

Problemas de Matemáticas II
Ciencias y Tecnología

Todas las comunidades autónomas

(Selectividad 2024-Ordinaria y Extraordinaria)

Prof: Isaac Musat Hervás
última actualización:

28 de mayo de 2026

“www.musat.net”

*Cuando las leyes de la matemática
se refieren a la realidad,
no son ciertas;
cuando son ciertas,
no se refieren a la realidad.
Albert Einstein*

Índice general

1. Andalucía	7
1.1. Ordinaria	7
1.2. Ordinaria-Coincidente	12
1.3. Extraordinaria	16
2. Aragón	23
2.1. Ordinaria	23
2.2. Extraordinaria	27
3. Asturias	33
3.1. Ordinaria	33
3.2. Extraordinaria	38
4. Cantabria	45
4.1. Ordinaria	45
4.2. Extraordinaria	50
5. Castilla-La Mancha	57
5.1. Ordinaria	57
5.2. Extraordinaria	62
6. Castilla-León	67
6.1. Ordinaria	67
6.2. Extraordinaria	73
7. Cataluña	79
7.1. Ordinaria	79
7.2. Ordinaria-Coincidente	84
7.3. Extraordinaria	88
8. Comunidad Valenciana	95
8.1. Ordinaria	95
8.2. Extraordinaria	101
9. Extremadura	107
9.1. Ordinaria	107
9.2. Extraordinaria	111

10. Galicia	117
10.1. Ordinaria	117
10.2. Extraordinaria	120
11. Islas Baleares	125
11.1. Ordinaria	125
11.2. Extraordinaria	131
12. Islas Canarias	137
12.1. Ordinaria	137
12.2. Extraordinaria	142
13. La Rioja	149
13.1. Ordinaria	149
13.2. Extraordinaria	153
14. Madrid	159
14.1. Modelo	159
14.2. Ordinaria	165
14.3. Ordinaria-Coincidente	171
14.4. Extraordinaria	178
14.5. Extraordinaria-Coincidente	184
15. Murcia	191
15.1. Ordinaria	191
15.2. Extraordinaria	196
16. Navarra	203
16.1. Ordinaria	203
16.2. Extraordinaria	208
17. País Vasco	215
17.1. Ordinaria	215
17.2. Extraordinaria	222
18. Resúmenes teóricos	231
18.1. Álgebra	231
18.2. Geometría	234
18.3. Análisis	238
18.4. Probabilidad	243
18.5. Estadística	246

Capítulo 1

Andalucía

1.1. Ordinaria

Instrucciones:

- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**
- b) **Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.**
- c) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.**
- d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- e) **Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque.** En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

Problema 1.1.1 (2,5 puntos) Sea la función continua $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1, 0)$ y $B(e, 1)$.

- a) (1,5 puntos) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B .
- b) (1 punto) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A .

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{AB} = (e-1, 1) &\implies \frac{x-1}{e-1} = \frac{y}{1} \implies y = \frac{1}{e-1}x - \frac{1}{e-1} \implies m = \frac{1}{e-1} \\ f'(x) = \frac{1}{x} &\implies m = f'(a) = \frac{1}{a} = \frac{1}{e-1} \implies a = e-1 \implies (e-1, \ln(e-1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a = 1 &\implies b = f(1) = 0 \text{ y } m = f'(1) = 1 \implies m' = -\frac{1}{m} = -1 \xrightarrow{y-b=m'(x-a)} \\ &y - 0 = -(x - 1) \implies y = -x + 1 \end{aligned}$$

Problema 1.1.2 (2,5 puntos) Considera la función continua definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - a \sin x}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ b \cos x - 1 & \text{si } x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Calcula a y b .

Solución:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cos x - a \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - x \sin x - a \cos x}{3x^2} \stackrel{a=1}{=} \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \\ &\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x - \sin x - x \cos x + \sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x - x \cos x}{6x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \\ &\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\cos x - \cos x + x \sin x}{6} = -\frac{1}{3} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (b \cos x - 1) = b - 1 \\ \bullet f(0) &= b - 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \implies -\frac{1}{3} = b - 1 \implies b = \frac{2}{3} \\ \bullet \text{ Luego } a &= 1 \text{ y } b = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Problema 1.1.3 (2,5 puntos) Considera la función definida por $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$, para $x \neq -1$, $x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 1)$.

Solución:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} dx = \left[\begin{aligned} &\left(\frac{x^3}{-x^3 + x} + 2 \right) : (x^2 - 1) = x + \frac{x + 2}{x^2 - 1} \\ &\frac{-x^3 + x}{x + 2} \end{aligned} \right] = \int \left(x + \frac{x + 2}{x^2 - 1} \right) dx = \\ &\left[\begin{aligned} &x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1 \\ &\frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{x^2 - 1} \\ &x + 2 = A(x + 1) + B(x - 1) \\ &x = -1 \implies 1 = -2B \implies B = -1/2 \\ &x = 1 \implies 3 = 2A \implies A = 3/2 \\ &\frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{3/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1} \end{aligned} \right] = \\ &\frac{x^2}{2} + \int \left(\frac{3/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C \\ \text{Tenemos: } F(0) &= 1 \implies 0 + C = 1 \implies F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + 1 \end{aligned}$$

Problema 1.1.4 (2,5 puntos) Halla la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = x \cos x$ y cuya gráfica pasa por los puntos $(0, \frac{\pi}{2})$ y $(\pi, 2\pi)$.

Solución:

$$f'(x) = \int x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \cos x \, dx \implies v = \sin x \\ \int u \, dv = uv - \int v \, du \end{array} \right] = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + A$$

$$f(x) = \int (x \sin x + \cos x + A) \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \sin x \, dx \implies v = -\cos x \\ \int u \, dv = uv - \int v \, du \end{array} \right] =$$

$$-x \cos x + \int \cos x \, dx + x \sin x + Ax = -x \cos x + \sin x + x \sin x + Ax + B = -x \cos x + 2 \sin x + Ax + B$$

$$F(0) = 0 + B = \frac{\pi}{2} \implies B = \frac{\pi}{2}$$

$$F(\pi) = \pi + 0 + A\pi + B = 2\pi \implies A\pi + B = \pi \implies A\pi + \frac{\pi}{2} = \pi \implies A = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 2 \sin x - x \cos x + \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$$

BLOQUE B

Problema 1.1.5 (2,5 puntos) Considera matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcula A^{2024} .

b) (1,5 puntos) Halla la matriz X , si es posible, que verifica $A^2 X A + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

Solución:

$$\text{a) } A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, A^n =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 2024/8 & 2024/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) Como } |A| = 1 \neq 0 \implies \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 X A + I = O \implies A^2 X A = O - I = -I \implies A^2 X = -A^{-1} \implies X = -(A^2)^{-1} A^{-1} =$$

$$-(A^{-1})^2 A^{-1} = -(A^{-1})^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.1.6 (2,5 puntos) Considera el sistema
$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (k-1)x + y + z = k \\ x + (k-1)y + z = 0 \end{cases}$$

a) (1,75 puntos) Discute el sistema según los valores de k .

b) (0,75 puntos) Para $k = 1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = (k-1)(k-2) = 0 \implies k = 1, \quad k = 2$$

■ Si $k \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

■ Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \implies$$

Sistema compatible indeterminado

■ Si $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \implies$$

Sistema incompatible

b) Si $k = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } y = 0 \implies 1 - \lambda = 0 \implies \lambda = 1 \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 1.1.7 (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Halla el punto simétrico de $P(2, 2, 1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$.

b) (1,25 puntos) Halla el punto simétrico de $Q(1, -1, -3)$ respecto del plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$.

Solución:

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(4, 1, 0) \end{cases}$$

$$\pi : x - 2y + z + 6 = 0 \implies \vec{u}_\pi = (1, -2, 1)$$

a) Seguimos el siguiente método:

• Calculamos un plano $\pi' \perp r$ tal que $P \in \pi'$:

$$\vec{u}_{\pi'} = \vec{u}_r = (1, 1, 1) \implies \pi' : x + y + z + a = 0 \xrightarrow{P \in \pi'} 2 + 2 + 1 + a = 0 \implies a = -5 \implies \pi' : x + y + z - 5 = 0$$

• Calculamos el punto P' de corte de π' con r :

$$(4 + \lambda) + (1 + \lambda) + \lambda - 5 = 0 \implies \lambda = 0 \implies P'(4, 1, 0)$$

• El punto P' es el punto medio entre P y el P'' buscado:

$$\frac{P + P''}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = (8, 2, 0) - (2, 2, 1) = (6, 0, -1)$$

$$P''(6, 0, -1)$$

b) Seguimos el siguiente método:

• Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $Q \in t$:

$$\vec{u}_\pi = \vec{u}_t = (1, -2, 1) \implies t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (1, -2, 1) \\ P_t = Q(1, -1, -3) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

• Calculamos el punto Q' de corte de π con t :

$$(1 + \lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + (-3 + \lambda) + 6 = 0 \implies \lambda = -1 \implies Q'(0, 1, -4)$$

• El punto Q' es el punto medio entre Q y el Q'' buscado:

$$\frac{Q + Q''}{2} = Q' \implies Q'' = 2Q' - Q = (0, 2, -8) - (1, -1, -3) = (-1, 3, -5)$$

$$Q''(-1, 3, -5)$$

Problema 1.1.8 (2,5 puntos) Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudia la posición relativa de r y s .

b) (1,5 punto) Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

Solución:

$$r : \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, 2) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \implies$$

$$s : \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = -7 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, 0) \\ P_s(-7, 0, 0) \end{cases} \implies \overrightarrow{P_r P_s} = (-7, 0, 0)$$

$$a) [\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) Calculamos la ecuación de un plano $\pi \parallel r$ y $\pi \parallel s \implies \vec{u}_\pi = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

$(-2, -2, 1) \implies \pi : -2x - 2y + z + a = 0$
Imponemos $d(P_r, \pi) = d(P_s, \pi)$:

• $d(P_r, \pi) = \frac{|-0 - 0 + 0 + a|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|a|}{3}$

• $d(P_s, \pi) = \frac{|14 - 0 + 0 + a|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|14 + a|}{3}$

• $\frac{|a|}{3} = \frac{|14 + a|}{3} \implies |a| = |14 + a|:$
 $\begin{cases} 14 + a = a \implies 14 = 0! \text{ no válida} \\ 14 + a = -a \implies a = -7 \implies \pi : -2x - 2y + z - 7 = 0 \implies \pi : 2x + 2y - z + 7 = 0 \end{cases}$

1.2. Ordinaria-Coincidente

Instrucciones:

- Duración: 1 hora y 30 minutos.**
- Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.
- Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

Problema 1.2.1 (2,5 puntos) Sea la función definida por $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1}$, para $x \neq \pm 1$. Sabiendo que su gráfica tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(0, 1)$ y es paralela a la recta $y = 2x$, calcula la asíntota oblicua y los valores de a y b .

Solución:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^3 - x} \stackrel{a \neq 0}{=} a = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} \stackrel{b \neq 0}{=} b$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + b$ que pasa por $(0, 1) \implies 1 = 0 + b \implies b = 1 \implies y = 2x + 1$

Problema 1.2.2 (2,5 puntos) Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(x + \pi)$, donde $\arctan$ denota la función arcotangente.

- a) (1,5 puntos) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de f . Estudia y halla, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) (1 punto) Calcula $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\arctan(x + \pi)}{\sin x}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) = \arctan(x + \pi) &\implies f'(x) = \frac{1}{1 + (x + \pi)^2} \implies f''(x) = \frac{-2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2} \\ f''(x) = 0 &\implies -2(x + \pi) = 0 \implies x = -\pi \end{aligned}$$

	$(-\infty, -\pi)$	$(-\pi, \infty)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

La función es cóncava $\smile$ en el intervalo $(-\infty, -\pi)$ y convexa en el intervalo $(-\pi, \infty)$. Presenta un punto de inflexión en $x = -\pi \implies (-\pi, f(-\pi)) = (-\pi, 0)$.

Nota: “Cóncava según la RAE de una curva o de una superficie: Que se asemeja al interior de una circunferencia o una esfera”, “Curvado hacia dentro, como el interior de un cuenco”.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\arctan(x + \pi)}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos x} = -1$$

Problema 1.2.3 (2,5 puntos) Halla la función $f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por el punto $(3, -4 \ln 5)$ que verifica $f'(x) = \frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4}$ donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

Solución:

$$\begin{aligned} F(x) = \int \frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4} dx &= \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4} \right) : (x^2 - 4) = 3 + \frac{4x + 24}{x^2 - 4} \\ \frac{-3x^2 + 12}{4x + 24} \end{array} \right] = \\ \int \left(3 + \frac{4x + 24}{x^2 - 4} \right) dx &= \left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2 \\ \frac{4x + 24}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{x^2 - 4} \\ 4x + 24 = A(x + 2) + B(x - 2) \\ x = -2 \implies 16 = -4B \implies B = -4 \\ x = 2 \implies 32 = 4A \implies A = 8 \\ \frac{4x + 24}{x^2 - 4} = \frac{8}{x - 2} - \frac{4}{x + 2} \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$3x + \int \left(\frac{8}{x - 2} - \frac{4}{x + 2} \right) dx = 3x + 8 \ln |x - 2| - 4 \ln |x + 2| + C$$

$$\text{Tenemos: } F(3) = -4 \ln 5 \implies 9 + 0 - 4 \ln 5 + C = -4 \ln 5 \implies C = -9 \implies$$

$$F(x) = 3x + 8 \ln |x - 2| - 4 \ln |x + 2| - 9$$

Problema 1.2.4 (2,5 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 - 3x + 5)e^x$. Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 5)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int (x^2 - 3x + 5)e^x dx = \\
 &\left[\begin{array}{l} u = (x^2 - 3x + 5) \Rightarrow du = (2x - 3)dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = e^x(x^2 - 3x + 5) - \int (2x - 3)e^x dx = \\
 &\left[\begin{array}{l} u = 2x - 3 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = e^x(x^2 - 3x + 5) - \left[(2x - 3)e^x - 2 \int e^x dx \right] = \\
 &e^x(x^2 - 3x + 5) - [(2x - 3)e^x - 2e^x] + C = e^x(x^2 - 3x + 5) - (2x - 3)e^x + 2e^x + C = \boxed{e^x(x^2 - 5x + 10) + C} \\
 F(0) = 5 &\Rightarrow 10 + C = 5 \Rightarrow C = -5 \Rightarrow \boxed{F(x) = e^x(x^2 - 5x + 10) - 5}.
 \end{aligned}$$

BLOQUE B

Problema 1.2.5 (2,5 puntos) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$.

a) (0,75 puntos) Determina los valores de m para los que la matriz A^2 tiene inversa.

b) (1,75 puntos) Para $m = 0$ calcula, si es posible, la matriz X que verifica $A^2 X = \frac{1}{2}(A + B)$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2m & 1 & m \\ 3-m & -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 |A^2| &= m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \exists (A^2)^{-1} \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}. \\
 \text{b) Si } m &= 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \\
 A^2 X &= \frac{1}{2}(A + B) \Rightarrow X = \frac{1}{2}(A^2)^{-1}(A + B) = \\
 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix} \right] &= \\
 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 5 & 11 & 22 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -15 & -13/2 & -77/2 \\ 0 & 5/2 & 2 \\ 19/2 & 13/2 & 53/2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Problema 1.2.6 (2,5 puntos) Determina un número natural de tres cifras sabiendo que la suma de sus dígitos es 9, que la diferencia de dicho número con el que se obtiene al intercambiar la cifra de las centenas por la de las unidades es 198, y que si consideramos la suma entre ambos números, es decir, entre el número a determinar y el que se obtiene al intercambiar sus cifras, el resultado es 828.

Solución:

Sea x la cifra de las centenas, y de las decenas y z de las unidades. El número sería xyz que

correspondería a $100x + 10y + z$.

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 198 \\ 100x + 10y + z + (100z + 10y + x) = 828 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 9 \\ x - z = 2 \\ 101x + 20y + 101z = 828 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

El número es 513.

Resolvemos por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 101 & 20 & 101 & 828 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 101F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -81 & 0 & -81 \end{array} \right) \implies$$

$$\begin{cases} -81y = -81 \implies y = 1 \\ -1 - 2z = -7 \implies z = 3 \\ x + 1 + 3 = 9 \implies x = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Problema 1.2.7 (2,5 puntos) Considera los puntos $P(1, 0, 1)$ y $Q(3, -2, 1)$

- (1 punto) Calcula el plano perpendicular al segmento PQ que pasa por su punto medio.
- (1,5 puntos) Calcula el plano paralelo a la recta $r \equiv 1 - x = \frac{y - 2}{3} = z + 1$ que pasa por P y Q .

Solución:

- El plano π que buscamos es un plano mediador, es decir, el conjunto de puntos $H(x, y, z)$ tales que $d(PH) = d(QH) \implies |\overrightarrow{PH}| = |\overrightarrow{QH}| \implies$
 $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2} \implies \pi : x - y = 3$

- Tenemos $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 3, 1) \\ P_r(1, 2, -1) \end{cases} \quad y$

$$\overrightarrow{QP} = (3, -2, 1) - (1, 0, 1) = (2, -2, 0) = 2(1, -1, 0)$$

El plano π' que buscamos está definido por:

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QP} = (1, -1, 0) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1, 3, 1) \\ P(1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -x - y + 2z - 1 = 0 \implies$$

$$\pi' : x + y - 2z + 1 = 0$$

Problema 1.2.8 (2,5 puntos) Considera los puntos $A(1, 1, 2)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(1, -1, 2)$.

- (1,25 puntos) Determina el área del triángulo de vértices A , B y C .
- (1,25 puntos) Calcula D para que los puntos A , B , C y D sean los vértices consecutivos de un paralelogramo.

