se cumple:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 6^-} N(t) = \lim_{t \rightarrow 6^-} (28 - (t-4)^2) = 24 \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} N(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} ((t-10)^2 + 8) = 24 \\ N(6) = 24 \end{cases} \quad \xrightarrow{\lim_{t \rightarrow 6^-} N(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} N(t) = N(6)}$$

$N(t)$ es continua en $t = 6 \implies N(t)$ continua en $[0, 12]$.

Analizamos su monotonía:

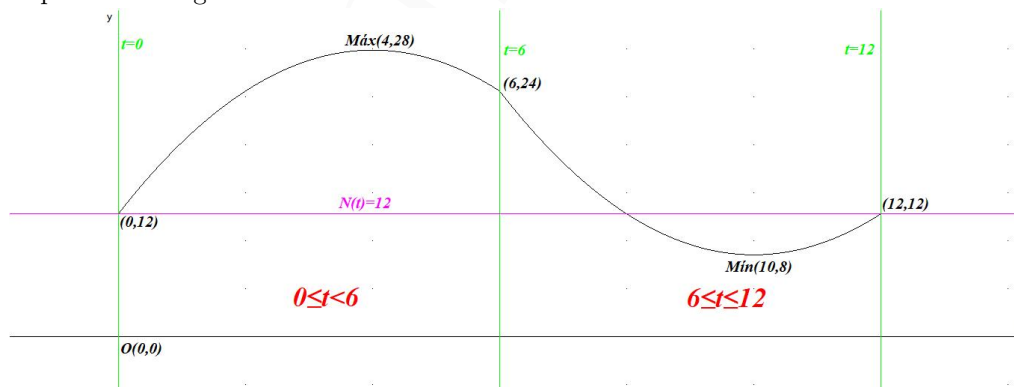
$$N'(t) = \begin{cases} -2(t-4) = 0 \implies t = 4 & \text{si } 0 < t < 6 \\ 2(t-10) = 0 \implies t = 10 & \text{si } 6 < t < 12 \end{cases}$$

	$(0, 4)$	$(4, 6)$	$(6, 10)$	$(10, 12)$
$N'(t)$	+	-	-	+
$N(t)$	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘	creciente ↗

El número de vehículos es creciente en el intervalo $(0, 4) \cup (10, 12)$ meses y decreciente en el $(4, 10)$ meses. Con un máximo relativo el mes 4 con 28 vehículos y un mínimo relativo el mes 10 con 8 vehículos.

Además tenemos $N(0) = 12$ y $N(12) = 12$, luego los extremos anteriores son absolutos.

- b) Representación gráfica:



- c) A la vista de la gráfica se observa que hay meses con ventas inferiores a los 12 vehículos. El mínimo está en 8 vehículos.

En la rama parte $(0, 6)$, la función crece hasta el punto $(4, 28)$ y decrece hasta el $(6, 24)$, luego no hay ningún intervalo por debajo de 12.

En la segunda rama: $N(t) = (t-10)^2 + 8 \leq 12 \implies t^2 - 20t + 96 \leq 0$

$$t^2 - 20t + 96 = 0 \implies t = 8 \text{ y } t = 12 \implies$$

	$(6, 8)$	$(8, 12)$
$N(t)$	+	-

Luego el número de vehículos vendidos es menor de 12 en el intervalo (8, 12), es decir, entre el octavo y el décimo segundo mes.

Problema 10.1.4 Considérese la siguiente función:

$$f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$$

donde a, b, c son números reales.

- Calcular a, b, c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por (2, 8) y que tiene un extremo relativo en (0, 16).
- Para $a = b = 0$ y $c = 16$, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c &\implies f'(x) = 3ax^2 - 4x + b \implies f''(x) = 6ax - 4 \\ \begin{cases} f(2) = 8 \implies 8a - 8 + 2b + c = 8 \\ f(0) = 16 \implies c = 16 \\ f'(0) = 0 \implies b = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 16 \end{cases} \implies f(x) = -2x^2 + 16 \end{aligned}$$

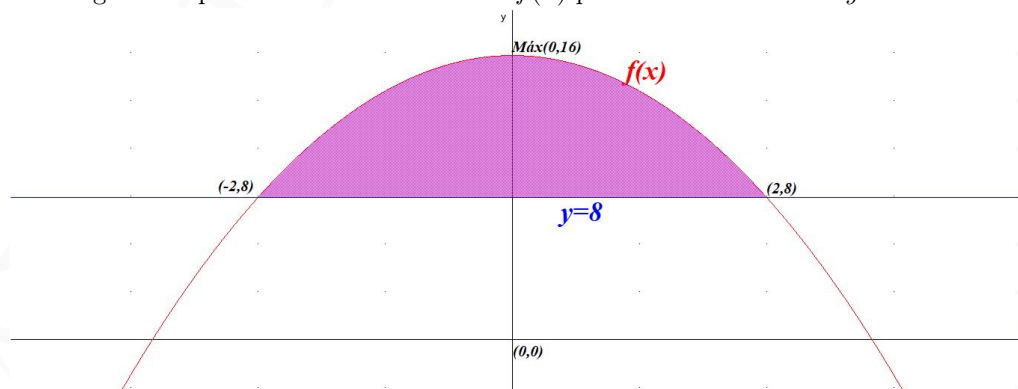
Comprobamos si hay un extremo en $x = 0$ sustituyendo en la segunda derivada: $f''(0) = -4 < 0$ luego se trata de un extremo, en particular, un máximo relativo.

- Calculamos los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta $y = 8$: $-2x^2 + 16 = 8 \implies x = \pm 2$ luego el intervalo de integración será $S_1 : [-2, 2]$

$$S_1 = \int_{-2}^2 (-2x^2 + 8) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x \right]_{-2}^2 = \frac{64}{3}$$

$$S = \left| \frac{64}{3} \right| = \frac{64}{3} \simeq 21,3333 \text{ u}^2$$

La integral sale positiva al estar la función $f(x)$ por encima de la recta $y = 8$.



Problema 10.1.5 Se estima que en una población el 20 % padece obesidad y que el 11 % padece obesidad y son hipertensos. Además, el 27,5 % de los hipertensos padecen obesidad.

- ¿Qué porcentaje de la población padece obesidad o es hipertenso?
- ¿Son independientes los sucesos “padecer obesidad” y “ser hipertensos”?

c) Calcule la probabilidad de que un individuo que no padece obesidad sea hipertenso.

Solución:

Sea O “padece obesidad” y H “es hipertenso”.
 $P(O) = 0,2$, $P(O \cap H) = 0,11$ y $P(O|H) = 0,275$

$$\text{a) } P(O|H) = \frac{P(O \cap H)}{P(H)} \implies P(H) = \frac{P(O \cap H)}{P(O|H)} = \frac{0,11}{0,275} = 0,4$$

$$P(O \cup H) = P(O) + P(H) - P(O \cap H) = 0,2 + 0,4 - 0,11 = 0,49 \implies 49\%$$

$$\text{b) } P(O) \cdot P(H) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$$

$$P(O \cap H) = 0,11 \neq P(O) \cdot P(H) \implies O \text{ y } H \text{ no son independientes.}$$

$$\text{c) } P(H|\bar{O}) = \frac{P(\bar{O} \cap H)}{P(\bar{O})} = \frac{P(H) - P(O \cap H)}{1 - 0,2} = \frac{0,4 - 0,11}{0,8} = 0,3625$$

Problema 10.1.6 Puede suponerse que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15.

- a) Si en una muestra de 25 empleados, el tiempo medio necesario fue de 97 horas, calcule un intervalo de confianza con un 95 % de confianza para la media del tiempo de formación precisado.
- b) Si la media del tiempo de formación precisado es $\mu = 97$ horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas?

Solución:

$$N(\mu; 15)$$

$$\text{a) } n = 25, \bar{X} = 97, \text{ y } NC = 0,95.$$

$$0,95 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,05 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \implies z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{15}{\sqrt{25}} = 5,88$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (97 - 5,88; 97 + 5,88) = (91,12; 102,88)$$

$$\text{b) } \text{Tenemos } \mu = 97 \text{ y } n = 36 \implies \bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(97; \frac{15}{\sqrt{36}}\right) = N(97; 2,5)$$

$$P(90 \leq \bar{X} \leq 104) = P\left(\frac{90 - 97}{2,5} \leq Z \leq \frac{104 - 97}{2,5}\right) = P(-2,8 \leq Z \leq 2,8) =$$

$$P(Z \leq 2,8) - P(Z \leq -2,8) = P(Z \leq 2,8) - (1 - P(Z \leq 2,8)) = 2P(Z \leq 2,8) - 1 =$$

$$2 \cdot 0,9974 - 1 = 0,9948$$

10.2. Extraordinaria

El examen consta de 6 ejercicios, todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos), de los que puede realizar un MÁXIMO DE 3 combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, sólo se corregirán los tres primeros realizados.

Problema 10.2.1 (3,33 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}$$

- a) Calcule para qué valor de k **no** existe la matriz inversa de A .
- b) Justifique cuál es el rango de A si $k = -5$.
- c) Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para $k = -2$.

Solución:

- a) $|A| = -3k - 15 = 0 \implies k = -5$ luego si $k = -5 \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}$.
- b) Si $k = -5 \implies |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.
- c) Si $k = -2 \implies |A| = -9 \neq 0 \implies \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -10/9 & -1/9 & 7/9 \\ 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Problema 10.2.2 (3,33 puntos) Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B . Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A , como máximo, el doble de metros que al distribuidor B .

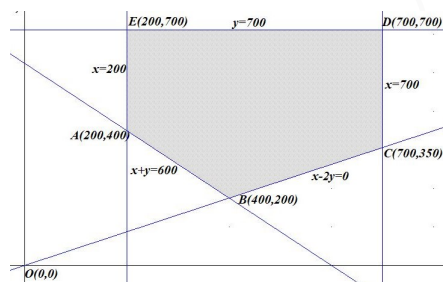
- a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.
- b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

Solución:

Sean x m comprados al distribuidor A e y m comprados al distribuidor B .

- a) La función objetivo es: $f(x, y) = 2x + 3y$
La región factible es:

$$\begin{cases} 200 \leq x \leq 700 \\ 200 \leq y \leq 700 \\ x + y \geq 600 \\ x \leq 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 200 \leq x \leq 700 \\ 200 \leq y \leq 700 \\ x + y \geq 600 \\ x - 2y \leq 0 \end{cases}$$



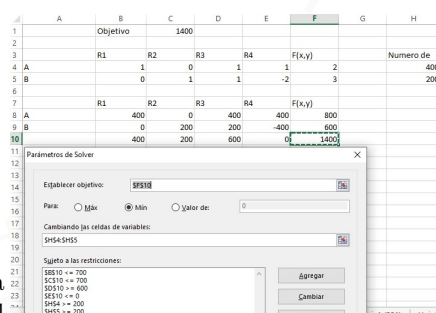
- b) Los vértices son: $A(200, 400)$, $B(400, 200)$, $C(700, 350)$, $D(700, 700)$ y $E(200, 700)$.

- c) Sustituyendo los vértices en $f(x, y) = 2x + 3y$

$$\begin{cases} f(200, 400) = 1600 \\ f(400, 200) = 1400 \text{ Mínimo} \\ f(700, 350) = 2450 \\ f(700, 700) = 3500 \\ f(200, 700) = 2500 \end{cases}$$

El mínimo coste es 1400€ y se consigue con la compra de 400 m al distribuidor A y 200 m al distribuidor B

Solución por solver :



Problema 10.2.3 (3,33 puntos) La función $f(x) = ax^2 + bx + c$, en donde a, b, c son números reales, pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo en el punto $P(4, 16)$.

- a) Calcule los valores de a, b, c .
b) Realice la representación gráfica de la función $f(x)$ y determine el área comprendida entre dicha función y el eje OX .

Solución:

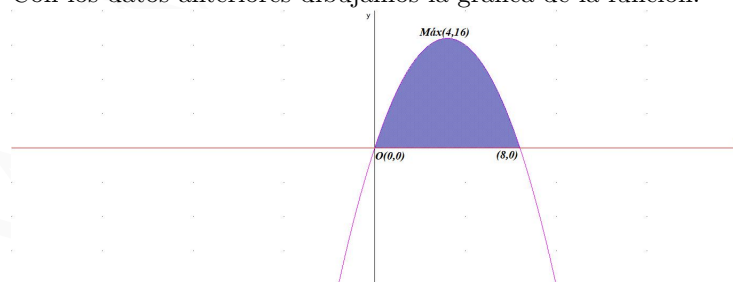
a) $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2a$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f'(4) = 0 \Rightarrow 8a + b = 0 \\ f(4) = 16 \Rightarrow 16a + 4b + c = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 8 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^2 + 8x$$

Como $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(4) = -2 < 0 \Rightarrow P(4, 16)$ es un máximo.

- b) La función corta al eje OY en el punto $(0, 0)$ y al OX haciendo $f(x) = -x^2 + 8x = 0$ corta en el $(0, 0)$ y el $(8, 0)$. Tiene un máximo en $P(4, 16)$

Con los datos anteriores dibujamos la gráfica de la función:



El área pedida sería:

$$S = \int_0^8 (-x^2 + 8x) dx = -\frac{x^3}{3} + 4x^2 \Big|_0^8 = \frac{256}{3} \simeq 85,3333 \text{ u}^2$$

Problema 10.2.4 (3,33 puntos) Una fábrica produce un artículo de pesca deportiva y vende cada unidad a un precio $P(x)$ (en euros) que depende del número total de unidades producidas x :

$$P(x) = -\frac{x^2}{20} + x + 55, \quad 0 \leq x \leq 30$$

Se sabe que la producción de x unidades supone un coste fijo de 80 euros más un coste variable de 11,25 euros por unidad.

- Calcule las expresiones de las funciones de coste, ingreso y beneficio.
- ¿Cómo debe planificarse la producción para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Cuál sería el precio de venta por unidad en ese caso?

Solución:

- a) El ingreso es el precio de venta por unidades vendidas:

$$I(x) = xP(x) = -\frac{x^3}{20} + x^2 + 55x, \quad 0 \leq x \leq 30$$

$$\text{El coste es } C(x) = 11,25x + 80, \quad 0 \leq x \leq 30$$

El beneficio es ingreso menos coste:

$$B(x) = I(x) - C(x) = -\frac{x^3}{20} + x^2 + 55x - 11,25x - 80 = -\frac{x^3}{20} + x^2 + 43,75x - 80, \quad 0 \leq x \leq 30$$

- b) $B'(x) = -\frac{3x^2}{20} + 2x + 43,75 = 0 \implies x = 25$ y $x = -\frac{35}{3}$ (no válida)

$$B''(x) = -\frac{3x}{10} + 2 \implies B''(25) = -\frac{11}{2} < 0 \implies (25; 857,5) \text{ es un máximo relativo.}$$

Además $B(0) = -80$ y $B(30) = 782,5$ y concluimos:

El máximo beneficio se produce con la venta de 25 unidades y es de 857,5€.

El precio por unidad para ese máximo será: $P(25) = 48,75\text{€}$.

Problema 10.2.5 (3,33 puntos) En una encuesta el 80 % de los entrevistados dice que lee o escucha música, el 35 % hace las dos cosas y el 60 % no lee.

Calcule las probabilidades de que una persona elegida al azar:

- Escuche música y no lea.
- Lea y no escuche música.
- Haga solamente una de las dos cosas.
- ¿Son independientes los sucesos “escuchar música” y “leer”? Justifique la respuesta.

Solución:

Sea L lector y M escucha música.

$$P(L \cup M) = 0,8, \quad P(L \cap M) = 0,35 \text{ y } P(\bar{L}) = 0,6.$$

- a) $P(L \cup M) = P(L) + P(M) - P(L \cap M) \implies 0,8 = 0,4 + P(M) - 0,35 \implies P(M) = 0,75$
 $P(M \cap \bar{L}) = P(M) - P(M \cap L) = 0,75 - 0,35 = 0,4$

- b) $P(\overline{M} \cap L) = P(L) - P(M \cap L) = 0,4 - 0,35 = 0,05$
- c) $P(\text{"una sola cosa"}) = P(M \cap \overline{L}) + P(\overline{M} \cap L) = 0,4 + 0,05 = 0,45$
- d) $P(L \cap M) = 0,35$ y $P(L) \cdot P(M) = 0,4 \cdot 0,75 = 0,3 \implies P(L \cap M) \neq P(L) \cdot P(M) \implies M$
y L no son independientes.

Problema 10.2.6 (3,33 puntos) La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria se distribuye normalmente con una desviación típica de $\sigma = 6$ centímetros.

- a) Calcule un intervalo del 98 % de confianza para la longitud media de los listones teniendo en cuenta que en un lote de 9 listones se ha observado una longitud media de 244 centímetros.
- b) Si la longitud media de los listones producidos es de $\mu = 244$ centímetros, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud media de los listones de un lote de $n = 16$ listones sea inferior a 242 centímetros?

Solución:

$$N(\mu; 6)$$

- a) $n = 9$, $\overline{X} = 244$, y $NC = 0,98$.
 $0,98 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,02 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,01$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99 \implies z_{\alpha/2} = 2,33$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,33 \frac{6}{\sqrt{9}} = 4,66$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (244 - 4,66; 244 + 4,66) = (239,34; 248,66)$$

- b) $\mu = 244$ y $n = 16 \implies \overline{X} \overset{N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\approx} N(244; 1,5)$
 $P(\overline{X} \leq 242) = P\left(Z \leq \frac{242 - 244}{1,5}\right) = P(Z \leq -1,33) = 1 - P(Z \leq 1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918$

“www.musat.net”

Capítulo 11

Islas Baleares

11.1. Ordinaria

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Problema 11.1.1 (10 puntos) Una empresa está considerando la fabricación de tres tipos de armarios diferentes, A , B y C . Dispone de metal y madera.

- ☛ Para fabricar cada unidad del modelo A , se requieren 5 kg de metal y 5 horas de trabajo de un operario (no se requiere madera).
 - ☛ Por unidad del modelo B , 10 kg de metal, 10 kg de madera y 10 horas de trabajo.
 - ☛ Por unidad del modelo C , 15 kg de metal y 5 horas de trabajo (no se requiere madera).
- a) (2 puntos) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo, ¿cuántos kg de cada material necesitamos?
- b) (4 puntos) Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios, ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos?
- c) (4 puntos) Supón ahora que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos (sin límite) y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones del almacén solo podemos producir 125 unidades en total. En este caso, ¿podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén?

Solución:

Sean x el número de modelos A , y el número de modelos B y z el número de modelos C .

- a) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo necesitamos:
 Modelo A: $10 \cdot 5 = 50$ kg de metal y $10 \cdot 0 = 0$ kg de madera
 Modelo B: $10 \cdot 10 = 100$ kg de metal y $10 \cdot 10 = 100$ kg de madera
 Modelo C: $10 \cdot 15 = 150$ kg de metal y $10 \cdot 0 = 0$ kg de madera
 En total: $50 + 100 + 150 = 300$ kg de metal y 100 kg de madera

$$b) \begin{cases} 5x + 10y + 15z = 1550 \\ 0x + 10y + 0z = 600 \\ 5x + 10y + 5z = 1050 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 310 \\ y = 60 \\ x + 2y + z = 210 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ del modelo A} \\ y = 60 \text{ del modelo B} \\ z = 50 \text{ del modelo C} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 125 \\ 5x + 10y + 15z = 1550 \\ 5x + 10y + 5z = 1050 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 125 \\ x + 2y + 3z = 310 \\ x + 2y + z = 210 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -10 \text{ del modelo A} \\ y = 85 \text{ del modelo B} \\ z = 50 \text{ del modelo C} \end{cases}$$

La solución es claramente no válida (no puede tener soluciones negativas)

Problema 11.1.2 (10 puntos) Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10000€ en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2000€ y 8000€ en bonos; y entre 4000€ y 6000€ en acciones. El interés previsto para las acciones es de un 6 % anual, y para los bonos es de un 2 % anual.

- a) (3 puntos) Plantea la maximización del interés previsto por las inversiones como un problema de programación lineal.
- b) (5 puntos) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan.
- c) (2 puntos) ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión?

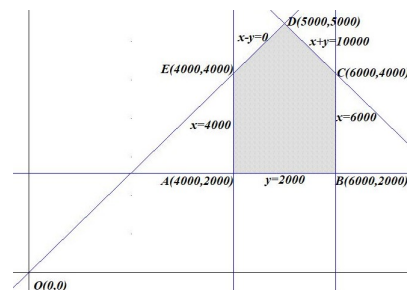
Solución:

Sean x valor de las acciones e y de los bonos.

- a) La función objetivo es:
 $f(x, y) = 0,06x + 0,02y$
 La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \leq 10000 \\ x \geq y \\ 2000 \leq y \leq 8000 \\ 4000 \leq x \leq 6000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 10000 \\ x - y \geq 0 \\ y \leq 8000 \\ x \leq 6000 \\ x \geq 4000 \\ y \geq 2000 \end{cases}$$

- b) Los vértices son:
 $A(4000, 2000)$, $B(6000, 2000)$,
 $C(6000, 4000)$, $D(5000, 5000)$ y
 $E(4000, 4000)$



c) La función objetivo es:

Solución por solver :

$$f(x, y) = 0,06x + 0,02y$$

$$\begin{cases} f(4000, 2000) = 280 \\ f(6000, 2000) = 400 \\ f(6000, 4000) = 440 \text{ Máximo} \\ f(5000, 5000) = 400 \\ f(4000, 4000) = 320 \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Objetivo				440		
3		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
4	acciones	1	1	0	1	0,06		6000
5	bonos	1	-1	1	0	0,02		4000
6								
7		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
8	acciones	6000	6000	0	6000	360		
9	bonos	4000	-4000	4000	0	80		
10		10000	2000	4000	6000	440		

Para obtener el máximo beneficio tiene que invertir 6000€ en acciones y 4000€ en bonos. Lo que le proporcionaría el máximo interés anual de 440€.

Problema 11.1.3 (10 puntos) Considera la función $f(x) = \sqrt{x}$

a) (7 puntos) Haz un gráfico esquemático de la función $f(x)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.

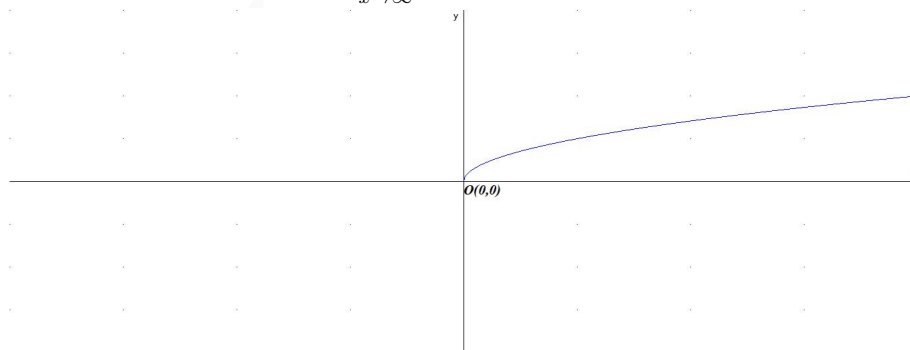
Indicación: para el apartado b), el eje horizontal debería de llegar hasta $x = 30$.

b) (3 puntos) Traza sobre la gráfica, la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 25$ e indica su pendiente.

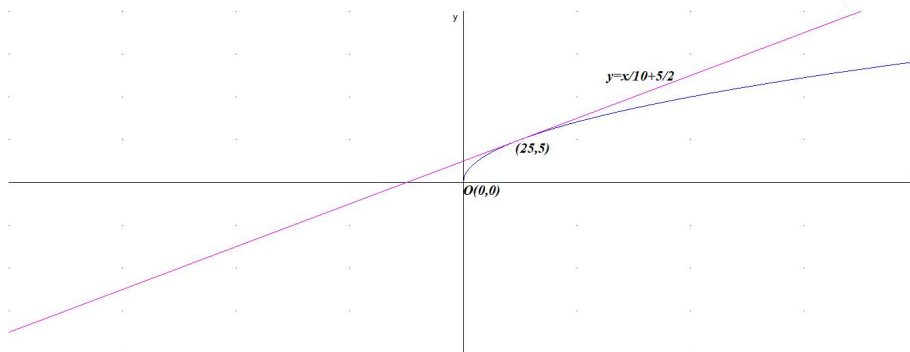
Solución:

a) Tenemos:

$\text{Dom}(f) = [0, \infty)$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow$ la función no tiene extremos y la función es siempre creciente. Además $f(0) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

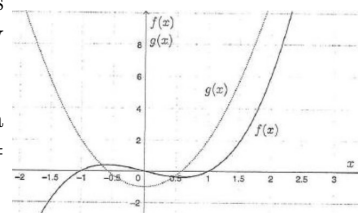


b) Tenemos $a = 25$, $b = f(a) = f(25) = 5$ y $m = f'(a) = f'(25) = \frac{1}{10} \xrightarrow{y-b=m(x-a)}$
 $y - 5 = \frac{1}{10}(x - 25) \Rightarrow y = \frac{1}{10}x + \frac{5}{2}$. La pendiente es $m = \frac{1}{10}$.



Problema 11.1.4 (10 puntos) Considera dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, que están representadas en la gráfica siguiente:

- (3 puntos) Sabemos que una de las gráficas es $x(x-1)(x+1)$ y que la otra es $(x - 1/\sqrt{3})(x + 1/\sqrt{3})$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es $f(x)$ y cuál es $g(x)$. Justifica la respuesta.
- (3 puntos) Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál: ¿es $f(x) = g'(x)$? ¿o bien es $g(x) = f'(x)$?
- (4 puntos) Calcula el área entre la función $g(x)$ y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que $g(x) = 0$.

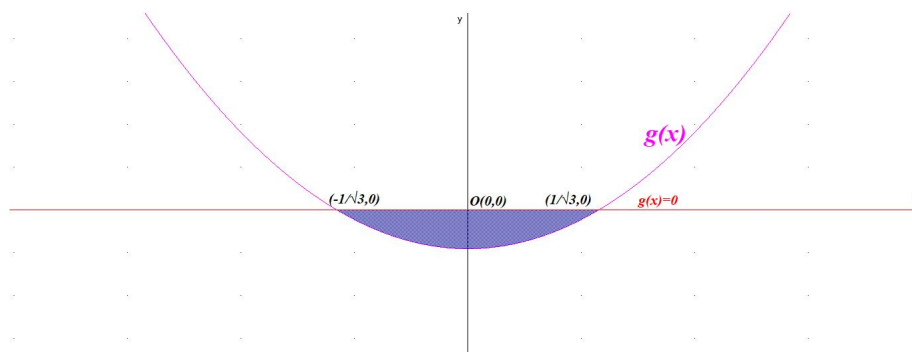


Solución:

- La función $f(x)$ pasa por los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1 \Rightarrow f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$ y, por tanto, $g(x) = (x - 1/\sqrt{3})(x + 1/\sqrt{3}) = x^2 - \frac{1}{3}$
- La función $f(x)$ es un polinomio de grado 3, y la $g(x)$ es un polinomio de grado 2. Luego la posible solución sería $f'(x) = g(x)$, pero resulta $f'(x) = 3x^2 - 1 \neq g(x)$ luego ninguna de las dos soluciones planteadas son verdaderas.

- $g(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ El intervalo de integración es $S : \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$:

$$S = \left| \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} \right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \right| = \left| -\frac{4\sqrt{3}}{27} \right| = \frac{4\sqrt{3}}{27} \simeq 0,2566 \text{ u}^2$$



Problema 11.1.5 (10 puntos) Según un modelo, la población de una ciudad determinada, p (en millones de habitantes), depende del tiempo que ha pasado, t (en años), desde el inicio del año 2000, según la relación

$$p(t) = \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0,2t}}, \quad \text{para } t \geq 0$$

Te proporcionamos la siguiente información, que puedes utilizar si así lo consideras:

$$p'(t) = \frac{2,4e^{-0,2t}}{(1 + 3 \cdot e^{-0,2t})^2}, \quad \int p(t) dt = 20 \ln(e^{0,2t} + 3) + C, \quad \text{para cualquier constante } C \in \mathbb{R}$$

- (3 puntos) ¿Qué población teníamos al inicio del año 2000 (es decir, para $t = 0$)? ¿Qué año tuvimos exactamente 2 millones de habitantes?
- (3 puntos) ¿En qué intervalos la población aumenta? ¿En cuáles disminuye?
- (4 puntos) ¿A qué tiende la población de la ciudad a largo plazo? ¿A qué tiende el ritmo de crecimiento de la población a largo plazo?

Solución:

- $p(0) = 1 \implies$ en el año 2000 había 1000000 de habitantes.

$$p(t) = \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0,2t}} = 2 \implies 4 = 2 + 6e^{-0,2t} \implies e^{-0,2t} = \frac{1}{3} \implies t = \frac{\ln(1/3)}{-0,2} = 5 \ln 3 \simeq 5,493061443 \implies \text{los 2000000 habitantes se alcanzan a mediados del año 2005.}$$

- $p'(t) = \frac{2,4e^{-0,2t}}{(1 + 3 \cdot e^{-0,2t})^2} > 0 \implies p(t)$ es siempre creciente en todo el dominio de la función.
Dom(p) = $[0, \infty)$

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0,2t}} = \frac{4}{1 + 0} = 4$ La población tiende a estabilizarse en 4000000 habitantes a lo largo del tiempo.
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2,4e^{-0,2t}}{(1 + 3 \cdot e^{-0,2t})^2} = \frac{2,4 \cdot 0}{1 + 0} = 0 \implies$ el ritmo de crecimiento tiende a cero millones de habitantes.

Problema 11.1.6 (10 puntos) En una población,

- ☛ El 50 % de habitantes con mayor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 10 %, y
- ☛ El 50 % de habitantes con menor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 40 %.

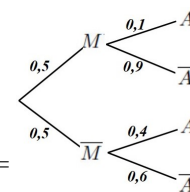
- a) (4 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, éste viva de alquiler?
- b) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler?
- c) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler?

Solución:

Sean M mayor poder adquisitivo y A vive de alquiler.

Tenemos $P(M) = 0,5$, $P(\overline{M}) = 0,5$, $P(A|M) = 0,1$ y $P(A|\overline{M}) = 0,4$

- a) $P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|\overline{M})P(\overline{M}) = 0,1 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,5 = 0,25$.
- b) $P(A \cap A \cap A) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) = 0,25^3 = 0,015625$
- c) $P(\text{al menos uno vive de alquiler}) = 1 - P(\text{ninguno vive de alquiler}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{A}) = 1 - 0,75^3 = 0,578125$



Problema 11.1.7 (10 puntos) La probabilidad de que llueva un día cualquiera es siempre la misma. Ahora bien, si un día cualquiera ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 40 %; y si un día cualquiera no ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 5 %.

Considera los sucesos siguientes:

☛ A : hoy ha llovido.

☛ B : mañana lloverá.

- a) (5 puntos) Calcula $P(A)$ y $P(B)$
- b) (5 puntos) ¿Qué es más probable: que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy; o bien que llueva hoy si sabemos que mañana seguro que lloverá?

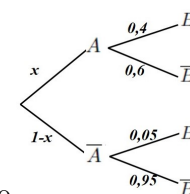
Solución:

Sean A hoy ha llovido, $\overline{A}$ hoy no ha llovido, B mañana lloverá y $\overline{B}$ mañana no lloverá.

Partimos de $P(A) = P(B) = x$ y tenemos: $P(B|A) = 0,4$ y $P(B|\overline{A}) = 0,05$

- a) $P(A) = x = P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = 0,4x + 0,05(1-x) \Rightarrow 0,4x + 0,05(1-x) = x \Rightarrow x = \frac{1}{13} = 0,0769$
- Luego $P(A) = P(B) = \frac{1}{13} = 0,0769$

- b) $P(B|A) = 0,4$ y $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \stackrel{P(A)=P(B)}{=} P(B|A) = 0,4$ luego tienen la misma probabilidad.



Problema 11.1.8 (10 puntos) Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), la esperanza de vida de una persona nacida en el 2020 es de 79,6 años para los hombres y 83,6 años para las mujeres. Supongamos también que el número de años que vivirá una persona nacida en el 2020 tiene una desviación típica de $\sigma = 10$ años tanto para los hombres como para las mujeres

- a) (6 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años?
¿Y de que viva entre 60 y 70 años?
- b) (4 puntos) ¿Qué es más probable: que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89,6 años;
o que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93,6 años?

Solución:

$$N(\mu, 10)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \geq 60) &= P\left(Z \geq \frac{60 - 79,6}{10}\right) = P(Z \geq -1,96) = P(Z \leq 1,96) = 0,975 \\ P(60 \leq X \leq 70) &= P\left(\frac{60 - 79,6}{10} \leq Z \leq \frac{70 - 79,6}{10}\right) = P(-1,96 \leq Z \leq -0,96) = \\ &= P(Z \leq -0,96) - P(Z \leq -1,96) = 1 - P(Z \leq 0,96) - (1 - P(Z \leq 1,96)) = \\ &= P(Z \leq 1,96) - P(Z \leq 0,96) = 0,975 - 0,8315 = 0,1435 \end{aligned}$$

- b) X hombre e Y mujer:

$$P(X \geq 89,6) = P\left(Z \geq \frac{89,6 - 79,6}{10}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

$$P(Y \geq 93,6) = P\left(Z \geq \frac{93,6 - 83,6}{10}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

Las dos probabilidades son iguales.

11.2. Extraordinaria

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Problema 11.2.1 (10 puntos) Tienes un pequeño negocio de pantalones y camisas. El precio de cada pantalón es de 60€, y el de cada camisa es de 40€.

- a) (5 puntos) Esta semana se han vendido un total de 100 unidades entre pantalones y camisas, y hemos tenido unos ingresos totales de 5400€. ¿Cuántos pantalones y camisas hemos vendido?
- b) (5 puntos) Hace tres semanas se vendieron un total de 110 unidades entre pantalones y camisas, y un empleado que revisó la caja dijo que los ingresos totales eran de 4200€... pero tú no te crees al empleado. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas se tendrían que haber vendido según lo que dice el empleado? Interpreta el resultado obtenido.

Solución:

Sean x los pantalones vendidos e y las camisas.

- a)

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 60x + 40y = 5400 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 100 \\ 3x + 2y = 270 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 70 \text{ pantalones} \\ y = 30 \text{ camisas} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 100 \\ 3 & 2 & 270 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & -30 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 30 \\ x + 30 = 100 \Rightarrow x = 70 \end{cases}$$

- b) Ahora tenemos una venta de 10 unidades más y una recaudación menor, el empleado está mintiendo. El nuevo sistema sería:

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ 60x + 40y = 4200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 110 \\ 3x + 2y = 210 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -10 \text{ pantalones} \\ y = 210 \text{ camisas} \end{cases}$$

Resultado absurdo, no puede haber ventas negativas.

Problema 11.2.2 (10 puntos) Considera las matrices siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) (3 puntos) Sabemos que existe un valor x tal que B es la inversa de A . ¿Cuál es este valor x ?
 b) (4 puntos) Para el valor x del apartado anterior, calcula $(A + I)(B - I) + (A - I)(B + I)$.
 c) (3 puntos) ¿Existen algunos valores para y, z de manera que C sea la inversa de A ?

Solución:

a) Tenemos $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 8$

b) $(A + I)(B - I) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$
 $(A - I)(B + I) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$
 $(A + I)(B - I) + (A - I)(B + I) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -10 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

Otra forma más sencilla:

$$(A + I)(B - I) + (A - I)(B + I) = (AB - AI + IB - I) + (AB + AI - IB - I) \stackrel{B=A^{-1}}{=} (I - A + B - I) + (I + A - B - I) = -A + B + A - B = O$$

c) $C = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nexists y, z \in \mathbb{R} \text{ que cumplan esa igualdad ya que los términos } a_{21} = -5 \neq c_{21} = 7 \text{ y } a_{22} = 2 \neq c_{22} = -1$

Problema 11.2.3 (10 puntos) Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.

- ☛ Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- ☛ Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.

Cada aspiradora se vende por 100€ y cada batería por 22€. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción.

- a) (8 puntos) ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los beneficios?
- b) (2 puntos) Si el precio de venta de las aspiradoras va disminuyendo, habrá un momento en que será más rentable fabricar solo baterías. Calcula cuál es el precio de venta que tienen que tener las aspiradoras, de manera que el máximo beneficio total se obtiene cuando solo producimos baterías.

Solución:

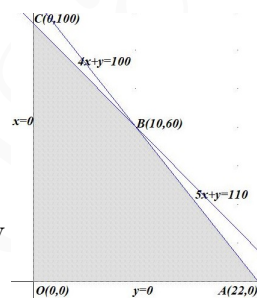
Sean x número de aspiradoras e y número de baterías electrónicas

	tiempo del operario	materias primas	venta
aspiradora	5	4	100
batería	1	1	22
	≤ 110	≤ 100	

- a) La región factible es:

$$\begin{cases} 5x + y \leq 110 \\ 4x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $O(0, 0)$, $A(22, 0)$, $B(10, 60)$ y $C(0, 100)$.



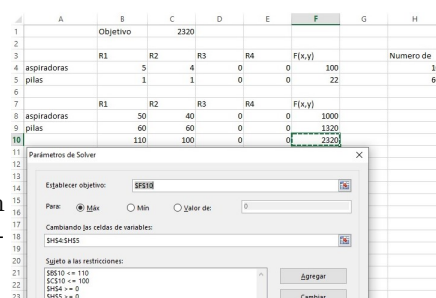
La función objetivo es:

Solución por solver :

$$f(x, y) = 100x + 22y$$

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f(22, 0) = 2200 \\ f(10, 60) = 2320 \text{ Máximo} \\ f(0, 100) = 2200 \end{cases}$$

Al máximo beneficio se llega con la fabricación y venta de 10 aspiradoras y 60 pilas electrónicas con 2320€.



- b) Sea el parámetro entero positivo $k \leq 100$ la función objetivo sería $f(x, y) = kx + 22y$ en los mismos vértices y tenemos:

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f(22, 0) = 22k \text{ solo aspiradoras} \\ f(10, 60) = 10k + 1320 \\ f(0, 100) = 2200 \text{ Máximo} \end{cases} \implies 10k + 1320 < 2200 \implies k \leq 88$$

Si $k = 88 \implies f(x, y) = 88x + 22y$:

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f(22, 0) = 1936 \\ f(10, 60) = 2200 \\ f(0, 100) = 2200 \end{cases}$$

El valor máximo será cualquier punto del segmento que une $B(10, 60)$ con $C(0, 100)$:

$$y = 100 - 4x, \quad x \in [0, 10] \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$x = 0 \implies C(0, 100) \implies f(0, 100) = 2200,$$

$$x = 1 \implies C_1(1, 96) \implies f(1, 96) = 2200,$$

$$x = 2 \implies C_2(2, 92) \implies f(2, 92) = 2200,$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$$x = 10 \implies C_{10}(10, 60) \implies f(10, 60) = 2200$$

Cuando el precio de las aspiradoras es de 88€ una solución óptima sería la fabricación de cero aspiradoras y 100 baterías electrónicas con un beneficio de 2200€.

Problema 11.2.4 (10 puntos) Considera la función $f(x) = e^x - e^{-x}$ para $x \geq 0$

a) (3 puntos) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio.

b) (4 puntos) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$

c) (3 puntos) Calcula $\int_0^1 f(x) dx$

Solución:

$$a) f(0) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - e^{-x}) = \infty - 0 = \infty$$

$$b) f'(x) = e^x + e^{-x} \text{ y } f''(x) = e^x - e^{-x}$$

$$c) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e^x + e^{-x} \Big|_0^1 = e + e^{-1} - 2 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e} \simeq 1,0862$$

Problema 11.2.5 (10 puntos) Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, g (en número de personas), en función del precio de la entrada, p (en €), será la siguiente:

$$g(p) = \begin{cases} 500 & \text{para } p = 0 \\ 300 - 3p & \text{para } 0 < p < 100 \\ 0 & \text{para } p = 100 \end{cases}$$

a) (3 puntos) ¿Cuál es el dominio de $g(p)$? ¿Es esta función continua?

b) (2 puntos) Según el estudio de mercado, si asisten un total de 240 personas, ¿cuál habrá sido el precio de la entrada?

c) (5 puntos) Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos?

Solución:

a) $\text{Dom}(g) = [0, 100]$ La función toma valores en cualquier punto del intervalo.

Las ramas de la función son continuas, hay que estudiar la continuidad en $x = 0$ y en $x = 100$:

- En $p = 0$ tenemos $g(0) = 500 \neq \lim_{p \rightarrow 0^+} g(0) = \lim_{p \rightarrow 0} (300 - 3p) = 300 \implies g$ no es continua en $p = 0$.
- En $p = 100$ tenemos $g(100) = 0 = \lim_{p \rightarrow 100^-} g(100) = \lim_{p \rightarrow 100} (300 - 3p) = 0 \implies g$ es continua en $p = 100$.
- $g(p) = 240 \implies 300 - 3p = 240 \implies p = 20\text{€}$
- La función g es continua en el intervalo $(0, 100]$

b) $g(p) = 240 \implies 300 - 3p = 240 \implies p = 20\text{€}$

c) $I(p) = p \cdot g(p) = \begin{cases} 500p & \text{para } p = 0 \\ 300p - 3p^2 & \text{para } 0 < p < 100 \\ 0 & \text{para } p = 100 \end{cases} \implies$

$I'(p) = 300 - 6p = 0 \implies p = 50\text{€}$ con $p \in (0, 100)$ Por la segunda derivada $I''(p) = -6 \implies I''(50) = -6 < 0 \implies p = 50$ es un máximo relativo (en este caso absoluto) La función crece en $(0, 50)$ y decrece en $(50, 100)$

Problema 11.2.6 (10 puntos) Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7 % de probabilidades de comprar un producto A , y un 10 % de probabilidades de comprar un producto B .

- a) (5 puntos) Si la probabilidad de “comprar A y no comprar B ” es de un 6 %, ¿son los sucesos “comprar A ” y “comprar B ” independientes?
- b) (5 puntos) Si los sucesos “comprar A ” y “comprar B ” fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de “no comprar A ”; o la probabilidad de “no comprar A , sabiendo que se ha comprado B ”?

Solución:

- a) Tenemos $P(A) = 0,07$ y $P(B) = 0,1 \implies P(A)P(B) = 0,007$
 $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \implies 0,06 = 0,07 - P(A \cap B) \implies P(A \cap B) = 0,01$
Luego $P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \implies A$ y B no son independientes.
- b) Si A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,007$
Tenemos $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,07 = 0,93$
 $P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1 - 0,007}{0,1} = 0,93$
Luego $P(\bar{A}) = P(\bar{A}|B)$, los dos sucesos son equiprobables.

Problema 11.2.7 (10 puntos) Según los datos del Instituto Nacional de Estadística (INE) a 1 de enero de 2023, en las Islas Baleares había 1210000 habitantes en total. Además, el número de hogares, en función del número de habitantes que convivían en el mismo, eran los siguientes:

	Número de convivientes			
	1	2	3	4 o más
Número de hogares	118000	124000	93000	119000

Se pide:

- a) (2 puntos) ¿Cuál es el número medio de convivientes por hogar?
- b) (2 puntos) ¿Cuántos habitantes pertenecen a un hogar en el que hay 4 o más convivientes?
¿Cuál es el número medio de convivientes en los hogares en los que hay 4 o más convivientes?

- c) (3 puntos) Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta.
- d) (3 puntos) Escogiendo, de manera independiente, dos habitantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta.

Solución:

- a) El número total de hogares es: $118000 + 124000 + 93000 + 119000 = 454000$
 Los convivientes: $1 \cdot 118000 + 2 \cdot 124000 + 3 \cdot 93000 = 645000$ en hogares de 3 o menos de 3 convivientes.
 Los convivientes: $1210000 - 645000 = 565000$ en hogares con 4 o más convivientes.
 Tenemos 565000 convivientes en 119000 hogares con un número medio de convivientes de $\frac{565000}{119000} = 4,747899159$ en hogares de 4 o más de 4.
 El número medio de convivientes será:

$$\frac{645000 + 565000}{454000} = 2,665198237$$

- b) Como se vio en el apartado anterior hay 565000 convivientes en hogares con 4 o más convivientes. También se vio que el número medio de convivientes en este caso es de 4,747899159

c) $P(\text{unipersonal}) = \frac{1 \cdot 118000}{1210000} \simeq 0,0975$

- d) Sea U vive en un hogar unipersonal. Tenemos $P(U) = \frac{118000}{1210000} = \frac{59}{605} \simeq 0,0975$ y $P(\bar{U}) = 1 - P(U) = 1 - \frac{59}{605} = \frac{546}{605} \simeq 0,9025$:

$$P(\bar{U} \cap \bar{U}) = \left(\frac{546}{605}\right)^2 = \frac{298116}{366025} \simeq 0,8145$$

$$P(\text{alguno vive en hogar unipersonal}) = 1 - P(\text{ninguno vive en hogar unipersonal}) = 1 - (\bar{U} \cap \bar{U}) = 1 - \frac{298116}{366025} = \frac{67909}{366025} \simeq 0,1855$$

Problema 11.2.8 (10 puntos) Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.

- a) (5 puntos) Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75 %.
- b) (5 puntos) Suponiendo ahora que la media poblacional es de $\mu = 500$ horas, ¿cuántas horas de vida útil tienen un 10 % de los productos que menos vida útil tienen?

Solución:

$$N(\mu; 150)$$

- a) $\bar{X} = 507$, $n = 50$ y $NC = 75\% = 0,75 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,25 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,125$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,875 \implies z_{\alpha/2} = 1,155$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,155 \frac{150}{\sqrt{50}} = 24,5$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (507 - 24,5; 507 + 24,5) = (482,5; 531,5)$$

b) $N(500; 150)$: $P(X \leq a) = 0,1 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 500}{150}\right) = 0,1 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 500}{150}\right) = 0,9 \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a - 500}{150}\right) = 0,9 \Rightarrow -\frac{a - 500}{150} = 1,285 \Rightarrow a = 307,25$ horas. (Por debajo de ese tiempo)

“www.musat.net”

Capítulo 12

Islas Canarias

12.1. Ordinaria

Instrucciones: Resolver un máximo de 4 preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

Problema 12.1.1 A1 (2,5 puntos) Dos agricultores de medianías producen manzanas de tres variedades: reineta, fuji y golden. De las manzanas producidas por el agricultor A , el 70 % son reinetas, el 20 % fuji y el resto golden; de las producidas por el agricultor B , un 50 % son reinetas, un 30 % golden y el resto fuji. Un supermercado de la zona vende manzanas solamente de estos agricultores. El 60 % de las manzanas las adquiere del agricultor A y el 40 % restante del B .

- (0,5 puntos) Dibuja el árbol de probabilidades correspondiente a la situación descrita.
- (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta?
- (1 puntos) Si la manzana elegida no es de la variedad reineta ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por el agricultor A ?

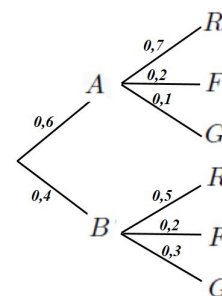
Solución:

Sean R reineta, F fuji, G golden, A agricultor A y B agricultor B .

- El árbol de probabilidad a la derecha.

$$\begin{aligned} \text{b) } P(R) &= P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \\ &= 0,7 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,4 = 0,62 \end{aligned}$$

$$\text{c) } P(A|\bar{R}) = \frac{P(A \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{0,2 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,6}{1 - 0,62} = 0,4737$$



Problema 12.1.2 B1 (2,5 puntos) Según estudios recientes sobre el impacto de la **IA** (Inteligencia Artificial) en la educación, el 73 % del profesorado ya ha utilizado herramientas de **IA** en algunas ocasiones. Si en un determinado departamento de la universidad hay 30 profesores.

- a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que no hayan utilizado herramientas de **IA** entre 10 y 15 profesores.
- b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 10 profesores hayan utilizado la **IA**?
- c) (0,5 puntos) Si el número aproximado de profesores que imparte clase en una determinada facultad es de 80, ¿cuántos se espera que hayan utilizado aplicaciones de **IA** en su trabajo?

Solución:

Se trata de una $B(30; 0,73)$ como $n > 10$, $np = 21,9 > 5$ y $nq = 8,1 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(21,9; 2,43167)$

- a) Sea Y la variable aleatoria “nunca ha utilizado herramientas de **IA**” y se trata de una $B(30; 0,27)$ como $n > 10$, $np = 8,1 > 5$, $nq = 21,9$ y podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(8,1; 2,43167)$
- $$P(10 \leq Y \leq 15) = P\left(\frac{9,5 - 8,1}{2,43167} \leq Z \leq \frac{15,5 - 8,1}{2,43167}\right) = P(0,58 \leq Z \leq 3,04) =$$
- $$P(Z \leq 3,04) - P(Z \leq 0,58) = 0,9988 - 0,7190 = 0,2798$$
- b) $P(X < 10) = P\left(Z \leq \frac{9,5 - 21,9}{2,43167}\right) = P(Z \leq -5,1) = 1 - P(Z \leq 5,1) = 1 - 1 = 0$
- c) $E[X] = np = 80 \cdot 0,73 = 58,4 \simeq 58$ profesores.

Problema 12.1.3 A2 (2,5 puntos) Por motivos de ajustes presupuestarios, una empresa multinacional de trabajo a distancia debe despedir al 10 % de sus trabajadores.

- a) (0,75 puntos) En una ciudad hay 10 trabajadores a distancia de esa empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 3 sean despedidos?
- b) (0,75 puntos) En España hay 300 trabajadores a distancia de la citada empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 280 conserven su empleo?
- c) (1 punto) Temiendo posibles conflictos laborales, la dirección de la empresa, selecciona una muestra aleatoria de 400 de sus trabajadores a distancia, de los que 50 optarían por un despido voluntario incentivado. Hallar un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de trabajadores a distancia de la empresa que optarían por un despido voluntario incentivado.

Solución:

- a) $B(10; 0,1)$:
- $$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$
- $$\binom{10}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^8 + \binom{10}{3} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^7 = 0,9872048016$$
- b) $B(300; 0,9)$ como $n = 300 > 10$, $np = 270 > 5$ y $nq = 30 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(270; 5,1962)$
- $$P(X \geq 280) = P\left(Z \geq \frac{279,5 - 270}{5,1962}\right) = P(Z \geq 1,83) = 1 - P(Z \leq 1,83) = 1 - 0,9664 =$$
- $$0,0336$$
- c) La probabilidad de que un trabajador acepte el despido voluntario es $\hat{p} = \frac{50}{400} = 0,125$
- $$NC = 97\% = 0,97 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,03 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,015 \quad P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} =$$
- $$0,985 \implies Z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,17 \sqrt{\frac{0,125 \cdot 0,875}{400}} = 0,0359$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,125 - 0,0359; 0,125 + 0,0359) = (0,0891; 0,1609) = (8,91\%; 16,09\%)$$

Problema 12.1.4 B2 (2,5 puntos) Se desea estimar la cantidad media de emisiones de dióxido de carbono CO_2 por vehículo en una ciudad. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 100 vehículos y se encuentra que la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo es de 150 g/km, con una desviación típica de 25 g/km. Suponiendo que esta variable es normal:

- (0,75 puntos) Determinar un intervalo de confianza del 95 % para la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo en la ciudad.
- (1 punto) Si se admite un error máximo de 3,5 g/km, para estimar la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos vehículos es necesario medir la cantidad de CO_2 ?
- (0,75 puntos) Si la medición se realizara a 75 vehículos y se obtuviera la misma media de 150 g/km y el mismo intervalo del apartado a), con una confianza del 86 %, ¿cuál debería ser la desviación típica?

Solución:

- $\bar{X} = 150$, $n = 100$, $\sigma = 25$ y $NC = 95\%$
 $NC = 95\% = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$
 $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
 $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{25}{\sqrt{100}} = 4,9$
 $IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (150 - 4,9; 150 + 4,9) = (145,1; 154,9)$
- $NC = 90\% = 0,90 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05$
 $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$
 $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3,5 = 1,645 \frac{25}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq 138,0625 \Rightarrow n = 139.$
- $n = 75$, $\bar{X} = 150$ y $NC = 86\%$
 $NC = 86\% = 0,86 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,14 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,07$
 $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,93 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,475$
 $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,475 \frac{\sigma}{\sqrt{75}} = 4,9 \Rightarrow \sigma = 28,7697$

Problema 12.1.5 A3 (2,5 puntos) La producción de energía en Kw de un panel solar, orientado hacia el sur, durante las horas del día, viene dada por la función:

$$P(t) = \begin{cases} -\frac{4}{25}(t-7)(t-17) & \text{si } 7 \leq t \leq 14 \\ \frac{3}{25}(-7t+126) & \text{si } 14 < t \leq 18 \end{cases}$$

- (0,75 puntos) Justificando las respuestas, explica si es continua y derivable.
- (1 punto) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la producción de energía durante el día. ¿A qué hora se alcanzó la máxima producción de energía y a cuánto ascendió?

c) (0,75 puntos) ¿A qué hora, se superaron por primera vez los 3 Kw de producción?

Solución:

a) Continuidad en $[7, 18]$. Las dos ramas son continuas (son polinomios) y hay que analizar la continuidad en $t = 14$:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 14^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 14} \left(-\frac{4}{25}(t-7)(t-17) \right) = \frac{84}{25} \\ \lim_{t \rightarrow 14^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow 14} \left(\frac{3}{25}(-7t+126) \right) = \frac{84}{25} \\ P(14) = \frac{84}{25} \end{cases} \implies P(t) \text{ es continua en } t = 14.$$

Luego $P(t)$ es continua en $[7, 18]$.

Derivabilidad:

$$P'(t) = \begin{cases} -\frac{8(t-12)}{25} & \text{si } 7 < t < 14 \\ -\frac{21}{25} & \text{si } 14 < t < 18 \end{cases}$$

Las ramas son derivables hay que estudiar la derivabilidad en $t = 14$:

$$\begin{cases} P'(14^-) = -\frac{16}{25} \\ P'(14^+) = -\frac{21}{25} \end{cases} \implies P'(14^-) \neq P'(14^+) \text{ no es derivable en } t = 14.$$

La función es derivable en $(7, 14) \cup (14, 18)$

$$\text{b) } P'(t) = \begin{cases} -\frac{8(t-12)}{25} = 0 \implies t = 12 & \text{si } 7 < t < 14 \\ -\frac{21}{25} < 0 & \text{si } 14 < t < 18 \end{cases}$$

	(7, 12)	(12, 14)	(14, 18)
$P'(t)$	+	-	-
$P(t)$	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(12, 18)$

y creciente en el $(7, 12)$.

Como $y P(7) = P(18) = 0$ hay un mínimo absoluto en $(7, 0)$ y $(18, 0)$

Tiene un máximo relativo en $(12, 4)$ que también es absoluto.

En conclusión:

La producción de energía es creciente hasta las 14 horas y empieza a decrecer hasta las 18 horas. La máxima producción es de $P(12) = 4$ Kw.

c) $P(t) = 3$:

Si $7 \leq t \leq 14 \implies P(t) = -\frac{4}{25}(t-7)(t-17) = 3 \implies t = 14,5$ valor que no está en la rama y $t = 9,5$ que sí lo está

Si $14 < t \leq 18 \implies P(t) = \frac{3}{25}(-7t+126) = 3 \implies t = 14,42857142$.

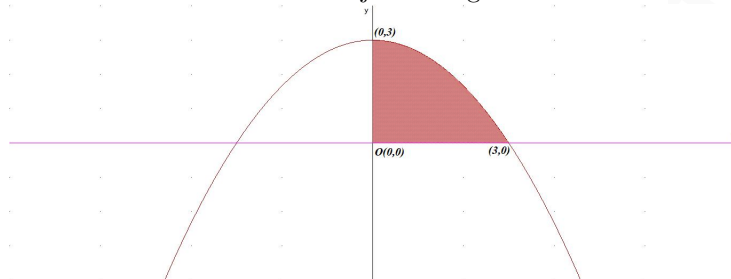
Luego la primera hora en la que se supera la producción de 3 Kw es a las 9,5 horas.

Problema 12.1.6 B3 (2,5 puntos) En un muro del paseo marítimo se debe recubrir con lona la superficie determinada por $y \leq \frac{-x^2+9}{3}$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, (las unidades se miden en metros).

- a) (0,75 puntos) Representar dicha superficie.
- b) (1 punto) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la superficie?
- c) (0,5 puntos) El precio del metro cuadrado de lona es de 20 euros y, al hacer la instalación se debe usar un 15 % más de la superficie a cubrir. Además, el coste de instalación es de 5 euros por metro cuadrado de lona adquirida. ¿Cuánto cuesta recubrir la superficie?

Solución:

- a) Se trata de una parábola vertical que corta al eje OY en $(0, 3)$ y al eje OX en $\frac{-x^2 + 9}{3} = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ como la solución negativa no es válida el punto de corte es $(3, 0)$. Por otra parte $f'(x) = -\frac{2x}{3} = 0 \Rightarrow x = 0$. Como $f''(x) = -\frac{2}{3} \Rightarrow f''(0) = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow (0, 3)$ es un máximo. Con estos datos dibujamos la gráfica:



- b) $S = \int_0^3 \frac{-x^2 + 9}{3} dx = -\frac{x^3}{9} + 3x \Big|_0^3 = 6 \text{ m}^2$
- c) Hay que comprar $6 \cdot 1,15 = 6,9 \text{ m}^2$
 El coste de la lona será: $6,9 \cdot 20 = 138 \text{ €}$
 El coste de instalación será: $6,9 \cdot 5 = 34,5 \text{ €}$
 El coste total será: $138 + 34,5 = 172,5 \text{ €}$

Problema 12.1.7 A4 (2,5 puntos) En una fábrica, en la que se producen mesas y estanterías, se dispone de un total de 150 metros cuadrados de madera y 90 horas de mano de obra. Para fabricar una mesa se necesitan 3 metros cuadrados de madera y 1 hora de mano de obra y para fabricar una estantería se necesitan 4 metros cuadrados de madera y 3 horas de mano de obra. La fábrica obtiene un beneficio de 160 € por la producción de cada mesa, y de 225 € por cada estantería.