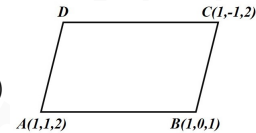
Solución:

- a) Sean $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1) - (1, 1, 2) = (0, -1, -1)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, -1, 2) - (1, 1, 2) = (0, -2, 0)$

$$S_t = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(-2, 0, 0)| = 1 \text{ u}^2$$

- b) los vértices consecutivos están representados en la figura adjunta.

$$D = A + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{BC} = (1, 1, 2) + (0, -1, 1) = (1, 0, 3)$$



1.3. Extraordinaria

Instrucciones:

- Duración: 1 hora y 30 minutos
- Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.
- Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

Problema 1.3.1 (2,5 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = a + b \cos x + c \sin x$$

Halla a , b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) &= a + b \cos x + c \sin x \implies f'(x) = -b \sin x + c \cos x \\ \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \implies a + c = 1 \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies -b = 0 \\ f(0) = -1 \implies a + b = -1 \end{cases} &\implies \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \implies f(x) = -1 + 2 \sin x \end{aligned}$$

Problema 1.3.2 (2,5 puntos) Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

- a) (1,5 puntos) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
b) (1 punto) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución:

a) $f'(x) = -e^{-x^2}(x-1)(2x+1) = 0 \implies x = 1 \text{ y } x = -\frac{1}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

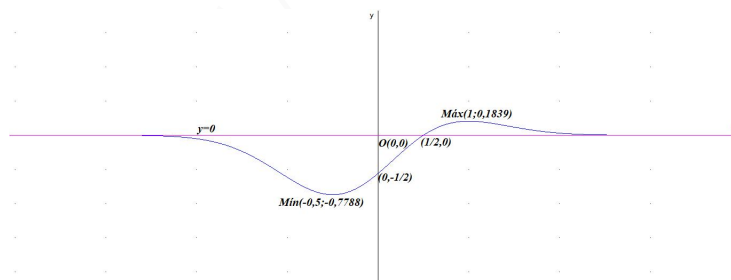
La función es creciente en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ y decreciente en el $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$ con un máximo relativo en $\left(1, \frac{1}{2e}\right) \simeq (1; 0,1839)$ y un mínimo relativo en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{e^{1/4}}\right) \simeq (-0,5; -0,7788)$

- b) Los extremos hallados en el apartado anterior son también absolutos. La función no toma valores por encima del máximo $\left(1, \frac{1}{2e}\right)$ a partir del cual decrece buscando la asíntota horizontal $y = 0$. Por otra parte la función decrece $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ desde la asíntota $y = 0$ hasta el mínimo donde empieza a crecer.

Compruebo que $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{2e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4xe^{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{2e^{x^2}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4xe^{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$



Problema 1.3.3 (2,5 puntos) Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

- a) (1 punto) Halla los puntos de intersección de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

b) (1,5 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

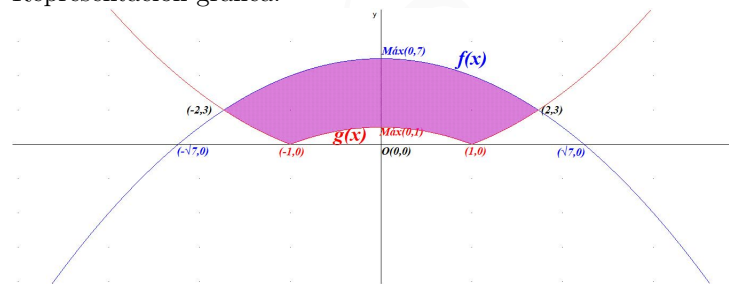
Solución:

a) $f(x) = -x^2 + 7$ es una función PAR, corta con el eje de ordenadas en $(0, 7)$ y con el eje de abscisas en los puntos $f(x) = -x^2 + 7 = 0 \Rightarrow (\pm\sqrt{7}, 0)$.
 $f'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$ y $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow (0, 7)$ es un máximo relativo.

$g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es una función PAR y continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$, que corta al eje de ordenadas en el $(0, 1)$, siendo dicho punto un máximo relativo.

$f(x) = g(x) \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = -x^2 + 7 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = -2, x = 2 \text{ no válida} & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 = -x^2 + 7 \Rightarrow 1 \neq 7 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 1 = -x^2 + 7 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = 2, x = -2 \text{ no válida} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
 Los puntos de corte de las dos gráficas serán: $(-2, 3)$ y $(2, 3)$ y el recinto de integración será $[-2, 2]$ separando las ramas de la función g .

Representación gráfica:



b) Tenemos los recintos $S_1 : [-2, -1]$, $S_2 : [-1, 1]$ y $S_3 : [1, 2]$. Como $f(x)$ está por encima de $g(x)$ en los tres recintos y hacemos $f(x) - g(x)$. Las tres integrales serán positivas.

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 7 - x^2 + 1) dx = \int_{-2}^{-1} (-2x^2 + 8) dx = -\frac{2x^3}{3} + 8x \Big|_{-2}^{-1} = \frac{10}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 7 + x^2 - 1) dx = \int_{-1}^1 6 dx = 6x \Big|_{-1}^1 = 12$$

$$S_3 = S_1 = \frac{10}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{10}{3} + 12 + \frac{10}{3} = \frac{56}{3} \simeq 18,6667 \text{ u}^2$$

Problema 1.3.4 (2,5 puntos) Halla $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int e^x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos x \implies du = -\sin x \, dx \\ dv = e^x \, dx \implies v = e^x \\ \int u \, dv = uv - \int v \, du \end{array} \right] = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = \\
\left[\begin{array}{l} u = \sin x \implies du = \cos x \, dx \\ dv = e^x \, dx \implies v = e^x \end{array} \right] &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \implies \\
F(x) &= e^x (\cos x - \sin x) - F(x) \implies 2F(x) = e^x (\cos x - \sin x) \implies F(x) = \frac{e^x (\cos x - \sin x)}{2} \\
\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx &= F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{e^{\pi/2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2} \simeq 1,905
\end{aligned}$$

BLOQUE B

Problema 1.3.5 (2,5 puntos) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1,25 puntos) Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
- (1,25 puntos) Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1 .

Solución:

$$\begin{aligned}
\text{a) Sea } X &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -a = a \implies a = 0 \\ b = c \\ -c = -b \implies b = c \\ d = -d \implies d = 0 \end{cases} \implies
\end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } X^2 = I \implies \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies b^2 = 1 \implies b = \pm 1$$

$$\text{Luego } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ o } X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) Ahora sea } Y = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ y tenemos: } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{pmatrix} -a & c \\ -b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -a = -a \\ c = -c \implies c = 0 \\ -b = b \implies b = 0 \\ d = d \end{cases} \implies Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{Además tenemos: } \begin{cases} a + d = 0 \\ ad = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1, & d = -1 \\ a = -1, & d = 1 \end{cases}$$

$$\text{Luego } Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ o } Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.3.6 (2,5 puntos) Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A , B y C . En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A , 30 de tipo B y 15 de tipo C , por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A , 10 de tipo B y 10 de tipo C , por un importe de 1250 euros.

- a) (1,25 puntos) ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A , 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C ?
- b) (1,25 puntos) Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es $\frac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A , ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

Solución:

Sean x el precio del perfume tipo A , y del tipo B y z del tipo C .

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} 20x + 30y + 15z = 2200 \\ 15x + 10y + 10z = 1250 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y + 3z = 440 \\ 3x + 2y + 2z = 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3z = 440 - 6y \\ 3x + 2z = 250 - 2y \end{cases} \Rightarrow \\ &\begin{cases} 4x + 3z = 440 - 6\lambda \\ 3x + 2z = 250 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2(-65 + 3\lambda) \\ y = \lambda \\ z = 10(32 - \lambda) \end{cases} \\ 25x + 10y + 16z &= 50(-65 + 3\lambda) + 10\lambda + 160(32 - \lambda) = 1870 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 6y + 3z = 440 \\ 3x + 2y + 2z = 250 \\ z = \frac{2}{5}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y + 3z = 440 \\ 3x + 2y + 2z = 250 \\ 2x - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \text{ € tipo } A \\ y = 30 \text{ € tipo } B \\ z = 20 \text{ € tipo } C \end{cases}$$

Resolución del sistema por Gauss:

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 3 & 440 \\ 3 & 2 & 2 & 250 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 4F_2 - 3F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 3 & 440 \\ 0 & -10 & -1 & -320 \\ 0 & -6 & -13 & -440 \end{array} \right) = \\ &\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 3F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 3 & 440 \\ 0 & -10 & -1 & -320 \\ 0 & 0 & -62 & -1240 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible determinado.} \\ &\begin{cases} z = \frac{-1240}{-62} = 20 \\ -10y - 20 = -320 \Rightarrow y = 30 \\ 4x + 180 + 60 = 440 \Rightarrow x = 50 \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 1.3.7 (2,5 puntos) Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- a) (1 punto) Estudia la posición relativa de π y r .
- b) (1,5 puntos) Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r .

Solución:

$$\vec{u}_\pi = (1, -2, 1) \text{ y } r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 0) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases}$$

- a) Sustituimos r en π : $(1 + 2\lambda) - 2\lambda + 1 = 2 \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow r \subset \pi$
 Se puede comprobar que $P_r \in \pi \Rightarrow 1 - 0 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow P_r \in \pi$ y que $\vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = (2, 1, 0) \cdot (1, -2, 1) = 2 - 2 + 0 = 0$

b) Tenemos $s \perp r \Rightarrow \vec{u}_s \perp \vec{u}_r$ y $s \subset \pi \Rightarrow \vec{u}_s \perp \vec{u}_\pi$.

$$\text{Luego } \vec{u}_s = \vec{u}_r \times \vec{u}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -5)$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -2, -5) \\ P_s = P(2, -1, -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -2 - 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 1.3.8 (2,5 puntos) Considera los puntos $A(4, 0, 0)$ y $B(0, 2, 0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B .

Solución:

$$C \in OXZ \Rightarrow C \in \{y = 0\} \Rightarrow C(a, 0, b)$$

$$|\vec{AB}| = |(-4, 2, 0)| = 2\sqrt{5}$$

$$|\vec{AC}| = |(a, 0, b) - (4, 0, 0)| = |(a - 4, 0, b)| = \sqrt{(a - 4)^2 + b^2}$$

$$|\vec{BC}| = |(a, 0, b) - (0, 2, 0)| = |(a, -2, b)| = \sqrt{a^2 + 4 + b^2}$$

$$|\vec{AC}| = |\vec{BC}| \Rightarrow (a - 4)^2 + b^2 = a^2 + 4 + b^2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$|\vec{BC}| = |\vec{AB}| \Rightarrow a^2 + 4 + b^2 = 20$$

$$\begin{cases} a^2 + 4 + b^2 = 20 \\ a = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{\sqrt{55}}{2} \\ a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{55}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Luego } C\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{55}}{2}\right) \text{ o } C\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{55}}{2}\right)$$

“www.musat.net”

Capítulo 2

Aragón

2.1. Ordinaria

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

Problema 2.1.1 (2 puntos) Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

- a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a .
- b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$ calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY .

Solución:

- a) f es continua en las dos ramas para $x \neq 0$, hay que estudiar la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2 = a \implies f \text{ es continua en } x = 0 \text{ cuando } a = 2. \text{ Si } a \neq 2 \implies \text{la función es continua en } \mathbb{R} - \{0\}.$$

- b) Si $a = 1 \implies f(x)$ no es continua en $x = 0$ y, por tanto, no es derivable en ese punto.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R} \implies f'(x) = \frac{e^{2x}(2x - 1) + 1}{x^2} \quad \forall x \neq 0$$

$$f(1) = e^2 - 1 \text{ y } m = f'(1) = e^2 + 1 \xrightarrow{y - f(1) = f'(1)(x - 1)} y - e^2 + 1 = (e^2 + 1)(x - 1) \implies$$

$$\text{recta tangente : } y = (e^2 + 1)x - 2$$

Puntos de corte:

- Con OY : hacemos $x = 0 \implies (0, -2)$
- Con OX : hacemos $y = 0 \implies (e^2 + 1)x - 2 = 0 \implies \left(\frac{2}{e^2 + 1}, 0\right)$

Problema 2.1.2 (2 puntos) Calcula justificadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 5} - (x + 2)]$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 5} - (x + 2)] &= [\infty - \infty] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 5} - (x + 2)][\sqrt{x^2 + 5} + (x + 2)]}{\sqrt{x^2 + 5} + (x + 2)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5 - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 + 5} + (x + 2)} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 1}{\sqrt{x^2 + 5} + (x + 2)} &= \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2 + 5} + (x + 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{2x} = -2 \end{aligned}$$

Problema 2.1.3 (2 puntos)

- a) (1,2 puntos) Calcula a , b y $c \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$f(x) = ax + b \sin x \cos x + c$$

sea una primitiva de $g(x) = \sin^2 x$.

(Nota: recuerda que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \forall x \in \mathbb{R}$)

- b) (0,8 puntos) Sabiendo que $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ demuestra que

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= a + b(\cos^2 x - \sin^2 x) = a + b(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = a + b(1 - 2\sin^2 x) = a + b - 2b\sin^2 x \\ g(x) &= \sin^2 x = a + b - 2b\sin^2 x \implies a = -b = \frac{1}{2} \text{ y } b = -\frac{1}{2}. \text{ } c \text{ puede ser cualquier valor real.} \end{aligned}$$

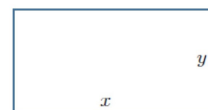
$$\text{b) Sea } h(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x \implies h'(x) = 2 \cos 2x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \implies$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Problema 2.1.4 (2 puntos) Demuestra que, entre todos los rectángulos de perímetro P cm, el de mayor área es el cuadrado.

Solución:

$$\begin{aligned} P &= 2x + 2y \implies y = \frac{P - 2x}{2} \\ S(x, y) &= xy \implies S(x) = \frac{Px - 2x^2}{2} \\ S'(x) &= \frac{P - 4x}{2} = 0 \implies x = \frac{P}{4} \end{aligned}$$



$$S''(x) = -2 \implies S''\left(\frac{P}{4}\right) = -2 < 0 \implies x = \frac{P}{4} \text{ es un máximo relativo.}$$

$$\text{Si } x = \frac{P}{4} \implies y = \frac{P - \frac{P}{2}}{2} = \frac{P}{4} \implies x = y = \frac{P}{4} \implies \text{el rectángulo de mayor área es un cuadrado.}$$

Problema 2.1.5 (2 puntos) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = A^T \cdot B + I_2$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A , e I_2 es la matriz identidad de orden 2.

- a) (0,8 puntos) Calcula C^{2n} , con $n \in \mathbb{N}$
 b) (1,2 punto) Resuelve la ecuación $CX = 5(A^T \cdot B)$.

Solución:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } C^1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, C^4 = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}, C^6 = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix}, \dots, C^{2n} = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } CX = 5(A^T \cdot B) \implies X = 5C^{-1}(A^T \cdot B) = 5 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$5 \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 2.1.6 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}$, con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro.

- a) (1,2 puntos) Estudia el rango de la matriz A en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$
 b) (0,8 puntos) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $A \cdot X = O$ cuando $m = 6$.

Solución:

$$\text{a) } |A| = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & m-6 \end{vmatrix} = -3(m+2) = 0 \implies m = -2 \quad \text{Luego si } m \neq -2 \implies$$

$$\text{Rango}(A) = 2 \quad \text{y si } m = -2 \implies A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & -8 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 1.$$

- b) Un sistema homogéneo es siempre compatible, por el apartado anterior será compatible indeterminado y podemos eliminar una de las ecuaciones, en nuestro caso la tercera para $m = 6$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ -4x + 6y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 2.1.7 (2 puntos) Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A , B y C . El producto A , es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B

es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10% y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21%. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483€. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A , 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C , es de 1954€. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Solución:

Sean x el precio sin IVA del artículo A , y del B y z del C .

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 483 \\ 100 \cdot 0,04x + 10 \cdot 0,1y + 100 \cdot 0,21z = 1954 \\ z = 4x + 8y \end{cases} \implies \begin{cases} x + 2y + 5z = 483 \\ 4x + y + 21z = 1954 \\ 4x + 8y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \text{ €} \\ y = 10 \text{ €} \\ z = 92 \text{ €} \end{cases}$$

Los precios con IVA serían:

- El de A : $3 \cdot 1,04 = 3,12 \text{ €}$
- El de B : $10 \cdot 1,1 = 11 \text{ €}$
- El de C : $92 \cdot 1,21 = 111,32 \text{ €}$

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 483 \\ 4 & 1 & 21 & 1954 \\ 4 & 8 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 483 \\ 0 & -7 & 1 & 22 \\ 0 & 0 & -21 & -1932 \end{array} \right) \implies$$

$$\begin{cases} -21z = -1932 \implies z = 92 \\ -7y + 92 = 22 \implies y = 10 \\ x + 20 + 460 = 483 \implies x = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = 10 \\ z = 92 \end{cases}$$

Problema 2.1.8 (2 puntos) Dados los puntos $P_1(-2, 1, 1)$, $P_2(0, a, -2)$, $P_3(-1, 1, -1)$ y $P_4(1, 3, -3)$, se pide:

- a) (1,2 puntos) Calcula los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro con vértices P_1 , P_2 , P_3 y P_4 tenga volumen $1/3$.
- b) (0,8 puntos) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los cuatro puntos sean coplanarios.

Solución:

- a) Sean $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, a, -2) - (-2, 1, 1) = (2, a-1, -3)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (-1, 1, -1) - (-2, 1, 1) = (1, 0, -2)$ y $\overrightarrow{P_1P_4} = (1, 3, -3) - (-2, 1, 1) = (3, 2, -4)$

$$V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}] \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 & a-1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |2(2-a)| = \frac{1}{3} |2-a| = \frac{1}{3} \implies$$

$$|2-a| = 1 \implies \begin{cases} 2-a = 1 \implies a = 1 \\ 2-a = -1 \implies a = 3 \end{cases}$$

- b) Los cuatro puntos son coplanarios si $[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}] = 0 \implies 2(2-a) = 0 \implies a = 2$

Problema 2.1.9 (2 puntos) Una asignatura de matemáticas de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza tiene 99 personas matriculadas (54 alumnas y 45 alumnos). En primera convocatoria aprueban la asignatura 49 personas (28 alumnas y 21 alumnos).