- a) (0,75 puntos) Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- b) (1 punto) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices.
- c) (0,75 puntos) ¿Cuántos muebles de cada tipo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

Solución:

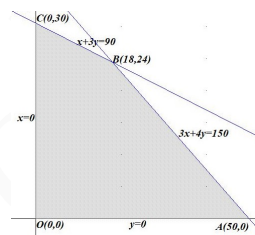
Sean x número de mesas e y número de estanterías.

	madera	horas	beneficio
mesas	3	1	160
estanterías	4	3	225
	≤ 150	≤ 90	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 3x + 4y \leq 150 \\ x + 3y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

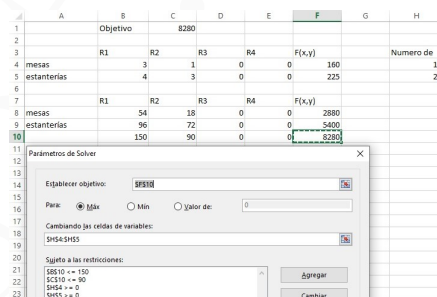
Los vértices son: $O(0,0)$, $A(50,0)$, $B(18,24)$, y $C(0,30)$.



b) La función objetivo es: $f(x,y) = 160x + 225y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(50,0) = 8000 \\ f(18,24) = 8280 \text{ Máximo} \\ f(0,30) = 6750 \end{cases}$$



c) El máximo beneficio es de 8280€ y se alcanza con la producción de 18 mesas y 24 estanterías.

Problema 12.1.8 B4 (2,5 puntos) Una jugadora de ajedrez ha conseguido premios en 51 de los torneos en los que ha participado a lo largo de su vida. Los torneos han sido locales, nacionales e internacionales. El número de torneos locales en los que ha jugado ha sido el doble de los nacionales; además por cada cinco torneos nacionales ha participado en dos internacionales. Los torneos en los que ha conseguido premio representan un 30 % de todos los torneos en los que ha participado.

a) (1,5 puntos) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) (1 punto) ¿En cuántos torneos de cada clase ha participado esta jugadora?

Solución:

Sean x número de torneos locales, y número de nacionales y z número de internacionales.

$$\text{a) } \begin{cases} 0,3(x+y+z) = 51 \\ x = 2y \\ 2y = 5z \end{cases} \implies \begin{cases} x+y+z = 170 \\ x-2y = 0 \\ 2y-5z = 0 \end{cases}$$

b)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 170 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 170 \\ 0 & -3 & -1 & -170 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 170 \\ 0 & -3 & -1 & -170 \\ 0 & 0 & -17 & -340 \end{array} \right) \implies \text{Sistema compatible determinado}$$

$$\begin{cases} -17z = -340 \implies z = 20 \\ -3y - 20 = -170 \implies y = 50 \\ x + 50 + 20 = 170 \implies x = 100 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 100 \\ y = 50 \\ z = 20 \end{cases}$$

Ha jugado 100 torneos locales, 50 nacionales y 20 internacionales.

12.2. Extraordinaria

Instrucciones: Resolver un máximo de 4 preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

Problema 12.2.1 A1 (2,5 puntos) En un molino de gofio se elaboran gofios de trigo, de millo y de cinco cereales. El gofio de trigo supone un 40 % de la producción, el gofio de millo un 32 %, y el resto es de gofio de cinco cereales. A veces, algún paquete presenta un defecto que hace imposible su comercialización. Con el gofio de trigo ocurre en un 1,2 % de los paquetes, con el de millo en un 0,9 % y con el de cinco cereales en un 2,3 %.

- (0,5 puntos) Elabora el árbol de probabilidades.
- (1 puntos) Si se elige al azar un paquete de gofio, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos?
- (1 puntos) Si presenta algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que el paquete sea de gofio de millo?

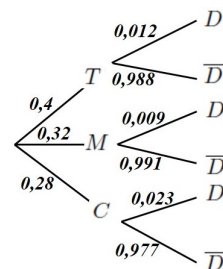
Solución:

Sean T cantidad de gofio de trigo, M cantidad de gofio de millo, C cantidad de gofio de cinco cereales, D defectuoso y $\bar{D}$ sin defectos.

- El árbol de probabilidad a la derecha.

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\bar{D}) &= \\ P(\bar{D}|T)P(T) + P(\bar{D}|M)P(M) + P(\bar{D}|C)P(C) &= \\ 0,988 \cdot 0,4 + 0,991 \cdot 0,32 + 0,977 \cdot 0,28 &= 0,98588 \end{aligned}$$

$$\text{c) } P(M|D) = \frac{P(D|M)P(M)}{P(D)} = \frac{0,009 \cdot 0,32}{1 - 0,98588} = 0,20397$$



Problema 12.2.2 B1 (2,5 puntos) En una determinada ciudad, el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones sigue una distribución normal de media 725 euros con una desviación típica de 50 euros.

- (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que alquilar uno de estos pisos cueste cada mes, a lo sumo, 700 euros?
- (0,75 puntos) En un determinado mes, una agencia inmobiliaria alquila 25 de los pisos anteriormente mencionados. ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros?
- (1 puntos) De los 25 pisos alquilados por la agencia en ese mes, ¿cuántos se puede esperar que cuesten menos de 710 euros cada mes?

Solución:

a) $N(725; 50)$

$$P(X \leq 700) = P\left(Z \leq \frac{700 - 725}{50}\right) = P(Z \leq -0,5) = 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$$

b) $n = 25, \bar{X} \overset{N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\approx} = N(725; 10)$

$$P(\bar{X} \geq 730) = P\left(Z \geq \frac{730 - 725}{10}\right) = P(Z \geq 0,5) = 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$$

c) $P(X \leq 710) = P\left(Z \leq \frac{710 - 725}{50}\right) = P(Z \leq -0,3) = 1 - P(Z \leq 0,3) = 1 - 0,6179 = 0,3821$

$$E[X] = 25 \cdot P(X \leq 710) = 25 \cdot 0,3821 = 9,5525 \text{ entre 9 y 10 pisos.}$$

Problema 12.2.3 A2 (2,5 puntos) Los datos recogidos en un estudio sobre la movilidad en Canarias indican que la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular, sigue una distribución normal de media 1200 km y desviación típica 230 km.

- a) (0,75 puntos) Se elige un coche al azar ¿cuál es la probabilidad de que en un mes recorra más de 1000 km?
- b) (1 punto) Si se toma una muestra de 36 coches, ¿cuál es la probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km?
- c) (0,75 puntos) En esa muestra, ¿cuál es el número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km?

Solución:

a) $N(1200; 230)$

$$P(X \geq 1000) = P\left(Z \geq \frac{1000 - 1200}{230}\right) = P(Z \geq -0,87) = P(Z \leq 0,87) = 0,8078$$

b) $n = 36, \bar{X} \overset{N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\approx} = N(1200; 38,333)$

$$P(1150 \leq \bar{X} \leq 1250) = P\left(\frac{1150 - 1200}{38,333} \leq Z \leq \frac{1250 - 1200}{38,333}\right) = P(-1,3 \leq Z \leq 1,3) = P(Z \leq 1,3) - P(Z \leq -1,3) = P(Z \leq 1,3) - (1 - P(Z \leq 1,3)) = 2P(Z \leq 1,3) - 1 = 2 \cdot 0,9032 - 1 = 0,8064$$

c) $P(X \geq 1300) = P\left(Z \geq \frac{1300 - 1200}{230}\right) = P(Z \geq 0,43) = 1 - P(Z \leq 0,43) = 1 - 0,6664 = 0,3336$

$$E[X] = 36 \cdot P(X \geq 1300) = 36 \cdot 0,3336 = 12,0096 \simeq 12 \text{ coches recorrerán más de 1300 Km.}$$

Problema 12.2.4 B2 (2,5 puntos) Una empresa de reparto de comida a domicilio quiere estudiar el tiempo que tardan sus repartidores en entregar los pedidos. Se estudió una muestra de 200 pedidos y se obtuvo el intervalo de confianza $[16,84; 18,16]$ para el tiempo medio, en minutos, que tardan los repartidores en entregar la comida desde el momento en que la recogen en los locales. Sabiendo que la desviación típica es 4 minutos, calcula:

- a) (1,25 puntos) ¿Cuál fue el tiempo medio obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con el que se obtuvo el intervalo?

- b) (1,25 puntos) Si un día se hicieron 425 repartos, utilizando la estimación puntual obtenida en el apartado anterior para la media, calcula la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{X} &= \frac{16,84 + 18,16}{2} = 17,5 \\ E &= \frac{18,16 - 16,84}{2} = 0,66 \\ E &= Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,66 = Z_{\alpha/2} \frac{4}{\sqrt{200}} \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2,33 \Rightarrow P(Z \leq 2,33) = 1 - \frac{\alpha}{2} = \\ &0,9901 \Rightarrow \alpha = 0,0198 \simeq 0,02 \\ NC &= 1 - \alpha \simeq 1 - 0,02 = 0,98 \Rightarrow NC = 98\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } n &= 425 \text{ y } \bar{X} \overset{N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\approx} N(17,5; 0,194) \\ P(\bar{X} \geq 18) &= P\left(Z \geq \frac{18 - 17,5}{0,194}\right) = P(Z \geq 2,58) = 1 - P(Z \leq 2,58) = 1 - 0,9951 = 0,0049 \end{aligned}$$

Problema 12.2.5 A3 (2,5 puntos) La rentabilidad (en %) de un fondo de inversión inmobiliario se obtiene mediante la función:

$$R(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 & \text{para } t \leq 4 \\ \frac{t + 111}{5t + 3} & \text{para } t > 4 \end{cases}$$

donde t es el tiempo (en años) que el dinero permanece invertido en el fondo.

- a) (0,75 puntos) ¿Es continua la función de rentabilidad? Justifica la respuesta.
- b) (1,25 puntos) ¿Cuándo crece y cuándo decrece esta función? Justifica la respuesta ¿Para qué valor de t se alcanza la rentabilidad máxima? ¿Cuánto vale dicha rentabilidad? Representa gráficamente la función.
- c) (0,5 puntos) El fondo de inversión garantiza que, para tiempos superiores a 25 años, la inversión siempre tendrá un retorno superior al 0,2%. ¿Es cierta la afirmación del fondo? Justifica la respuesta.

Solución:

Supongo $t \geq 0$ dado que se trata de tiempo transcurrido.

- a) Continuidad: La rama $t \leq 4$ es un polinomio y en la rama $t > 4$ el denominador se anula en $t = -\frac{3}{5}$ que no está en la rama. Las dos ramas son continuas y hay que analizar la continuidad en $t = 4$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 4^-} R(t) = \lim_{t \rightarrow 4} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 \right) = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 4^+} R(t) = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t + 111}{5t + 3} = 5 \\ R(4) = 5 \end{array} \right. \quad \xrightarrow{\lim_{t \rightarrow 4^-} R(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} R(t) = R(4)}$$

$R(t)$ es continua en $t = 4$. Luego la función es continua en $[0, \infty)$.

b) Monotonía:

$$R'(t) = \begin{cases} -t + 3 = 0 \implies t = 3 & \text{para } t < 4 \\ -\frac{552}{(5t+3)^2} < 0 & \text{para } t > 4 \end{cases}$$

	$(0, 3)$	$(3, 4)$	$(4, \infty)$
$R'(t)$	+	-	-
$R(t)$	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘

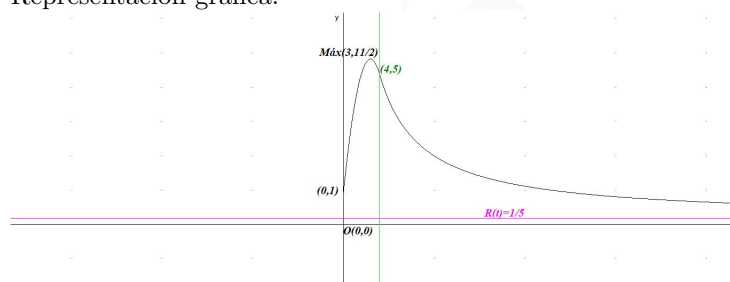
La función es creciente en el intervalo $(0, 3)$
y decreciente en el $(3, \infty)$.

Tiene un máximo relativo en $\left(3; \frac{11}{2}\right)$ que además es absoluto.

Además tenemos $R(0) = 1$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+111}{5t+3} = \frac{1}{5} = 0,2 \implies$ hay una asíntota horizontal en $R(t) = 0,2$.

En conclusión: La rentabilidad crece hasta el tercer año donde alcanza un 5,5% y a partir de ese año empieza a decrecer estabilizándose muy próximo al 0,2%.

Representación gráfica:



c) Por lo visto en el apartado anterior, la afirmación del enunciado es cierta.

Problema 12.2.6 B3 (2,5 puntos) A principios de 2024, tras más de dos años y medio después de la erupción del volcán Tajogaite, se han comenzado a sembrar las primeras fincas de plátanos sobre las coladas de dicho volcán. Una de las fincas replantadas sobre la colada tiene una superficie, en hectáreas, limitada por las funciones $f(x) = (x-2)^2$ y $g(x) = -x+4$.

a) (0,75 puntos) Representa la superficie de la finca.

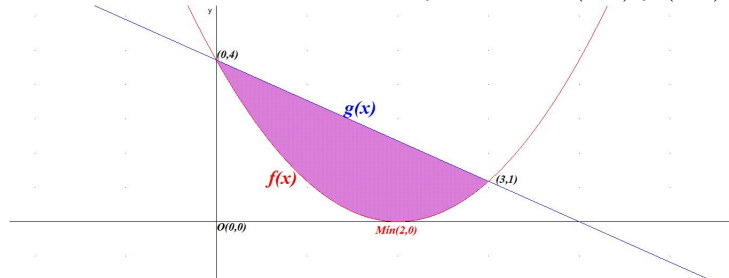
b) (1 punto) Calcula el área.

c) (0,75 puntos) Si la finca produce anualmente 45000 kg de plátanos por hectárea y la Unión Europea aporta una ayuda de 0,33 euros por kilo producido ¿Cuál sería el importe a recibir cada año en ayudas de la UE sabiendo que aproximadamente el 1,5% de la producción se desecha antes de recibir las ayudas?

Solución:

a) Se trata de una parábola y una recta:

La función $f(x)$ corta el eje de ordenadas en $(0, 4)$ y el de abscisas en el $(2, 0)$; $f'(x) = 2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$ y $f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow (2, 0)$ es un mínimo relativo; además $f(x) > 0$. La función $g(x)$ es una recta que corta a $f(x)$ en los puntos $f(x) = g(x) \Rightarrow (x - 2)^2 = -x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 3 \Rightarrow (0, 4)$ y $(3, 1)$.



b) $S = \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9}{2} = 4,5$ hectáreas.

c) La finca produce $45000 \cdot 4,5 = 202500$ Kg

Se desecha el 1,5 % $\Rightarrow 202500 \cdot 0,985 = 199462,5$ Kg de producción real.

La ayuda será de $199462,5 \cdot 0,33 = 65822,625$ €

Problema 12.2.7 A4 (2,5 puntos) En una tienda de electrónica, se venden teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos. El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas, y por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil.

a) (1,5 puntos) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) (1 punto) ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se vendieron en la tienda?

Solución:

Sean x número de teléfonos móviles, y número de tablets y z número de ordenadores portátiles.

a)
$$\begin{cases} 300x + 400y + 800z = 28000 \\ x = 2y \\ y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 4y + 8z = 280 \end{cases}$$

b)
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 8 & 280 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & 280 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 10F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 280 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

$$\begin{cases} 28z = 280 \Rightarrow z = 10 \\ y - 20 = 0 \Rightarrow y = 20 \\ x - 40 = 0 \Rightarrow x = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \\ z = 10 \end{cases}$$

Se han vendido 40 teléfonos móviles, 20 tablets y 10 ordenadores portátiles.

Problema 12.2.8 B4 (2,5 puntos) Una finca dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras para vender. Como estrategia comercial, oferta dos lotes: el lote A , que consiste en dos kilogramos de frutas y tres kilogramos de verduras, a 18 euros; el lote B , que consiste en 3 kilogramos de frutas y 3 de verduras, a 20 euros. Si ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B :

- (0,75 puntos) Plantear el correspondiente problema de programación lineal.
- (1 punto) Dibujar la región factible e indicar cuáles son sus vértices.
- (0,75 puntos) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se han de vender de cada tipo? ¿Cuál sería la recaudación máxima?

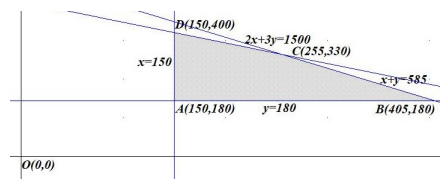
Solución:

Sean x número de lotes A e y número de lotes B .

	Kg frutas	Kg verduras	venta
A	2	3	18
B	3	3	20
	≤ 1500	≤ 1755	

- La región factible es:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 1500 \\ 3x + 3y \leq 1755 \\ x \geq 150 \\ y \geq 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 1500 \\ x + y \leq 585 \\ x \geq 150 \\ y \geq 180 \end{cases}$$



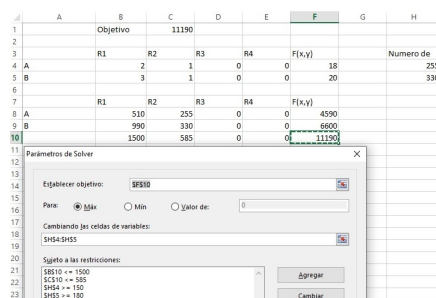
Los vértices son: $A(150, 180)$, $B(405, 180)$, $C(255, 330)$ y $D(150, 400)$.

- La función objetivo es:

Solución por solver :

$$f(x, y) = 18x + 20y$$

$$\begin{cases} f(150, 180) = 6300 \\ f(405, 180) = 10890 \\ f(255, 330) = 11190 \text{ Máximo} \\ f(150, 400) = 10700 \end{cases}$$



- El máximo beneficio es de 11190€ y se alcanza con 255 lotes A y 330 lotes B .

Capítulo 13

La Rioja

13.1. Ordinaria

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2,5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El tiempo disponible para resolver a las preguntas es de una hora y media.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

Problema 13.1.1 (2,5 puntos) En el mercado de Olmedo, por cinco corderos y un puerco me dan 26 ducados; por tres corderos, tres puercos y un ternero me dan 38 ducados, y si les doy dos de cada clase me dan 36 ducados.

¿Cuántos ducados me dan por cada cordero, puerco y ternero?

Solución:

Sean x precio de un cordero, y precio de un puerco y z precio de un ternero.

$$\begin{cases} 5x + y = 26 \\ 3x + 3y + z = 38 \\ 2x + 2y + 2z = 36 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 18 \\ 5x + y = 26 \\ 3x + 3y + z = 38 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 \text{ ducados por cordero} \\ y = 6 \text{ ducados por puerco} \\ z = 8 \text{ ducados por ternero} \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 5 & 1 & 0 & 26 \\ 3 & 3 & 1 & 38 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & -4 & -5 & -64 \\ 0 & 0 & -2 & -16 \end{array} \right) \implies$$

sistema compatible determinado.

$$\begin{cases} -2z = -16 \Rightarrow z = 8 \\ -4y - 40 = -64 \Rightarrow y = 6 \\ x + 6 + 8 = 18 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \\ z = 8 \end{cases}$$

Problema 13.1.2 (2,5 puntos) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Elige una matriz A cuadrada de orden 2 tal que, de sus cuatro componentes, tres valen 1 y la otra vale -1 . Escribe explícitamente tu matriz A , y encuentra entonces la matriz X que cumple que

$$AX = M$$

¿Cuánto valen los determinantes de las matrices A y X ?

Solución:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b - d = 2 \\ a + c = 2 \\ b + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 \text{ y } |X| = -2$$

Problema 13.1.3 (2,5 puntos) Un artesano fabrica hilo de algodón ecológico e hilo de lino de alta calidad, y planifica su trabajo para los próximos tres días. Cada metro de algodón le lleva una hora de trabajo, y para cada metro de lino necesita tres horas. No quiere emplear más de 21 horas en su tarea. El coste de fabricación es de dos monedas por metro de algodón y de una por metro de lino, y no puede gastar más de 12 monedas en la tarea. Su beneficio por metro de algodón es de 3 monedas, y por metro de lino es de 5 monedas.

¿Cuántos metros debe fabricar de cada clase para maximizar su beneficio?

Estudia cómo cambiaría la respuesta si el beneficio por metro de lino fuera el doble del que se ha dicho antes.

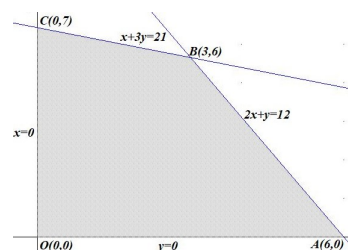
Solución:

Sean x metros de hilo de algodón e y metros de hilo de lino.

	horas	coste	beneficio
algodón	1	2	3
lino	3	1	5
	≤ 21	≤ 12	

☛ La región factible es:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 21 \\ 2x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



☛ Los vértices son: $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(3,6)$ y $C(0,7)$.

☛ La función objetivo es:

$$f(x, y) = 3x + 5y$$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(6,0) = 18 \\ f(3,6) = 39 \text{ Máximo} \\ f(0,7) = 35 \end{cases}$$

☛ El beneficio máximo es de 39 monedas fabricando 3 metros de hilo de algodón ecológico y 6 metros de hilo de lino de alta calidad.

Solución por solver :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo	39					
2		R1	R2	R3	R4	F(x,y)	Numero de	
3								
4	algodón	1	2	0	0	3		
5	lino	3	1	0	0	5	6	
6								
7		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
8	algodón	3	6	0	0	9		
9	lino	18	6	0	0	30		
10		21	12	0	0	39		

☛ La función objetivo es:

$$f(x, y) = 3x + 10y$$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(6,0) = 18 \\ f(3,6) = 69 \\ f(0,7) = 70 \text{ Máximo} \end{cases}$$

☛ El beneficio máximo es de 70 monedas fabricando 0 metros de hilo de algodón ecológico y 7 metros de hilo de lino de alta calidad.

Solución por solver :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo	70					
2		R1	R2	R3	R4	F(x,y)	Numero de	
3								
4	algodón	1	2	0	0	3		
5	lino	3	1	0	0	10	7	
6								
7		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
8	algodón	0	0	0	0	0		
9	lino	21	7	0	0	20		
10		21	7	0	0	70		

Bloque 2. Análisis.

Problema 13.1.4 (2,5 puntos) Definimos la función f mediante

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio?

Representa la gráfica de f , de forma que se aprecien bien sus asíntotas horizontales y verticales, sus extremos relativos y sus cortes con los ejes de coordenadas.

Solución:

☛ $x - 2 = 0 \implies x = 2 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

☛ Asíntotas:

• Verticales: En $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

• Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 2} = 0$$

$$y = x$$

• Puntos de corte:

- Con OY hacemos $x = 0 \Rightarrow \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

- Con OX hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (1, 0)$

• Monotonía: $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = 3$

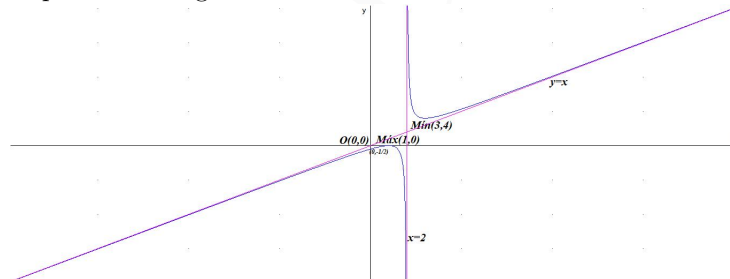
	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

La función es decreciente en el intervalo $(1, 2) \cup (2, 3)$.

Tiene un máximo relativo en $(1, 0)$ y un mínimo relativo en $(3, 4)$.

• Representación gráfica:



Problema 13.1.5 (2,5 puntos) Encuentra los valores de a y b que hacen que la función dada por siguiente:

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$$

(1,75 puntos) Cumpla las dos propiedades siguientes:

(I) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.

(II) Tiene un extremo relativo en $x = -1$.

(0,75 puntos) ¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1? ¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1 ?

Solución:

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax - b \Rightarrow f''(x) = 6x - 2a$$

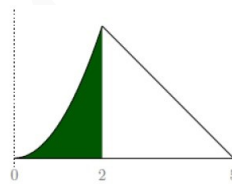
$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} f'(0) = f'(1) \Rightarrow -b = 3 - 2a - b \\ f'(-1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a - b = 0 \\ f''(-1) \neq 0 \Rightarrow -6 - 2a \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3}{2} \\ b = 6 \\ -9 \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$$

• Como $f'(0) = f'(1) \Rightarrow$ las rectas tangentes en estos puntos tienen la misma pendiente y, por tanto, son paralelas.

Tenemos $f''(x) = 6x - 3 \Rightarrow f''(-1) = -9 < 0 \Rightarrow x = -1$ es un máximo relativo.

Problema 13.1.6 (2,5 puntos) El diseño del logo de New Summit se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - x & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$



(I) (0,75 puntos) Determina el valor de a .

(II) (1,75 puntos) Calcula el área de las dos regiones de distinto color distinguibles en el logo.

Solución:

(I) La función tiene que ser continua en $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2) = 4a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (5 - x) = 3 \\ f(2) = 4a \end{array} \right. \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)} 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

(II) Sea S_1 la zona verde:

$$S_1 = \int_0^2 \frac{3x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{4} \right]_0^2 = 2 \text{ u}^2$$

Sea S_2 la zona blanca:

$$S_2 = \int_2^5 (5 - x) dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} \right]_2^5 = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ u}^2$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

Problema 13.1.7 (2,5 puntos) De cada diez autobuses que llegan al enclave de un concierto en Asturias cuatro proceden de Gijón, tres de Oviedo, dos de Avilés y uno de Mieres. El 40 % de las personas que llegan de Gijón y de Oviedo son mujeres, pero el porcentaje es del 60 % entre las que llegan de Avilés y del 80 % de las llegadas desde Mieres.

Si elegimos una mujer al azar que ha llegado en autobús al concierto, ¿con qué probabilidad lo ha hecho desde cada una de las cuatro ciudades?

Solución:

Sean G proceden de Gijón, O de Oviedo, A de Avilés, M de Mieres, $\bar{H}$ mujer y H hombre.

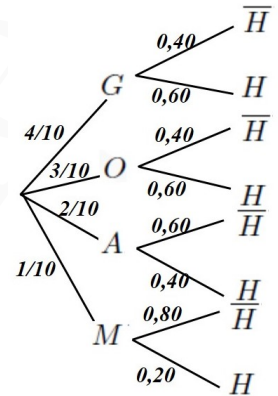
$$P(\bar{H}) = P(\bar{H}|G)P(G) + P(\bar{H}|O)P(O) + P(\bar{H}|A)P(A) + P(\bar{H}|M)P(M) = 0,40 \cdot \frac{4}{10} + 0,40 \cdot \frac{3}{10} + 0,60 \cdot \frac{2}{10} + 0,80 \cdot \frac{1}{10} = \frac{12}{25} = 0,48$$

$$\bullet P(G|\bar{H}) = \frac{P(\bar{H}|G)P(G)}{P(\bar{H})} = \frac{0,40 \cdot \frac{4}{10}}{0,48} = \frac{1}{3} \simeq 0,3333$$

$$\bullet P(O|\bar{H}) = \frac{P(\bar{H}|O)P(O)}{P(\bar{H})} = \frac{0,40 \cdot \frac{3}{10}}{0,48} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\bullet P(A|\bar{H}) = \frac{P(\bar{H}|A)P(A)}{P(\bar{H})} = \frac{0,60 \cdot \frac{2}{10}}{0,48} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\bullet P(M|\bar{H}) = \frac{P(\bar{H}|M)P(M)}{P(\bar{H})} = \frac{0,80 \cdot \frac{1}{10}}{0,48} = \frac{1}{6} \simeq 0,1667$$



Problema 13.1.8 (2,5 puntos) La distribución de las valoraciones de un producto en una macroencuesta es normal de media μ y desviación típica σ . El porcentaje de las valoraciones superiores a 7 coincide con el de las valoraciones inferiores a 5.

(I) (0,75 puntos) ¿Por qué podemos deducir que $\mu = 6$?

(II) (0,75 puntos) Si el porcentaje expresado es del 15,866 %, ¿cuál es el valor de σ ?

(III) (1 punto) ¿Qué valor es entonces superado solamente por el 2,5 % de las valoraciones?

Solución:

$$N(\mu; \sigma)$$

a) $P(X \geq 7) = P(X \leq 5) \Rightarrow \mu = \frac{7+5}{2} = 6$ por la simetría de la normal.

b) $P(X \geq 7) = P\left(Z \geq \frac{7-6}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{1}{\sigma}\right) = 0,15966 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{1}{\sigma}\right) = 1 - 0,15866 = 0,84134 \Rightarrow \frac{1}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 1$

c) $P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a-6}{1}\right) = 1 - P(Z \leq a-6) = 0,025 \Rightarrow P(Z \leq a-6) = 0,975 \Rightarrow a-6 = 1,96 \Rightarrow a = 7,96$

Problema 13.1.9 (2,5 puntos) Las sandías de nuestra huerta tienen un peso cuya distribución es normal, con una desviación típica de 40 gr. Llamaremos μ a su media.

(a) (1,25 puntos) Si el peso medio fuese $\mu = 650$ gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso promedio de 25 sandías superase los 666 gr?.

(b) (1,25 puntos) Sin conocer el valor de μ tomamos una muestra efectiva de 25 sandías, y el promedio de sus pesos resulta ser 700 gr. Calcula entonces un intervalo con el 95 % de confianza en el que localizar μ

Solución:

$$\text{a) } n = 25, \mu = 650 \Rightarrow \bar{X} \overset{N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\approx} N(650; 8)$$

$$P(\bar{X} \geq 666) = P\left(Z \geq \frac{666 - 650}{8}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,97725 = 0,02275$$

$$\text{b) } n = 25, \bar{X} = 700 \text{ y } NC = 95\% = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{40}{\sqrt{25}} = 15,68$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (700 - 15,68; 700 + 15,68) = (684,32; 715,68)$$

13.2. Extraordinaria

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2,5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El tiempo disponible para resolver a las preguntas es de una hora y media.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

Problema 13.2.1 (2,5 puntos) Resuelve el sistema lineal

$$(1,75 \text{ puntos}) \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$$

(0,75 puntos) ¿Por qué valor habrá que sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación para que resultara un sistema sin soluciones?

Solución:

$$\bullet \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \\ 3F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 11 & 7 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 4F_3 + 7F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 105 & 105 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado (solución única)}$$

$$\begin{cases} 105z = 105 \Rightarrow z = 1 \\ 4y + 11 = 7 \Rightarrow y = -1 \\ 3x + 1 - 2 = 5 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

• Hago $F_1 \stackrel{?}{=} aF_2 + bF_3 \Rightarrow (\lambda \quad -1 \quad -2 \quad 5) \stackrel{?}{=} (a+2b \quad a-3b \quad 3a+b \quad 4a+8b)$ de esta igualdad elegimos las ecuaciones $\begin{cases} a-3b=-1 \\ 3a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-7/10 \\ b=1/10 \end{cases}$ con estos valores $\lambda = a+2b = -\frac{7}{10} + \frac{2}{10} = -\frac{1}{2}$. Falta por comprobar que los términos independientes no cumplen esta relación $4a+8b = -\frac{28}{10} + \frac{8}{10} = -2 \neq 5 \Rightarrow$ sistema incompatible.

Problema 13.2.2 (2,5 puntos) Halla una matriz A que cumpla la igualdad

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ba+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2+bc=-1 \\ ba+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-d \\ b=-\frac{d^2+1}{c} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -d & -\frac{d^2+1}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si hacemos $d=1$ y $c=1$ tenemos $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple la condición $A^2 = -I$ que pide el problema.

Problema 13.2.3 (2,5 puntos) Un pastelero elabora dos clases de pasteles, con masa y chocolate que ya tiene preparados en cuencos. Las llamaremos A y B . Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B . Cada unidad de la clase A requiere 2 cuencos de masa y 2 de chocolate, y la vende por 5 euros. Las de B contienen 1 cuenco de masa y 2 de chocolate, y su precio es de 4 euros. Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles. Dando por supuesto que venderá todos los pasteles, ¿cuántos tiene que hacer de cada clase para maximizar su beneficio?

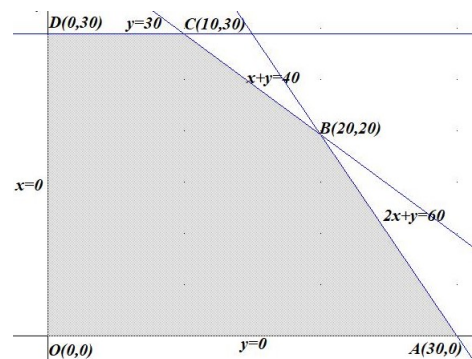
Solución:

Sean x pasteles A e y pasteles B .

	masa	chocolate	venta
A	2	2	5
B	1	2	4
	≤ 60	≤ 80	

• La región factible es:

$$\begin{cases} y \leq 30 \\ 2x+y \leq 60 \\ 2x+2y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y \leq 60 \\ x+y \leq 40 \\ y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



☛ Los vértices son: $O(0, 0)$, $A(30, 0)$, $B(20, 20)$, $C(10, 30)$ y $D(0, 30)$.

☛ La función objetivo es:

$$f(x, y) = 5x + 4y$$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f(30, 0) = 150 \\ f(20, 20) = 180 \text{ Máximo} \\ f(10, 30) = 170 \\ f(0, 30) = 120 \end{cases}$$

La máxima venta es de 180 € con la producción de 20 pasteles A y 20 de B .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Objetivo		180				
3		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
4	A	2	1	0	0	5		20
5	B	1	1	1	0	4		20
6								
7		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
8	A	40	20	0	0	100		
9	B	20	20	20	0	80		
10		60	40	20	0	180		

Parámetros de Solver

Establecer objetivo: $\$F\2

Para: ☒ Máx ☐ Mín ☐ Valor de: 0

Cambiando las celdas de variables: $\$B\$4:\$B\5

Sujeto a las restricciones:

- $\$B\$10 <= \$D\10
- $\$C\$10 <= \$D\10
- $\$D\$10 <= \$D\10
- $\$B\$4 >= 0$
- $\$B\$5 >= 0$

Botones: Agregar, Cambiar

Bloque 2. Análisis.

Problema 13.2.4 (2,5 puntos) Definimos la función

$$f(x) = \frac{2}{x(x-2)}$$

(0,25 puntos) para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio?

(0,75 puntos) ¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una.

(1,5 puntos) Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas y también los extremos relativos de f , que debes calcular previamente.

Solución:

☛ La función f no está definida para $x = 0$ y para $x = 2$, valores que anulan el denominador, luego $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 2\}$.

☛ Asíntotas:

• Verticales:

◦ En $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x(x-2)} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x(x-2)} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

◦ En $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x(x-2)} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x(x-2)} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

• Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x(x-2)} = 0$$

• Oblicuas: No hay por haber horizontales.

☛ Monotonía:

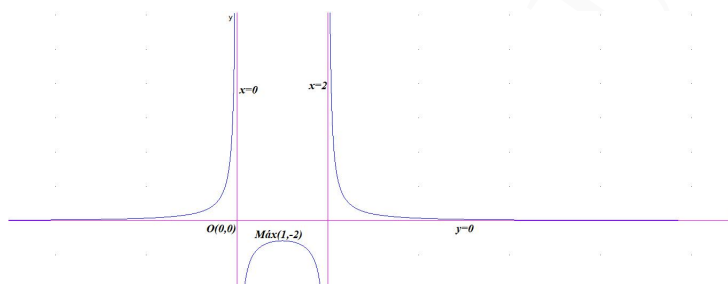
$$f'(x) = -\frac{4(x-1)}{x^2(x-2)^2} = 0 \implies x = 1$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	creciente ↗	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(1, 2) \cup (2, \infty)$
y creciente en el $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$, con un máximo relativo en $(1, -2)$.

☛ La función no tiene puntos de corte ni con el eje de abscisas ni con el de ordenadas.

☛ Representación gráfica:



Problema 13.2.5 (2,5 puntos) Consideremos la parábola $y = 5x - x^2 - 4$

La recta $y = ax$ corta a la parábola en un punto (x_0, y_0) , e y_0 es el máximo valor posible. ¿Cuánto valen a , x_0 e y_0 ?

Solución:

La recta es tangente a la parábola y su pendiente es $m = a$.

$$f'(x) = 5 - 2x \implies m = f'(x_0) = 5 - 2x_0 = a \implies x_0 = -\frac{a-5}{2}$$

Calculamos el punto de corte:

$$5x - x^2 - 4 = ax \implies -x^2 + (5-a)x - 4 = 0 \implies x^2 + (a-5)x + 4 = 0 \implies x_0^2 + (a-5)x_0 + 4 = 0$$

Sustituimos x_0 :

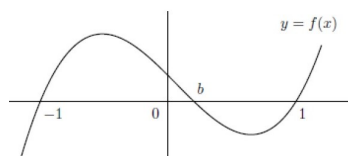
$$\left(-\frac{a-5}{2}\right)^2 + (a-5)\left(-\frac{a-5}{2}\right) + 4 = 0 \implies a^2 - 10a + 9 = 0 \implies a = 1 \text{ y } a = 9.$$

$$\text{Si } a = 1 \xrightarrow{x_0 = -\frac{a-5}{2}} x_0 = 2 \xrightarrow{y_0 = ax_0} y_0 = 2$$

$$\text{Si } a = 9 \xrightarrow{x_0 = -\frac{a-5}{2}} x_0 = -2 \xrightarrow{y_0 = ax_0} y_0 = -18$$

Luego la solución buscada es $a = 1$, $x_0 = 2$ e $y_0 = 2$

Problema 13.2.6 (2,5 puntos) En la figura se representa la gráfica $y = f(x)$, con $f(x) = (x^2 - 1)(x - b)$ para cierto b entre -1 y 1.



(0,25 puntos) ¿Qué signo tienen respectivamente las integrales $\int_{-1}^b f(x) dx$ y $\int_b^1 f(x) dx$?

(2,25 puntos) Sabemos que $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Halla entonces el valor de b .

Solución:

$$\begin{aligned} \bullet \int_{-1}^b f(x) dx > 0 & \text{ la función está por encima del eje de abscisas en el intervalo } [-1, b] \\ \int_b^1 f(x) dx < 0 & \text{ la función está por debajo del eje de abscisas en el intervalo } [b, 1] \end{aligned}$$

$$\bullet \int_{-1}^1 ((x^2 - 1)(x - b)) dx = \int_{-1}^1 (x^3 - bx^2 - x + b) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{bx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + bx \right]_{-1}^1 = \frac{4b}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

Problema 13.2.7 (2,5 puntos) Milena y Santi juegan con un dado. Cada uno lo tira una vez, pero Milena tiene ventaja: si saca un 6 gana ella; en caso contrario, si Santi saca par gana él, y si saca impar gana Milena.

- I. (1,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno?
- II. (1,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad del suceso “Santi saca par”? ¿Y la de “gana Milena” condicionada a “Santi saca par”? ¿Cuál es entonces la probabilidad de “Santi saca par” condicionada a “gana Milena”?

Solución:

Sean M “gana Milena” y S “gana Santi”. El espacio muestral es:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Suponemos que Milena lanza en primer lugar (primera coordenada) y Santi en segundo lugar (segunda coordenada)

$$\text{I. } P(M) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \simeq 0,5833 \text{ y } P(S) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \simeq 0,4167$$

$$\text{II. } P(\text{“Santi saca par”}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Sea SP “Santi saca par”

$$P(M|SP) = \frac{P(M \cap SP)}{P(SP)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \simeq 0,1667$$

$$P(SP|M) = \frac{P(M|SP)P(SP)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7} \simeq 0,1429$$

Problema 13.2.8 (2,5 puntos)

(1,75 puntos) La estatura de las niñas de 3 años en España sigue una distribución normal de media 95 cm. Si nos dicen que una niña que mide 102 cm está en el percentil 97 (es decir, es más alta que el 97 % de las niñas de su edad), ¿cuál es la desviación típica de la variable?

(0,75 puntos) Se toma una muestra aleatoria independiente de 25 niñas de tres años. ¿Cuál es la media y la desviación típica de su estatura promedio?

Solución:

$$N(95, \sigma)$$

I. $P(X \leq 102) = 0,97$:

$$P(X \leq 102) = P\left(Z \leq \frac{102 - 95}{\sigma}\right) = 0,97 \Rightarrow \frac{7}{\sigma} = 1,88 \Rightarrow \sigma = 3,7234$$

II. $n = 25 \Rightarrow \bar{X} \overset{N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\approx} N(95; 0,7447)$

Problema 13.2.9 (2,5 puntos) En un gran yacimiento arqueológico se estudian 36 cráneos, cuyo perímetro medio servirá para datar aproximadamente la época de ocupación. La media resulta ser igual a 56,2 cm.

(1,25 puntos) Si consideramos como desviación típica el valor 1,5 cm, ¿qué intervalo de confianza obtenemos para situar la media, con nivel de confianza 0,95?

(1,25 puntos) ¿Qué desviación típica deberíamos asumir para obtener el mismo intervalo si lo calculamos con el 90 % de confianza?

Solución:

• $\sigma = 1,5, n = 36, \bar{X} = 56,2$ y $NC = 95\%$

$$NC = 95\% = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{1,5}{\sqrt{36}} = 0,49$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (56,2 - 0,49; 56,2 + 0,49) = (55,71; 56,69)$$

• $NC = 90\% = 0,9 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1,645 \frac{\sigma}{\sqrt{36}} = 0,49 \Rightarrow \sigma = 1,7872$$

Capítulo 14

Madrid

14.1. Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 14.1.1 (2 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros $a, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica

$$A \cdot B = 6B$$

b) Para $a = 1$ y $c = -1$, calcule $B^t \cdot A \cdot B$, donde B^t denota la matriz transpuesta de B .

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+c+2 \\ a+c+2 \\ c^2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+c+2=6 \\ c^2+5=6c \end{cases} \Rightarrow \\ &\begin{cases} a=3 \text{ y } c=1 \\ a=-1 \text{ y } c=5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$$

Problema 14.1.2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - a, \quad a \in \mathbb{R}$$

- a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva que pase por los puntos $(0, 1)$ y $(-1, 1/4)$. Señale la expresión de esta primitiva.
- b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función clasificando, si procede, los extremos relativos de la función.

Solución:

$$a) F(x) = \int (x^3 + x^2 - x - a) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - ax + C$$

$$F(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

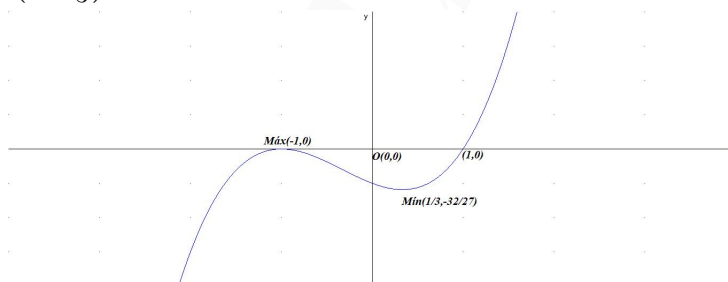
$$F(-1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + a + 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{6}$$

$$\text{Luego } F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + 1$$

- b) Si $a = 1$ tenemos $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ y $x = \frac{1}{3}$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/3)$	$(1/3, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1/3, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(-1, \frac{1}{3})$, tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 0)$ y un mínimo relativo en $(\frac{1}{3}, -\frac{32}{27})$.



Problema 14.1.3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Estudie la continuidad de la función $f(x)$ e indique el tipo de discontinuidad si procede.
- b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

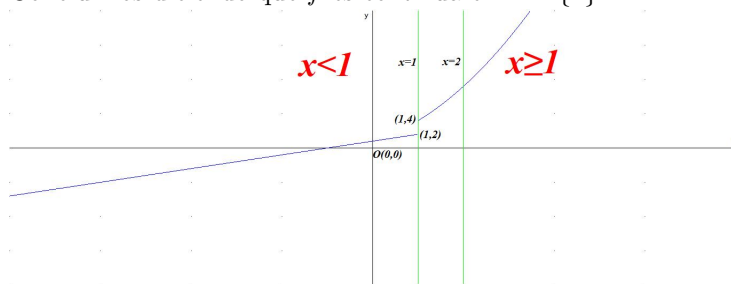
Solución:

- a) La función es continua en todos los puntos de la rama $x < 1$. El denominador se anula en $x = 1$ y no se encuentra en la rama.

La función es continua en todos los puntos de la rama $x > 1$, se trata de un polinomio. Hay que estudiar la continuidad en $x = 1$:

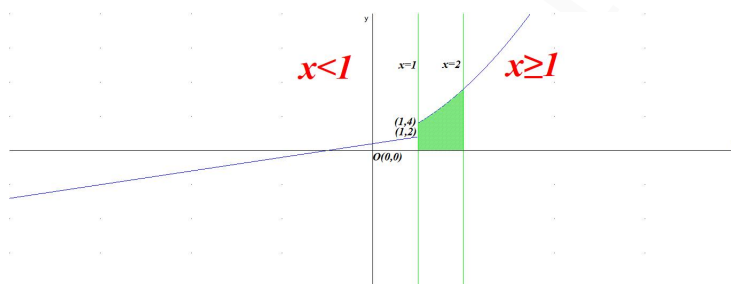
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 1) = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow$$

f es discontinua no evitable en $x = 1$ donde hay un salto finito. Concluimos diciendo que f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$



- b) $f(x) = x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$, luego la función no corta al eje de abscisas en el interior del intervalo $(1, 2)$, luego el recinto de integración es el intervalo completo:

$$S = \int_1^2 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_1^2 = \frac{19}{3} u^2$$



Problema 14.1.4 (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4}$$

- a) Determine las asíntotas de la función.
b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

- a) Asíntotas:

• Verticales:

- En $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{-16}{0^+} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{-16}{0^-} \right] = +\infty$$

- En $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{16}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{16}{0^+} \right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = +\infty$$

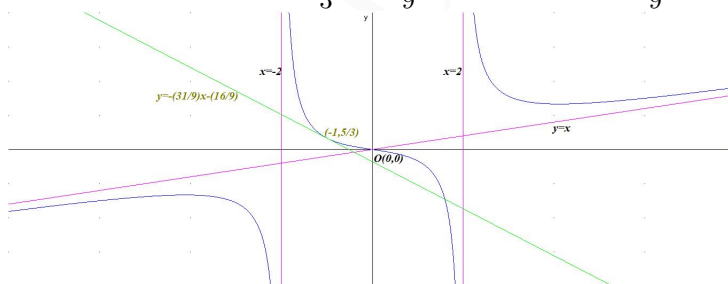
☛ Oblícuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x}{x^3 - 4x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x}{x^2 - 4} \right) = 0$$

Luego $y = x$

$$\begin{aligned} \text{b) } b = f(a) = f(-1) &= \frac{5}{3} \\ f'(x) = \frac{x^4 - 16x^2 - 16}{(x^2 - 4)^2} &\Rightarrow m = f'(-1) = -\frac{31}{9} \\ y - b = m(x - a) &\Rightarrow y - \frac{5}{3} = -\frac{31}{9}(x + 1) \Rightarrow y = -\frac{31}{9}x - \frac{16}{9} \end{aligned}$$



Problema 14.1.5 (2 puntos) Se desea vender batido de chocolate y batido de fresa en una fiesta escolar para recaudar fondos para el viaje de fin de curso. Con la leche de la que se dispone se pueden elaborar 35 litros de batido, y hay cacao en polvo para 30 litros de batido de chocolate como máximo. Se necesitan 15 minutos de preparación por litro de batido de chocolate y 20 minutos por litro de batido de fresa para que tengan la textura correcta. Los batidos tienen que estar listos en 10 horas. Solo hay una batidora y el beneficio que se obtendrá por litro de batido de chocolate es de 10 euros, y por litro de batido de fresa de 11 euros. ¿Cuántos litros de cada tipo de batido se deben producir para maximizar los beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

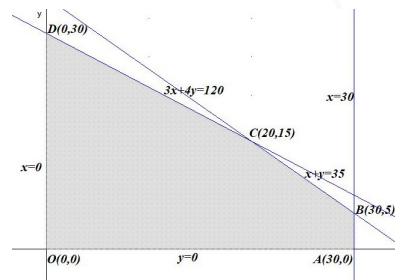
Solución:

Sean x litros de batido de chocolate e y los de fresa.

☛ La región factible S es:

$$\begin{cases} x + y \leq 35 \\ x \leq 30 \\ 15x + 20y \leq 600 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 35 \\ x \leq 30 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$,
 $A(30,0)$, $B(30,5)$,
 $C(20,15)$ y $D(0,30)$



La función objetivo es $f(x, y) = 10x + 11y \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(30,0) = 300 \\ f(30,5) = 355 \\ f(20,15) = 365 \leftarrow \text{Máximo} \\ f(0,30) = 330 \end{cases}$$

El máximo beneficio se obtiene cuando se elaboran 20 litros de batido de chocolate y 15 de fresa, siendo este beneficio de 365€.

Solución por solver

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Objetivo			365				
2		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
3	chocolate	1	1	3		10		20
4	fresa	1	0	4		11		15
5								
6		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
7	chocolate	20	20	60	0	200		
8	fresa	15	0	60	0	165		
9		35	20	120	0	365		

Establecer objetivo:	\$H\$5:\$H\$5
Para:	☒ Máx ☐ Mín ☐ Valor de: 0
Cambiando las celdas de variables:	\$H\$4:\$H\$5
Sujeto a las restricciones:	\$H\$6:\$H\$6 <= \$H\$6:\$H\$6 \$H\$7:\$H\$7 <= \$H\$7:\$H\$7 \$H\$8:\$H\$8 <= \$H\$8:\$H\$8 \$H\$9:\$H\$9 <= \$H\$9:\$H\$9
Agregar Cambiar	

Problema 14.1.6 (2 puntos) Una caja de Lego contiene un total de 50 piezas de tres tipos diferentes (A , B , C). La cantidad de piezas del tipo A más la del tipo B es igual a cuatro veces la cantidad del tipo C . Si a las piezas del tipo A le sumamos el doble de las piezas del tipo B y cuatro veces las del tipo C , el total de piezas de la caja sería de 100. Plantee un sistema de ecuaciones para saber la cantidad de piezas de cada tipo que contendrá la caja.

Solución:

Sean x el número de piezas de A , y las de B y z las de C .

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \\ x + y = 4z \\ x + 2y + 4z = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 50 \\ x + y - 4z = 0 \\ x + 2y + 4z = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 20 \\ z = 10 \end{cases}$$

Hay 20 piezas de A , 20 de B y 10 de C .

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 100 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & -5 & -50 \\ 0 & 1 & 3 & 50 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -5z = -50 \Rightarrow z = 10 \\ y + 30 = 50 \Rightarrow y = 20 \\ x + 20 + 10 = 50 \Rightarrow x = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 20 \\ z = 10 \end{cases}$$

Problema 14.1.7 (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} a^2x - ay = a \\ a^3x - y = 1 \end{cases}$$

- Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
- Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a^2 & -a & a \\ a^3 & -1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = a^2(a^2 - 1) = 0 \implies a = 0, \quad a = \pm 1$$

• Si $a \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

• Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \implies \text{Sistema compatible indeterminado}$$

• Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies$$

Sistema compatible indeterminado

• Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 8x - y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

Problema 14.1.8 (2 puntos) Un estudio europeo sobre hábitos de uso de internet indica que el 62 % de los hombres españoles mayores de 16 años participa en redes sociales y que el 81 % lee noticias en internet. Además, el 95 % de los hombres de este estudio participa en redes sociales o lee noticias en internet. Eligiendo un hombre español mayor de 16 años al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Participe en redes sociales y lea noticias en internet.

b) No participe en redes sociales, sabiendo que no lee noticias en internet.

Solución:

Sean I lee noticias en Internet y S participa en redes sociales.

$P(S) = 0,62$, $P(I) = 0,81$ y $P(S \cup I) = 0,95$

a) $P(S \cup I) = P(S) + P(I) - P(S \cap I) \implies P(S \cap I) = P(S) + P(I) - P(S \cup I) = 0,62 + 0,81 - 0,95 = 0,48$

b) $P(\overline{S} | \overline{I}) = \frac{P(\overline{S} \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{P(\overline{S \cup I})}{1 - P(I)} = \frac{1 - P(S \cup I)}{1 - P(I)} = \frac{1 - 0,95}{1 - 0,81} = \frac{5}{19} = 0,2632$

Problema 14.1.9 (2 puntos) Se sabe que la proporción de hogares españoles con dos o más ordenadores es $p = 0,75$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 140$ hogares. Determine:

- a) El número esperado de hogares que no tendrán dos o más ordenadores en la muestra elegida.
 b) La probabilidad de que, en la muestra de 140 hogares, el número de ellos con dos o más ordenadores sea entre 98 y 112 hogares.

Solución:

$$B(140; 0,75)$$

- a) $E[X] = np = 140 \cdot 0,75 = 105$ hogares tienen dos o más ordenadores, luego $140 - 105 = 35$ hogares no los tendrán.
 b) $n = 140 > 30$, $np = 140 \cdot 0,75 = 105 > 5$ y $nq = 140 \cdot 0,25 = 35 > 5 \Rightarrow$

$$B(140; 0,75) \stackrel{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(105; 5,1235)$$

$$P(98 \leq X \leq 112) = P\left(\frac{97,5 - 105}{5,1235} \leq Z \leq \frac{112,5 - 105}{5,1235}\right) = P(-1,46 \leq Z \leq 1,46) = P(Z \leq 1,46) - P(Z \leq -1,46) = 2P(Z \leq 1,46) - 1 = 2 \cdot 0,9279 - 1 = 0,8558$$

Problema 14.1.10 (2 puntos) Durante el adiestramiento de un perro para encontrar trufas, se le deja libre una vez al día en una zona de monte apropiada para encontrar este preciado hongo. En cada operación de búsqueda del animal se ha observado que este se dirige siempre hacia una de tres zonas de monte diferentes, denominadas A , B y C . En dos de cada diez operaciones de búsqueda se dirige hacia A , en cinco de cada diez hacia B y el resto hacia C . El perro detecta trufas en A un 35 % de las veces, un 15 % en B y un 40 % en C . Elijiendo al azar un perro en adiestramiento, calcule la probabilidad de que:

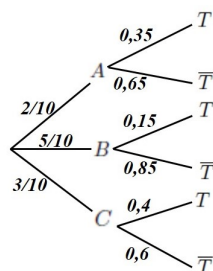
- a) Detecte una trufa en una operación de búsqueda.
 b) Sabiendo que ha encontrado una trufa, esta haya sido encontrada en la zona B .

Solución:

Sean A se dirige a zona A , B se dirige a zona B , C se dirige a zona C , T detecta trufa y $\bar{T}$ no detecta trufa.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(T) &= P(T|A)P(A) + P(T|B)P(B) + P(T|C)P(C) = \\ &= 0,35 \cdot \frac{2}{10} + 0,15 \cdot \frac{5}{10} + 0,4 \cdot \frac{3}{10} = \frac{53}{200} = 0,265 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(B|T) = \frac{P(T|B)P(B)}{P(T)} = \frac{0,15 \cdot \frac{5}{10}}{\frac{53}{200}} = \frac{15}{53} = 0,2830$$



14.2. Ordinaria

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 14.2.1 (2 puntos) Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A .
 b) Para $a = -2$ calcule A^{-1} .

Solución:

a) $|A| = -a^3 + a^2 + 2a = 0 \implies a = -1, a = 0 \text{ y } a = 2 \implies \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$

b) Si $a = -2 \implies A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$

Problema 14.2.2 (2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

- a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 2)$.
 b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Solución:

a) $f(x) = \int f'(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$

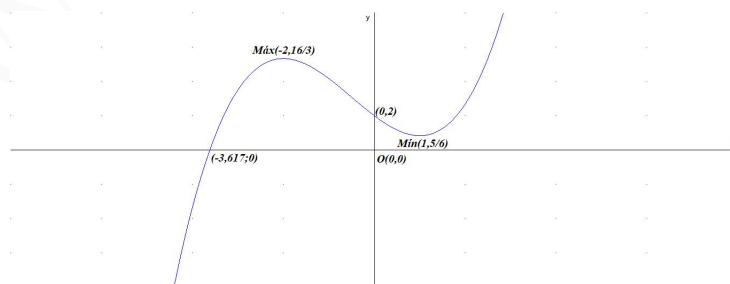
Como $f(0) = 2 \implies f(0) = C = 2$

Luego $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$

b) $f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \implies x = 1, x = -2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en el $(-2, 1)$ con un máximo relativo en el punto de abscisa $x = -2$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.



Problema 14.2.3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & \text{si } x < 1 \\ ae^{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.
- Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

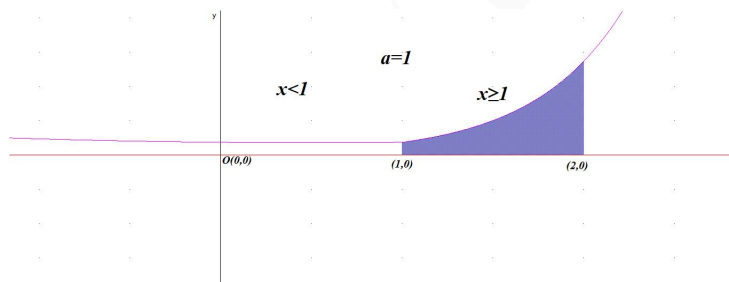
- La función es continua en las dos ramas por ser composición de funciones polinómicas y exponenciales, hay que imponer la continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x + e^2) = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ae^{2x}) = ae^2 \\ f(1) = ae^2 \end{array} \right. \quad \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)} e^2 = ae^2 \implies a = 1$$

- Para $a = 1$ y en el intervalo $[1, 2]$ la función $f(x) = e^{2x} > 0$ en toda la rama. Luego el intervalo de integración es $[1, 2]$.

$$F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$S = \left| \int_1^2 e^{2x} dx \right| = |F(2) - F(1)| = \left| \frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2} \right| = \frac{e^4 - e^2}{2} \simeq 23,6045 \text{ u}^2$$



Problema 14.2.4 (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$$

- Determine las asíntotas de la función.
- Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

- Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-2}{x^2-9} = \left[\frac{-5}{0^+} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x-2}{x^2-9} = \left[\frac{-5}{0^-} \right] = +\infty$$

- En $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-2}{x^2-9} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{x^2-9} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

☛ Horizontales: $y = 0$.