- a) (1,2 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria?, ¿y de alumnos?
- b) (0,8 puntos) Si elegimos aleatoriamente a una persona que haya aprobado la asignatura en primera convocatoria, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Solución:

Sean H alumno, M alumna, A aprueba y $\bar{A}$ no aprueba.

$$\text{a) } P(A|M) = \frac{28}{54} = 0,5185 = 51,85\% \text{ y } P(A|H) = \frac{21}{45} = 0,4667 = 46,67\%$$

$$\text{b) } P(M|A) = \frac{28}{49} = 0,5714$$

Problema 2.1.10 (2 puntos) Vamos a suponer que durante el año 2023, las llegadas de turistas a nuestro país se realizaron de la siguiente forma: un 55 % llegó en avión, un 30 % llegó en tren, un 10 % llegó en autobús y un 5 % llegó en barco. Además, sabemos que, de todos estos viajeros, visitaron Aragón el 50 % de los que vinieron en avión, el 60 % de los que vinieron en tren, el total de los que viajaron en autobús, y un 20 % de los que vinieron en barco. Con estos datos, se pide:

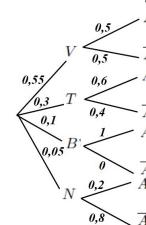
- a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón.
- b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren.

Solución:

Sean V llega en avión, T en tren, B autobús, N barco, A visita Aragón y $\bar{A}$ no visita Aragón.

$$\text{a) } P(A) = P(A|V)P(V) + P(A|T)P(T) + P(A|B)P(B) + P(A|N)P(N) = 0,5 \cdot 0,55 + 0,6 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,05 = 0,565$$

$$\text{b) } P(B \cup T|A) = \frac{P(A \cap (B \cup T))}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap T)}{P(A)} = \frac{1 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,3}{0,565} = 0,4956$$



2.2. Extraordinaria

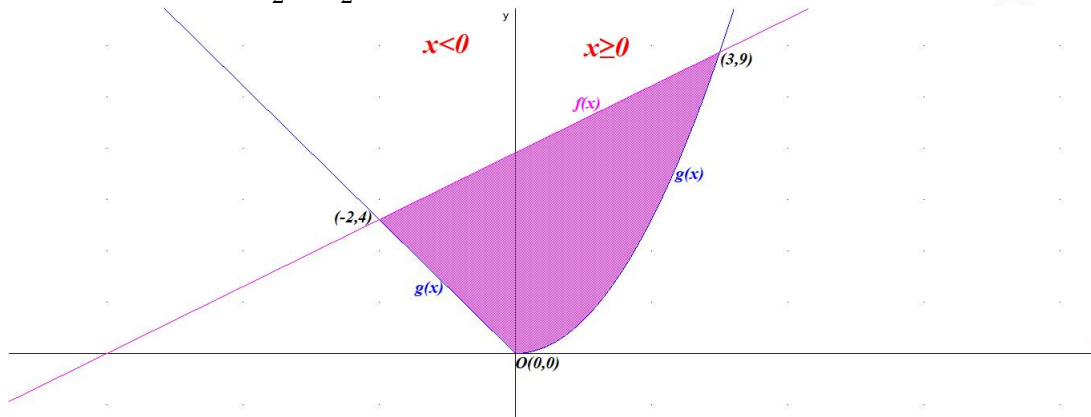
En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

Problema 2.2.1 (2 puntos) Dada la siguiente función

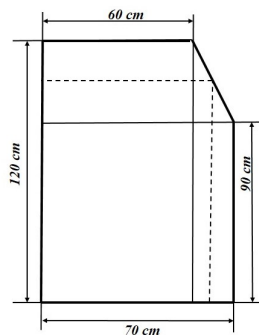
$$f(x) = \begin{cases} a - \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - b \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

S_2 es positiva por estar f por encima de g en $[0, 3]$

$$S = |S_1| + |S_2| = 6 + \frac{27}{2} = \frac{39}{2} = 19,5 \text{ u}^2$$



Problema 2.2.4 (2 puntos)



En una cristalería, a un cristal rectangular de 120 centímetros de alto y 70 centímetros de ancho se le ha cortado por error la esquina superior derecha como se ve en el dibujo. Quieren recortar dicho cristal nuevamente de forma rectangular, de modo que la superficie sea la máxima posible haciendo como máximo dos cortes. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo cristal rectangular recortado?

Solución:

Tenemos: $\frac{x}{10} = \frac{30-y}{30} \Rightarrow y = 30 - 3x$

$$S(x, y) = (60 + x)(90 + y) \Rightarrow$$

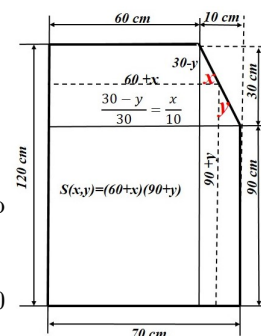
$$S(x) = (60 + x)(120 - 3x) = -3x^2 - 60x + 7200$$

$$S'(x) = -6x - 60 = 0 \Rightarrow x = -10$$

La función $S(x)$ es decreciente en el intervalo $[0, 10]$ siendo su valor máximo cuando $x = 0 \Rightarrow S(x) = 7200$

En conclusión:

Hay que cortar un cristal de $60 + 0 = 60$ cm de ancho y $90 + 30 - 3 \cdot 0 = 120$ cm de alto con un área máxima de 7200 cm^2



Problema 2.2.5 (2 puntos) De una matriz B sabemos que cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B$$

donde I_3 es la matriz identidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa de B .

Solución:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ tenemos:

$$AB = I - CB \implies AB + CB = I \implies (A + C)B = I \implies$$

$$\exists B^{-1} = A + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}$$

Problema 2.2.6 (2 puntos) Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 4 & 4 & 2m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

a) (1,2 puntos) Analiza el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema $A \cdot X = B$ para el valor $m = 2$.

Solución:

a) $|A| = 2m^2 - 6m + 4 = 0 \implies m = 1$ y $m = 2$.

• Si $m \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

• Si $m = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$

• Si $m = 2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$

$$\text{b) } A \cdot X = B \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 12 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies$$

sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2.2.7 (2 puntos) En un laboratorio de una empresa farmacéutica se fabrican tres tipos de medicamentos, M_1 , M_2 y M_3 , a partir de tres principios activos, A_1 , A_2 y A_3 , distintos. En la siguiente tabla se reflejan los miligramos de principio activo necesarios para fabricar un gramo de cada medicamento:

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
para 1 g de M_1	10	10	20
para 1 g de M_2	10	20	30
para 1 g de M_3	20	30	50

En dicho laboratorio se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1 , 90 gramos del activo A_2 y 160 gramos del activo A_3 . Se va a cerrar por vacaciones y la empresa quiere no dejar principios activos en el laboratorio. ¿Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio fabricando los medicamentos M_1 , M_2 y M_3 ? En caso afirmativo, ¿qué cantidades de cada medicamento podrá fabricar el laboratorio con dichos principios activos?

Solución:

Sean x los gramos del medicamento M_1 , y los gramos del medicamento M_2 y z los gramos del medicamento M_3 .

$$\begin{cases} 10x + 10y + 20z = 70000 \\ 10x + 20y + 30z = 90000 \\ 20x + 30y + 50z = 160000 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + 2z = 7000 \\ x + 2y + 3z = 9000 \\ 2x + 3y + 5z = 16000 \end{cases}$$

Resolvemos por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 1 & 2 & 3 & 9000 \\ 2 & 3 & 5 & 16000 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 0 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 1 & 2000 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 0 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 7000 \\ y + z = 2000 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5000 - \lambda \\ y = 2000 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Dando valores a λ se pueden encontrar múltiples soluciones, siendo válidas solo las enteras positivas. Por ejemplo con $\lambda = 0$ tenemos $x = 5000$ gramos de medicamento M_1 , $y = 2000$ gramos de medicamento M_2 y $z = 0$ gramos de medicamento M_3 .

Problema 2.2.8 (2 puntos) Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases}$ y además pasa por el punto $(3, 2, 1)$.

Solución:

$$\vec{u}_\pi = \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, -3) = -3(0, 1, 1) \implies \pi : y + z + \lambda = 0 \xrightarrow{P(3,2,1) \in \pi} 2 + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -3 \implies \pi : y + z - 3 = 0$$

Problema 2.2.9 (2 puntos) Sean $A(1, 2, 3)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(2, 2, 2)$ tres puntos en el espacio y $\vec{v}_1$ el vector que va de A a B ; $\vec{v}_2$ el vector que va de B a C y $\vec{v}_3$ el vector que va de C a A .

a) (1 punto) Estudia si los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes.

b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A , B , C .

Solución:

a) Tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \overrightarrow{AB} = (1, 0, -1) - (1, 2, 3) = (0, -2, -4) \\ \vec{v}_2 &= \overrightarrow{BC} = (2, 2, 2) - (1, 0, -1) = (1, 2, 3) \\ \vec{v}_3 &= \overrightarrow{CA} = (1, 2, 3) - (2, 2, 2) = (-1, 0, 1) \end{aligned}$$

$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son linealmente dependientes. Uno de los vectores se podría poner como combinación lineal de los otros dos.

b) Tenemos $\vec{AB} = (0, -2, -4)$ y $\vec{AC} = (1, 0, -1)$

$$S_t = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(2, -4, 2)| = \frac{1}{2} |2(1, -2, 1)| = \sqrt{6} u^2$$

Problema 2.2.10 (2 puntos) El 84 % de los exámenes de Matemáticas II de la fase genérica en la convocatoria ordinaria de la EvAU en 2022 en Aragón obtuvieron una nota mayor o igual a 5.

a) (0,8 puntos) Si seleccionamos aleatoriamente 15 de aquellos exámenes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 tengan una nota inferior a 5?

b) (1,2 puntos) Con los 15 exámenes anteriores, ¿es más probable que menos de 2 exámenes tengan nota inferior a 5 o que más de 2 exámenes tengan nota inferior a 5?

Solución:

$$B(15; 0,16) \quad n = 15, \quad p = 0,16, \quad q = 0,84$$

$$\text{a) } P(X = 2) = \binom{15}{2} \cdot 0,16^2 \cdot 0,84^{13} = 0,2786506004$$

$$\text{b) } P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{15}{0} \cdot 0,16^0 \cdot 0,84^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0,16^1 \cdot 0,84^{14} = 0,2821337329$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$$

$$1 - \left(\binom{15}{0} \cdot 0,16^0 \cdot 0,84^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0,16^1 \cdot 0,84^{14} + \binom{15}{2} \cdot 0,16^2 \cdot 0,84^{13} \right) = 0,4392156666$$

Es más probable que más de dos exámenes tengan una nota inferior a 5 que más de dos exámenes tengan nota inferior a 5.

Capítulo 3

Asturias

3.1. Ordinaria

- Responda en el pliego en blanco a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Problema 3.1.1 (2,5 puntos) En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C . Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C . El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A , 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C . Cada semana se compran 410 unidades del alimento A , 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C . Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

- (0,75 puntos) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.
- (1 punto) ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?
- (0,75 puntos) Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B , ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

Solución:

Sean x el número de perros de la raza 1, y de la raza 2 y z de la raza 3.

	A	B	C
raza 1	2	0	1
raza 2	1	0	1
raza 3	3	1	3
	410	30	310

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y + 3z = 410 \\ z = 30 \\ x + y + 3z = 310 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & 3 & 310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & -1 & -3 & -210 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z = 30 \\ -y - 90 = -210 \Rightarrow y = 120 \\ x + 120 + 90 = 310 \Rightarrow x = 100 \end{cases}$$

Pueden coexistir 100 perros de la raza 1, 120 de la raza 2 y 30 de la raza 3.

$$\text{c) } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & A & B & C \\ \hline \text{raza 1} & 2 & 0 & 1 \\ \hline \text{raza 2} & 1 & 1 & 1 \\ \hline \text{raza 3} & 3 & 1 & 3 \\ \hline & 410 & 30 & 310 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 410 \\ y + z = 30 \\ x + y + 3z = 310 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & 3 & 310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & -1 & -3 & -210 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & -1 & -3 & -210 \\ 0 & 0 & -2 & -180 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2z = -180 \Rightarrow z = 90 \\ -y - 270 = -210 \Rightarrow y = -60 \\ x - 60 + 270 = 310 \Rightarrow x = 100 \end{cases}$$

Para que fuese viable las soluciones no deben ser negativas, por tanto, no hay posibilidad de solución.

Problema 3.1.2 (2,5 puntos) Sea $x \in \mathbb{R}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) (1,5 puntos) Da el $rg(A)$ según los valores de x . Para $x = 1$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.
- b) (1 punto) Toma $x = 1$. Supongamos que B es una matriz 3×3 con $\det(B) = 5$. Calcula $\det\left(\frac{1}{5}AB\right)$. Razona cuál debe ser el valor de $\det\left(\frac{1}{5}AB\right)$.

Solución:

a) $|A| = 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

☛ Si $x = 2 \Rightarrow |A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

☛ Si $x \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

Si $x = 1 \Rightarrow |A| = 1 \Rightarrow \exists A^{-1}$: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Si $x = 1 \Rightarrow |A| = 1 \Rightarrow |AB| = |A||B| = 1 \cdot 5 = 5$

$$\left| \frac{1}{5}AB \right| = \left(\frac{1}{5} \right)^3 |AB| = \left(\frac{1}{5} \right)^3 \cdot 5 = \frac{1}{25}$$

Problema 3.1.3 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{x-4}{1-x}$

- a) (1 punto) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

- b) (1 punto) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- c) (0,5 puntos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas:

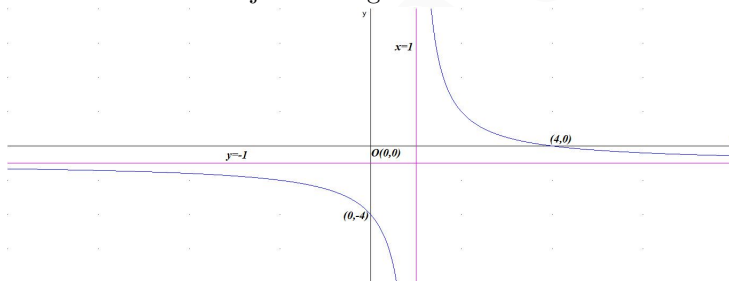
- Verticales: $x = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-4}{1-x} = \left[\frac{-3}{0^+} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-4}{1-x} = \left[\frac{-3}{0^-} \right] = +\infty$
- Horizontales: $y = -1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-4}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{1-x} = -1$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

- b) $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \neq 0 \Rightarrow$ no hay extremos relativos. Como $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
- $f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3} \neq 0 \Rightarrow$ no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función es convexa $\cap$ en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava $\cup$ en el $(1, \infty)$

- c) Con estos datos dibujamos las gráficas:



Problema 3.1.4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

- a) (1,25 punto) Calcula una primitiva que pase por el punto $(0, 1)$.
- b) (1,25 punto) Calcula el área limitada por f , el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

a)
$$F(x) = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - 2x \\ dt = -2dx \\ dx = -\frac{1}{2}dt \end{array} \right] = \int \sin t \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} \int \sin t dt =$$

$$\frac{\cos t}{2} + C = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} + C$$

$$F(0) = 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} + 1$$

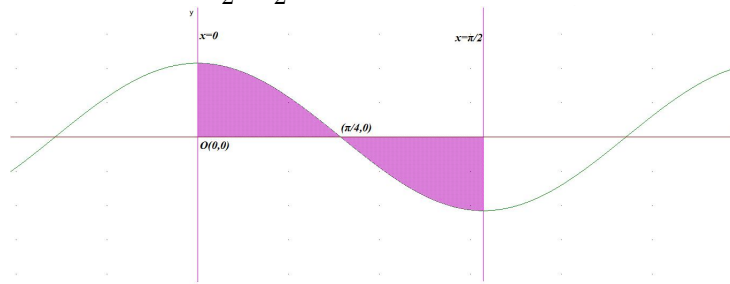
- b) Comprobamos si hay algún punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$f(x) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ la función corta al eje OX en un punto interior del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que tendremos dos recintos de integración con sus áreas correspondientes: $S_1 : \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ y $S_2 : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. El área total será $S = |S_1| + |S_2|$

$$S_1 = \int_0^{\pi/4} f(x) dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x) dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ u}^2$$



Problema 3.1.5 (2,5 puntos) Dado el punto $A = (0, -1, 1)$ y el plano $\pi : x + y + z + 3 = 0$.

- a) (1,5 puntos) Calcula el punto B simétrico de A respecto de π .
b) (1 puntos) Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A , $C = (-2, -3, 1)$ y el origen de coordenadas.

Solución:

- a) Seguimos el siguiente método:

• Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $A \in t$:

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (1, 1, 1) \\ P_t = A(0, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

• Calculamos el punto A' de corte de t con π :

$$\lambda + (-1 + \lambda) + (1 + \lambda) + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow A'(-1, -2, 0)$$

• A' es el punto medio de A con B :

$$\frac{A + B}{2} = A' \Rightarrow B = 2A' - A = (-2, -4, 0) - (0, -1, 1) = (-2, -3, -1)$$

$$B(-2, -3, -1)$$

- b) $\vec{OA} = (0, -1, 1) - (0, 0, 0) = (0, -1, 1)$ y $\vec{OC} = (-2, -3, 1) - (0, 0, 0) = (-2, -3, 1)$

$$S_t = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(2, -2, -2)| = \sqrt{3} \text{ u}^2$$

Problema 3.1.6 (2,5 puntos) Se consideran los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, 1, 3)$ y $D = (-1, 0, 1)$.

- a) (0,75 puntos) Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.
- b) (0,75 puntos) Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A , B y C .
- c) (1 punto) Calcula el punto P intersección de $r \equiv x + 1 = -y = z - 1$ y $\pi \equiv x - y - z = 1$.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) - (1, 1, 1) = (0, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 3) - (1, 1, 1) = (-2, 0, 2)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, 1) - (1, 1, 1) = (-2, -1, 0)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Los cuatro puntos no son coplanarios.}$$

b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2) = 2(-1, 0, 1) \\ A(1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x - y - z + 3 = 0 \Rightarrow$

$$\pi : x + y + z - 3 = 0$$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{ur} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

c) $r : \begin{cases} \overrightarrow{ur} = (1, -1, 1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{sustituimos en } \pi : x - y - z - 1 = 0 \Rightarrow (-1 + \lambda) - (-\lambda) - (1 + \lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow P(2, -3, 4)$$

Problema 3.1.7 (2,5 puntos) En una empresa 55% de los trabajadores han hecho el curso ‘ChatGPT’. El 30% de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso ‘IA’, el 40% de los que no han hecho el curso ‘ChatGPT’ han realizado el curso ‘IA’.