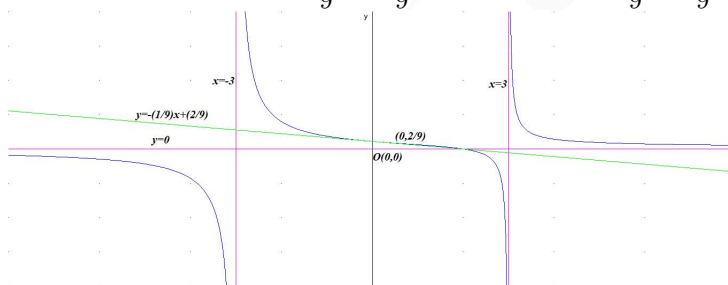
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2-9} = 0$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $b = f(a) = f(0) = \frac{2}{9}$

$$f'(x) = -\frac{x^2 - 4x^2 + 9}{(x^2 - 9)^2} \Rightarrow m = f'(0) = -\frac{1}{9}$$

$$y - b = m(x - a) \Rightarrow y - \frac{2}{9} = -\frac{1}{9}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}$$



Problema 14.2.5 (2 puntos) Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución:

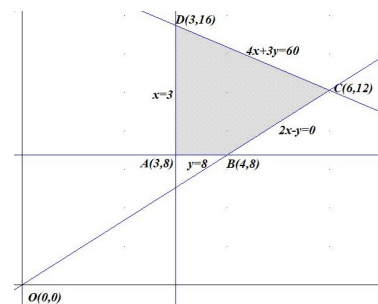
Sean x tabletas de 4 gramos y y tabletas de 3 gramos.

☛ La región factible S es:

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 60 \\ x \geq 3 \\ y \geq 8 \\ 2x \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y \leq 60 \\ 2x - y \leq 0 \\ x \geq 3 \\ y \geq 8 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán:

$A(3, 8)$, $B(4, 8)$, $C(6, 12)$ y $D(3, 16)$



☛ La función objetivo es $f(x, y) = 1,5x + y \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(3, 8) = 12,5 \\ f(4, 8) = 14 \\ f(6, 12) = 21 \leftarrow \text{Máximo} \\ f(3, 16) = 20,5 \end{cases}$$

El máximo beneficio se obtiene cuando se elaboran 6 tabletas de 4 gramos y 12 tabletas de 3 gramos, siendo este beneficio de 21€.

Solución por solver

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo		21				
2		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
3		4 gramos	4	2		1,5		6
4		3 gramos	3	-1		1		12
5								
6		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
7			24	12	0	0		9
8		4 gramos	36	-12	0	0		12
9		3 gramos	60	0	0	0		21
10								
11		Parámetros de Solver						
12		Establecer objetivo: \$D\$5						
13		Para: ☒ Máx ☐ Min ☐ Valor de: 0						
14		Cambiando las celdas de variables: \$D\$4:\$D\$5						
15		Sujeto a las restricciones:						
16		\$D\$5:\$D\$5 <= \$D\$6:\$D\$6						
17		\$D\$5:\$D\$5 <= \$D\$7:\$D\$7						
18		\$D\$5:\$D\$5 <= \$D\$8:\$D\$8						
19								
20		[Preparar] [Cambiar]						

Problema 14.2.6 (2 puntos) Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Solución:

Sean x el número de entradas generales, y de estudiantes y z las de infantiles.

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 10x + 8y + 5z = 4900 \\ x = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 600 \\ 10x + 8y + 5z = 4900 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 300 \\ z = 100 \end{cases}$$

Se venden 200 entradas generales, 300 de estudiantes y 100 infantiles.

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 10 & 8 & 5 & 4900 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 10F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & -3 & -600 \\ 0 & -2 & -5 & -1100 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & -3 & -600 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} z = 100 \\ -y - 300 = -600 \Rightarrow y = 300 \\ x + 300 + 100 = 600 \Rightarrow x = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 300 \\ z = 100 \end{cases}$$

Problema 14.2.7 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + ay + z = a + 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a + 1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array} \right); |A| = 2a(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$$

☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^o$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a = 0$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \implies \text{Sistema incompatible}$$

☛ Si $a = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 14.2.8 (2 puntos) En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:

- Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.
- Le guste el techno pero no el pop.

Solución:

Sean P le gusta el pop y T le gusta el techno.

$$P(P) = \frac{90}{200} = \frac{9}{20}, P(T) = \frac{70}{200} = \frac{7}{20} \text{ y } P(P \cap T) = \frac{30}{200} = \frac{3}{20}$$

$$\text{a) } P(P \cup T) = P(P) + P(T) - P(P \cap T) = \frac{9}{20} + \frac{7}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = 0,65$$

$$\text{b) } P(T \cap \bar{P}) = P(T) - P(P \cap T) = \frac{7}{20} - \frac{3}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Problema 14.2.9 (2 puntos) La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ ml.

- Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.
- Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 25$, $\bar{X} = 120$ y $NC = 0,95$:

$$0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,5 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,25$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,25 = 0,75 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{8}{\sqrt{25}} = 3,136$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (120 - 3,136; 120 + 3,136) = (116,864; 123,136)$$

b) $NC = 0,90$:

$$0,90 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$1 = 1,645 \frac{8}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq 173,1856 \Rightarrow n = 174$$

Problema 14.2.10 (2 puntos) En tres tanques, A , B y C , de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35 %, el 20 % y el 45 % de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15 % de los alevines criados en el tanque A , el 30 % de los alevines criados en el tanque B y el 25 % de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

a) Mida más de 35 mm.

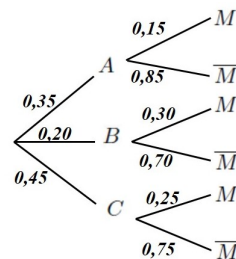
b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C .

Solución:

Sean A la piscifactoría A , B la piscifactoría B , C la piscifactoría C , M mide más de 35 mm y $\bar{M}$ no mide más de 35 mm.

$$\text{a) } P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|C)P(C) = 0,15 \cdot 0,35 + 0,30 \cdot 0,20 + 0,25 \cdot 0,45 = 0,225$$

$$\text{b) } P(C|\bar{M}) = \frac{P(\bar{M}|C)P(C)}{P(\bar{M})} = \frac{0,45 \cdot 0,75}{1 - 0,225} = 0,4355$$



14.3. Ordinaria-Coincidente

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 14.3.1 (2 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule $A \cdot B$ y $A^3 \cdot B$.
- b) Determine el valor del determinante de la matriz $A - 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 3×3 .

Solución:

$$\text{a) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - 2I| = 0 \text{ ya}$$

que la matriz tiene dos filas iguales.

Problema 14.3.2 (2 puntos) La siguiente derivada de una función real de variable real representa la tasa de variación instantánea de una sustancia disuelta en agua:

$$f'(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{2}t^2 \right),$$

siendo $t \geq 0$ el tiempo en horas desde que se prepara la disolución.

- a) Encuentre la función que proporciona la cantidad de sustancia disuelta en función del tiempo, sabiendo que en $t = 0$ la cantidad disuelta es nula.
- b) Determine el instante de tiempo en el que la sustancia disuelta es máxima.

Solución:

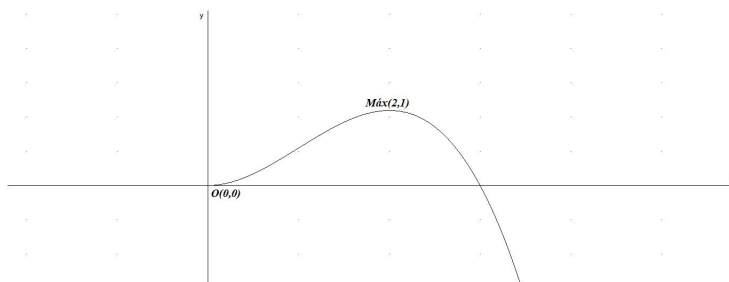
$$\text{a) } f(t) = \int f'(t) dt = \frac{3}{2} \int \left(t - \frac{1}{2}t^2 \right) dt = \frac{3}{2} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) + C$$

$$\text{Como } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(t) = \frac{3}{2} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right)$$

$$\text{b) } f'(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{2}t^2 \right) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ y } t = 2$$

	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(t)$	+	-
$f(t)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(0, 2)$, y decreciente en el intervalo $(2, +\infty)$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $(0, 0)$ y un máximo relativo, en nuestro caso absoluto, en el punto $(2, 1)$. Luego la máxima cantidad disuelta se presenta a las dos horas.



Problema 14.3.3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{-x^2}{x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Determine el dominio de $f(x)$ y estudie la continuidad en el punto $x = 1$.
- Analice los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

- La rama $x \leq 1$ es una exponencial y $\text{Dom} f = (-\infty, 1]$ en esa rama. En la rama $x > 1$ el denominador se anula en $x = 2 \Rightarrow \text{Dom}(f) = (1, 2) \cup (2, \infty)$. En conclusión: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Continuidad en $x = 1$:

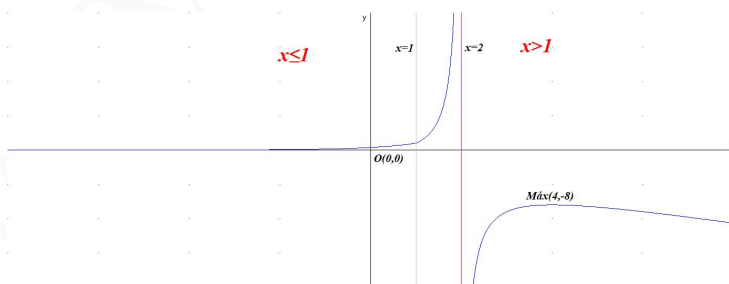
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2}{x-2} = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

f es continua en $x = 1$

$$b) f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} > 0 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ no válida y } x = 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	+	-
$f(x)$	creciente ↗	creciente ↗	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 2) \cup (2, 4)$ y decreciente en el $(4, +\infty)$, con un máximo relativo en el punto $(4, -8)$



Problema 14.3.4 (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16}$$

- a) Determine las asíntotas de la función.
 b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

- a) Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = \left[\frac{-33}{0^+} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = \left[\frac{-33}{0^-} \right] = +\infty$$

- En $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = \left[\frac{31}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = \left[\frac{31}{0^+} \right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay.

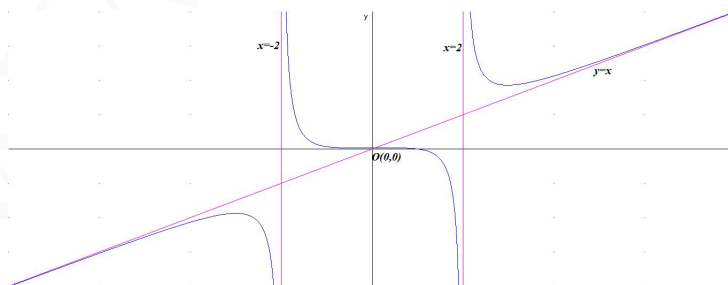
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = +\infty$$

☛ Oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 1}{x^5 - 16x} = 1$$

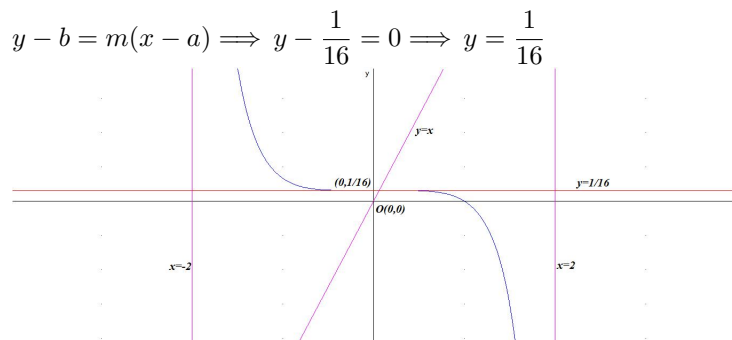
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{16x - 1}{x^4 - 16} \right) = 0$$

Luego $y = x$



- b) $b = f(a) = f(0) = \frac{1}{16}$

$$f'(x) = \frac{x^3(x^5 - 80x + 4)}{(x^4 - 16)^2} \Rightarrow m = f'(0) = 0$$



Problema 14.3.5 (2 puntos) Se desea vender limonada y naranjada caseras en una verbena popular. Además de agua, de la que disponemos sin limitaciones, cada litro de limonada necesita 4 limones y 80 gramos de azúcar. Cada litro de naranjada necesita 6 naranjas, 1 limón y 50 gramos de azúcar. Se dispone de 80 limones, 72 naranjas y 1720 gramos de azúcar para la elaboración. Cada litro de limonada se venderá a 2 euros y cada litro de naranjada a 2,5 euros. Determine los litros que se deben elaborar de cada una de las dos bebidas para maximizar los ingresos de la venta.

Solución:

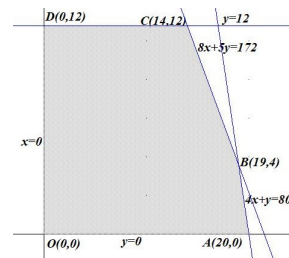
Sean x litros de limonada e y litros de naranjada.

	naranjas	limones	azucar	venta
limonada	0	4	80	2€
naranjada	6	1	50	2,5€
existencias	≤ 72	≤ 80	≤ 1720	

La región factible S es:

$$\begin{cases} 0x + 6y \leq 72 \\ 4x + y \leq 80 \\ 80x + 50y \leq 1720 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 12 \\ 4x + y \leq 80 \\ 8x + 5y \leq 172 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$,
 $A(20,0)$, $B(19,4)$,
 $C(14,12)$ y $D(0,12)$

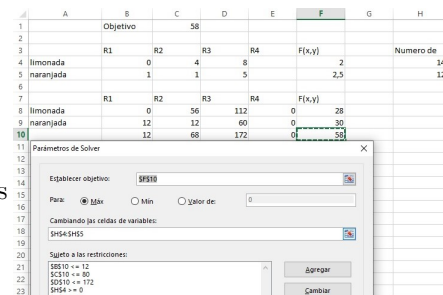


La función objetivo es $f(x,y) = 2x + 2,5y \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(20,0) = 40 \\ f(19,4) = 48 \\ f(14,12) = 58 \leftarrow \text{Máximo} \\ f(0,12) = 30 \end{cases}$$

La máxima venta se obtiene cuando se elaboran 14 litros de limonada y 12 de naranjada, siendo ésta de 58€.

Solución por solver



Problema 14.3.6 (2 puntos) Alba, Benito y Charo son socios de una empresa de reformas. Por un trabajo realizado recibieron 6200 euros que se repartieron en función del tiempo dedicado. La

cantidad percibida por Alba excede en 200 euros al total recibido conjuntamente por los otros dos socios. Por otra parte, se sabe que para que Alba y Benito percibieran lo mismo Alba debería entregar a Benito 600 euros. Plantee un sistema de ecuaciones y determine la cantidad percibida por cada socio.

Solución:

Sean x la cantidad percibida por Alba, y la cantidad percibida por Benito y z la cantidad percibida por Charo.

$$\begin{cases} x + y + z = 6200 \\ x - 200 = y + z \\ x - 600 = y + 600 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 6200 \\ x - y - z = 200 \\ x - y = 1200 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3200 \text{ €} \\ y = 2000 \text{ €} \\ z = 1000 \text{ €} \end{cases}$$

Alba recibe 3200 €, Benito 2000 € y Charo 1000 €

Por Gauss:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6200 \\ 1 & -1 & -1 & 200 \\ 1 & -1 & 0 & 1200 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6200 \\ 0 & -2 & -2 & -6000 \\ 0 & -2 & -1 & -5000 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6200 \\ 0 & -2 & -2 & -6000 \\ 0 & 0 & 1 & 1000 \end{array} \right) \implies \begin{cases} z = 1000 \\ -2y - 2000 = -6000 \implies y = 2000 \\ x + 2000 + 1000 = 6200 \implies x = 3200 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3200 \\ y = 2000 \\ z = 1000 \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 14.3.7 (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + az = 2 \\ x + y + z = a \\ -2x + 2ay + 8z = -13 \end{cases}$$

- Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
- Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ -2 & 2a & 8 & -13 \end{array} \right); \quad |A| = 2(a^2 - 1) = 0 \implies a = \pm 1$$

☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 8 & -13 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -9 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{Sistema compatible indeterminado}$$

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 8 & -13 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 10 & -9 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y + z = 0 \\ -2x + 8z = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{7}{2} \\ z = -2 \end{cases}$$

Problema 14.3.8 (2 puntos) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0,7$ y $P(B) = 0,15$. Además, se sabe que $P(\overline{B}|A) = 0,8$ donde $\overline{B}$ es el suceso complementario de B . Calcule:

a) $P(A \cup B)$.

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Solución:

$$\text{a) } P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow$$

$$0,8 = \frac{0,7 - P(A \cap B)}{0,7} \Rightarrow P(A \cap B) = 0,14$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,15 - 0,14 = 0,71$$

$$\text{b) } P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,14 = 0,86$$

Problema 14.3.9 (2 puntos) El tiempo que las películas permanecen en cartelera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 2$ semanas.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple de películas para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de una semana con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 5$ semanas. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ películas el tiempo medio que han permanecido en cartelera, $\overline{X}$, sea mayor de 6 semanas.

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $NC = 0,95$:

$$0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,5 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,25$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,25 = 0,75 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1,96 \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq 15,3664 \Rightarrow n = 16$$

$$b) \bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (5; 0,5)$$

$$P(\bar{X} \geq 6) = P\left(Z \geq \frac{6-5}{0,5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Problema 14.3.10 (2 puntos) En la base de datos de Spotify el 80 % de las canciones incluidas son de artistas procedentes de EEUU. El 30 % de las canciones de artistas procedentes de EEUU incluidas pueden clasificarse como electrónica, el 20 % como música urbana y el 50 % restante como pertenecientes a otros estilos musicales. Si el artista no procede de EEUU esas probabilidades son de 10 %, 50 % y 40 % respectivamente. Eligiendo al azar una canción de la base de Spotify, calcule la probabilidad de que:

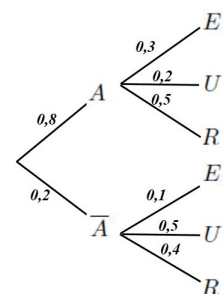
- La canción pueda clasificarse como música urbana.
- Sabiendo que la canción puede clasificarse como música urbana, sea de un artista no procedente de EEUU.

Solución:

Sean A artistas EEUU, E música electrónica, U música urbana y R resto de músicas.

$$a) P(U) = P(U|A)P(A) + P(U|\bar{A})P(\bar{A}) = 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,5 = 0,26$$

$$b) P(\bar{A}|U) = \frac{P(U|\bar{A})P(\bar{A})}{P(U)} = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,26} = 0,3846$$



14.4. Extraordinaria

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 14.4.1 (2 puntos) Se consideran las matrices M , P y N dadas por:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \quad \text{y} \quad (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N$$

- Para $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2 , y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3 .

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } M \cdot N = 2N &\implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 2b - a \\ 2 - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ (N^t \cdot M)^t + M \cdot P &= \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \right]^t + \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ [(-a + 2c \quad -b + 2)]^t &+ \begin{pmatrix} -a - 3b \\ -c - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 2c \\ -b + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a - 3b \\ -c - 3 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} -2a - 3b + 2c \\ -b - c - 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{cases} 2b - a = -2 \\ 2 - c = 4 \\ -2a - 3b + 2c = -1 \\ -b - c - 1 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M + 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } M^2 = M + 2I.$$

$$M^2 = M + 2I \implies M^2 - M = 2I \implies \frac{1}{2}M(M - I) = I \implies M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) =$$

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = MM^2 = M(M + 2I) = M^2 + 2M = M + 2I + 2M = 3M + 2I =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Problema 14.4.2 (2 puntos)

a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a) dx = \frac{2}{3}$$

b) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ Determine para qué valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b .

Solución:

$$\text{a) } \int_0^1 (x^{1/2} - a) dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - ax \right]_0^1 = \frac{2}{3} - a = \frac{2}{3} \implies a = 0$$

b) Las dos ramas son polinómicas y en $x = 0$ la función está definida. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

$$\text{Para que } f \text{ sea continua en } x = 0: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - b) = -b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \implies b = -2$$

Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 3 \end{cases} \implies$$

$f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.
Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

Problema 14.4.3 (2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a$$

- Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $(1, 3)$ y $(2, 7/2)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.
- Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

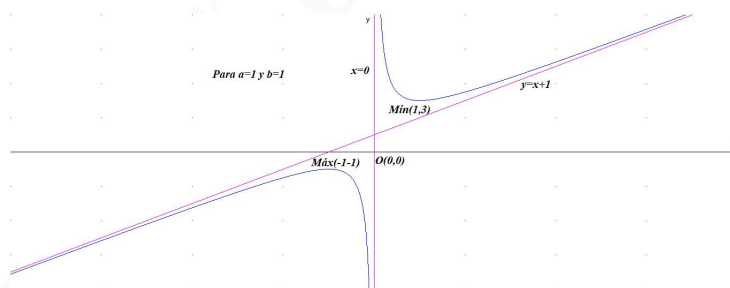
Solución:

- $$f(x) = \int f'(x) dx = \frac{1}{x} + ax + b$$

$$\begin{cases} f(1) = 3 \Rightarrow 1 + a + b = 3 \Rightarrow a + b = 2 \\ f(2) = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + 2a + b = \frac{7}{2} \Rightarrow 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + x + 1$$
- Si $a = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en el $(-1, 0) \cup (0, 1)$ con un máximo relativo en el punto de abscisa $x = -1$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.



Problema 14.4.4 (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$$

- Determine las asíntotas de la función.
- Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \left[\frac{8}{0^+} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \left[\frac{8}{0^-} \right] = -\infty$$

- En $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \left[\frac{8}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \left[\frac{8}{0^+} \right] = +\infty$$

☛ Horizontales: $y = 1$.

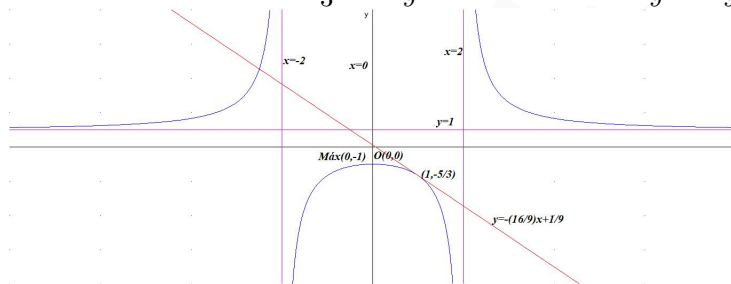
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = 1$$

☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $b = f(a) = f(1) = -\frac{5}{3}$

$$f'(x) = -\frac{16x}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow m = f'(1) = -\frac{16}{9}$$

$$y - b = m(x - a) \Rightarrow y + \frac{5}{3} = -\frac{16}{9}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{16}{9}x + \frac{1}{9}$$



Problema 14.4.5 (2 puntos) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales que 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

Solución:

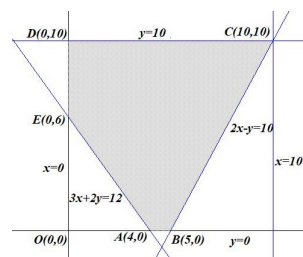
Sean x el primer número e y el segundo.

☛ La región factible S es:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ 2x - y \leq 10 \\ 3x + 2y \geq 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y \leq 10 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \leq 10 \\ y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán:

$A(4, 0)$, $B(5, 0)$, $C(10, 10)$, $D(0, 10)$ y $E(0, 6)$



La función objetivo es $f(x, y) = x + y \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(4, 0) = 4 \Leftarrow \text{Mínimo} \\ f(5, 0) = 5 \\ f(10, 10) = 20 \\ f(0, 10) = 10 \\ f(0, 6) = 6 \end{cases}$$

La mínima suma se obtiene cuando el primer número es 4 y el segundo es 0 con una suma de 4.

Solución por solver

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo						
2		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
3	primer	2	3	1	0	1		4
4	segundo	-1	2	0	1	1		0
5								
6		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
7	primer	8	12	4	0	4		
8	segundo	0	0	0	0	0		
9		8	12	4	0	4		
10								

Problema 14.4.6 (2 puntos) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

Solución:

Sean x el número de guitarras, y de pianos y z de violines.

$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ y + z = x \\ z + 2y + 4x = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 70 \\ x - y - z = 0 \\ 4x + 2y + z = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 5 \\ z = 30 \end{cases}$$

Tienen 35 guitarras, 5 pianos y 30 violines.

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 180 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & -2 & -70 \\ 0 & -2 & -3 & -100 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & -2 & -70 \\ 0 & 0 & -1 & -30 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} z = 30 \\ -2y - 60 = -70 \Rightarrow y = 5 \\ x + 5 + 30 = 70 \Rightarrow x = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 5 \\ z = 30 \end{cases}$$

Problema 14.4.7 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ 8x + ay + 5z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & a & 5 & 2 \end{array} \right); \quad |A| = 7a - 21 = 0 \Rightarrow a = 3$$

☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{3\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a = 3$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 3$:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ -y - 7z = -6 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 6 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 14.4.8 (2 puntos) La observación metereológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50 % de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7 % de los días. Además, el 35 % de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:

- Esté nublado y la temperatura baja de los 10 grados.
- No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

Solución:

Sean N nublado y B por debajo de 10 grados.

$P(N) = 0,5$, $P(B) = 0,07$ y $P(N \cup B) = 0,35$

a) $P(N \cap B) = P(N) + P(B) - P(N \cup B) = 0,5 + 0,07 - 0,35 = 0,22$

b) $P(\bar{N}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{N} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{N \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(N \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - 0,35}{1 - 0,07} = 0,6989$

Problema 14.4.9 (2 puntos) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.

- Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año y se obtiene que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ .
- Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\bar{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 20$, $\bar{X} = 65$ y $NC = 0,99$:

$$0,99 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \frac{8}{\sqrt{20}} = 4,6063$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (65 - 4,6063; 65 + 4,6063) = (60,3937; 69,6063)$$

b) $\mu = 67 \Rightarrow \bar{X} \approx N\left(67; \frac{8}{\sqrt{10}}\right) = N(67; 2,53)$.

$$P(65 \leq \bar{X} \leq 69) = P\left(\frac{65 - 67}{2,53} \leq Z \leq \frac{69 - 67}{2,53}\right) = P(-0,79 \leq Z \leq 0,79) =$$

$$P(Z \leq 0,79) - P(Z \leq -0,79) = P(Z \leq 0,79) - (1 - P(Z \leq 0,79)) = 2P(Z \leq 0,79) - 1 = 2 \cdot 0,7852 - 1 = 0,5704$$

Problema 14.4.10 (2 puntos) Según los datos del INE, el 45,68 % de las familias españolas tienen una renta mensual de 1500 a 3000 euros y el 23,98 % de las familias tienen una renta mensual superior a 3000 euros. Entre las familias con menos de 1500 euros mensuales solo el 10 % viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1500 a 3000 euros mensuales viajan el 40 % y si el ingreso es mayor de 3000 euros mensuales viajan el 85 %.

Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:

a) Viaje por vacaciones.

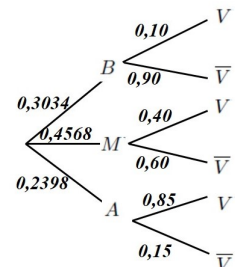
b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1500 euros.

Solución:

Sean B renta inferior a 1500 euros, M renta entre 1500 y 3000 euros, A renta superior a 3000 euros, V viaja de vacaciones y $\bar{V}$ no viaja de vacaciones.

$$a) P(V) = P(V|B)P(B) + P(V|M)P(M) + P(V|A)P(A) = 0,10 \cdot 0,3034 + 0,40 \cdot 0,4568 + 0,85 \cdot 0,2398 = 0,4169$$

$$b) P(M \cup A|V) = \frac{P((M \cup A) \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V|M)P(M) + P(V|A)P(A)}{P(V)} = \frac{0,40 \cdot 0,4568 + 0,85 \cdot 0,2398}{0,4169} = 0,9272$$



14.5. Extraordinaria-Coincidente

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 14.5.1 (2 puntos) Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

- a) Determine todos los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $A^2 = O$, donde O denota la matriz nula de tamaño 2×2 .
- b) Sea $a = 2$ y $b = -2$. Sabiendo que $B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2 , calcule B^2 y B^{10} .

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } A^2 &= \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 4 & -a - b \\ 4a + 4b & b^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\begin{cases} a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2 \\ -a - b = 0 \Rightarrow a = -b \\ 4a + 4b = 0 \Rightarrow a = -b \\ b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b = \pm 2 \end{cases} \xrightarrow{a=-b} \begin{cases} a = 2 \text{ y } b = -2 \\ a = -2 \text{ y } b = 2 \end{cases} \\ \text{b) } B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \\ B^2 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}, B^3 = B \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}, \dots, B^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & 1-2n \end{pmatrix} \Rightarrow \\ B^{10} &= \begin{pmatrix} 21 & -10 \\ 40 & -19 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problema 14.5.2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = ax + \sqrt{x^2 + 2}$$

- a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tome el valor $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$
- b) Para $a = 1$, calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= a + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \Rightarrow f'(1) = a + \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 1 \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2}) &= [-\infty + \infty] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 2})(x - \sqrt{x^2 + 2})}{x - \sqrt{x^2 + 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2}{x - \sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x - \sqrt{x^2 + 2}} = \frac{-2}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

Problema 14.5.3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -2x^2 + x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Determine, si es posible, el valor del parámetro real k para que esta función sea continua en todo su dominio.
- b) Considerando $k = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

- a) Las dos ramas son polinómicas y exponencial y la función está definida en todo $\mathbb{R}$.
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Para que f sea continua en $x = 0$:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} k = k \\ f(0) = k \end{cases} \implies k = 1$$

Para que f sea continua en $x = 2$:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} k = k \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-2x^2 + x + 6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \implies k = 0$$

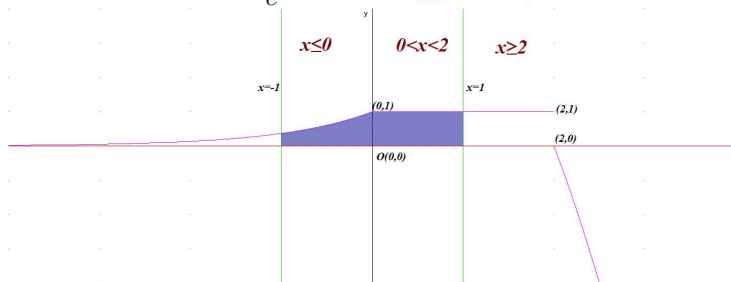
Tenemos dos valores diferentes para k , luego $\nexists k \in \mathbb{R}$ que imponga la continuidad de f en $x = 0$ y $x = 2$ al mismo tiempo.

- b) Si $k = 1 \implies f$ es continua en $x = 0$ y tendremos dos recintos de integración $S_1 : [-1, 0]$ y $S_2 : [0, 1]$

$$S_1 = \int_{-1}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^0 = 1 - \frac{1}{e}$$

$$S_2 = \int_0^1 dx = x \Big|_0^1 = 1$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 2 - \frac{1}{e} \simeq 1,6321$$



Problema 14.5.4 (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3}$$

- a) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esta función.
 b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, el denominador no se anula nunca.

Monotonía: $f'(x) = \frac{24x}{(x^2 + 3)^2} = 0 \implies x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decreciente en el $(-\infty, 0)$ con un mínimo relativo en el punto $(0, -2)$

Asíntotas:

☛ Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.

☛ Horizontales: $y = 2$.

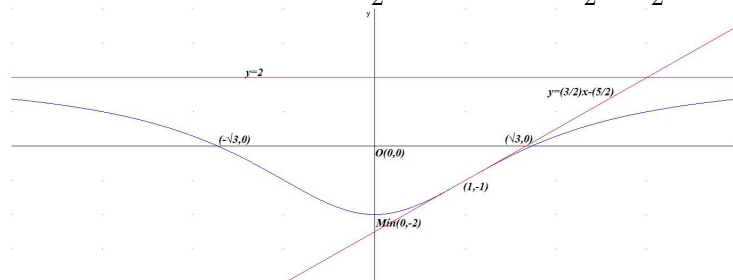
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3} = 2$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $b = f(a) = f(1) = -1$

$$f'(x) = \frac{24x}{(x^2 + 3)^2} \Rightarrow m = f'(1) = \frac{3}{2}$$

$$y - b = m(x - a) \Rightarrow y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$



Problema 14.5.5 (2 puntos) Una fábrica de piensos produce 2 tipos de pienso para ganado, $P1$ y $P2$. Cada kg de $P1$ contiene 500 gramos de cereales, 300 de leguminosas y 200 de otros componentes adicionales. Cada kg de $P2$ contiene 600 gramos de cereales, 200 de leguminosas y 200 de otros componentes. Se dispone de 30 kg de cereales y 12 kg de leguminosas. Los componentes adicionales no están restringidos. Un kg de pienso $P1$ le da un beneficio de 1 euro y un kg de pienso $P2$ de 2 euros. ¿Cuántos kg de pienso de cada tipo debe fabricar para maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

Solución:

Sean x kg de pienso $P1$ e y kg de pienso $P2$.

	cereales	leguminosas	adicionales	beneficio
$P1$	500	300	200	1 €
$P2$	600	200	200	2 €
	≤ 30000	≤ 12000	≥ 0	

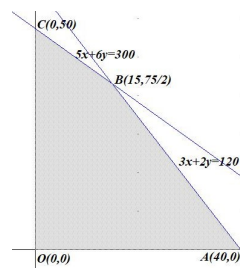
Los componentes adicionales no aportan restricción alguna.

☛ La región factible S es:

$$\begin{cases} 500x + 600y \leq 30000 \\ 300x + 200y \leq 12000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 6y \leq 300 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán:

$O(0, 0)$, $A(40, 0)$, $B(15, 75/2)$ y $C(0, 50)$.



☛ La función objetivo es $f(x, y) = x + 2y \Rightarrow$

Solución por solver

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f(40, 0) = 40 \\ f(15, 75/2) = 90 \\ f(0, 50) = 100 \leftarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

El máximo beneficio se alcanza con 0 kg de pienso $P1$ y 50 kg de $P2$ y es de 100 €.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo	100					
2		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
4	P1	5	3	0	0	1		0
5	P2	6	2	0	0	2		50
6								
7		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
8	P1	0	0	0	0	0		
9	P2	300	100	0	0	100		
10		300	100	0	0	100		

Parámetros de Solver

Establecer objetivo: \$F\$10

Para: ☒ Máx ☐ Mín ☐ Valor de: 0

Cambiando las celdas de variables: \$B\$4:\$B\$5

Sujeto a las restricciones:

\$B\$10:\$B\$11 <= \$D\$10:\$D\$11
 \$C\$10:\$C\$11 <= \$E\$10:\$E\$11
 \$B\$4:\$B\$5 >= 0
 \$B\$5:\$B\$5 >= 0

Botones: Solucionar, Cambiar

Problema 14.5.6 (2 puntos) De cada 100 libros prestados en una biblioteca, 90 son novelas, biografías y libros de autoayuda. Además, se observa que los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas y el número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas. Plantee el sistema de ecuaciones y calcule el porcentaje de libros prestados de cada tipo.

Solución:

Sean x el número de novelas, y de biografías y z de autoayudas.

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ z = \frac{x}{2} \\ y + 5 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 90 \\ x - 2z = 0 \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 38 \% \\ y = 33 \% \\ z = 19 \% \end{cases}$$

Se han prestado 38 % novelas, 33 % biografías y 19 % autoayudas.

Por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -3 & -90 \\ 0 & -2 & -1 & -85 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -3 & -90 \\ 0 & 0 & 5 & 95 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 5z = 95 \Rightarrow z = 19 \\ -y - 57 = -90 \Rightarrow y = 33 \\ x + 33 + 19 = 90 \Rightarrow x = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 38 \% \\ y = 33 \% \\ z = 19 \% \end{cases}$$

Problema 14.5.7 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - 2y + (a+1)z = 1 \\ 2x - az = 2 \\ (a+2)x - ay = 4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a+1 & 1 \\ 2 & 0 & -a & 2 \\ a+2 & -a & 0 & 4 \end{array} \right); |A| = a(2-a) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 2$$

Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^o$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

☛ Si $a = 0$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = -1$:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + z = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -4 \end{cases}$$

Problema 14.5.8 (2 puntos) El 80 % de las prendas producidas por una cadena de ropa se fabrican en Asia y, desafortunadamente, el 35 % de las prendas producidas por esa cadena se han fabricado usando mano de obra infantil. Además, el 70 % de las prendas analizadas se fabrican en Asia o se han fabricado usando mano de obra infantil. Eligiendo una prenda de esa cadena al azar, calcule la probabilidad de que:

- Se haya fabricado en Asia y se haya fabricado usando mano de obra infantil.
- No se haya fabricado en Asia, sabiendo que no se ha fabricado usando mano de obra infantil.

Solución:

Sean A prendas producidas en Asia e I producidas con mano de obra infantil.

$P(A) = 0,8$, $P(I|A) = 0,35$ y $P(A \cup I) = 0,7$

- $P(A \cap I) = P(I|A)P(A) = 0,8 \cdot 0,35 = 0,28$
- $P(A \cup I) = P(A) + P(I) - P(A \cap I) \Rightarrow 0,7 = 0,8 + P(I) - 0,28 \Rightarrow P(I) = 0,18$

$$P(\bar{A}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{P(\overline{A \cup I})}{1 - P(I)} = \frac{1 - P(A \cup I)}{1 - P(I)} = \frac{1 - 0,7}{1 - 0,18} = 0,3659$$

Problema 14.5.9 (2 puntos) Un supermercado ha determinado que el tiempo que pasa un cliente en su establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

- Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.
- Suponga que $\mu = 32$. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ clientes el tiempo medio que han pasado en su establecimiento, $\bar{X}$, sea menor de 30,5 minutos.

Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $NC = 0,95$:

$$0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1,96 \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq 34,5744 \Rightarrow n = 35$$

b) $\mu = 32 \Rightarrow \bar{X} \approx N\left(32; \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = N(32; 0,75)$.

$$P(\bar{X} \leq 30,5) = P\left(Z \leq \frac{30,5 - 32}{0,75}\right) = P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Problema 14.5.10 (2 puntos) En un estudio sobre desarrollo sostenible de la OCDE se ha observado que el 20 % de los países son desarrollados. Si el país es desarrollado tiene una probabilidad del 5 % de tener una esperanza de vida inferior a 70 años, del 50 % de tener una esperanza de vida de 70 a 75 años y un 45 % de que la esperanza de vida sea superior a los 75 años. Si el país no pertenece al grupo de los países desarrollados, esas probabilidades son 50 %, 40 % y 10 %, respectivamente. Eligiendo al azar un país, calcule la probabilidad de que:

a) La esperanza de vida sea inferior a 70 años.

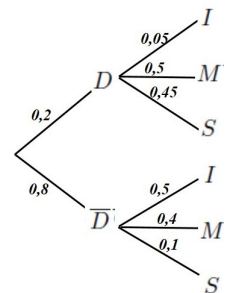
b) Sabiendo que la esperanza de vida es inferior a 70 años, el país no pertenezca al grupo de los países desarrollados.

Solución:

Sean D país desarrollado, $\bar{D}$ país no desarrollado, I tiene una esperanza de vida inferior a 70 años, M tiene una esperanza de vida entre 70 y 75 años y S tiene una esperanza de vida superior a 75 años.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(I) &= P(I|D)P(D) + P(I|\bar{D})P(\bar{D}) = \\ &= 0,05 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,8 = 0,41 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(\bar{D}|I) = \frac{P(I|\bar{D})P(\bar{D})}{P(I)} = \frac{0,5 \cdot 0,8}{0,41} = 0,9756$$



Capítulo 15

Murcia

15.1. Ordinaria

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Problema 15.1.1 (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\begin{cases} 2x + ay + 4z = 2 \\ ax + 2y + 6z = 0 \\ 4x + 2ay + 10z = a \end{cases} \quad (2 \text{ puntos})$$

Resolverlo para $a = 0$. (0,5 puntos)

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 4 & 2 \\ a & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 2a & 10 & a \end{array} \right); \quad |A| = 2(4 - a^2) = 0 \implies a = \pm 2$$

☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^o$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a = -2$:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - F_2 \end{array} \right] = \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{array} \right) \implies \text{Sistema Incompatible} \end{aligned}$$

☛ Si $a = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $a = 0$:

$$\begin{cases} 2x + 4z = 2 \\ 2y + 6z = 0 \\ 4x + 10z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 10 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 2z = -4 \Rightarrow z = -2 \\ 2y - 12 = 0 \Rightarrow y = 6 \\ 2x - 8 = 2 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

Problema 15.1.2 (2,5 puntos) Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y piensos compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2€ y el de pienso compuesto de 3€.

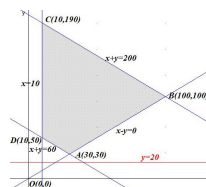
- a) (2 puntos) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo?
- b) (0,5 puntos) ¿Cuál es este gasto mínimo?

Solución:

Sea x : número de contenedores de cereales e y : número de contenedores de pienso.

- a) La región factible es:

$$\begin{cases} x \leq y \\ x + y \leq 200 \\ x + y \geq 60 \\ y \geq 20 \\ x \geq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 200 \\ x + y \geq 60 \\ y \geq 20 \\ x \geq 10 \end{cases}$$

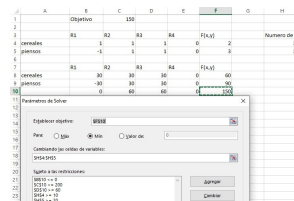


Los vértices son: $A(30,30)$, $B(100,100)$, $C(10,190)$ y $D(10,50)$

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

$$\begin{cases} f(30, 30) = 150 \text{ Mínimo} \\ f(100, 100) = 500 \\ f(10, 190) = 590 \\ f(10, 50) = 170 \end{cases}$$

Solución por solver :



- a) (0,5 puntos) La función beneficio de esta empresa.
- b) (1 punto) El nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado.
- c) (0,5 puntos) El precio de venta óptimo.
- d) (0,5 puntos) El beneficio máximo que puede lograr la empresa.

Solución:

- a) Beneficio = Ingresos - costes:
 $B(q) = q(10 - q) - (q^2 - 18q + 14) = -2q^2 + 28q - 14$
- b) $B'(q) = -4q + 28 = 0 \implies q = 7$.

	$(0, 7)$	$(7, \infty)$
$B'(q)$	+	-
$B(q)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(0, 7)$ y decreciente en el $(7, \infty)$, con un máximo relativo en $q = 7$ con un beneficio de $B(7) = 84$.

Como $B(0) = -14$ podemos asegurar que ese máximo es absoluto.

- c) El precio óptimo de venta será: $10 - 7 = 3\text{€}$.
- d) Como se ha visto en el apartado (b) el beneficio máximo es de 84€ .

Problema 15.1.4 (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } 0 < x < 3 \\ ax^2 - 6x + 3a & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

- a) (1 punto) Hallar el valor de a para que la función sea continua en $x = 3$
- b) (1,5 punto) Para este valor de a y para $x \geq 3$, calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $x = 3$.

Solución:

- a) Las dos ramas son continuas, hay que imponer la continuidad en $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 3) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (ax^2 - 6x + 3a) = 12a - 18 \\ f(3) = 12a - 18 \end{cases} \quad \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)} \quad 6 = 12a - 18 \implies a = 2$$

- b) Tenemos $f'(x) = 4x - 6$ cuando $x > 3$ y no sería derivable en $x = 3$. La tangente pedida no existe en ese punto.

Si consideramos otro punto del dominio $x \geq 3$, por ejemplo $x = 4$:

Tenemos $x = a = 4 \implies b = f(a) = f(4) = 14$ y $m = f'(a) = f'(4) = 10 \xrightarrow{y-b=m(x-a)}$

$$y - 14 = 10(x - 4) \implies y = 10x - 26$$

Problema 15.1.5 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, calcule:

- a) (0,5 puntos) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes.
- b) (0,5 puntos) Asíntotas verticales y horizontales.
- c) (1 punto) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) (0,5 puntos) Máximos y mínimos locales.

Solución:

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ y los puntos de corte:

- Con OY hacemos $x = 0 \Rightarrow (0, -1)$
- Con OX hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ no hay puntos de corte con el eje de abscisas.

- b) Asíntotas:

• Verticales:

- En $x = -1$:
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$
- En $x = 1$:
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$

• Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1$$

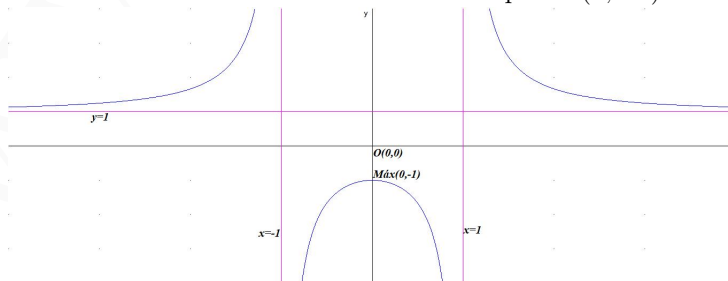
• Oblicuas: No hay por haber horizontales.

c) $f'(x) = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	creciente ↗	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$ y creciente en el $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

- d) La función tiene un máximo relativo en el punto $(0, -1)$



Problema 15.1.6 (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = x^2 + 4$ y la recta $g(x) = x + 4$. Calcular su área.

Solución:

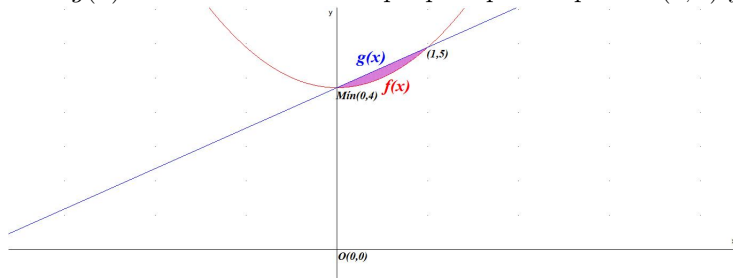
Los puntos de corte entre las dos gráficas son:

$$x^2 + 4 = x + 4 \implies x^2 - x = 0 \implies x = 0 \implies (0, 4), \quad x = 1 \implies (1, 5)$$

Para $f(x) = x^2 + 4$ tenemos corte con el eje OY el $(0, 4)$ y con el OX hacemos $f(x) = x^2 + 4 \neq 0$ no corta al eje OX .

$f'(x) = 2x = 0 \implies x = 0$, $f''(x) = 2 \implies f''(0) = 2 > 0 \implies (0, 4)$ es un mínimo.

Para $g(x) = x + 4$ es una recta que pasa por los puntos $(0, 4)$ y $(1, 5)$



$$S_1 = \int_0^1 (x^2 + 4 - (x + 4)) dx = \int_0^1 (x^2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{6} \simeq 0,1667 \text{ u}^2$$

El resultado de la integral es negativo al estar $g(x)$ por encima de $f(x)$.

Problema 15.1.7 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$

- a) (1 punto) Calcular $\int f(x) dx$.
- b) (1,5 puntos) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

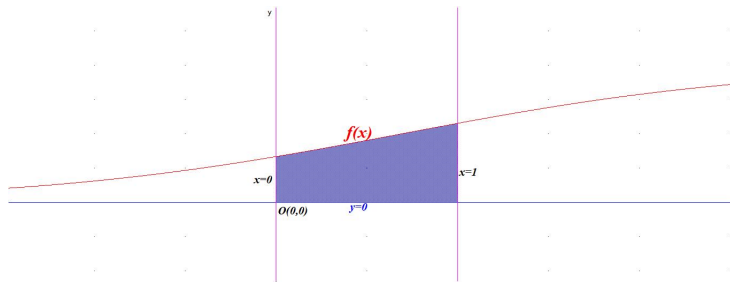
Solución:

$$\text{a) } \int \frac{e^x}{e^x + 2} dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x + 2 \\ dt = e^x dx \\ dx = \frac{1}{e^x} dt \end{array} \right] = \int \frac{e^x}{t} \cdot \frac{1}{e^x} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |e^x + 2| + C$$

- b) La función no corta al eje de abscisas y es siempre positiva, luego el intervalo de integración es $[0, 1]$ y $F(x) = \ln |e^x + 2|$.

$$S_1 = \int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = \ln(e + 2) - \ln 3 = \ln \frac{e + 2}{3}$$

$$S = |S_1| = \ln \frac{e + 2}{3} = 0,4528 \text{ u}^2$$



Problema 15.1.8 (2,5 puntos)

- a) En un edificio hay dos ascensores A y B . El 45 % de los inquilinos del edificio usa el primero (A) y los restantes el segundo (B). El porcentaje de averías del ascensor A es del 5 %, mientras que el segundo se avería un 8 % de las veces que se utiliza. Cada vez que un ascensor sufre una avería, éste se para y no funciona.
- (I) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un ascensor, elegido al azar, se averíe.
- (II) (0,75 puntos) Si un inquilino queda atrapado un cierto día en el ascensor, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en el segundo?
- b) (1 punto) La duración de los contratos temporales sigue una distribución normal de media desconocida y una desviación típica de 3 meses. Una muestra aleatoria de 100 contratos temporales ha dado una duración media de 10 meses. Obtener un intervalo de confianza al 94 % para la duración media de los contratos temporales.

Solución:

- a) Sean A sube en el ascensor A , B sube en el B , V el ascensor se avería y $\bar{V}$ no se avería.

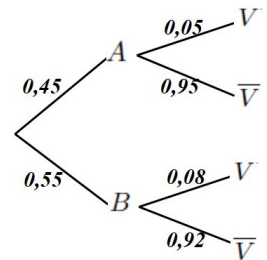
(I)

$$P(V) = P(V|A)P(A) + P(V|B)P(B) =$$

$$0,05 \cdot 0,45 + 0,08 \cdot 0,55 = 0,0665$$

(II)

$$P(B|V) = \frac{P(V|B)P(B)}{P(V)} = \frac{0,08 \cdot 0,55}{0,0665} = 0,6617$$



- b) $N(\mu, 3)$, $n = 100$, $\bar{X} = 10$ y

$$NC = 0,94 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,06 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,03$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,97 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,88$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,88 \frac{3}{\sqrt{100}} = 0,564$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (10 - 0,564; 10 + 0,564) = (9,436; 10,564)$$

15.2. Extraordinaria

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se

corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Problema 15.2.1 (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

Realiza las siguientes operaciones:

- a) (0,5 puntos) El producto AB .
- b) (0,5 puntos) La inversa C^{-1}
- c) (0,5 puntos) La diferencia $D - AB$
- d) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial: $AB + CX = D$; es decir calcula la matriz X .

Solución:

$$\text{a) } AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } D - AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } AB + CX = D \implies CX = D - AB \implies X = C^{-1}(D - AB) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -18 \\ 2 & 31 \end{pmatrix}$$

Problema 15.2.2 (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

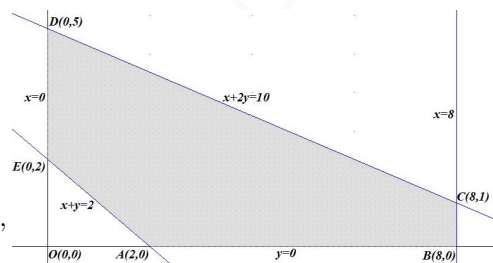
- a) (2 puntos) Represente la región S y calcule sus vértices.
- b) (0,5 puntos) Determine los puntos de la región factible donde la función $f(x, y) = 2x + y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores.

Solución:

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ x \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(2,0)$, $B(8,0)$, $C(8,1)$, $D(0,5)$ y $E(0,2)$

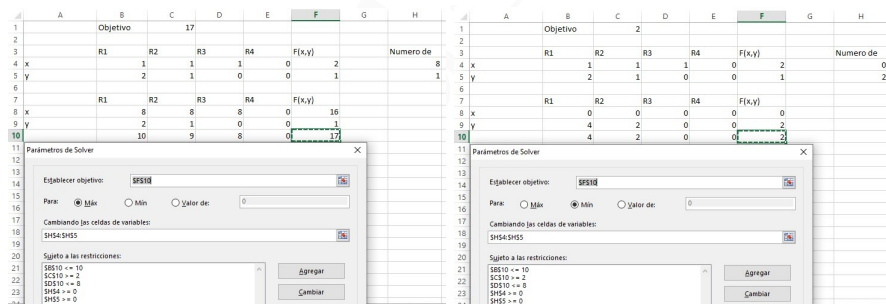


b) $f(x, y) = 2x + y$

$$\begin{cases} f(2,0) = 4 \\ f(8,0) = 16 \\ f(8,1) = 17 \text{ Máximo} \\ f(0,5) = 5 \\ f(0,2) = 2 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El mínimo se encuentra en el punto $E(0,2)$ con un valor de 2 y el máximo en el punto $C(8,1)$ con un valor de 17.

Solución por solver :



Problema 15.2.3 (2,5 puntos) El número de espectadores, en miles de personas, en unas competiciones de atletismo durante las 5 primeras horas de realización de estas pruebas, viene dada por la función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, donde x representa el número de horas, $1 \leq x \leq 5$. Determine:

- (1 punto) ¿En qué intervalo aumenta el número de espectadores a la competición?
- (0,75 puntos) ¿Cuándo hay un mayor número de espectadores?, ¿Cuántos son?
- (0,75 puntos) ¿En qué hora hay menos espectadores?, ¿Cuántos son?

Solución:

a) $P'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = 3$.

	(1, 3)	(3, 5)
$P'(x)$	—	+
$P(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo (3, 5) horas.

La función es decreciente entre la primera y la tercera hora donde presenta un mínimo relativo

de $P(3) = 4 \implies 4000$ espectadores. A partir de la tercera hora el número de espectadores crece hasta la quinta hora con $P(5) = 24 \implies 24000$ espectadores. Como $P(1) = 8 \implies 8000$ espectadores en la primera hora podemos concluir que el mínimo de espectadores se produce en la tercera hora y el máximo en la quinta con las cantidades antes calculadas.

- b) En la hora 5 con 24000 espectadores.
c) En la hora 3 con 4000 espectadores.

Problema 15.2.4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{ax+b}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^3+1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) (1,5 puntos) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio.
b) (1 punto) Determine la derivada $f'(x)$ para $x > 2$.

Solución:

- a)  • La primera rama es continua por ser un polinomio.
• En la segunda rama el único punto que presenta discontinuidad es en $x = 0$ y no pertenece a la rama, luego la función es continua en la rama.
• En la tercera rama hay una raíz cuadrada cuyo dominio es $[-1, \infty)$ solución de la inecuación $x^3 + 1 \geq 0$, luego es continua en toda la rama.
• Para estudiar la continuidad de la función en todo el dominio falta estudiar la continuidad en $x = 1$ y $x = 2$

 Continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b}{x} = a+b \\ f(1) = a+b \end{array} \right. \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)} a+b=2$$

 Continuidad en $x = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b}{x} = \frac{2a+b}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^3+1} = 3 \\ f(2) = \frac{2a+b}{2} \end{array} \right. \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)}$$

$$\frac{2a+b}{2} = 3 \implies 2a+b = 6$$

 $\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{cases} \implies \begin{cases} a=4 \\ b=-2 \end{cases}$

b) Si $x > 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^3 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}$

Problema 15.2.5 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, calcule:

- (0,5 puntos) El dominio de definición de la función y el punto de corte con los ejes coordenados.
- (0,5 puntos) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
- (1 punto) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- (0,5 puntos) Máximos y mínimos locales.

Solución:

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$, ya que $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$
Puntos de corte:

• Con OY hacemos $x = 0 \Rightarrow \left(0, -\frac{1}{4}\right)$

• Con OX hacemos $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 4} \neq 0 \Rightarrow$ No hay.

- b) Asíntotas:

- Verticales: En $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x^2 - 4} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x^2 - 4} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

- Verticales: En $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 4} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 4} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0$$

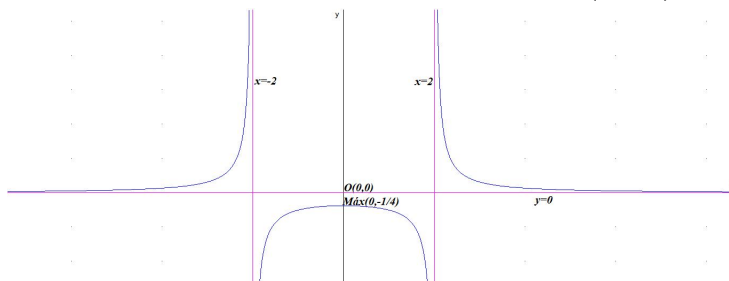
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

c) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	creciente ↗	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en el $(0, 2) \cup (2, \infty)$

- d) La función tiene un máximo relativo en el punto $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$



Problema 15.2.6 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$

- a) (1,25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$ en el punto $x = 1$
- b) (1,25 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$

Solución:

$$a) \quad a = 1 \implies b = f(1) = \frac{2}{3}, \quad f'(x) = -\frac{2(x^2 - 2)}{(x^2 + 2)^2} \implies m = f'(1) = \frac{2}{9} \xrightarrow{y-b=m(x-a)}$$

$$y - \frac{2}{3} = \frac{2}{9}(x - 1) \implies y = \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}$$

- b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2} = 0 \implies x = 0 \implies$ la función corta el eje de abscisas en el punto $(0, 0)$. El intervalo de integración es $S : (0, 1)$

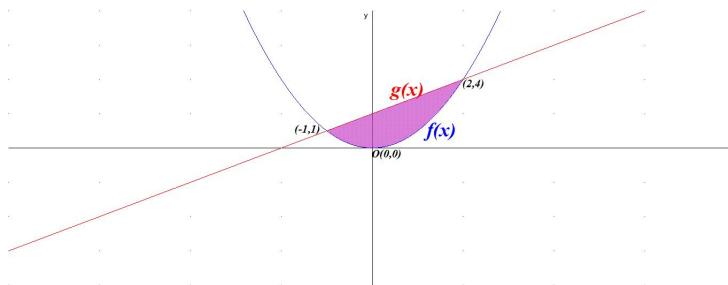
$$S = \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 2} dx = \ln |x^2 + 2| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2} \simeq 0,4055 \text{ u}^2$$

El resultado de la integral es positiva por estar la función por encima del eje de abscisas en el intervalo de integración.

Problema 15.2.7 (2,5 puntos) Calcular el área de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$ y representar gráficamente esta región.

Solución:

- ☛ $f(x)$ es una parábola PAR con vértice en $(0, 0)$. $f'(x) = 2x = 0 \implies x = 0$ y $f''(x) = 2 \implies f''(0) = 2 > 0 \implies (0, 0)$ es un mínimo relativo. Dando valores pasa por los puntos: $(\pm 1, 1)$ y $(\pm 2, 4)$
- $g(x)$ es una recta que corta a $f(x)$ en $f(x) = g(x) \implies x^2 = x + 2 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies x = -1 \implies (-1, 1)$ y $x = 2 \implies (2, 4)$



$$S_1 = \int_{-1}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^2 = -\frac{9}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{9}{2} \simeq 4,5 \text{ u}^2$$

El resultado de la integral es negativo por estar la función $g(x)$ por encima de la $f(x)$ en el intervalo de integración.