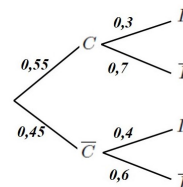
- a) (1,25 puntos) Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el curso ‘IA’?
- b) (1,25 puntos) Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso ‘IA’, ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga el curso de ‘ChatGPT’?

Solución:

Sean C ha hecho curso de ‘ChatGPT’, $\overline{C}$ no ha hecho curso de ‘ChatGPT’, I ha hecho curso de ‘IA’ y $\overline{I}$ no ha hecho curso de ‘IA’

a) $P(I) = P(I|C)P(C) + P(I|\overline{C})P(\overline{C}) = 0,55 \cdot 0,3 + 0,45 \cdot 0,4 = 0,345$

b) $P(C|\overline{I}) = \frac{P(\overline{I}|C)P(C)}{P(\overline{I})} = \frac{0,55 \cdot 0,7}{1 - 0,345} = 0,5878$



Problema 3.1.8 (2,5 puntos) Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 individuos sobre el tipo de café que compran. Los resultados son: 8000 dicen comprar café torrefacto, 4000 café natural y 3000 ambos tipos de café.

- a) (0,5 puntos) Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos tipos de café?
- b) (1 punto) Se selecciona un individuo y se le pregunta si compra café natural. Se repite la operación 100 veces, pudiendo repetirse el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de 50 individuos compre café natural.
- c) (1 punto) Si en el apartado anterior sólo se seleccionasen 10 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que 5 compren café natural?

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0,5$, $F(0,15) = 0,5596$, $F(2,1433) = 0,9838$, $F(0,9793) = 0,8340$, $F(0,5596) = 0,7112$, $F(0,6294) = 0,7356$, $F(0,8159) = 0,7939$, $F(0,9) = 0,8159$, $F(1,28) = 0,9$.

Solución:

Sean T toma café torrefacto y N toma café natural.

- a) $P(T) = \frac{8000}{10000} = 0,8$, $P(N) = \frac{4000}{10000} = 0,4$ y $P(T \cap N) = \frac{3000}{10000} = 0,3$.
 $P(T \cup N) = P(T) + P(N) - P(T \cap N) = 0,8 + 0,4 - 0,3 = 0,9$
- b) $B(100; 0,4)$. Tenemos $n = 100 \geq 30$, $np = 40 \geq 5$ y $nq = 60 \geq 5$ luego:

$$B(100; 0,4) \stackrel{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(40; 4,899)$$

$$P(X \leq 50) = P\left(Z \leq \frac{50,5 - 40}{4,899}\right) = P(Z \leq 2,1433) = 0,9838$$

- c) $B(10; 0,4)$: $P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^5 = 0,20066$

3.2. Extraordinaria

- ☛ Responde en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.
- ☛ Indique en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderá: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Problema 3.2.1 (2,5 puntos) Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 € cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

- a) (0,75 puntos) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modele el problema y escríbelo matricialmente.
- b) (1 punto) Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.

- c) (0,75 puntos) Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar 10 piezas?

Solución:

Sean x el número de tazas producidas, y de platos y z de teteras.

$$a) \begin{cases} 5x + 4y + 8z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 8 \\ 5x + 4y + 8z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 50 \\ 3 & 4 & 3 & 26 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 3z = 12 \Rightarrow z = 4 \\ -y + 12 = 10 \Rightarrow y = 2 \\ x + 2 + 4 = 8 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Se han fabricado 2 tazas, 2 platos y 4 teteras.

- c) Ahora tenemos;

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 5x + 4y + 5z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 5 & 4 & 5 & 50 \\ 3 & 4 & 3 & 26 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$$

No sería posible fabricar las 10 piezas.

Problema 3.2.2 (2,5 puntos) Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) (0,75 puntos) Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC . ¿Cuál sería la dimensión de su matriz resultante si pudiese realizarse?
- b) (1,75 puntos) Calcula según los valores de x el rango de A . Para $x = 0$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

Solución:

- a) $\overset{3 \times 1}{C} \cdot \overset{3 \times 3}{A} \cdot \overset{1 \times 3}{B}$ no se puede multiplicar, el número de columnas de C no coincide con el número de filas de A , y el número de columnas de A no coincide con el número de filas de B .
 $\overset{1 \times 3}{B} \cdot \overset{3 \times 3}{A} \cdot \overset{3 \times 1}{C} = \overset{1 \times 1}{BAC}$ sí se puede multiplicar, el número de columnas de B coincide con el número de filas de A , y el número de columnas de A coincide con el número de filas de C . En este caso la matriz resultante tendría de dimensión el número de filas de B por el número de columnas de C , es decir 1×1 .

b) $|A| = 2x + 12 = 0 \Rightarrow x = -6$.

☛ Si $x \in \mathbb{R} - \{-6\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

☛ Si $x = -6 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Si $x = 0 \Rightarrow |A| = 12 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

Problema 3.2.3 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x}$.

- (1 punto) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.
- (1 punto) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- (0,5 puntos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntotas:

☛ Verticales: $x = 1$.
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4}{1 - x} = \left[\frac{-3}{0^+} \right] = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4}{1 - x} = \left[\frac{-3}{0^-} \right] = +\infty$

☛ Horizontales: No hay.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{1 - x} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{1 - x} = -\infty$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$
 $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x - x^2} = -1$
 $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 4}{1 - x} + x \right) = -1$
 $y = -x - 1$

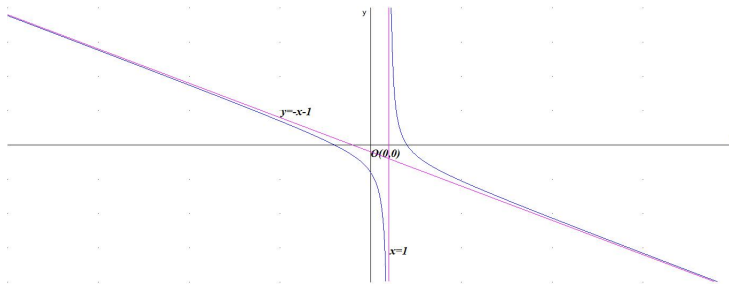
b) $f'(x) = -\frac{x^2 - 2x + 4}{(x - 1)^2} < 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow f$ es decreciente en todo el dominio de la función y, por tanto, no tiene extremos relativos.

$f''(x) = \frac{6}{(x - 1)^3} \neq 0 \Rightarrow f$ no tiene puntos de inflexión:

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función es convexa $\cap$ en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava $\cup$ en el $(1, \infty)$.

c) Gráfica:



Problema 3.2.4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \sin(\pi - 2x)$.

- a) (1,25 puntos) Calcula una primitiva que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
- b) (1,25 puntos) Calcula el área limitada por f , las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

Solución:

$$\text{a) } F(x) = \int \sin(\pi - 2x) dx = \left[\begin{array}{l} t = \pi - 2x \\ dt = -2dx \\ dx = \frac{dt}{-2} \end{array} \right] = \int \sin t \frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2} \int \sin t dt = \frac{\cos t}{2} + C =$$

$$\frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + C$$

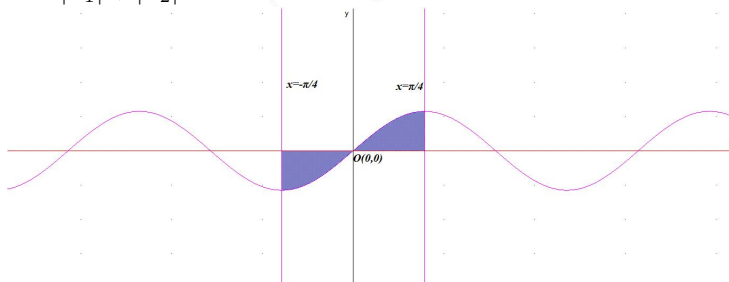
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + C = 1 \implies C = \frac{1}{2} \implies F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x) + 1}{2}$$

- b) Analizamos posibles puntos de corte de la función con el eje de abscisas en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ y tenemos $\sin(\pi - 2x) = 0 \implies x = 0$ y las no válidas $x = \pm \frac{\pi}{2}$ luego hay dos recintos de integración: $S_1 : \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ y $S_2 : \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$S_1 = \int_{-\pi/4}^0 \sin(\pi - 2x) dx = F(0) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$S_2 = \int_0^{\pi/4} \sin(\pi - 2x) dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 \text{ u}^2$$



Problema 3.2.5 (2,5 puntos) Se consideran los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (2, 1, 3)$.

- a) (1,25 puntos) Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.
- b) (1,25 puntos) Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi' \equiv x + y + z = 3$ y que contiene al punto $Q = (1, 0, 1)$.

Solución:

- a) Se trata de un plano mediador, un punto de él $P(x, y, z)$ tiene que cumplir:

$$d(A, P) = d(B, P) \implies |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \implies$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} \implies$$

$$\pi : 4x + 4y + 4z - 12 = 0 \implies \pi' : x + y + z - 3 = 0$$

$$\text{b) } r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi'}} = (1, 1, 1) \\ P_r = Q(1, 0, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies$$

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \implies x-1 = y = z-1$$

Problema 3.2.6 (2,5 puntos) Se consideran los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, 1, 3)$, y $D = (-1, 0, 1)$,

- a) (0,75 puntos) Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.
b) (0,75 puntos) Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A , B y C .
c) (1 punto) Calcula el punto P intersección de r y π del apartado anterior.

Solución:

- a) Sean $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) - (1, 1, 1) = (0, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 3) - (1, 1, 1) = (-2, 0, 2)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, 1) - (1, 1, 1) = (-2, -1, 0)$.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies$$

Los cuatro puntos no son coplanarios.

$$\text{b) } \pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2) \\ A = (1, 1, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2(x+y+z-3) = 0 \implies$$

$$\pi : x + y + z - 3 = 0$$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi}} = (1, 1, 1) \\ P_r = D(-1, 0, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- c) Sustituimos r en $\pi \implies (-1 + \lambda) + \lambda + (1 + \lambda) - 3 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P(0, 1, 2)$

Problema 3.2.7 (2,5 puntos) En un instituto el 55 % de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30 % de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias cursan como optativa la asignatura “Proyecto de Investigación Integrado” y de los que no hacen este Bachillerato, el 40 % cursan esta asignatura como optativa.

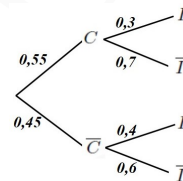
- a) (1,25 punto) Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura “Proyecto de Investigación Integrado”?
- b) (1,25 puntos) Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura “Proyecto de Investigación Integrado”, ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

Solución:

Sean los sucesos C Bachillerato de Ciencias, $\bar{C}$ otro bachillerato, I cursa como optativa “Proyecto de Investigación Integrado” y $\bar{I}$ no cursa como optativa “Proyecto de Investigación Integrado”.

$$\text{a) } P(I) = P(I|C)P(C) + P(I|\bar{C})P(\bar{C}) = 0,3 \cdot 0,55 + 0,4 \cdot 0,45 = 0,345$$

$$\text{b) } P(C|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|C)P(C)}{P(\bar{I})} = \frac{0,7 \cdot 0,55}{1 - 0,345} = 0,58779$$



Problema 3.2.8 (2,5 puntos) En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

- a) (0,75 puntos) ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?
- b) (0,75 puntos) Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?
- c) (1 punto) Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?

(Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0,5$, $F(0,15) = 0,5596$, $F(0,3333) = 0,6294$, $F(0,385) = 0,65$, $F(0,5596) = 0,7112$, $F(0,6294) = 0,7356$, $F(0,8159) = 0,7939$.)

Solución:

$$N(85; 15)$$

$$\text{a) } P(X \geq 90) = P\left(Z \geq \frac{90 - 85}{15}\right) = P(Z \geq 0,3333) = 1 - P(Z \leq 0,3333) = 1 - 0,6294 = 0,3706 \Rightarrow 37,06\%$$

$$\text{b) } 10000 \cdot P(x \leq 90) = 10000(1 - 0,3706) = 6294 \text{ habitantes.}$$

$$\text{c) } P(X \leq 70) = \frac{5596}{10000} = 0,5596$$

$$P(X \leq 70) = P\left(Z \leq \frac{70 - \mu}{15}\right) = 0,5596 \Rightarrow \frac{70 - \mu}{15} = 0,15 \Rightarrow \mu = 67,75$$

La media ha descendido notablemente y podemos afirmar que la campaña ha funcionado.

“www.musat.net”

Capítulo 4

Cantabria

4.1. Ordinaria

INDICACIONES

- a) Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
- b) Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
- c) Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- d) Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- e) No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Problema 4.1.1 (2,5 puntos) Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

Solución: Sean x la nota de Antonio, y la de María y z la de Paula.

$$\begin{cases} x = \frac{z}{2} + \frac{y}{3} \\ 2y = x + z \\ z = x + 2 \end{cases} \implies \begin{cases} 6x - 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 8 \\ y = 9 \\ z = 10 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 6F_2 - F_1 \\ 6F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -10 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 + F_2 \end{array} \right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -10 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -60 \end{array} \right) \implies \begin{cases} -6z = -60 \implies z = 10 \\ -10y + 90 = 0 \implies y = 9 \\ 6x - 18 - 30 = 0 \implies x = 8 \end{cases}$$

Problema 4.1.2 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = x \ln x$, con $x > 0$.

- a) (0,75 puntos) Calcule la derivada de $f(x)$.
- b) (0,75 punto) Calcule una primitiva de $f(x)$.
- c) (1 punto) Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

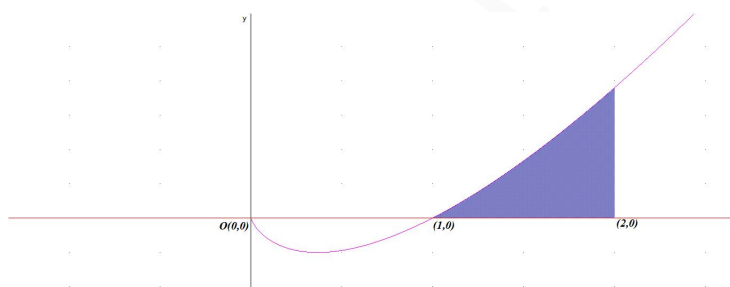
Solución:

- a) $f'(x) = 1 + \ln x$, con $x > 0$.

$$\begin{aligned} \text{b) } F(x) = \int x \ln x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \implies v = \frac{x^2}{2} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x \, dx = \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2(2 \ln x - 1)}{4} + C \end{aligned}$$

- c) Analizamos si la función corta el eje de abscisas en algún punto interior del intervalo $[1, 2]$:
 $f(x) = x \ln x = 0 \implies x = 0$ y $x = 1$ que no pertenecen al interior del intervalo, luego sólo hay un recinto de integración $S : [1, 2]$.

$$S = \left| \int_1^2 x \ln x \, dx \right| = |F(2) - F(1)| = \left| 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} \right| = \frac{8 \ln 2 - 3}{4} \simeq 0,6363 \, u^2$$



Problema 4.1.3 (2,5 puntos) Considere la recta $r : \begin{cases} x + y + z + 5 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : 2x + y - az = 3$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone si es posible asignar algún valor al parámetro a para que:

- a) (0,75 puntos) la recta esté contenida en el plano. En caso afirmativo, dé un valor para a .
- b) (0,75 puntos) la recta y el plano sean paralelos. En caso afirmativo, dé un valor para a .
- c) (1 punto) la recta y el plano se corten. En caso afirmativo, dé un valor para a y dónde se cortan.

Solución:

$$r : \begin{cases} x + y + z + 5 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -10 - 3\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-3, 2, 1) \\ P_r(-10, 5, 0) \end{cases}$$

$$\pi : 2x + y - az = 3 \implies \vec{u}_\pi = (2, 1, -a)$$

a) $r \subset \pi \implies r \perp \vec{u}_\pi \implies \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = 0$

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = (-3, 2, 1)(2, 1, -a) = -6 + 2 - a = 0 \implies a = -4$$

Para que $r \subset \pi$ también se tiene que cumplir $P_r \in \pi \implies -20 + 5 - 0 \neq 3 \implies P_r \notin \pi \implies r \not\subset \pi$ independientemente del valor de a .

b) Por lo visto en el apartado anterior si $a = -4 \implies r \parallel \pi$.

c) Si $a \neq -4 \implies r$ y π se cortan, elijo $a = 0 \implies \pi : 2x + y = 3$. Sustituimos r en π :
 $2(-10 - 3\lambda) + (5 + 2\lambda) = 3 \implies \lambda = -\frac{9}{2} \implies \left(\frac{7}{2}, -4, -\frac{9}{2}\right)$

Problema 4.1.4 (2,5 puntos) Ciertos síntomas pueden deberse a tres enfermedades diferentes que no se padecen de forma simultánea. Con una probabilidad 0,7 se deben a la enfermedad 1 ($E1$), con una probabilidad 0,2 a la enfermedad 2 ($E2$) y con una probabilidad 0,1 a la enfermedad 3 ($E3$). Existen tres tratamientos diferentes, el A es el adecuado para $E2$, el B para $E3$ y el C para $E1$. Así y todo, cada uno de los tratamientos tiene cierto poder de curación de cada una de las enfermedades. La probabilidad de ser curado con cierto tratamiento cuando se tiene cierta enfermedad viene dada para cada tratamiento y enfermedad por la siguiente tabla.

	$E1$	$E2$	$E3$
Trat. A	0,6	1	0,4
Trat. B	0,65	0,5	0,9
Trat. C	0,75	0,2	0,5

Note que, de acuerdo con la misma, la probabilidad de curarse con el tratamiento A cuando se tiene $E3$ es de 0,4. ¿Qué tratamiento debemos administrar a un paciente con dichos síntomas, teniendo en cuenta que no sabemos a priori cuál de las tres enfermedades padece?

Solución:

Tenemos $P(E1) = 0,7$, $P(E2) = 0,2$ y $P(E3) = 0,1$ y las probabilidades de la tabla son las condicionadas $P(\text{Trat}|Ei)$ y tendremos:

$$P(A) = P(A|E1)P(E1) + P(A|E2)P(E2) + P(A|E3)P(E3) = 0,6 \cdot 0,7 + 1 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,1 = 0,66$$

$$P(B) = P(B|E1)P(E1) + P(B|E2)P(E2) + P(B|E3)P(E3) = 0,65 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,1 = 0,645$$

$$P(C) = P(C|E1)P(E1) + P(C|E2)P(E2) + P(C|E3)P(E3) = 0,75 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,615$$

Si no conocemos la enfermedad el tratamiento más eficaz es el A .

Problema 4.1.5 (2,5 puntos) Considere la ecuación $AX = B$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

a) (0,25 puntos) Calcule el determinante de A .

b) (1 punto) Razone si A tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de A .

c) (0,25 puntos) Determine el número de filas y de columnas de X para que la ecuación tenga sentido.

d) (1 punto) Calcule el valor de X .

Solución:

a) $|A| = -1$

b) $|A| \neq 0 \implies \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

c) $\begin{matrix} A & \cdot & X \\ 3 \times 3 & m \times n & \end{matrix} = \begin{matrix} B \\ 3 \times 2 \end{matrix}$, para que la ecuación tenga sentido tiene que ser $m = 3$ y $n = 2 \implies \text{Dim}(X) = 3 \times 2$.

d) $AX = B \implies X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$

Problema 4.1.6 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+x} & \text{si } x \leq 10 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x > 10 \end{cases}$

- a) (0,5 puntos) Determine el dominio de definición de $f(x)$.
 b) (1 punto) Determine los intervalos, del dominio de definición, en que $f(x)$ es continua.
 c) (1 punto) Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Solución:

- a) En la rama $x \leq 10$ hay dos puntos en los que la función no existe $x = 0$ y $x = -1$ y en $x > 10$ la función existe para todos los puntos de esta rama. Luego $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, -1\}$
 b) Por lo visto en el apartado anterior, la función es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en los puntos $x = 0$, $x = -1$ y $x = 10$ donde habrá que estudiar su continuidad:

• En $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

Hay una discontinuidad no evitable con un salto infinito.

• En $x = -1$: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x(x+1)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} = -1$

Hay una discontinuidad evitable con un agujero.

• En $x = 10$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} \frac{x+1}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 10^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{10} \\ \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{11} \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) \implies$$

Hay una discontinuidad no evitable con un salto finito.

• La función es continua en $\mathbb{R} - \{0, -1, 10\}$

c) Asíntotas:

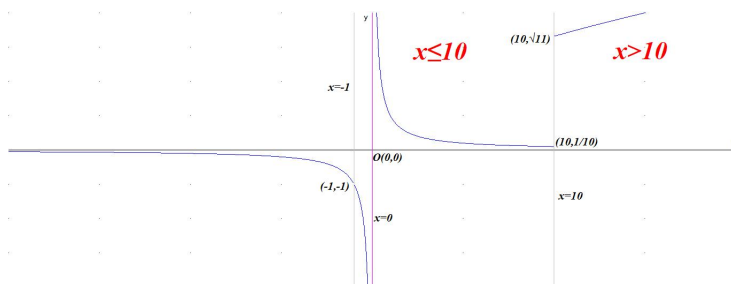
• Verticales: En $x = -1$ analizada en el apartado anterior.

• Horizontales: En $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+x} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty \end{aligned}$$

☛ Oblicuas:

- Cuando $x \rightarrow -\infty$ no hay por haber horizontales.
- Cuando $x \rightarrow +\infty \Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0 \Rightarrow$ no hay asíntota oblicua.



Problema 4.1.7 (2,5 puntos) Sean $A = (6, 2, -1)$, $B = (3, 0, 5)$ y $C = (-2, 1, 2)$ los vértices de un triángulo.

- (1,25 puntos) Calcule los ángulos internos del triángulo.
- (1,25 puntos) Calcule el área del triángulo.

Solución:

a) Ángulos:

☛ Ángulo con vértice en $\hat{A}$:

Sean $\vec{AB} = (3, 0, 5) - (6, 2, -1) = (-3, -2, 6)$ y $\vec{AC} = (-2, 1, 2) - (6, 2, -1) = (-8, -1, 3)$

$$\cos \hat{A} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{(-3, -2, 6) \cdot (-8, -1, 3)}{\sqrt{9+4+36} \cdot \sqrt{64+1+9}} = \frac{24+2+18}{7 \cdot \sqrt{74}} = \frac{44}{7 \cdot \sqrt{74}} \Rightarrow$$

$$\hat{A} = 43^\circ 3' 18''$$

☛ Ángulo con vértice en $\hat{B}$:

Sean $\vec{BA} = (6, 2, -1) - (3, 0, 5) = (3, 2, -6)$ y $\vec{BC} = (-2, 1, 2) - (3, 0, 5) = (-5, 1, -3)$

$$\cos \hat{B} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{(3, 2, -6) \cdot (-5, 1, -3)}{\sqrt{9+4+36} \cdot \sqrt{25+1+9}} = \frac{-15+2+18}{7 \cdot \sqrt{35}} = \frac{5}{7 \cdot \sqrt{35}} \Rightarrow$$

$$\hat{B} = 83^\circ 3' 55''$$

☛ $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - 126^\circ 7' 13'' = 53^\circ 52' 47''$

$$\text{b) } S_t = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 6 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} | -13(0, 3, 1) | = \frac{13\sqrt{10}}{2} \simeq 20,5548 \text{ u}^2$$

Problema 4.1.8 (2,5 puntos) La población de mujeres de 18 años sigue una distribución normal de media una altura de 175 cm y una desviación estándar de 7,41 cm. Supongamos que la probabilidad de que una persona se llame Lucía es 0,006.

- a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía y mida más de 180 cm.
- b) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía o mida más de 180 cm.

Solución:

$$N(175; 7, 41)$$

- a) Partimos de que los sucesos medir más de 180 y llamarse Lucía son independientes. Sea el suceso llamarse Lucía $\equiv L$ y medir más de 180 $\equiv M$.
- $$P(M) = P(X \geq 180) = P\left(Z \geq \frac{180 - 175}{7,41}\right) = P(Z \geq 0,67) = 1 - P(Z \leq 0,67) = 1 - 0,7486 = 0,2514$$
- $$P(L \cap M) = P(L) \cdot P(M) = 0,006 \cdot 0,2514 = 0,00151$$
- b) $P(L \cup M) = P(L) + P(M) - P(L \cap M) = 0,006 + 0,2514 - 0,00151 = 0,2559$

4.2. Extraordinaria

INDICACIONES

- a) Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
- b) Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
- c) Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- d) Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- e) No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Problema 4.2.1 (2,5 puntos) Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone cuál es el rango de A .

Solución:

Calculamos el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - aF_2 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 - F_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+a & 1 & -2a \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1+a & 1 & -2a \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-(4a^2 + 5a + 3) \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \implies \text{Rango}(A) = 4 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Problema 4.2.2 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 10x^2 + 25x & \text{si } x \leq 5 \\ \ln(x^2 - 25) & \text{si } x > 5 \end{cases}$

- a) (1,25 puntos) Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).
 b) (1,25 puntos) Determine si $f(x)$ tiene punto(s) de inflexión. En caso afirmativo, calcúlelo(s).

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Asíntotas:

• Verticales: $x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (x^3 - 10x^2 + 25x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(x^2 - 25) = -\infty$$

• Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 10x^2 + 25x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 25) = +\infty$$

• Oblicuas: $y = mx + n$

En la rama $x \leq 5$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 10x^2 + 25x}{x} = \infty, \text{ luego no hay oblicua.}$$

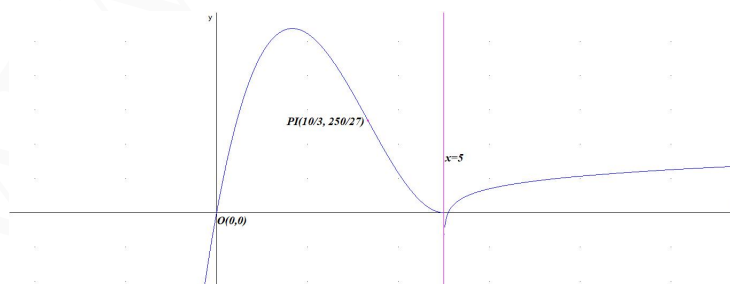
En la rama $x > 5$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 25)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 25}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 25} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x} = 0 \implies \text{luego no hay oblicuas.}$$

$$\text{b) } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 20x + 25 & \text{si } x < 5 \\ \frac{2x}{x^2 - 25} & \text{si } x > 5 \end{cases} \implies f''(x) = \begin{cases} 6x - 20 = 0 \implies x = \frac{10}{3} & \text{si } x < 5 \\ -\frac{2(x^2 + 25)}{(x^2 - 25)^2} \neq 0 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Luego el único punto de inflexión posible se encuentra en la rama $x < 5$ y es $x = \frac{10}{3}$. Recurrimos a la tercera derivada en esta rama $f'''(x) = 6 \implies f'''(\frac{10}{3}) = 6 \neq 0 \implies f$ tiene un punto de inflexión en $x = \frac{10}{3}$.

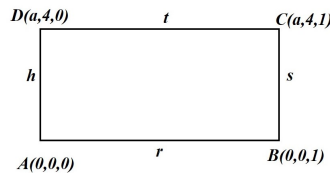


Problema 4.2.3 (2,5 puntos) Sean $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (a, 4, 1)$ y $D = (a, 4, 0)$ los vértices consecutivos de un rectángulo en función de una constante $a \geq 0$.

- a) (1,25 puntos) Calcule la constante de forma que el área del rectángulo sea $5 u^2$.

- b) (1,25 puntos) Calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas de los lados del rectángulo para $a = 3$.

Solución:



- a) Tenemos $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (a, 4, 0)$

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 4 & 0 \end{vmatrix} \right| = |(-4, a, 0)| = \sqrt{16 + a^2} = 5 \implies 16 + a^2 = 25 \implies a = \pm 3$$

como $a \geq 0 \implies a = 3$

- b) Si $a = 3 \implies A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$, $C(3, 4, 1)$ y $D(3, 4, 0)$:

$$\bullet r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (0, 0, 1) \\ P_r = A(0, 0, 0) \end{cases} \quad r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\bullet s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{BC} = (3, 4, 0) \\ P_s = B(0, 0, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\bullet t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{CD} = (0, 0, -1) = -(0, 0, 1) \\ P_t = D(3, 4, 0) \end{cases} \quad t : \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\bullet h : \begin{cases} \overrightarrow{u_h} = \overrightarrow{DA} = (-3, -4, 0) = -(3, 4, 0) \\ P_h = A(0, 0, 0) \end{cases} \quad h : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 4.2.4 (2,5 puntos) Se ha desarrollado un test para detectar un tipo particular de artritis en personas de alrededor de 50 años. Calcule la probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo. Conocemos por un estudio previo que:

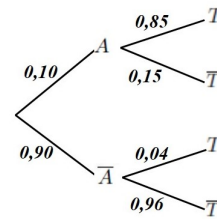
- La probabilidad de que las personas sobre 50 años tengan este tipo de artritis es de 0,10.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años con la artritis estudiada es de 0,85.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años sin la artritis estudiada es de 0,04.

Solución:

Sean A tiene artritis, $\overline{A}$ no tiene artritis, T el test da positivo y $\overline{T}$ el test da negativo.

$$P(A) = 0,10, P(T|A) = 0,85 \text{ y } P(T|\bar{A}) = 0,04$$

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T|A)P(A) + P(T|\bar{A})P(\bar{A}) = \\ &= 0,85 \cdot 0,10 + 0,04 \cdot 0,15 = 0,121 \\ P(A|T) &= \frac{P(T|A)P(A)}{P(T)} = \frac{0,85 \cdot 0,10}{0,121} = 0,7025 \end{aligned}$$



Problema 4.2.5 (2,5 puntos) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ -2x + 4z = -6 \\ x - 2y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (0,75 puntos) Razone si el sistema puede ser incompatible. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.
- (0,75 puntos) Razone si el sistema puede ser compatible determinado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.
- (0,75 puntos) Razone si el sistema puede ser compatible indeterminado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.
- (0,25 puntos) Razone si el sistema tiene solución única para $\lambda = 1$. En caso afirmativo, calcule dicha solución.

Solución:

$$\text{a) } \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & \lambda & 0 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = 2(2 - 3\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Si $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (solución única)}$

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{2}{3}: \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2/3 & 0 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -4/3 & 1 \end{array} \right) = \\ \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 6F_3 + F_2 \end{bmatrix} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible} \end{aligned}$$

Luego el sistema puede ser incompatible y ocurre cuando $\lambda = \frac{2}{3}$

- El sistema puede ser compatible determinado y esto ocurre $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$
- Como se vio en el apartado primero el sistema no puede ser compatible indeterminado.

d) Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible determinado y tiene solución única:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 6F_3 + F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 2z = -2 \Rightarrow z = -1 \\ -6y - 8 = -8 \Rightarrow y = 0 \\ x - 0 - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 4.2.6 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = ax + \sin x$, en función de la constante real a , con $x \in [0, 2\pi]$.

- a) (0,5 puntos) Determine la constante para que la función valga 0 cuando $x = \pi/2$
- b) (1 punto) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para el valor de a calculado.
- c) (1 punto) Calcule una primitiva de $f(x)$.

Solución:

- a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a\pi}{2} + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{\pi}$
- b) $f'(x) = -\frac{2}{\pi} + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{2}{\pi} \Rightarrow x = 0,8807 \simeq 0,2803\pi$ y $x = 5,4025 \simeq 1,7197\pi$ radianes

	$(0; 0,8807)$	$(0,8807; 5,4025)$	$(5,4025; 2\pi)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(0; 0,8807) \cup (5,4025; 2\pi)$ y decreciente en el $(0,8807; 5,4025)$. Tiene un máximo relativo en $x = 0,8807$ y un mínimo relativo en $x = 5,4025$.

c) $\int (ax + \sin x) dx = \frac{ax^2}{2} - \cos x + C$

Problema 4.2.7 (2,5 puntos) Sean $A = (0, 3, 2)$, $B = (4, 1, 3)$, $C = (2, 3, 4)$ y $D = (0, 1, 2)$ los vértices de un tetraedro.

- a) (1,25 puntos) Obtenga la ecuación vectorial del plano determinado por los puntos A , B y C .
- b) (1,25 puntos) Calcule el volumen del tetraedro.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (4, -2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 0, 2)$ y $\overrightarrow{AD} = (0, -2, 0)$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4, -2, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 0, 2) \\ A(0, 3, 2) \end{cases} \Rightarrow \pi : (x, y, z) = (0, 3, 2) + \lambda(4, -2, 1) + \mu(2, 0, 2) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b) $V_T = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{12}{6} = 2 \text{ u}^3$

Problema 4.2.8 (2,5 puntos) Las alturas de hombres de 17 años sigue una distribución normal de media 175 centímetros y desviación estándar 7,41 centímetros. Sea A el suceso formado por los hombres de 17 años que miden más de 170 centímetros y B el suceso de las personas de 17 años que realizan la EBAU en una región determinada. Tenemos que $P(B^C) = 0,35$, donde B^C denota el suceso contrario de B .

- a) (1 punto) Calcule $P(A)$.
- b) (0,5 puntos) Calcule $P(B)$.
- c) (0,5 puntos) Calcule $P(A \cap B^C)$.
- d) (0,5 puntos) Calcule $P(A \cup B)$.

Solución:

$$N(175; 7,41)$$

- a) $P(A) = P(X \geq 170) = P\left(Z \geq \frac{170 - 175}{7,41}\right) = P(Z \geq -0,67) = P(Z \leq 0,67) = 0,7486$
- b) $P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - 0,35 = 0,65$
- c) Suponemos los sucesos A y B como independientes:
 $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0,7486 - 0,7486 \cdot 0,65 = 0,26201$
- d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(B) + P(A \cap B^C) = 0,65 + 0,26201 = 0,91201$

“www.musat.net”

Capítulo 5

Castilla-La Mancha

5.1. Ordinaria

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadoras de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Problema 5.1.1 (2,5 puntos) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + ay + z = a \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a , e identifica el número de soluciones en cada caso.
- b) (1 punto) Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & a \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = a^2 - 7a + 10 = 0 \implies a = 2, \quad a = 5$$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{2, 5\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \implies$$

Sistema incompatible

☛ Si $a = 5$:

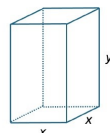
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 5.1.2 (2,5 puntos) Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



- (1 punto) Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).
- (1 punto) Calcula, razonadamente, los valores de x e y para que la superficie sea mínima.
- (0,5 puntos) Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm^2 .

Solución:

a) $V = x^2 y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2}$

$$S(x, y) = 2x^2 + 4xy \Rightarrow S(x) = 2x^2 + 4x \frac{1}{x^2} = 2x^2 + \frac{4}{x} \Rightarrow S(x) = \frac{2(x^3 + 2)}{x}$$

b) $S'(x) = \frac{4(x^3 - 1)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$

	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$S'(x)$	-	+
$S(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función S es decreciente en el intervalo $(0, 1)$ y creciente en el $(1, \infty)$ por lo que hay un mínimo relativo en $x = 1$.

La superficie sería mínima cuando $x = 1 \text{ dm}$ e $y = \frac{1}{1^2} = 1 \text{ dm}$.

c) La superficie mínima sería $S(1) = 6 \text{ dm}^2$ con un coste de $5 \cdot 6 = 30 \text{ €}$

Problema 5.1.3 (2,5 puntos) Carla está diseñando el tejado de una casa con *Geogebra*. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2, -1, 3)$ y $B(-2, 4, 5)$.

- a) (1 punto) Determina la ecuación de la recta que representa la viga.
- b) (0,5 puntos) ¿Cuál es la longitud de la viga?
- c) (1 punto) Se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A , B y $C(0, 0, 1)$. Determina el área de la placa triangular.

Solución:

$$a) r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (-2, 4, 5) - (2, -1, 3) = (-4, 5, 2) \\ P_r = A(2, -1, 3) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = -1 + 5\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$b) d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |(-4, 5, 2)| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 2^2} = 3\sqrt{5} \text{ u}$$

$$c) \text{ Sean } \overrightarrow{CA} = (2, -1, 3) - (0, 0, 1) = (2, -1, 2) \text{ y } \overrightarrow{CB} = (-2, 4, 5) - (0, 0, 1) = (-2, 4, 4)$$

$$S_t = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |6(-2, -2, 1)| = 9 \text{ u}^2$$

Problema 5.1.4 (2,5 puntos)

- a) (1 punto) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2 + 3}$
- b) (1,5 puntos) Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2 + 3} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

$$b) |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Problema 5.1.5 (2,5 puntos)

- a) (1 punto) Calcula la siguiente integral: $\int x\sqrt{2x+3} dx$. Puedes utilizar el cambio de variable $t = \sqrt{2x+3}$.
- b) (1,5 puntos) Sean los vectores $\vec{u} = (1, a, a)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 2)$, con $a \in \mathbb{R}$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60° .