Problema 15.2.8 (2,5 puntos)

- a) Al 45 % de los socios de un club le gusta jugar a las cartas, al 40 % jugar al dominó y al 23 % jugar a las cartas y al dominó. Si elegimos al azar a un socio de este club, calcula las siguientes probabilidades:
- (I) (0,5 puntos) Que juegue a las cartas o al dominó.
 - (II) (0,5 puntos) Que no juegue ni a las cartas ni al dominó.
 - (III) (0,5 puntos) Que juegue a las cartas, sabiendo que juega al dominó.
- b) (1 punto) La altura de los estudiantes de una clase se distribuye según una distribución normal de media desconocida μ y una desviación típica de 4 cm. Se toma una muestra aleatoria de 16 estudiantes de la clase obteniendo una estatura media de 172 cm. Hallar un intervalo de confianza para la estatura media con un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

- a) Sea C juega a las cartas y D juega al dominó.
Tenemos: $P(C) = 0,45$, $P(D) = 0,4$ y $P(C \cap D) = 0,23$
- (i) $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = 0,45 + 0,4 - 0,23 = 0,62$
 - (ii) $P(\overline{C} \cap \overline{D}) = P(\overline{C \cup D}) = 1 - P(C \cup D) = 1 - 0,62 = 0,38$
 - (iii) $P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,23}{0,4} = 0,575$
- b) $N(\mu, 4)$, $n = 16$, $\bar{X} = 172$ y $NC = 99\%$:
 $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005$
 $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$
 $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \frac{4}{\sqrt{16}} = 2,575$
 $IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (172 - 2,575; 172 + 2,575) = (169,425; 174,575)$

Capítulo 16

Navarra

16.1. Ordinaria

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

Problema 16.1.1 (10 puntos) Una empresa dedicada a deportes de montaña vende sesiones individuales de senderismo, rápel y ciclismo de montaña. Un día concreto, la empresa vende un total de 45 sesiones. Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día. Si por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo, ¿cuántas personas han realizado cada actividad?

- I.) (3 puntos) Plantee el sistema de ecuaciones lineales.
- II.) (7 puntos) Resuelva el sistema e interprete la solución en el contexto del problema.

Solución:

Sean x sesiones de senderismo, y sesiones de rápel y z sesiones de ciclismo.

$$\text{I.) } \begin{cases} x + y + z = 45 \\ 40x + 20y + 60z = 1700 \\ 3y = x \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 45 \\ 2x + y + 3z = 85 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 30 \\ y = 10 \\ z = 5 \end{cases}$$

II.) Resolvemos por Gauss:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 2 & 1 & 3 & 85 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -45 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 4F_2 \end{array} \right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -25 \end{array} \right) \implies \begin{cases} -5z = -25 \implies z = 5 \\ -y + 5 = -5 \implies y = 10 \\ x + 10 + 5 = 45 \implies x = 30 \end{cases}$$

30 personas eligen senderismo, 10 personas eligen rápel y 5 eligen ciclismo.

Problema 16.1.2 (10 puntos) Una empresa recibe anualmente un disolvente desde dos distribuidores ($D1$ y $D2$). El distribuidor $D2$ tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor $D1$ tiene el triple de capacidad. La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día. La empresa quiere favorecer al distribuidor $D1$, por lo que quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde $D1$ que desde $D2$.

La siguiente tabla recoge el coste y el nivel de contaminación asociados al transporte a la empresa desde los dos distribuidores.

	Coste de transporte euros/litro	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1	0,8	0,06
D2	1	0,02

Determina cuántos litros diarios deberá enviar cada distribuidor a la empresa si se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental y no gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente.

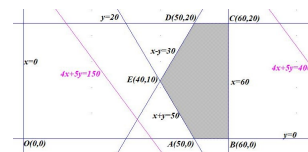
- I) (4 puntos) Plantee el problema.
- II) (4 puntos) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema.
- III) (2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si no quisiera gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente.

Solución:

Sea x litros procedentes del distribuidor $D1$ e y litros del $D2$.

- I) Función objetivo: Mínimo de $f(x, y) = 0,06x + 0,02y$
La región factible es

$$\left\{ \begin{array}{l} y \leq 20 \\ x \leq 60 \\ x + y \geq 50 \\ x \geq y + 30 \\ 0,8x + y \leq 80 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \leq 20 \\ x \leq 60 \\ x + y \geq 50 \\ x - y \geq 30 \\ 4x + 5y \leq 400 \text{ irrelevante} \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$



Los vértices son: $A(50,0)$, $B(60,0)$, $C(60,20)$, $D(50,20)$ y $E(40,10)$.

$$f(x, y) = 0,06x + 0,02y$$

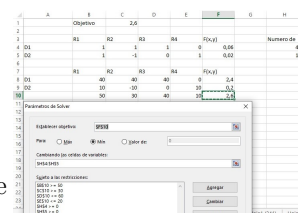
$$\left\{ \begin{array}{l} f(50,0) = 3 \\ f(60,0) = 3,6 \\ f(60,20) = 4 \\ f(50,20) = 3,4 \\ f(40,10) = 2,6 \text{ Mínimo} \end{array} \right.$$

La mínima contaminación es de 2,6 mg/litro con 40 litros de la distribuidora $D1$ y 10 litros de la $D2$.

- II) La región factible sería:

$$\left\{ \begin{array}{l} y \leq 20 \\ x \leq 60 \\ x + y \geq 50 \\ x \geq y + 30 \\ 0,8x + y \leq 30 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \leq 20 \\ x \leq 60 \\ x + y \geq 50 \\ x - y \geq 30 \\ 4x + 5y \leq 150 \text{ imposible} \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Solución por solver :



No hay región factible posible.

Problema 16.1.3 (10 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x & \text{si } x < -1 \\ 4 - x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

- I) (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$, clasificando sus puntos de discontinuidad.
- II) (3 puntos) Estudie la derivabilidad de $f(x)$.
- III) (4 puntos) Calcule $\int_0^2 f(x) dx$

Solución:

- I) Las tres ramas son polinomios, luego son continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = -1$ y $x = 1$:

• En $x = -1$: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (-x^2 - 4x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (4 - x) = 5 \\ f(-1) = 5 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \implies$

f es discontinua no evitable con un salto finito en $x = -1$.

• En $x = 1$: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (4 - x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 6x + 8) = 3 \\ f(1) = 3 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \implies$

f es continua en $x = 1$.

• f es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

- II) Las tres ramas son polinomios, luego son derivables. Hay que estudiar la continuidad en $x = -1$ y $x = 1$:

• Tenemos: $f'(x) = \begin{cases} -2x - 4 & \text{si } x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

• En $x = -1$ la función no es continua y, por tanto, tampoco puede ser derivable.

• En $x = 1$: $\begin{cases} f'(1^-) = -1 \\ f'(1^+) = -4 \end{cases} \quad \frac{f'(1^-) \neq f'(1^+)}{\implies} f \text{ no es derivable en } x = 1.$

• f es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

III) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (4 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - 6x + 8) dx = \left(4x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2} + \frac{4}{3} = \frac{29}{6}$

Problema 16.1.4 (10 puntos) La primera derivada de cierta función $f(x)$ viene dada por $f'(x) = x(x - 2)^2$

- I) (3 puntos) Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
- II) (4 puntos) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Para qué valores de x la función $f(x)$ presenta puntos de inflexión?

III) (3 puntos) Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$.

Solución:

I) $f'(x) = x(x-2)^2 = 0 \implies x = 0$ y $x = 2$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el $(0, \infty)$, con un mínimo relativo en $x = 0$.

En $x = 2$ la función pasa de crecer a crecer, por lo que no hay extremo. También se puede comprobar por la segunda derivada:

$$f''(x) = (x-2)^2 + 2x(x-2) = (x-2)(3x-2) \implies \begin{cases} f''(0) = 4 > 0 \implies x = 0 \text{ Mínimo} \\ f''(2) = 0 \implies x = 2 \text{ No es extremo} \end{cases}$$

II) $f''(x) = (x-2)^2 + 2x(x-2) = (x-2)(3x-2) = 0 \implies x = 2$ y $x = \frac{2}{3}$

	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$(\frac{2}{3}, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	cóncava ∪	convexa ∩	cóncava ∪

La función es cóncava (∪) en el intervalo $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (2, \infty)$ y convexa (∩) en el $(\frac{2}{3}, 2)$. Con

puntos de inflexión en $x = \frac{2}{3}$ y $x = 2$.

También se puede comprobar si son puntos de inflexión con la tercera derivada:

$$f'''(x) = 2(3x-4) \implies \begin{cases} f'''(\frac{2}{3}) = -4 \neq 0 \implies x = \frac{2}{3} \text{ punto inflexión} \\ f'''(2) = 4 \neq 0 \implies x = 2 \text{ punto inflexión} \end{cases}$$

III) $f(x) = \int x(x-2)^2 dx = \int (x^3 - 4x^2 + 4x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$

$$f(0) = 5 \implies 0 - 0 + 0 + C = 5 \implies C = 5 \implies f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + 5$$

Problema 16.1.5 (10 puntos) En una encuesta realizada a jóvenes universitarios sobre hábitos de estudio se ha observado que el 40 % de los encuestados consulta libros en la biblioteca, el 55 % consulta videos con tutoriales y el 15 % consulta ambos formatos.

I) (3 puntos) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos.

II) (3 puntos) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte solamente uno de los dos formatos.

III) (4 puntos) Sabiendo que el universitario no consulta videos con tutoriales, calcule la probabilidad de que tampoco consulte libros.

Solución:

Sean B consulta libros en la biblioteca, V consulta videos y tenemos:

$$P(B) = 0,4, P(V) = 0,55 \text{ y } P(B \cap V) = 0,15$$

- i) $P(B \cup V) = P(B) + P(V) - P(B \cap V) = 0,4 + 0,55 - 0,15 = 0,8$
- ii) $P(B \cap \bar{V}) + P(\bar{B} \cap V) = P(B) - P(B \cap V) + P(V) - P(B \cap V) = P(B) + P(V) - 2P(B \cap V) = 0,4 + 0,55 - 0,3 = 0,65$
- iii) $P(\bar{B}|\bar{V}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{P(\overline{B \cup V})}{P(\bar{V})} = \frac{1 - P(B \cup V)}{1 - P(V)} = \frac{1 - 0,8}{1 - 0,55} = 0,4444$

Problema 16.1.6 El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios sigue una distribución normal con varianza de 2500 días². Se seleccionó una muestra de jóvenes universitarios, obteniéndose los siguientes días: 101, 200, 187, 69, 237, 125, 173, 235, 24, 60.

- i) (5 puntos) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el tiempo medio en encontrar ese tipo de trabajo. Interprete la solución en el contexto del problema.
- ii) (5 puntos) Con los datos de esa muestra se ha calculado otro intervalo de confianza, con una amplitud de 68,62143 días. Calcule el nivel de confianza del nuevo intervalo, justificando su respuesta.

Solución:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 2500 \implies \sigma = 50 \implies N(\mu, 50)$$

$$\text{i) } \bar{X} = \frac{101 + 200 + 187 + 69 + 237 + 125 + 173 + 235 + 24 + 60}{10} = 141,1, n = 10 \text{ y}$$

$$NC = 92\% \implies NC = 0,92 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,08 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,04$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \implies Z_{\alpha/2} = 1,75$$

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,75 \frac{50}{\sqrt{10}} = 27,67$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (141,1 - 27,67; 141,1 + 27,67) = (113,43; 168,77)$$

$$\text{ii) } E = \frac{68,62143}{2} = 34,310715 = Z_{\alpha/2} \frac{50}{\sqrt{10}} \implies Z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$P(Z \leq 2,17) = 1 - \frac{\alpha}{2} \implies 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \implies \alpha = 0,03 \implies NC = 1 - \alpha = 0,97 \implies$$

$$NC = 97\%$$

16.2. Extraordinaria

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

Problema 16.2.1 (10 puntos) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i) (2 puntos) Determine los valores del parámetro a para los cuales A tiene inversa.
- ii) (3 puntos) Para $a = 2$, calcule la matriz inversa A^{-1} .

- III) (5 puntos) Para $a = 2$, despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $XA + I = B^t C$, siendo I la matriz identidad.

Solución:

- I) $|A| = a^2 + a - 12 = 0 \Rightarrow a = -4$ y $a = 3 \Rightarrow \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{-4, 3\}$
- II) Si $a = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2/3 & 2/3 \\ -1/2 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 5/3 & -2/3 \end{pmatrix}$
- III) $XA + I = B^t C \Rightarrow XA = B^t C - I \Rightarrow X = (B^t C - I)A^{-1} =$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (-1 \ 5 \ 1) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1/2 & -2/3 & 2/3 \\ -1/2 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 5/3 & -2/3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -2/3 & 2/3 \\ -1/2 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 5/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & -2/3 \\ -3/2 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & -7/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 16.2.2 (10 puntos) Una empresa dedicada a la comercialización de vino dispone de un terreno cultivable para plantar dos tipos de uva (negra y blanca). El beneficio anual por hectárea dedicada a la plantación de uva negra es de 10000 € y el de cada hectárea dedicada a la plantación de uva blanca es de 7000 €.

Siguiendo las recomendaciones de las cooperativas del sector, la parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas. Además, se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. Sabiendo que no puede cultivar más de 30 hectáreas en total, determine cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de uva si se desea maximizar el beneficio anual.

- I) (4 puntos) Plantee el problema.
- II) (4 puntos) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema.
- III) (2 puntos) Analice gráficamente qué ocurriría si se eliminara la condición de que se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca.

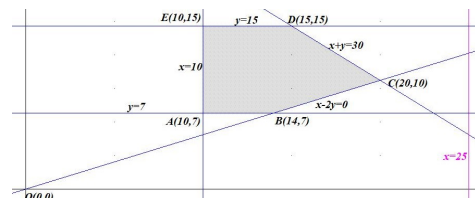
Solución:

Sea x hectáreas dedicadas a la uva negra e y a la uva blanca.

- I) La región factible es

$$\begin{cases} 10 \leq x \leq 25 \\ 7 \leq y \leq 15 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 25 \text{ irrelevante} \\ y \leq 15 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 10 \\ y \geq 7 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(10, 7)$, $B(14, 7)$, $C(20, 10)$, $D(15, 15)$ y $E(10, 15)$.



$$f(x, y) = 10000x + 7000y$$

$$\begin{cases} f(10, 7) = 149000 \\ f(14, 7) = 189000 \\ f(20, 10) = 270000 \text{ Máximo} \\ f(15, 15) = 255000 \\ f(10, 15) = 205000 \end{cases}$$

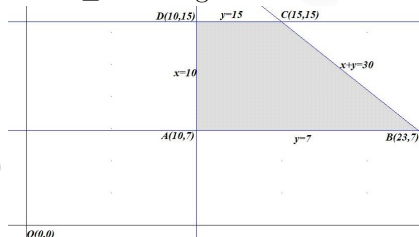
El beneficio máximo sería de 270000€ con 20 hectáreas dedicadas a la uva negra y 10 hectáreas dedicadas a la uva blanca.

Solución por solver :

ii) Eliminando la restricción $x - 2y \leq 0$ y la irrelevante $x \leq 25$ la región factible sería:

$$\begin{cases} y \leq 15 \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 10 \\ y \geq 7 \end{cases}$$

Los vértices serían: $A(10, 7)$, $B(23, 7)$, $C(15, 15)$ y $D(10, 15)$.



$$f(x, y) = 10000x + 7000y$$

$$\begin{cases} f(10, 7) = 149000 \\ f(23, 7) = 279000 \text{ Máximo} \\ f(15, 15) = 255000 \\ f(10, 15) = 205000 \end{cases}$$

El beneficio máximo sería de 279000€ con 23 hectáreas dedicadas a la uva negra y 7 hectáreas dedicadas a la uva blanca.

Solución por solver :

Problema 16.2.3 (10 puntos)

- i) (5 puntos) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{9 - x^2}$ y estudie la posición de la función respecto a ellas.
- ii) (5 puntos) Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 5}{x}$ que cumpla $F(1) = 1$.

Solución:

- i) Como $9 - x^2 = 0 \implies x = \pm 3 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$.

Asíntotas:

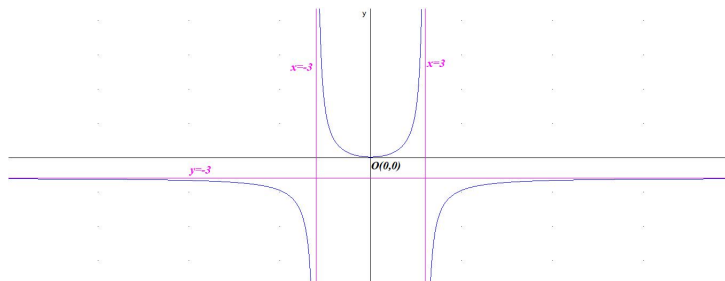
☛ Verticales:

- En $x = -3$: $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{3x^2 + 1}{9 - x^2} = \left[\frac{28}{0^-} \right] = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3x^2 + 1}{9 - x^2} = \left[\frac{28}{0^+} \right] = +\infty$
- En $x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x^2 + 1}{9 - x^2} = \left[\frac{28}{0^+} \right] = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 + 1}{9 - x^2} = \left[\frac{28}{0^-} \right] = -\infty$

☛ Horizontales: $y = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{9 - x^2} = -3$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.



$$\text{II) } F(x) = \int \frac{2x^3 - 3x + 5}{x} dx = \int \left(2x^2 - 3 + \frac{5}{x} \right) dx = \frac{2x^3}{3} - 3x + 5 \ln|x| + C$$

$$F(1) = 1 \implies \frac{2}{3} - 3 + 5 \ln 1 + C = 1 \implies C = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \implies F(x) = \frac{2x^3}{3} - 3x + 5 \ln|x| + \frac{10}{3}$$

Problema 16.2.4 (10 puntos) En una empresa, el coste total de fabricación de x toneladas de un producto viene expresado, en euros, por la función $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$. Suponga que se venden todas las toneladas que se fabrican y que cada tonelada del producto se vende por 40 euros. Responda a las siguientes cuestiones:

- I) (3 punto) Determine la función que expresa el beneficio (ingresos menos costes) obtenido en función de x . ¿Cuál es el beneficio obtenido si se fabrican 6 toneladas del producto?
- II) (4 puntos) ¿Cuántas toneladas del producto deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?
- III) (3 puntos) ¿Para qué cantidad del producto se tienen pérdidas (beneficios negativos)?

Solución:

- I) La función beneficio será: $B(x) = 40x - C(x) = 40x - (2x^2 + 4x + 98) = -2x^2 + 36x - 98$
Luego $B(6) = 46 \text{ €}$
- II) $B'(x) = -4x + 36 = 0 \implies x = 9$ toneladas.
Como $B''(x) = -4 \implies B''(9) = -4 < 0 \implies x = 9$ Tm es un máximo relativo, y en nuestro caso absoluto, con un beneficio de $B(9) = 64 \text{ €}$
- III) Estudiamos el signo de $B(x)$:
 $B(x) = 0 \implies -2x^2 + 36x - 98 = 0 \implies x = 9 \pm 4\sqrt{2}$

	$(0, 9 - 4\sqrt{2})$	$(9 - 4\sqrt{2}, 9 + 4\sqrt{2})$	$(9 + 4\sqrt{2}, \infty)$
$B(x)$	-	+	-

La empresa incurre en pérdidas cuando la producción es entre 0 y $9 - 4\sqrt{2}$ Tm o con producción superior a $9 + 4\sqrt{2}$ Tm

Problema 16.2.5 (10 puntos) En un centro escolar se pregunta a los estudiantes de una clase de 2º bachillerato sobre el uso de los servicios sanitarios. Dos de cada cinco hombres y tres de cada cuatro mujeres han acudido a su centro de salud durante este curso.

- i) (4 puntos) Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer de esa clase. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud.

Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Sabiendo que en la clase hay 20 mujeres y 10 hombres, responda a las dos siguientes cuestiones:

- ii) (3 puntos) Calcule la probabilidad de que los tres sean hombres.
 iii) (3 puntos) Calcule la probabilidad de que sólo haya una mujer.

Solución:

Sean H hombre, M mujer, S acude a un centro de salud y $\bar{S}$ no acude a un centro de salud.

$$P(S|H) = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ y } P(S|M) = \frac{3}{4} = 0,75$$

- i) $P(\text{"alguno acuda al centro de salud"}) = 1 - P(\text{"ninguno acuda al centro de salud"}) = 1 - P(\bar{S}|H)P(\bar{S}|M) = 1 - 0,6 \cdot 0,25 = 0,85$

ii) En este caso $P(H) = \frac{10}{30}$ y $P(M) = \frac{20}{30}$

$$P(HHH) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{8}{28} = \frac{6}{203} \simeq 0,0296$$

iii) $P(\text{"solo una mujer"}) = P(MHH) + P(HMH) + P(HHM) = \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{9}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{20}{28} = \frac{45}{203} \simeq 0,2217$

Problema 16.2.6 (10 puntos)

- i) (5 puntos) Para analizar las preferencias musicales de los habitantes de una región, se realiza una encuesta a 175 adultos y 150 jóvenes. Cien adultos y el 80 % de los jóvenes contestaron que no escuchan música clásica. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de habitantes que escuchan música clásica, con un nivel de confianza del 93 %. Interprete la solución en el contexto del problema. (Utilice cuatro decimales para los cálculos).
- ii) (5 puntos) Dado el siguiente intervalo de confianza al 97 % para la puntuación media de los estudiantes de bachiller en un test psicotécnico, $[67,4050; 82,5950]$, determine el tamaño muestral utilizado, sabiendo que la varianza poblacional es 1225.

Solución:

- i) Escuchan música clásica $175 - 100 = 75$ adultos y $0,2 \cdot 150 = 30$ jóvenes, luego escuchan música clásica 105 personas de un total de 325 personas. Luego la probabilidad de que una persona elegida al azar escuche música clásica es $\hat{p} = \frac{105}{325} = \frac{21}{65} \simeq 0,3231$ y $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - \frac{21}{65} = \frac{44}{65} = 0,6769$
 $NC = 93 \% \Rightarrow NC = 0,93 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,07 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,035$
 $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,035 = 0,965 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,81$
 $E = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1,81 \sqrt{\frac{0,3231 \cdot 0,6769}{325}} = 0,047$
 $IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,3231 - 0,047; 0,3231 + 0,047) = (0,2761; 0,37) = (27,61 \%; 37 \%)$

$$\text{II) } \sigma^2 = \text{Var}(x) = 1225 \implies \sigma = \sqrt{1225} = 35$$

$$NC = 97\% \implies NC = 0,97 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,03 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,015$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \implies Z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = \frac{82,5950 - 67,4050}{2} = 7,595 \text{ y } E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 7,595 = 2,17 \frac{35}{\sqrt{n}} \implies n = 100$$

Capítulo 17

País Vasco

17.1. Ordinaria

- ☛ Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.
- ☛ En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
- ☛ Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
 - pantalla gráfica
 - posibilidad de transmitir de datos
 - programable
 - resolución de ecuaciones
 - operaciones con matrices
 - cálculo de determinantes
 - derivadas e integrales
 - almacenamiento de datos alfanuméricos

Álgebra

Problema 17.1.1 (2,5 puntos) En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.

La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

Solución:

Sean x puntuación del primer problema, y la del segundo y z la del tercero.

$$\begin{cases} x + y + z = 7,2 \\ x = 1,4y \\ 2(x + y) = z \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 7,2 \\ x - 1,4y = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1,4 \\ y = 1 \\ z = 4,8 \end{cases}$$

Aitor ha obtenido 1,4 puntos en el primer problema, 1 punto en el segundo y 4,8 puntos en el tercero.

Por Gauss:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7,2 \\ 1 & -1,4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7,2 \\ 0 & -2,4 & -1 & -7,2 \\ 0 & 0 & -3 & -14,4 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\text{sistema compatible determinado} \Rightarrow \begin{cases} -3z = -14,4 \Rightarrow z = 4,8 \\ -2,4y - 4,8 = -7,2 \Rightarrow y = 1 \\ x + 1 + 4,8 = 7,2 \Rightarrow x = 1,4 \end{cases}$$

Problema 17.1.2 (2,5 puntos) Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 gr de cacao, 20 gr de nata y 30 gr de azúcar y se vende a 1 € la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 gr de cacao, 20 gr de nata y 15 gr de azúcar y se vende a 1,3 € la unidad.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15 gr	1,3 €
DISPONIBILIDAD	30 Kg	8 Kg	10,5 Kg	

Un día determinado, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar. Sabiendo que se vende todo lo que se elabora:

- (2,2 puntos) ¿Cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos?
- (0,3 puntos) ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

Solución:

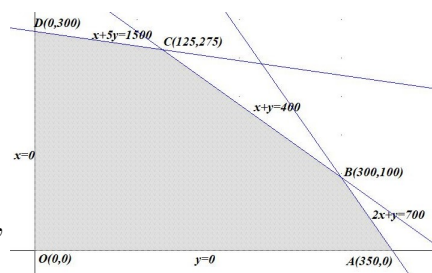
Sean x número de trufas dulces e y número de trufas amargas.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15 gr	1,3 €
DISPONIBILIDAD	≤ 30000 gr	≤ 8000 gr	≤ 10500 gr	

- La región factible es

$$\begin{cases} 20x + 100y \leq 30000 \\ 20x + 20y \leq 8000 \\ 30x + 15y \leq 10500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y \leq 1500 \\ x + y \leq 400 \\ 2x + y \leq 700 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $O(0,0)$, $A(350,0)$, $B(300,100)$, $C(125,275)$ y $D(0,300)$.



Solución por solver :

$$f(x, y) = x + 1,3y$$

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f(350, 0) = 350 \\ f(300, 100) = 430 \\ f(125, 275) = 482,5 \text{ Máximo} \\ f(0, 300) = 390 \end{cases}$$

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								

The Solver Parameters dialog box is open, showing the following settings:

- Set Objective: \$F\$10
- To: Max
- By Changing Variable Cells: \$B\$1:\$C\$1
- Subject to the Constraints: \$B\$1:\$C\$1 >= \$D\$1:\$D\$1
- Make Unconstrained Variables Non-Negative: ☒ Select a GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. ☐ Select the LP Simplex engine for Solver Problems that are linear smooth. ☐ Select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.
- Solving Method: Select a GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for Solver Problems that are linear smooth. Select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.
- Solver Options: ☐ Make Variable Non-Negative: ☒ Select a GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. ☐ Select the LP Simplex engine for Solver Problems that are linear smooth. ☐ Select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.
- Help: [Help](#)
- Solve: [Solve](#)
- Reset All: [Reset All](#)
- Load/Save: [Load/Save](#)
- Options: [Options](#)
- Help: [Help](#)

Los ingresos máximos son de 482,5€ y se consiguen con la elaboración de 125 trufas dulces y 275 amargas.

b) Los ingresos máximos son de 482,5€.

Análisis

Problema 17.1.3 (2,5 puntos) Sea $f(x)$ una función polinómica de tercer grado, en la que el coeficiente del término de grado tres vale 1.

- (1 punto) Encuentra los valores de los otros coeficientes de la función sabiendo que pasa por el punto $(0, 0)$ y que tiene un extremo relativo en el punto $(2, -4)$.
- (0,75 puntos) Determina los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$.
- (0,75 puntos) Calcula el área de la región finita delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el eje de abscisas.

Solución:

$$a) f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \implies f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \implies f''(x) = 6x + 2a$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \implies c = 0 \\ f(2) = -4 \implies 8 + 4a + 2b + c = -4 \\ f'(2) = 0 \implies 12 + 4a + b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \implies f(x) = x^3 - 3x^2$$

Habría que comprobar si el punto $(2, -4)$ es un extremo: $f''(x) = 6x - 6 \implies f''(2) = 6 \neq 0 \implies$ en ese punto hay un extremo relativo y como $f''(2) > 0$ se trata de un mínimo relativo.

$$b) \text{ Tenemos } \implies f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = 2.$$

Recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x) = 6x - 6 \implies \begin{cases} f''(0) = -6 < 0 \implies \text{Máximo en } (0, 0) \\ f''(2) = 6 > 0 \implies \text{Mínimo en } (2, -4) \end{cases}$$

Ahora tenemos $f''(x) = 6x - 6 = 0 \implies x = 1$ y recurrimos a la tercera derivada:

$$f'''(x) = 6 \implies f'''(1) = 6 \neq 0 \implies (1, -2) \text{ es un punto de inflexión.}$$

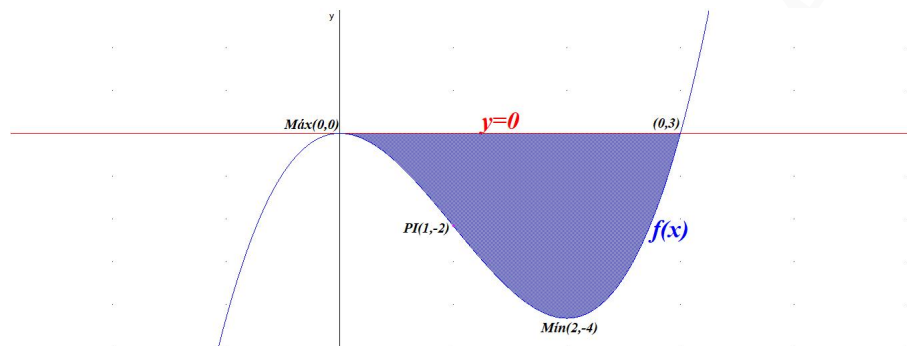
- Hacemos $f(x) = 0$ para calcular los puntos de corte de la función con el eje OX : $x^3 - 3x^2 = 0 \implies x = 0$ y $x = 3$, luego solo hay un recinto de integración $S_1 : [0, 3]$.

$$S_1 = \int_0^3 (x^3 - 3x^2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 \right]_0^3 = -\frac{27}{4}$$

$$S = |S_1| = \frac{27}{4} = 6,75 \text{ u}^2$$

El resultado de la integral es negativo por estar la función por debajo del eje de abscisas en

el intervalo de integración.

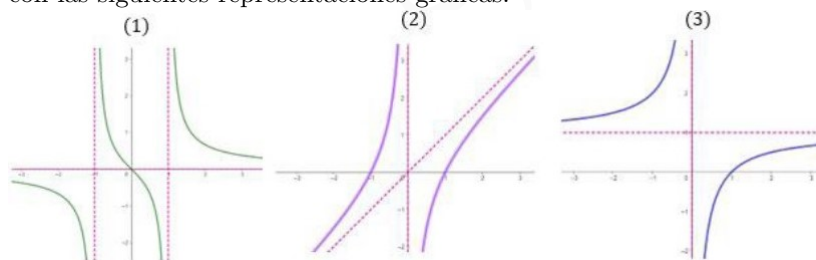


Problema 17.1.4 (2,5 puntos)

a) (0,9 puntos) Asocia, razonadamente, las funciones:

$$(A) f(x) = \frac{x-1}{x} \quad (B) g(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad (C) h(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:



b) (1,6 puntos) En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio, el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

- a) La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, otra horizontal en $y = 1$ y corta al eje OX en el punto $(1, 0)$, luego su gráfica tiene que ser la número (3).
 La función $g(x)$ tiene dos asíntotas verticales en $x = \pm 1$, otra horizontal en $y = 0$ y corta al eje OX en el punto $(0, 0)$, luego su gráfica tiene que ser la número (1).
 La función $h(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, otra oblicua en $y = x$ y corta al eje OX en $(\pm 1, 0)$, luego su gráfica tiene que ser la número (2).

b) Para $f(x)$ gráfica (3):

- ☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- ☛ La función es creciente en todo el dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- ☛ $\text{Rec}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Para $g(x)$ gráfica (1):

- ☛ $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

- La función es decreciente en todo el dominio $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$
- $\text{Rec}(g) = \mathbb{R}$

Para $h(x)$ gráfica (2):

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- La función es creciente en todo el dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$

Probabilidad

Problema 17.1.5 (2,5 puntos) Asier tiene una urna con 4 bolas verdes y dos rojas. Lanza una moneda y si sale cara extrae una bola de la urna, y si sale cruz extrae dos bolas, sin reemplazamiento, de la urna.

- (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?
- (0,75 puntos) Calcula probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.
- (0,75 puntos) Calcula la probabilidad de que al menos haya sacado una bola verde.
- (0,5 puntos) Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

Solución:

Sean C cara, X cruz, V verde y R roja.

Tenemos: $P(VV|X) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$, $P(VR|X) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$, $P(RV|X) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$ y $P(RR|X) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.

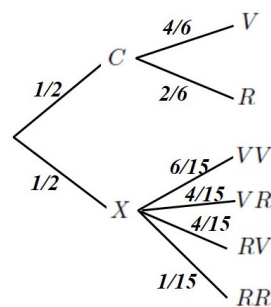
$$\text{a) } P(RR \cap X) = P(RR|X)P(X) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{30} \simeq 0,0333$$

$$\text{b) } P(\text{"ninguna roja"}) = P(V|C)P(C) + P(VV|X) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{15} \simeq 0,5333$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(\text{"alguna verde"}) &= 1 - P(\text{"ninguna verde"}) = \\ &= 1 - (P(R|C)P(C) + P(RR|X)P(X)) = 1 - \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0,8 \end{aligned}$$

d) Sea A "alguna verde":

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{12} \simeq 0,4167$$



Problema 17.1.6 (2,5 puntos) En cierto barrio hay dos pastelerías. El 40 % de la población compra en la pastelería A , el 25 % en la pastelería B , y el 15 % en ambas. Se escoge una persona al azar:

- (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en la pastelería A y no compre en la pastelería B ?

- b) (0,35 puntos) Si esta persona es cliente de la pastelería A , ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de la pastelería B ?
- c) (0,35 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de la pastelería A ni de la B ?
- d) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos “ser cliente de A ” y “ser cliente de B ”? Justifica tu respuesta.

Solución:

Sean A compra en la pastelería A y B compra en la pastelería B .

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,25 \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = 0,15$$

- a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,15 = 0,25$
- b) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,15}{0,4} = \frac{3}{8} = 0,375$
- c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,4 + 0,25 - 0,15) = \frac{1}{2} = 0,5$
- d) Tenemos $P(A \cap B) = 0,15$ y $P(A)P(B) = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1$, luego $P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \Rightarrow A$ y B no son independientes.

Inferencia estadística

Problema 17.1.7 (2,5 puntos) En un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales el 35 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 6,8 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 5,8 puntos.

- a) (0,75 puntos) Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.
- b) (0,75 puntos) Si la desviación típica es 2,6 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?
- c) (1 punto) Si la desviación típica es 2,6 puntos y el *Apto* se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha conseguido ser apto en el examen?

Solución:

$$N(5,8; \sigma)$$

- a) $P(X \geq 6,8) = P\left(Z \geq \frac{6,8 - 5,8}{\sigma}\right) = 0,35 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) = 1 - 0,35 = 0,65 \Rightarrow \frac{1}{\sigma} = 0,385 \Rightarrow \sigma = 2,5974$
- b) $P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - 5,8}{2,6}\right) = 0,2 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 5,8}{2,6}\right) = 1 - 0,2 = 0,8 \Rightarrow \frac{a - 5,8}{2,6} = 0,845 \Rightarrow a = 7,997$
- c) $P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5 - 5,8}{2,6}\right) = P(Z \geq -0,31) = P(Z \leq 0,31) = 0,6217 \Rightarrow 62,17\%$

Problema 17.1.8 (2,5 puntos) De 1.000 jóvenes vascos de 25 años elegidos al azar sólo 140 no vivían con sus padres.

- a) (1,25 puntos) Estima, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.
- b) (0,75 puntos) Calcula el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.
- c) (0,5 puntos) Interpreta los resultados obtenidos.

Solución:

- a) $n = 1000$, $\hat{p} = \frac{1000 - 140}{1000} = 0,86$, $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,14$ y
 $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$
 $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
 $E = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96 \sqrt{\frac{0,86 \cdot 0,14}{1000}} = 0,0215$
 $IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,86 - 0,0215; 0,86 + 0,0215) = (0,8385; 0,8815) = (83,85\%; 88,15\%)$
- b) $E = 0,0215 \Rightarrow 2,15\%$
- c) El porcentaje de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres oscila entre el 83,85 % y el 88,15 % con una confianza del 95 % y un error de estimación del 2,15 %

17.2. Extraordinaria

- ☛ Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.
- ☛ En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
- ☛ Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
 - pantalla gráfica
 - posibilidad de transmitir de datos
 - programable
 - resolución de ecuaciones
 - operaciones con matrices
 - cálculo de determinantes
 - derivadas e integrales
 - almacenamiento de datos alfanuméricos

Álgebra

Problema 17.2.1 (2,5 puntos) Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 euros cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo.

a) (2,2 puntos) ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?

b) (0,3 puntos) ¿Cuál sería dicho ingreso?

Solución:

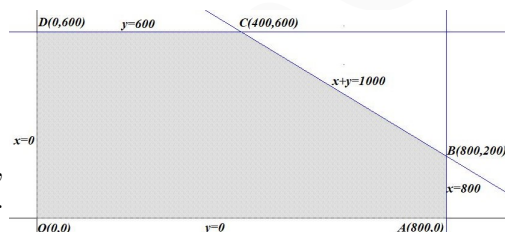
Sean x relojes de pulsera e y relojes de bolsillo.

a) La región factible es

$$\begin{cases} x + y \leq 1000 \\ x \leq 800 \\ y \leq 600 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $O(0,0)$, $A(800,0)$, $B(800,200)$, $C(400,600)$ y $D(0,600)$.

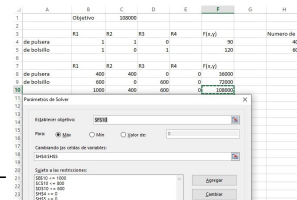
$$F(x,y) = 90x + 120y$$



Solución por solver :

$$\begin{cases} F(0,0) = 0 \\ F(800,0) = 72000 \\ F(800,200) = 96000 \\ F(400,600) = 108000 \text{ Máximo} \\ F(0,600) = 72000 \end{cases}$$

El máximo ingreso es de 108000€ y para ello tiene que fabricar 400 relojes de pulsera y 600 relojes de bolsillo.



b) El máximo ingreso es de 108000€.

Problema 17.2.2 (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) (1,25 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz:

$$M = A^t \cdot A^{-1}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 3y + 2 = -1 \\ 2(x + y + 2) = 2 \\ z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 4x - 3y = -3 \\ x + y = -2 \\ z = -2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{b) } |A| = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Análisis

Problema 17.2.3 (2,5 puntos)

- a) (0,75 puntos) Sea la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $(1, -3)$ y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.
- b) (1 punto) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.
- c) (0,75 puntos) Calcula el área de la región delimitada por la función $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$; y haz su representación gráfica.

Solución:

- a) $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5 \Rightarrow f''(x) = 6ax + 6$
 $\begin{cases} f(1) = -3 \Rightarrow a + 3 - 5 + b = -3 \\ f''(-1) = 0 \Rightarrow -6a + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 2$
 Comprobamos que en $x = -1$ hay un punto de inflexión: $f'''(x) = 6a = 6 \Rightarrow f'''(-1) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = -1$ es un punto de inflexión.

- b) Monotonía:

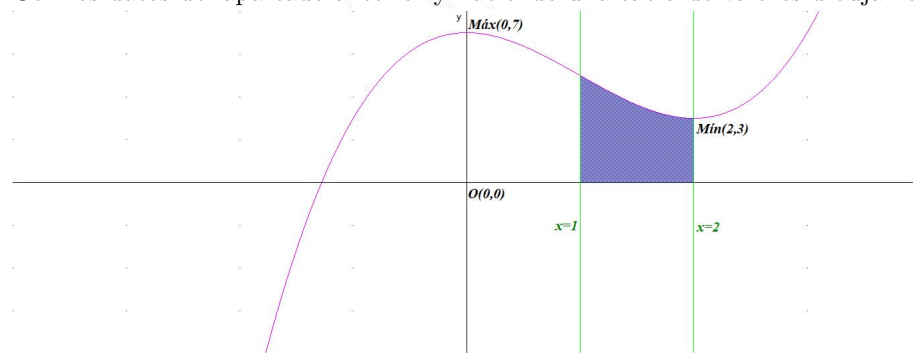
$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 7 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 2:$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$g'(x)$	+	-	+
$g(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y decreciente en el $(0, 2)$.

La función tiene un máximo relativo en $(0, 7)$ y un mínimo relativo en $(2, 3)$.

- c) Con los datos del apartado anterior y haciendo una tabla de valores dibujamos:



$$S = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 7) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 7x \right]_1^2 = \frac{15}{4} \simeq 3,75 \text{ u}^2$$

Problema 17.2.4 (2,5 puntos) La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión:

$$f(x) = 40 - 6x + x^2, \text{ para } x \geq 0$$

donde “ x ” representa la cantidad producida de un determinado artículo.

- a) (0,75 puntos) ¿Disminuye el coste alguna vez?
- b) (0,5 puntos) Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.
- c) (0,25 puntos) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?
- d) (0,75 puntos) Si el coste fuera 80.000 €, ¿cuál sería la cantidad producida?
- e) (0,25 puntos) Representa gráficamente la función.

Solución:

a) $f'(x) = -6 + 2x = 0 \implies x = 3$:

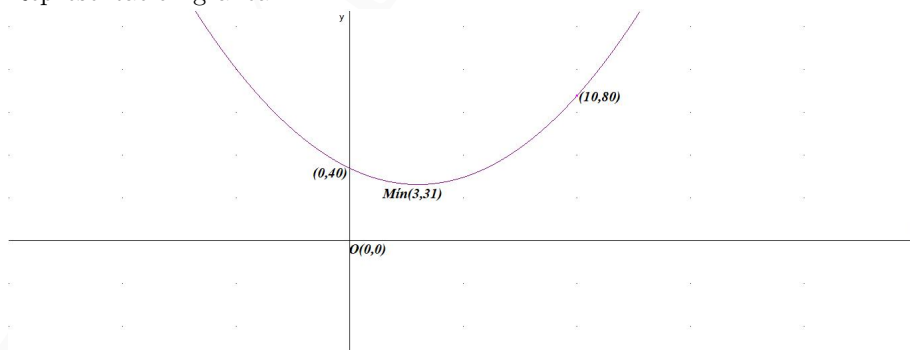
	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(0, 3)$ y creciente en el $(3, \infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $(3, 31)$.

El coste disminuye entre 0 y tres unidades.

- b) El coste mínimo se produce con 3 unidades y es de 31000 €
- c) $f(0) = 40000$ €.
- d) $f(x) = 40 - 6x + x^2 = 80 \implies x^2 - 6x - 40 = 0 \implies x = 10$ y $x = -4$ (no válida)
Con la producción de 10 unidades habría un coste de 80000 €
- e) Representación gráfica:



Probabilidad

Problema 17.2.5 (2,5 puntos) Sean A , B , C , D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

- a) (0,75 puntos) Sabemos que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$ y $P(A \cup B) = 0,5$
Calcula la probabilidad de que ocurran A y B .
- b) (1 punto) Sabemos que $P(C) = 0,5$, $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,7$
Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D .

- c) (0,75 puntos) Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(E) = 0,6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

Solución:

- a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,5 = 0,4 + 0,3 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,2$
- b) $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \Rightarrow 0,7 = 0,5 + 0,6 - P(C \cap D) \Rightarrow P(C \cap D) = 0,4$
 $P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3} \simeq 0,6667$
- c) A y E independiente: $P(A \cap E) = P(A)P(E) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$
 $P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = 0,4 + 0,6 - 0,24 = 0,76$

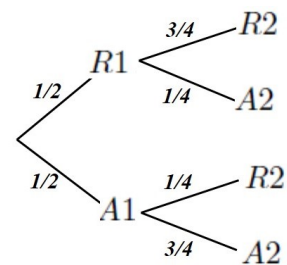
Problema 17.2.6 (2,5 puntos) En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo otras dos bolas del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola.

- a) (0,5 puntos) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul.
- b) (1,25 puntos) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.
- c) (0,75 puntos) Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

Solución:

Sean $R1$ bola roja en la primera extracción, $A1$ bola azul en la primera extracción, $R2$ bola roja en la segunda extracción y $A2$ bola azul en la segunda extracción.

- a) $P(R2|A1) = \frac{1}{4} = 0,25$
- b) $P(A2) = P(A2|A1)P(A1) + P(A2|R1)P(R1) =$
 $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$
- c) $P(R1|A2) = \frac{P(A2|R1)P(R1)}{P(A2)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 0,25$



Inferencia estadística

Problema 17.2.7 (2,5 puntos) En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos².

- a) (1 punto) Obtén el intervalo característico para el 80 %.
- b) (0,3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?
- c) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?
- d) (0,4 puntos) Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

Solución:

$$N(210; \sqrt{144}) = N(210; 12)$$

$$\text{a) } NC = 0,80 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0,2 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,1$$

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,1 = 0,9 \implies Z_{\alpha/2} = 1,285$$

$$E = Z_{\alpha/2} \cdot \sigma = 1,285 \cdot 12 = 15,42$$

$$IC = (\mu - E, \mu + E) = (210 - 15,42; 210 + 15,42) = (194,58; 225,42)$$

$$\text{b) } P(X \geq 228) = P\left(Z \geq \frac{228 - 210}{12}\right) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(200 \leq X \leq 210) &= P\left(\frac{200 - 210}{12} \leq Z \leq \frac{210 - 210}{12}\right) = P(-0,83 \leq Z \leq 0) = \\ &= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -0,83) = P(Z \leq 0) - (1 - P(Z \leq 0,83)) = \\ &= 0,5 - (1 - 0,7967) = 0,2967 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } n = 30 &\implies \bar{X} \overset{N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\approx} N(210; 2,191) \\ P(\bar{X} \leq 207) &= P\left(Z \leq \frac{207 - 210}{2,191}\right) = P(Z \leq -1,37) = 1 - P(Z \leq 1,37) = \\ &= 1 - 0,9147 = 0,0853 \end{aligned}$$

Problema 17.2.8 (2,5 puntos) Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\bar{x} = 98 \text{ puntos} \quad s = 15 \text{ puntos}$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:

“El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos”.

¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

Solución:

$$\bar{x} = \frac{101,5 + 94,5}{2} = 98$$

$$E = \frac{101,5 - 94,5}{2} = 3,5$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \implies 3,5 = z_{\alpha/2} \frac{15}{\sqrt{100}} \implies z_{\alpha/2} = 2,33$$

$$P(Z \leq 2,33) = 1 - \frac{\alpha}{2} \implies 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9901 \implies \alpha = 0,0198$$

$$NC = 1 - 0,0198 = 0,9802 = 98,02\%$$

Capítulo 18

Resúmenes teóricos

18.1. Álgebra

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- ☛ **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- ☛ **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- ☛ **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- ☛ La matriz tiene que ser cuadrada

a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

• Propiedades:

- a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$
- b) $|A^T| = |A|$
- c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.
- e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.
- f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.
- g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.
- h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.
- i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.
- j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij} .
- Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinante de una matriz por adjuntos:

Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.

A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.

Rango de una matriz

Es el número de filas linealmente independientes.

De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.

Si $|A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- ☛ Si $\text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) = n^\circ$ de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- ☛ Si $\text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) < n^\circ$ de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- ☛ Si $\text{Rango}(\bar{A}) \neq \text{Rango}(A)$ se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que $\text{Rango}(A) < m$ (n° de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

• Si $\text{Rango}(A) = m$ (n^0 de incógnitas) $\implies$ SCD $\implies x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ solución trivial.

• Si $\text{Rango}(A) < m$ (n^0 de incógnitas) $\implies$ SCI $\implies$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer

Sea $\bar{A} = (C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, B)$, entonces sustituimos la columna B en la matriz $\bar{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \dots, C_n|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \dots, C_n|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \dots, B|}{|A|}$$

18.2. Análisis

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones

Hay que seguir los siguientes pasos:

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ o $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists y = p \Rightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ ↗ Decreciente : $f'(x) < 0$ ↘ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7 Máximos y Mínimos	Máximo : ↗↘ de creciente a decreciente Mínimo : ↘↗ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0$ ∪ Convexa : $f''(x) < 0$ ∩ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f' dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x $	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f $
Exponencial	$\int e^x dx = e^x$	$\int e^f \cdot f' dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2 x dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f dx = \tan f$
	$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1 + \tan^2 f) dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2 x dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f dx = -\cot f$
	$\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1 + \cot^2 f) dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f} dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2} dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano – Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \ln \pm \arctan x$	Si $\frac{M \neq 0}{ax^2+bx+c}$ irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

☛ Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)

☛ Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Rightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad

Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a , entonces f tiene que ser continua en a .

Teorema de Weierstrass

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.

Teorema de Darboux

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ ($a < b$) y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) . Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del Valor Medio de Lagrange

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) . entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \text{donde } c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)

Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f , es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes

Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a, b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme})$$

Teorema del cambio de variable

Sea g una función con derivada g' continua en $[a, b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. Si hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

Límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que $\text{Grado}(P(x)) = n$ y $\text{Grado}(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

• $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.

• Si $n > m \Rightarrow L = \text{Signo}\left(\frac{A}{B}\right) \cdot \infty$

• Si $n < m \Rightarrow L = 0$

• Si $n = m \Rightarrow L = \frac{A}{B}$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x)(P(x) - 1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ o } \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \rightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x \ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \frac{\pi}{2} - x$

18.3. Probabilidad

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Rightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Rightarrow f_r(A) = \frac{f(A)}{N}$

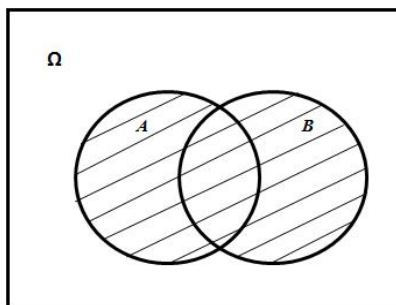
Ley de los grandes números: $\lim_{N \rightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

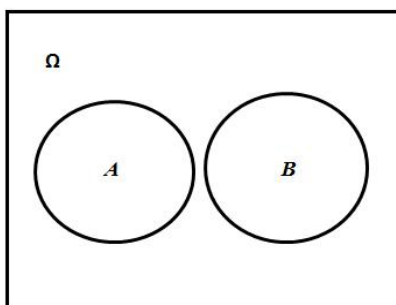
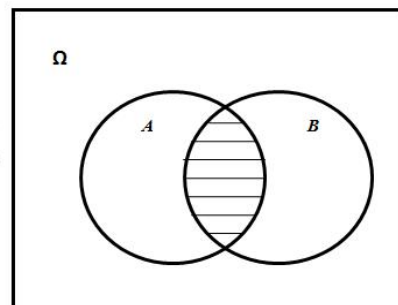
$\emptyset \equiv$ **Espacio vacío** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B : $A \cup B$

Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B : $A \cap B$



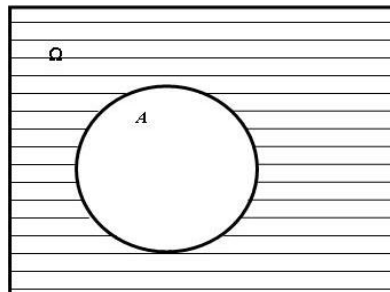
Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

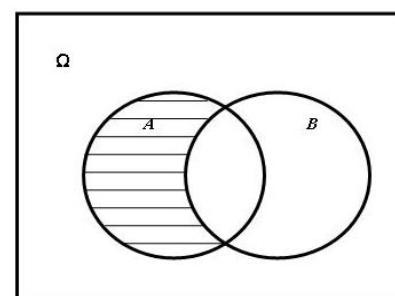
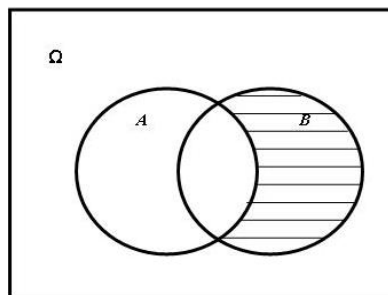
Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



$\bar{A}$ es el suceso contrario o complementario de A :

$$\bar{A} = \Omega - A \implies P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$



$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

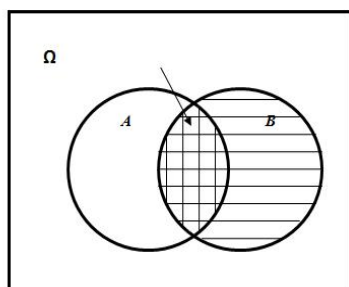
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ y $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, \dots, 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

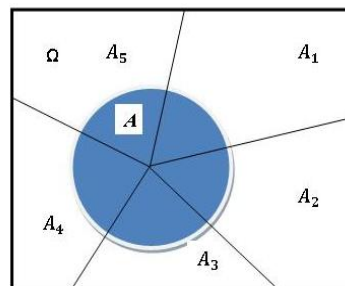
$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



Probabilidad condicionada:

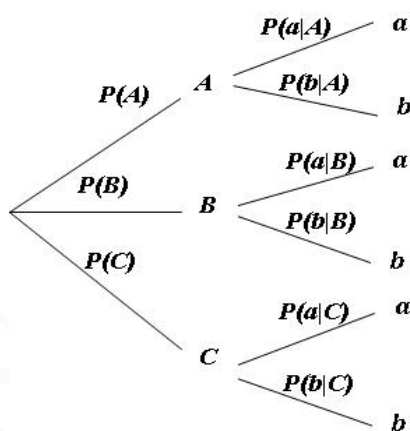
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$

Organización por árboles:



Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

$$P(B|S) = \frac{20}{475}, \quad P(N|M) = \frac{200}{210}, \quad P(B) = \frac{45}{1000}, \quad P(M) = \frac{210}{1000}$$

18.4. Estadística

Gráficos:

- Variable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i, p(x_i) = p_i, \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i, \text{ Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i^2 - \mu^2$$

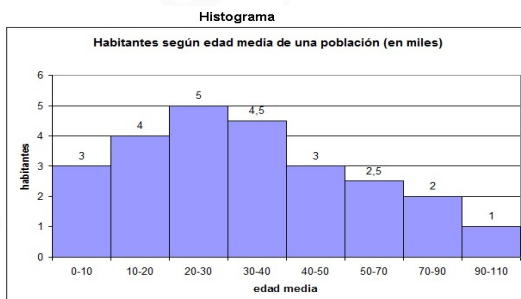
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i, f_i,$$

$$\text{Media} = \bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}, \text{ Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial $B(n, p)$:

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si $B(7, 0, 4) \Rightarrow n = 7, p = 0, 4$ y $q = 0, 6$:

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

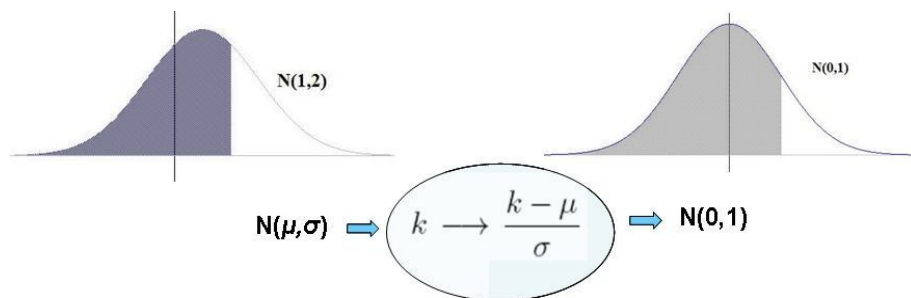
$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3), \text{ ó}$$

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

Su Media = $\mu = np$, su Varianza = $\sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica = $\sqrt{\text{Varianza}}$.

Distribución Normal $N(\mu, \sigma)$:

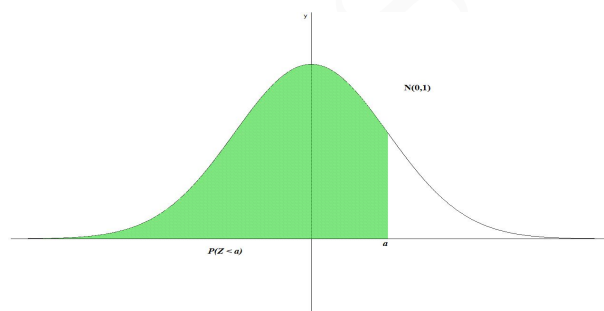
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Tipificación Paso de una normal $N(\mu, \sigma)$ a otra $N(0, 1)$: $k \rightarrow \frac{k - \mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal $N(\mu, \sigma)$ entonces Z seguirá una normal $N(0, 1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

Cuando una distribución binomial $B(n, p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:

$$P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$$

$$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$$

$$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$$

$$P(X > a) = P(X \geq a + 0,5)$$

$$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5)$$

Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95%: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ (α = **Nivel de significación**) $\Rightarrow \alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) =$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \text{ se busca en la tabla } N(0, 1) \text{ y obtenemos } z_{\alpha/2} = 1,96$$

Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\bar{X}$ de una $N(\mu, \sigma)$ la media $\bar{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$\text{Error: } E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Intervalo de Confianza: $(\bar{X} - E, \bar{X} + E) = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.

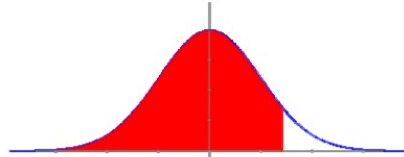
Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n , se distribuye como una $N \left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$

Error: $E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\hat{p} - E, \hat{p} + E) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

“www.musat.net”

Agradecimientos

- ✍ A las Universidades por la publicación de los exámenes oficiales.
- ✍ A Íñigo Zunzunegui Monterrubio (<https://aprendeconmigomelon.com>) por sus correcciones.
- ✍ A Juan Antonio Martínez (<https://www.ebaumatematicas.com>) por el contenido de su página, me ha servido para contrastar resultados.
- ✍ A Paula Cabildo por el diseño de la portada y contraportada.

“www.musat.net”



Prof: Isaac Musat Hervás

Profesor de Matemáticas en el colegio Villaeuropa de Móstoles

Bachillerato y Selectividad en las dos opciones

Ferrovionario en la Dirección de Cercanías de Madrid

Diferentes estudios y trabajos

Jubilado en la actualidad

La educación ha sido mi pasión, el recuerdo del aula, el olor a tiza y el pantalón manchado de polvo blanco lo llevo siempre conmigo. Las voces con las preguntas de mis alumnos y mis respuestas, acertadas o no, quedan en nuestros recuerdos valiosos. He sido un afortunado, mi trabajo ha sido mi diversión favorita.