Solución:

$$a) \int x\sqrt{2x+3} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2x+3} \implies x = \frac{t^2-3}{2} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx \implies dx = t dt \end{array} \right] = \int \frac{t^2-3}{2} \cdot t \cdot t dt =$$

$$\frac{1}{2} \int t^2(t^2-3) dt = \frac{1}{2} \int (t^4 - 3t^2) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^5}{5} - t^3 \right) + C = \frac{t^3(t^2-5)}{10} + C =$$

$$\frac{(2x+3)^{3/2}(2x-2)}{10} + C = \frac{2(2x+3)(x-1)\sqrt{2x+3}}{10} + C = \frac{(2x^2+x-3)\sqrt{2x+3}}{5} + C$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 60^\circ &= \frac{(1, a, a) \cdot (-1, 0, 2)}{\sqrt{2a^2 + 1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-1 + 2a}{\sqrt{5(2a^2 + 1)}} = \frac{1}{2} \implies 2(-1 + 2a) = \sqrt{5(2a^2 + 1)} \implies \\ 4(-1 + 2a)^2 &= 5(2a^2 + 1) \implies 6a^2 - 16a - 1 = 0 \implies a = \frac{8 \pm \sqrt{70}}{6}. \\ \text{Si } a &= \frac{8 - \sqrt{70}}{6} \simeq -0,0611 \implies \text{el producto escalar es negativo y esta solución no sería válida} \\ \text{La solución válida es } a &= \frac{8 + \sqrt{70}}{6} \end{aligned}$$

Problema 5.1.6 (2,5 puntos)

- a) (1 punto) Calcula los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1, 2)$. Justifica tu respuesta.
- b) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,2$; $P(A \cap B) = 0,1$ y $P(A \cup B) = 0,3$. Calcula:
- b.1 (0,75 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap \bar{B})$, con $\bar{B}$ el suceso complementario de B .
- b.2 (0,75 puntos) $P(A|B)$ y $P(B|A)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c \implies f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \implies f''(x) = 6x + 2a \\ \begin{cases} f'(2) = 0 \implies 12 + 4a + b = 0 \implies 4a + b = -12 \\ f''(1) = 0 \implies 6 + 2a = 0 \implies a = -3 \\ f(1) = 2 \implies 1 + a + b + c = 2 \implies a + b + c = 1 \end{cases} &\implies \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases} \implies \\ f(x) &= x^3 - 3x^2 + 4 \end{aligned}$$

Además hay que comprobar que $x = 1$ es un punto de inflexión: $f'(x) = 3x^2 - 6x \implies f''(x) = 6x - 6 = 0 \implies x = 1$ y $f'''(x) = 6 \implies f'''(1) = 6 \neq 0 \implies x = 1$ es un punto de inflexión. Y en $x = 2 \implies f''(2) = 6 > 0$ hay un extremo (mínimo relativo)

$$\begin{aligned} \text{b) b.1 } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies 0,3 = 0,2 + P(B) - 0,1 \implies P(B) = 0,2 \\ P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,1 = 0,1 \\ \text{b.2 } P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5 \\ P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5 \end{aligned}$$

Problema 5.1.7 (2,5 puntos)

- a) (1,25 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuales. Justifica tu respuesta.
- b) (1,25 puntos) Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1, 0, 0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } |A| &= -1 \neq 0 \implies \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} \\ A &= A^{-1} \implies A \cdot A = A \cdot A^{-1} \implies A^2 = I \implies \\ A^2 &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies a = 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) } r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, -2) \\ P_r = A(1, 0, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 5.1.8 (2,5 puntos)

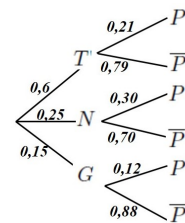
- a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60 % juega al tenis, el 25 % practica natación y, el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21 % de los socios que juegan al tenis, el 30 % de los que practican natación y el 12 % de los que practican el golf.
- a.1 (0,5 puntos) Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.
- a.2 (0,75 puntos) Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.
- b) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.
- b.1 (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?
- b.2 (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

Solución:

- a) Sean T juega al tenis, N practica la natación, G juega al golf, P consigue algún premio y $\bar{P}$ no consigue ningún premio.

$$\text{a.1 } P(P) = P(P|T)P(T) + P(P|N)P(N) + P(P|G)P(G) = 0,6 \cdot 0,21 + 0,25 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,12 = 0,219$$

$$\text{a.2 } P(N|P) = \frac{P(P|N)P(N)}{P(P)} = \frac{0,25 \cdot 0,3}{0,219} = 0,3425$$



- b) $N(60, 8)$

$$\begin{aligned} \text{b.1 } P(X \leq 50) &= P\left(Z \leq \frac{50 - 60}{8}\right) = P(Z \leq -1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) = \\ &= 1 - 0,8944 = 0,1056 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.2 } P(50 \leq X \leq 66) &= P\left(\frac{50 - 60}{8} \leq Z \leq \frac{66 - 60}{8}\right) = P(-1,25 \leq Z \leq 0,75) = \\ &= P(Z \leq 0,75) - P(Z \leq -1,25) = P(Z \leq 0,75) - (1 - P(Z \leq 1,25)) = \\ &= 0,7734 - 0,1056 = 0,6678. \end{aligned}$$

5.2. Extraordinaria

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadoras de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas) Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Problema 5.2.1 (2,5 puntos) Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con $k > 0$.

- a) (1,25 punto) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.
- b) (1,25 puntos) Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

Solución:

Sean x el número de helados de una bola, y de dos bolas y z de tres bolas.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 157 \\ x + 2y + 3z = 278 \\ x = kz \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 157 \\ x + 2y + 3z = 278 \\ x - kz = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -k & 0 \end{array} \right); \quad |A| = 1 - k = 0 \implies k = 1.$$

☛ Si $k \in \mathbb{R} - \{1\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $k = 1$:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 0 & 1 & 2 & 121 \\ 0 & -1 & -2 & -157 \end{array} \right) = \\ & \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 0 & 1 & 2 & 121 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \end{array} \right) \implies \text{Sistema Incompatible} \end{aligned}$$

Si se han vendido el mismo número de helados de una bola que de tres tenemos $x = z \implies k = 1$ y en este caso el sistema no tiene solución es incompatible. Luego no es posible.

Problema 5.2.2 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < 3 \\ \frac{2x}{x-4} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

- a) (1,5 puntos) Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.

- b) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

- a) En la rama $x < 3$ la función es un polinomio y es continua. En la rama $x \geq 3$ sólo podría haber un punto de discontinuidad cuando se anule el denominador $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ que está en la rama. Hay que estudiar la continuidad en $x = 3$ y en $x = 4$.

En $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x + 1) = 16 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x+4} = -6 \\ f(3) = -6 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow$$

La función es discontinua no evitable en $x = 3$ donde hay un salto finito.

En $x = 4$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x}{x-4} = \left[\frac{8}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x}{x-4} = \left[\frac{8}{0^+} \right] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \Rightarrow$$

La función es discontinua no evitable en $x = 4$ donde hay un salto infinito. Se trata de una asíntota vertical.

- b) Cuando $x = 2$ estamos en la rama $x < 3$ donde $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y tenemos: $a = 2 \Rightarrow b = f(2) = 9$, $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow m = f'(2) = 6 \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y - 9 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x - 3$

Problema 5.2.3 (2,5 puntos) Se quiere instalar un toldo que pase por el punto de coordenadas $A(2, 1, 1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$

- a) (1,25 puntos) Determina la ecuación del plano que define el toldo.
b) (1,25 puntos) Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2, -2, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

Solución:

$$a) r : \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 3, 1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases}$$

$$\pi \perp r \Rightarrow \vec{u}_\pi = \vec{u}_r = (1, 3, 1) \Rightarrow \pi : x + 3y + z + k = 0 \xrightarrow{A \in \pi} 2 + 3 + 1 + k = 0 \Rightarrow k = -6 \Rightarrow \pi : x + 3y + z - 6 = 0$$

$$b) d(F, \pi) = \frac{|2 - 6 + 1 - 6|}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{9}{\sqrt{11}} = \frac{9\sqrt{11}}{11} u$$

Problema 5.2.4 (2,5 puntos)

- a) (1 punto) Calcula la siguiente integral: $\int \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx$
b) (1,5 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. Calcula el determinante de A y de $A \cdot A$. ¿Cuál crees que será el determinante del producto de n veces A (con $n > 2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

Solución:

$$\text{a) } \int \frac{2x^2}{x^2+1} dx = \left[\begin{array}{l} (2x^2) : (x^2+1) = 2 + \frac{-2}{x^2+1} \\ \frac{-2x^2-2}{-2} \end{array} \right] = \int \left(2 - \frac{2}{x^2+1} \right) dx = 2x - 2 \arctan x + C$$

$$\text{b) } |A| = a, |A \cdot A| = |A||A| = a^2, \dots, |A \cdots^n A| = |A^n| = |A|^n = a^n$$

Problema 5.2.5 (2,5 puntos)

a) (1 punto) Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x) = x$ entre los puntos $x = 2$ y $x = 3$ con respecto al eje X .

b) (1,5 puntos) Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1 : x + y = 1; \quad \pi_2 : x + y + z = 2; \quad \pi_3 : z = 0$$

Solución:

$$\text{a) } V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx = \int_2^3 \pi x^2 dx = \left[\frac{\pi x^3}{3} \right]_2^3 = \pi \left(9 - \frac{8}{3} \right) = \frac{19\pi}{3} u^3$$

b) Estudiamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible El sistema no tiene solución}$$

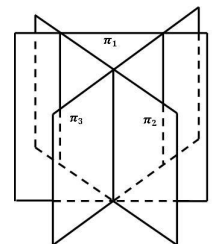
y los tres planos no tienen puntos comunes a los tres. Estudiamos su posición dos a dos:

☛ π_1 con π_2 : $\text{Rango}(\pi_1, \pi_2) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan.

☛ π_1 con π_3 : $\text{Rango}(\pi_1, \pi_3) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \pi_1$ y π_3 se cortan.

☛ π_2 con π_3 : $\text{Rango}(\pi_2, \pi_3) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \pi_2$ y π_3 se cortan.

☛ En conclusión los tres planos se cortan dos a dos.



Problema 5.2.6 (2,5 puntos)

a) (1 punto) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + 2x}$$

b) (1,5 puntos) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

b.1 (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

b.2 (0,75 puntos) Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 4x + 1}{2x + 2} = -\frac{5}{2}$$

b) Sea V tiene un punto verde, R tiene un punto rojo:

$$P(V) = \frac{11}{40}, \quad P(R) = \frac{12}{40} \text{ y } P(V \cap R) = \frac{7}{40}$$

$$b.1 \quad P(VV) = \frac{11}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{11}{156} \simeq 0,0705$$

$$b.2 \quad P(R|V) = \frac{P(V \cap R)}{P(V)} = \frac{\frac{7}{40}}{\frac{11}{40}} = \frac{7}{11} \simeq 0,6364$$

Problema 5.2.7 (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$ Calcula razonadamente el valor del siguiente

determinante:

$$\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

b) (1,25 puntos) Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto $A(0, 1, 0)$.

Solución:

$$a) \begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \left(\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = 2(1+0) = 2 \text{ (El segundo determinante es cero por tener dos filas proporcionales)}$$

$$b) \quad r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2} \implies r: \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, -2) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases}$$

$$\text{Una recta } t \parallel r \text{ tal que } A \in t \implies t: \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_r = (1, 1, -2) \\ P_t = A(0, 1, 0) \end{cases} \implies t: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 5.2.8 (2,5 puntos)

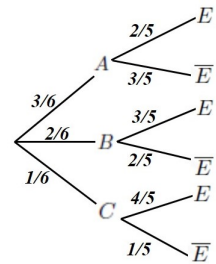
- a) Se tienen tres cajas A , B y C . En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B , tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C , cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A ; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C .
- a.1 (0,5 puntos) Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.
- a.2 (0,75 puntos) Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad que se haya extraído de la caja B ?
- b) La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:
- b.1 (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?
- b.2 (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

Solución:

- a) Sean A caja A , B caja B , C caja C , E espadas y $\bar{E}$ copas.

$$\text{a.1 } P(\bar{E}) = P(\bar{E}|A)P(A) + P(\bar{E}|B)P(B) + P(\bar{E}|C)P(C) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{15} \simeq 0,4667$$

$$\text{a.2 } P(B|\bar{E}) = \frac{P(\bar{E}|B)P(B)}{P(\bar{E})} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7} \simeq 0,2857$$



- b) $B(5; 0,25)$

$$\text{b.1 } P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^3 = 0,2637$$

$$\text{b.2 } P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^5 = 1 - 0,2373 = 0,7627$$

Capítulo 6

Castilla-León

6.1. Ordinaria

INDICACIONES:

- a) **OPTATIVIDAD:** El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
- b) **CALCULADORA:** Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:

Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Álgebra

Problema 6.1.1 (2 puntos)

- a) (1,2 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} + z = 0 \\ 2ax + y = 0 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$$
- b) (0,8 puntos) Resolverlo para $a = 1$.

Solución:

- a) Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, siempre compatible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}, |A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \implies a = 1 \text{ y } a = 2.$$

• Si $a \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^o$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. Su solución sería la trivial $x = y = z = 0$.

• Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{Sistema compatible indeterminado}$$

• Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 6.1.2 (2 puntos) Sean $a \in \mathbb{R}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$,

a) (1 punto) Calcular el determinante y el rango de M para cada valor $a \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Para $a = 0$, calcular el determinante de la matriz P cuando $2PM = M^3$

Solución:

a) $|M| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \implies a = 1$ y $a = 2$.

Si $a \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 3$

Si $a = 1 \implies M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$

Si $a = 2 \implies M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(M) = 2$

b) Si $a = 0 \implies |M| = -2$,

$$|2PM| = |M^3| \implies 2^3|P||M| = |M|^3 \implies -16|P| = -8 \implies |P| = \frac{1}{2}$$

Geometría

Problema 6.1.3 (2 puntos) Hallar el punto simétrico del punto $P = (1, 0, -1)$ respecto de la recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 2) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Seguimos el siguiente método:

☛ Calculamos un plano $\pi \perp r$ tal que $P \in r$:

$$\vec{u}_\pi = \vec{u}_r = (1, 2, 2) \implies \pi : x + 2y + 2z + A = 0 \xrightarrow{P \in r} 1 + 0 + 2 + A = 0 \implies A = -3 \implies \pi : x + 2y + 2z + 1 = 0$$

☛ Calculamos el punto de corte P' de r con π :

$$1 + \lambda + 2(2\lambda) + 2(2\lambda) + 1 = 0 \implies \lambda = -\frac{2}{9} \implies P' \left(\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9} \right)$$

☛ El punto P' es el punto medio entre P y el que buscamos P'' :

$$\frac{P + P''}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = \left(\frac{14}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{8}{9} \right) - (1, 0, -1) = \left(\frac{5}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{1}{9} \right)$$

Problema 6.1.4 (2 puntos)

a) (1 punto) Determinar los valores del parametro $k \in \mathbb{R}$ para los que las dos rectas

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = kt \\ z = k - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad r_2 : \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

Son paralelas.

b) (1 punto) Para $k = 2$ ¿Existe algún plano que contenga a las rectas r_1 y r_2 ? En caso afirmativo calcular el plano o los planos que las contengan.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } r_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = kt \\ z = k - 2t \end{cases} &\implies r_1 : \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (0, k, -2) \\ P_{r_1}(1, 0, k) \end{cases} \\ r_2 : \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = k \end{cases} &\implies r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 - k - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies r_2 : \begin{cases} \vec{u}_{r_2} = (0, -1, 1) \\ P_{r_2}(1 + 2k, -1 - k, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$$r_1 \parallel r_2 \implies \vec{u}_{r_1} = a\vec{u}_{r_2} \implies a(0, k, -2) = (0, -1, 1) \implies \begin{cases} ak = -1 \\ -2a = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ k = 2 \end{cases}$$

Las rectas o son paralelas o coincidentes. Para $k = 2 \implies P_{r_1}(1, 0, 2)$ lo sustituimos en

$$r_2 : \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 + 0 + 4 \neq -1 \\ 1 + 0 + 2 \neq 2 \end{cases} \implies P_{r_1} \notin r_2 \implies r_1 \parallel r_2$$

b) Para $k = 2$ las rectas son paralelas y se puede calcular un plano π que las contenga:

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (0, 2, -2) \approx 2(0, 1, -1) \\ \vec{P_{r_1}P_{r_2}} = (5, -3, 0) - (1, 0, 2) = (4, -3, -2) \end{cases} \implies$$

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -5x - 4y - 4z + 13 = 0 \implies \pi : 5x + 4y + 4z - 13 = 0$$

Análisis

Problema 6.1.5 (2 puntos) Probar que la ecuación $e^{-x}(x-1) = 1$ no tiene solución para $x \in \mathbb{R}$

Solución:

Consideramos la función $f(x) = e^{-x}(x-1) - 1$ y estudiamos su comportamiento.

Asíntotas verticales no tiene pero sí horizontal en $y = -1$ cuando tiende a $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{e^x} - 1 \right) = -1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} -1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = -1 + 0 = -1$$

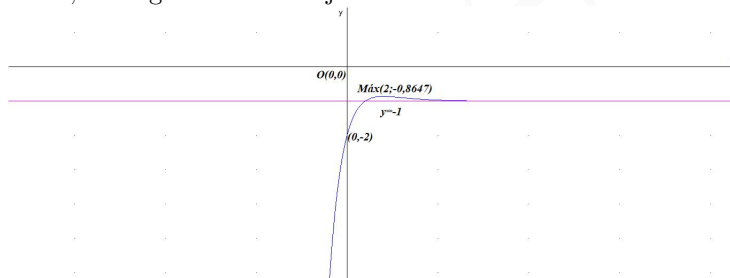
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x}(x-1) - 1) \stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^t(-t-1) - 1) = -\infty$$

Monotonía:

$$f'(x) = -e^{-x}(x-1) + e^{-x} = e^{-x}(2-x) = 0 \implies x = 2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función crece en el intervalo $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$. Tiene un máximo relativo en $(2; -0,8647)$. Luego la función es siempre negativa con un máximo absoluto en $(2; -0,8647)$ y, por tanto, no llega a cortar al eje de abscisas.



Problema 6.1.6 (2 puntos) Se considera la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Determinar el valor de los parámetros A , B y C tales que $f(-1) = 0$, la función f presenta un extremo relativo en $x = 0$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en $x = -1$ es paralela a la recta de ecuación $y + 3x = 0$.

Solución:

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \implies f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B \text{ e } y = -3x$$

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \implies -1 + A - B + C = 0 \\ f'(0) = 0 \implies B = 0 \\ f'(-1) = -3 \implies 3 - 2A + B = -3 \end{cases} \implies \begin{cases} A - B + C = 1 \\ B = 0 \\ 2A - B = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 3 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases} \implies$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$$

Como $f''(x) = 6x + 2A = 6x + 6 \implies f''(0) = 6 > 0$ lo que confirma que en $x = 0$ hay un extremo relativo, en concreto hay un mínimo relativo.

Problema 6.1.7 (2 puntos) Dada la función $f(x) = e^x x^{-1}$, determinar su dominio de definición, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

Solución:

☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

☛ Asíntotas:

- Verticales: en $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$

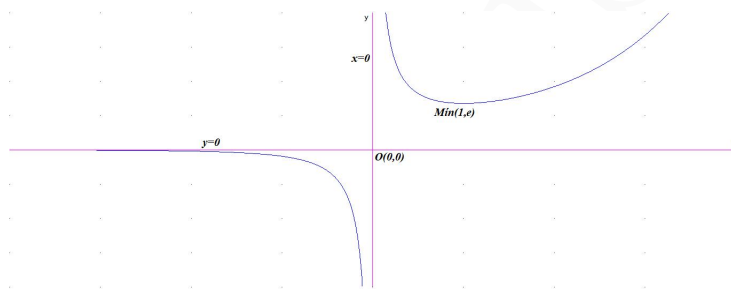
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-e^x x} = \left[\frac{1}{-\infty} \right] = 0$$

☛ Monotonía $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \implies x = 1$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	decreciente ↘	creciente ↗

La función decrece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(1, e)$.

☛ Gráfica:



Problema 6.1.8 (2 puntos) Calcular

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\cos x - 1}$

b) (1 punto) $\int_0^2 e^{-x}(x-1) dx$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\cos x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - 1}{-\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^x + xe^x}{-\cos x} = \frac{2}{-1} = -2$

b) $F(x) = \int e^{-x}(x-1) dx = \left[\begin{array}{l} u = x-1 \implies du = dx \\ dv = e^{-x} dx \implies v = -e^{-x} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = -e^{-x}(x-1) + \int e^{-x} dx =$
 $-e^{-x}(x-1) - e^{-x} + C = -xe^{-x} + C$
 $\int_0^2 e^{-x}(x-1) dx = F(2) - F(0) = -2e^{-2} - 0 = -\frac{2}{e^2}$

Probabilidad y estadística

Problema 6.1.9 (2 puntos) Entre los vehículos que revisa un taller mecánico:

- El 48 % de ellos son coches, de los cuales las tres cuartas partes requieren reparación.
- El 28 % son motocicletas y entre ellas la mitad requieren reparación.
- El 24 % son furgonetas, de las cuales un tercio requieren reparación.

Se consideran los sucesos:

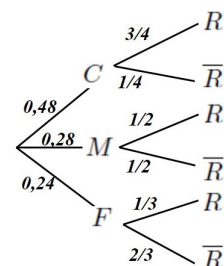
C = “coche”, M = “motocicleta”, F = “furgoneta” y R = “requiere reparación”.

- a) (0,2 puntos) Indicar qué probabilidades de sucesos, condicionados o no, se consideran en el enunciado y cuáles son sus valores.
- b) (1,3 puntos) Calcular $P(R \cap F)$, $P(R)$ y $P(C|R)$
- c) (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos C y R ?

Solución:

- a) $P(C) = 0,48$, $P(R|C) = \frac{3}{4}$, $P(M) = 0,28$, $P(R|M) = \frac{1}{2}$, $P(F) = 0,24$
y $P(R|F) = \frac{1}{3}$. Todas las probabilidades están reflejadas en el árbol adjunto.

- b) $P(R \cap F) = P(R|F)P(F) = \frac{1}{3} \cdot 0,24 = 0,08$
 $P(R) = P(R|C)P(C) + P(R|M)P(M) + P(R|F)P(F) =$
 $\frac{3}{4} \cdot 0,48 + \frac{1}{2} \cdot 0,28 + \frac{1}{3} \cdot 0,24 = 0,58$
 $P(C|R) = \frac{P(R|C)P(C)}{P(R)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 0,48}{0,58} = 0,6207$



- c) $P(C \cap R) = P(R|C)P(C) = \frac{3}{4} \cdot 0,48 = 0,36$ y $P(C) \cdot P(R) =$
 $0,48 \cdot 0,58 = 0,2784$
 Luego $P(C \cap R) \neq P(C) \cdot P(R) \Rightarrow C$ y R no son independientes.

Problema 6.1.10 (2 puntos) Se sabe que la cantidad de tiempo que los habitantes de Astorga usan el móvil cada día sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos. Calcular:

- a) (1 punto) La probabilidad de que un habitante determinado de Astorga use el móvil cada día menos de dos horas.
- b) (1 punto) El porcentaje de habitantes de Astorga que usan el móvil cada día más de tres horas y 50 minutos.

Solución:

$$N(160; 30)$$

- a) $P(X \leq 120) = P\left(Z \leq \frac{120 - 160}{30}\right) = P(Z \leq -1,33) = 1 - P(Z \leq 1,33) =$
 $1 - 0,9082 = 0,0918$
- b) $P(X \geq 230) = P\left(Z \geq \frac{230 - 160}{30}\right) = P(Z \geq 2,33) = 1 - P(Z \leq 2,33) =$
 $1 - 0,9901 = 0,0099 \Rightarrow 0,99 \%$

6.2. Extraordinaria

INDICACIONES:

- a) **OPTATIVIDAD:** El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
- b) **CALCULADORA:** Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:

Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Álgebra

Problema 6.2.1 (2 puntos)

- a) (1,2 puntos) Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:
$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$
- b) (0,8 puntos) Resolverlo para $\lambda = 1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & 1 \end{array} \right), |A| = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = 1 \text{ y } \lambda = 2$

☛ Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^o$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $\lambda = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{sistema compatible indeterminado.}$$

☛ Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 2F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible.}$$

b) Si $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3\mu \\ y = \mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$

Problema 6.2.2 (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

y $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $AB + CX = D$

Solución:

$A \cdot B = AB \Rightarrow$ todas las matrices de la ecuación son de orden 2. Además $|C| = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$

por lo que podemos despejar X de la ecuación planteada:

$$AB + CX = D \Rightarrow CX = D - AB \Rightarrow X = C^{-1}(D - AB) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geometría

Problema 6.2.3 (2 puntos) Dados la recta $r \equiv x = y = z$, el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z = 0$ y el punto $P = (1, 1, 1)$, se pide:

- (1 punto) Determinar la posición relativa de r y π .
- (1 punto) Hallar la recta perpendicular a r y contenida en π que pasa por P .

Solución:

$$r : x = y = z \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}$$

- Sustituimos r en $\pi \Rightarrow \lambda + 2\lambda - 3\lambda = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow r \subset \pi$

b) $\begin{cases} s \perp r \Rightarrow \vec{u}_s \perp \vec{u}_r \\ s \subset \pi \Rightarrow \vec{u}_s \perp \vec{u}_\pi \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_s = \vec{u}_r \times \vec{u}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-5, 4, 1)$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-5, 4, 1) \\ P_s = P(1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 6.2.4 (2 puntos) Determinar el plano que pasa por los puntos $P = (1, 1, 2)$ y $Q = (3, -1, 1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv x - 1 = y = z$

Solución:

$$r : x - 1 = y = z \implies r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (2, -2, -1) \perp \vec{u}_\pi \\ r \parallel \pi \implies \vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi \end{cases} \implies \vec{u}_\pi = \overrightarrow{PQ} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, 4)$$

$$\pi' : -x - 3y + 4z + K = 0 \xrightarrow{P \in \pi'} -1 - 3 + 8 + K = 0 \implies K = -4 \implies$$

$$\pi' : -x - 3y + 4z - 4 = 0 \implies \pi' : x + 3y - 4z + 4 = 0$$

Análisis

Problema 6.2.5 (2 puntos) Dada la función $f(x) = e^x + x^3 - 2$, demostrar que $f(x)$ se anula para algún valor de x y que ese valor es único.

Solución:

La función f es continua en $\mathbb{R}$ como composición de dos funciones continuas. Además se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x^3 - 2) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^3 - 2) = +\infty$$

Luego la función cambia de signo en $\mathbb{R}$. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$.

Para que ese valor de c sea único la función debe de ser siempre creciente o siempre decreciente:

$f'(x) = e^x + 3x^2 > 0 \implies f(x)$ es siempre creciente en $\mathbb{R}$. Luego el valor de c es único.

Problema 6.2.6 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - a}{bx^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, ¿qué valores tienen que tomar los parámetros $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$?

Solución:

Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - a}{bx^2} = \left[\frac{1-a}{0} \right] \stackrel{a=1}{=} \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2bx} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2b} = \frac{-1}{2b} = 1 \implies b = -\frac{1}{2}$$

En conclusión: $a = 1$ y $b = -\frac{1}{2}$

Problema 6.2.7 (2 puntos) Calcular los valores de a , b y c para los cuales la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 2$ y además la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas para $x = 1$.

Solución:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \implies f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \implies f''(x) = 6x + 2a$$

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \implies b = 0 \\ f'(2) = 12 + 4a + b = 0 \\ f(1) = 1 + a + b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \implies f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

Hay que comprobar que $x = 0$ es un extremo $f''(0) = 2a = -6 < 0 \implies$ se trata de un máximo relativo.

Hay que comprobar que $x = 2$ es un extremo $f''(2) = 12 + 2a = 6 > 0 \implies$ se trata de un mínimo relativo.

Problema 6.2.8 (2 puntos)

a) (1 punto) Dada la función $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2}$, hallar su dominio de definición y determinar sus asíntotas horizontales y verticales.

b) (1 punto) Calcular $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$

Solución:

a) Por el denominador: $x^2 - 3x + 2 = 0 \implies x = 1$ y $x = 2$.

Por el logaritmo $x > 0$

Luego $\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

Asíntotas:

• Verticales:

• En $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} = \#; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{-\infty}{2} \right] = -\infty$$

• En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x(2x - 3)} = -1$$

En $x = 1$ no hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable (un agujero)

• En $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{\ln 2}{0^-} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{\ln 2}{0^+} \right] = +\infty$$

• Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2 - 3x} = 0$$

• Oblícuas: No hay por haber horizontales.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx &= \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{x^2 - 3x + 2} \\ 1 = A(x-2) + B(x-1) \\ x = 2 \implies B = 1 \\ x = 1 \implies A = -1 \\ \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \end{array} \right] = \\ \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx &= -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

Probabilidad y estadística

Problema 6.2.9 (2 puntos) Entre los automóviles que se fabrican de una cierta marca, un 50 % son convencionales (es decir, con motor de gasolina o de gasoil), un 30 % híbridos y un 20 % eléctricos. De ellos, un 70 % de los convencionales, un 80 % de los híbridos y un 85 % de los eléctricos tienen potencia < 140 CV y el resto la tienen ≥ 140 CV. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia ≥ 140 CV. Lo mismo para híbrido o eléctrico con potencia ≥ 140 CV.
- (1 punto) Si se sabe que el coche elegido tiene al menos 140 CV, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tipo convencional?

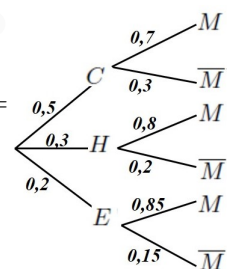
Solución: Solución:

Sean C coche convencional, H híbrido, E eléctrico, M menos de 140 CV y $\bar{M}$ más o igual a 140 CV.

- $P(C \cap \bar{M}) = P(\bar{M}|C)P(C) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$,
 $P(H \cap \bar{M}) = P(\bar{M}|H)P(H) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$,
 $P(E \cap \bar{M}) = P(\bar{M}|E)P(E) = 0,15 \cdot 0,2 = 0,03$,
 $P((H \cup E) \cap \bar{M}) = P((H \cap \bar{M}) \cup (E \cap \bar{M})) = P(H \cap \bar{M}) + P(E \cap \bar{M}) = 0,06 + 0,03 = 0,09$

- $P(\bar{M}) = P(\bar{M}|C)P(C) + P(\bar{M}|H)P(H) + P(\bar{M}|E)P(E) = 0,15 + 0,06 + 0,03 = 0,24$

$$P(C|\bar{M}) = \frac{P(\bar{M}|C)P(C)}{P(\bar{M})} = \frac{0,15}{0,24} = 0,625$$



Problema 6.2.10 (2 puntos) Suponiendo que el tiempo que dura una partida de torneo entre maestros de ajedrez sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos, calcular:

- (1 punto) La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas.
- (1 punto) El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos.

Solución:

$$N(160, 30)$$

- $P(X \leq 120) = P\left(Z \leq \frac{120 - 160}{30}\right) = P(Z \leq -1,33) = 1 - P(Z \leq 1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918$.

- $P(X \geq 230) = P\left(Z \geq \frac{230 - 160}{30}\right) = P(Z \geq 2,33) = 1 - P(Z \leq 2,33) = 1 - 0,9901 = 0,0099 \Rightarrow 0,99\%$

“www.musat.net”

Capítulo 7

Cataluña

7.1. Ordinaria

Responda a **CUATRO** de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Problema 7.1.1 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = 2\frac{\ln x}{x}$, definida para $x > 0$.

- a) (1 punto) Estudie sus máximos y sus mínimos, y sus zonas de crecimiento y de decrecimiento.
- b) (1 punto) ¿Esta función tiene asíntotas? Haga un esbozo de su gráfica.
- c) (0,5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- a) Tenemos $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$ y $f'(x) = 2\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \implies 1 - \ln x = 0 \implies \ln x = 1 \implies x = e$

	$(0, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(0, e)$ y decreciente en el (e, ∞) con un máximo relativo en el punto $\left(e, \frac{2}{e}\right)$

- b) Asíntotas:

• Verticales: $x = 0$

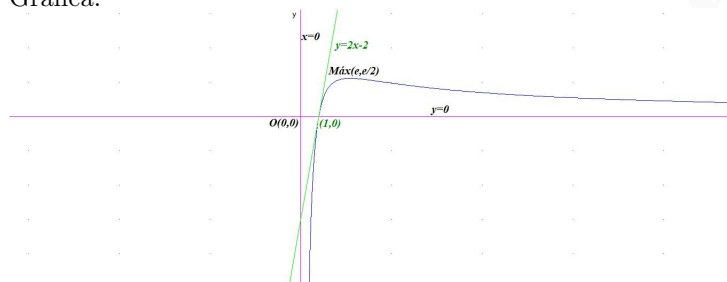
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \nexists; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\frac{\ln x}{x} = -\infty$$

☛ Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.

☛ Gráfica:



c) Tenemos $b = f(a) = f(1) = 0$ y $m = f'(a) = f'(1) = 2 \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$

Problema 7.1.2 (2,5 puntos) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y + kz = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$$

donde k es un parámetro real.

- (1 punto) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k , y resuélvalo para $k = 0$.
- (0,75 puntos) Resuelva el sistema para $k = -1$.
- (1,25 puntos) Para $k = -1$, modifique la tercera ecuación de manera que el sistema resulte incompatible. Justifique la respuesta.

Solución:

$$\text{a) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & k & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -6(k+1) = 0 \Rightarrow k = -1$$

☛ Si $k \in \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = n^{\circ} \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

☛ Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 4F_2 - F_1 \\ 4F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

☛ Si $k = 0$:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 4F_2 - F_1 \\ 4F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 1 & 8 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 4z = 0 \Rightarrow z = 0 \\ -6y - 0 = 8 \Rightarrow y = -\frac{4}{3} \\ 4x - \frac{8}{3} - 0 = 4 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

b) Si $k = -1$:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ -6y - 3z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = -\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

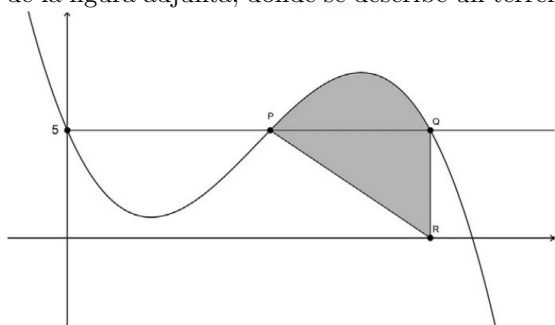
c) Para $k = -1$ bastaría modificar el término independiente de la tercera ecuación por un valor cualquiera, por ejemplo cero:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y = 3 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 4F_2 - F_1 \\ 4F_3 - 3F_1 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 6 & 3 & -12 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow$$

sistema incompatible (no tiene solución)

Problema 7.1.3 (2,5 puntos) Joan encuentra entre los papeles de su abuelo un esbozo como el de la figura adjunta, donde se describe un terreno de regadío que ha dejado en herencia a su padre.



La curva de la gráfica es $y = f(x)$, con $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

a) (1,25 puntos) A partir de la expresión de $f(x)$, calcule las coordenadas de los puntos P , Q y R indicados en la figura. Calcule también la ecuación de la recta PR .

b) (1,25 puntos) Calcule la superficie del terreno.

Solución:

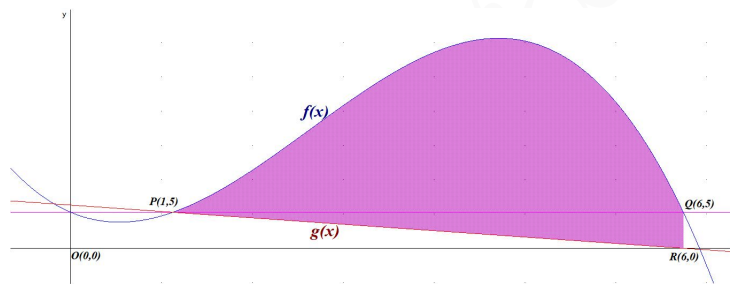
a) $f(x) = 5 \implies -x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \implies x = 0, x = 1$ y $x = 6 \implies P(1, f(1)) = P(1, 5), Q(6, f(6)) = Q(6, 5)$ y $R(6, 0)$.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{RP} = (1, 5) - (6, 0) = (-5, 5) = -5(1, -1) \implies \frac{x-6}{1} = \frac{y-0}{-1} \implies y = -x + 6 \\ P_r = R(6, 0) \end{cases}$$

b) Se trata de calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = -x + 6$ entre P y R , es decir entre $x = 1$ y $x = 6$ $P(1, 5)$ y $R(6, 0)$ con la gráfica de la función f por encima de la de g :

$$S = \int_1^6 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 6x + 5 + x - 6) dx = \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 5x - 1) dx =$$

$$\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - x \right]_1^6 = \frac{1025}{12} \simeq 85,4167 \text{ u}^2$$



Problema 7.1.4 (2,5 puntos) Andreu pone las nueve bolas que se muestran a continuación dentro de una bolsa.

(B)(A)(Y)(E)(S)(F)(A)(N)(S)

a) A continuación, saca de la bolsa dos bolas al azar, una después de otra y sin reemplazo (es decir, no devuelve a la bolsa la primera bola antes de sacar la segunda).

☛ (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que la primera bola sea una A o una E .

☛ (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que las dos bolas sean diferentes.

b) Andreu vuelve a poner todas las bolas en la bolsa y saca cinco al azar, una detrás de otra, pero ahora con reemplazo (es decir, devolviendo a la bolsa cada bola extraída antes de sacar la siguiente).

☛ (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que no haya sacado ninguna A .

☛ (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que haya sacado al menos dos A .

Solución:

a) ☛ $P(A \cup E) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \simeq 0,3333$

$$\bullet P(\text{diferentes}) = 1 - P(\text{iguales}) = 1 - (P(AA) + P(SS)) = 1 - \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{18}$$

b) $B\left(5, \frac{2}{9}\right)$ y $q = \frac{7}{9}$

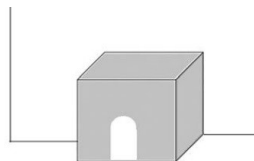
$$\bullet P(X=0) = \binom{5}{0} \left(\frac{2}{9}\right)^0 \left(\frac{7}{9}\right)^5 = 0,284628$$

$$\bullet P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - \left(\binom{5}{0} \left(\frac{2}{9}\right)^0 \left(\frac{7}{9}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{2}{9}\right)^1 \left(\frac{7}{9}\right)^4\right) = 0,30876$$

Problema 7.1.5 (2,5 puntos)

Se quiere construir un pequeño cobertizo de madera de 6 m^3 de volumen, en forma de prisma rectangular, adosado a la pared lateral de una casa, para guardar leña. Solo hay que construir, por tanto, el techo y tres paredes (la pared del fondo del cobertizo es la de la casa a la que está adosado). Además, se quiere que el cobertizo mida el triple de anchura que de profundidad. Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado. Una vez construido el cobertizo, añadir una puerta tiene un coste fijo de 35 €.

- a) (1,25 puntos) Compruebe que el coste de construcción del cobertizo viene dado por la función $C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$, donde x es la profundidad del cobertizo en metros.



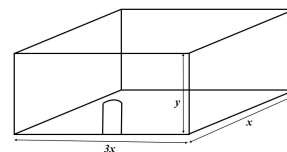
- b) (1,25 puntos) Calcule cuáles han de ser las dimensiones del cobertizo para que el coste de construcción sea mínimo y justifique la respuesta. ¿Cuál es este coste?

Solución:

a) Tenemos: $V(x, y) = 3x^2y = 6 \implies y = \frac{2}{x^2}$
 Coste de las paredes: $30(3xy + xy + xy) = 150xy \text{ €}$
 Coste del techo: $50 \cdot 3x^2 = 150x^2 \text{ €}$
 Coste de la puerta: 35 €
 Luego: $C(x, y) = 150xy + 150x^2 + 35 \implies$
 $C(x) = 150x \cdot \frac{2}{x^2} + 150x^2 + 35 = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$

b) $C'(x) = -\frac{300}{x^2} + 300x = 0 \implies x = 1$

	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$C'(x)$	-	+
$C(x)$	decreciente ↘	creciente ↗



La función es decreciente en el intervalo $(0, 1)$ y creciente en el $(1, \infty)$ con un mínimo relativo en $x = 1 \text{ m}$ de profundidad, 3 m de ancho y una altura de $y = \frac{2}{1} = 2 \text{ m}$. El coste mínimo sería de $C(1) = 485 \text{ €}$

Problema 7.1.6 (2,5 puntos) Considere los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (-3, -2, 3)$.

- a) (1 punto) Calcule la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B . Justifique que este plano está formado, precisamente, por los puntos $P = (x, y, z)$ que están a igual distancia de A que de B , es decir, $d(P, A) = d(P, B)$.
- b) (0,75 puntos) Calcule las distancias de A y de B al plano π y compruebe que son iguales. ¿Es casualidad? Razone la respuesta.
- c) (0,75 puntos) Sea $C = (-7, 6, 3)$. ¿El triángulo ABC es isósceles? Calcule su área.

Solución:

- a) El punto medio entre A y B es $M(-1, 0, 3)$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{AB} = (-4, -4, 0) = -4(1, 1, 0) \\ P_r = A(1, 2, 3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{u}_\pi = \vec{u}_r = (1, 1, 0) \Rightarrow \pi : x + y + \lambda = 0 \xrightarrow{M \in \pi} \lambda = 1 \Rightarrow \pi : x + y + 1 = 0$$

Se trata de un plano mediador entre los puntos A y B comprobamos que se cumple $d(P, A) = d(P, B)$:

$$|\vec{AP}| = |\vec{BP}| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2} \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + 14 = x^2 + 6x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 22 \Rightarrow -8x - 8y - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi : x + y + 1 = 0$$

$$b) d(A, \pi) = \frac{|1 + 2 + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ u}$$

$$d(B, \pi) = \frac{|-3 - 2 + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ u}$$

Como se vió en el apartado anterior π es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambos puntos, dicho de otra manera, se trata del plano mediador.

- c) Tenemos

$$\vec{CA} = (1, 2, 3) - (-7, 6, 3) = (8, -4, 0) \Rightarrow |\vec{CA}| = 4\sqrt{5}$$

$$\vec{CB} = (-3, -2, 3) - (-7, 6, 3) = (4, -8, 0) \Rightarrow |\vec{CB}| = 4\sqrt{5}$$

$$\vec{AB} = (-3, -2, 3) - (1, 2, 3) = (-4, -4, 0) \Rightarrow |\vec{AB}| = 4\sqrt{2}$$

El triángulo tiene dos lados iguales y el otro desigual, luego se trata de un triángulo isósceles.

$$S_t = \frac{1}{2} |\vec{CA} \times \vec{CB}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -4 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(0, 0, -48)| = 24 \text{ u}^2$$

7.2. Ordinaria-Coincidente

Responda a **CUATRO** de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Problema 7.2.1 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = -2 + 10(x-1) \ln x$, definida para $x > 0$.

- (0,75 punto) Compruebe que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $[1; 1,5]$ y busque un intervalo de una décima de longitud que también contenga esta misma raíz.
- (1 punto) Sin calcular los puntos críticos, justifique que $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(0, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$. ¿Qué máximos y mínimos tiene esta función?
- (0,75 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, y haga un esbozo de la gráfica de esta función.

Solución:

- La función f es continua en su $\text{Dom}(f) = (0, +\infty) \Rightarrow f$ en el intervalo $[1; 1,5]$ y se cumple $f(1,5) = 0,02733$ y $f(1) = -2$. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in (1; 1,5)$ tal que $f(c) = 0$. Ahora buscamos un intervalo contenido en el anterior que siga cumpliendo las hipótesis del teorema de Bolzano:

Si tomamos el intervalo $[1,4; 1,5]$ (de longitud 0,1) tenemos $f(1,4) = -0,65411$ y $f(1,5) = 0,02733$. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in (1,4; 1,5)$ tal que $f(c) = 0$.

$$\text{b) } f'(x) = \frac{10x \ln x + 10(x-1)}{x} = 0 \Rightarrow x \ln x + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

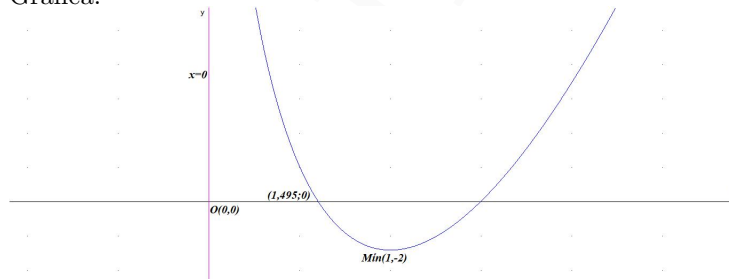
	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(0, 1)$ y creciente en el $(1, \infty)$ con un mínimo relativo en el punto $(1, -2)$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2 + 10(x-1) \ln x) = -(-\infty) = +\infty \Rightarrow x = 0$ sería una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + 10(x-1) \ln x) = \infty \cdot (\infty) = \infty$$

Gráfica:



Problema 7.2.2 (2,5 puntos) Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1,25 punto) Decida si la matriz P es invertible y, en caso de serlo, calcule su inversa. Explique detalladamente el procedimiento seguido.

- b) (1,25 puntos) Calcule una matriz X de 3 filas y 3 columnas que cumpla $PX + Q = 2R$.

Solución:

$$\text{a) } |P| = 1 \neq 0 \implies \exists P^{-1} = \frac{(\text{Adj}(P))^T}{|P|} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } PX + Q = 2R \implies PX = 2R - Q \implies X = P^{-1}(2R - Q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -8 & -8 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema 7.2.3 (2,5 puntos) Considere las parábolas $y = f_a(x)$, con $f_a(x) = ax^2 + 2x + 5 - a$, donde a es un parámetro real.

- a) (1 punto) Determine el valor del parámetro a para el que la recta tangente a $y = f_a(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ pasa por el punto $(2, 13)$.
- b) (0,5 puntos) Calcule los puntos de corte de las parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$.
- c) (1 punto) Calcule el área de la región situada entre las dos parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$.

Solución:

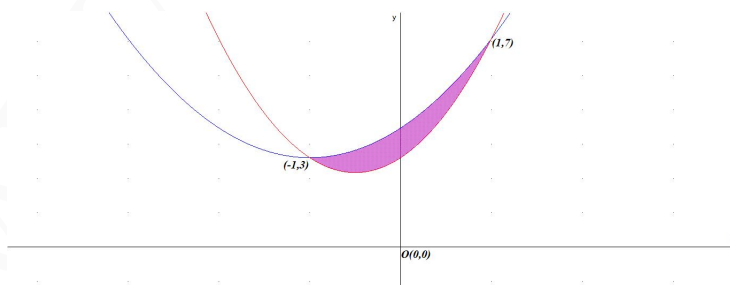
- a) Tenemos $f'_a(x) = 2ax + 2$ y $m = f'_a(1) = 2a + 2$, luego la recta tangente tiene de ecuación $y - f_a(1) = m(x - 1) \implies 13 - (a + 2 + 5 - a) = (2a + 2)(2 - 1) \implies 6 = 2a + 2 \implies a = 2$
- b) $f_1(x) = x^2 + 2x + 4$ y $f_3(x) = 3x^2 + 2x + 2$. Hacemos $f_1(x) = f_3(x)$:

$$x^2 + 2x + 4 = 3x^2 + 2x + 2 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm 1$$

Los puntos de corte son $(-1, 3)$ y $(1, 7)$

$$\text{c) } S = \left| \int_{-1}^1 (f_1(x) - f_3(x)) dx \right| = \left| \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx \right| = \left| -\frac{2x^3}{3} + 2x \right|_{-1}^1 = \left| \frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3} \simeq 2,6667 \text{ u}^2$$

El valor de la integral es positivo por estar la función $f_1(x)$ por encima de la $f_3(x)$.



Problema 7.2.4 (2,5 puntos) Rut usa el siguiente método para hacer los problemas de matemáticas: tira un dado equilibrado y, si el resultado es como máximo 4, piensa y resuelve el problema ella misma; si el resultado es 5 o 6, busca la solución del problema por Internet y la copia. Cuando es ella quien ha pensado la solución, la respuesta es correcta en el 75 % de los casos; cuando copia la solución de Internet, la respuesta es correcta solamente en el 40 % de los casos.

- a) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la solución de un problema respondido siguiendo este método sea correcta?
- b) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un problema haya sido resuelto por Rut si se sabe que la solución es correcta?
- c) (1 punto) Mañana Rut tiene que entregar 5 problemas de matemáticas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 sean correctos?

Solución:

Sean R lo resuelve Rut, I lo copia de Internet, C la solución es correcta y $\bar{C}$ la solución no es correcta.

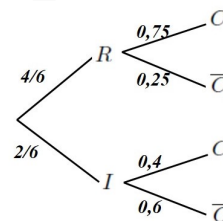
a) $P(C) = P(C|R)P(R) + P(C|I)P(I) = 0,75 \cdot \frac{4}{6} + 0,4 \cdot \frac{2}{6} \simeq 0,6333$

b) $P(R|C) = \frac{P(C|R)P(R)}{P(C)} = \frac{0,75 \cdot \frac{4}{6}}{0,6333} \simeq 0,7895$

c) $B(5; 0,6333)$ y $q = 1 - 0,6333 = 0,3667$

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4} \cdot 0,6333^4 \cdot 0,3667^1 +$$

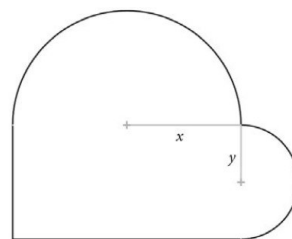
$$\binom{5}{5} \cdot 0,6333^5 \cdot 0,3667^0 = 0,3968$$



Problema 7.2.5 (2,5 puntos)

Carles quiere construir un decorado para la obra de teatro de final de curso en forma de un rectángulo y dos semicírculos, tal como se muestra en la siguiente figura:

- a) (1 punto) Determine el perímetro y el área del decorado a construir en función de x y de y .
- b) (1,5 puntos) Para revestir el perímetro del decorado, Carles tiene material para cubrir hasta 10 m. Si lo quiere gastar todo, ¿cuáles serán las medidas del decorado de área máxima que podrá construir? ¿Cuál es el valor de esta área?



Solución:

a) El perímetro sería: $P(x, y) = 2x + 2y + \pi x + \pi y = (2 + \pi)x + (2 + \pi)y$

El área sería: $S(x, y) = 4xy + \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi y^2}{2}$

b) $P(x, y) = (2 + \pi)x + (2 + \pi)y = 10 \implies y = \frac{10 - (2 + \pi)x}{2 + \pi}$

$$S(x) = 4x \frac{10 - (2 + \pi)x}{2 + \pi} + \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi \left(\frac{10 - (2 + \pi)x}{2 + \pi} \right)^2}{2} = \frac{(\pi - 4)(\pi + 2)^2 x^2 - 10(\pi - 4)(\pi + 2)x + 50\pi}{(\pi + 2)^2}$$

$$S'(x) = \frac{2(\pi - 4)((\pi + 2)x - 5)}{\pi + 2} = 0 \implies x = \frac{5}{\pi + 2} \simeq 0,97246 \text{ m con } y = \frac{10 - (2 + \pi) \frac{5}{\pi + 2}}{2 + \pi} =$$

$$\frac{5}{\pi + 2} \simeq 0,97246 \text{ m y con un área de } \frac{25(\pi + 4)}{(\pi + 2)^2} \simeq 6,7537 \text{ m}^2.$$

	$(0; 0,97246)$	$(0,97246; \infty)$
$S'(x)$	+	-
$S(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(0; 0,97246)$ y decreciente en el $(0,97246; \infty)$ con un máximo relativo en $x = 0,97246$ m.

Problema 7.2.6 (2,5 puntos) Considere las rectas $r : \frac{x-5}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{-1}$ y $s : \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 3 + k \\ z = -1 \end{cases}$

- (1,25 puntos) ¿Cuál es su posición relativa? Calcule la ecuación implícita de un plano π que sea paralelo a las dos rectas y que pase por el origen de coordenadas.
- (1,25 puntos) Calcule la ecuación de la recta t que corta las dos rectas r y s perpendicularmente.

Solución:

Tenemos:

$$r : \frac{x-5}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (4, 3, -1) \\ P_r(5, 4, 3) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 3 + k \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 0) \\ P_s(4, 3, -1) \end{cases}$$

$$a) \overrightarrow{P_s P_r} = (5, 4, 3) - (4, 3, -1) = (1, 1, 4)$$

$$[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

$$\text{Sea } \pi \parallel r \text{ y } \pi \parallel s \Rightarrow \vec{u}_\pi = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -2, -2)$$

$$\pi : x - 2y - 2z + \lambda = 0 \xrightarrow{O(0,0,0) \in \pi} 0 - 0 - 0 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \pi : x - 2y - 2z = 0$$

- Primero calculamos el vector $\vec{u}_t$ perpendicular a r y s . En el apartado anterior se calculó este vector y coincide con $\vec{u}_\pi$, es decir $\vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (1, -2, -2)$

Calculamos t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, -2, -2) \\ \vec{u}_r = (4, 3, -1) \\ P_r(5, 4, 3) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x-5 & y-4 & z-3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 8x - 7y + 11z - 45 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, -2, -2) \\ \vec{u}_s = (2, 1, 0) \\ P_s(4, 3, -1) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2x - 4y + 5z + 9 = 0$$

$$t : \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases} \Rightarrow t : \begin{cases} 8x - 7y + 11z - 45 = 0 \\ 2x - 4y + 5z + 9 = 0 \end{cases}$$

7.3. Extraordinaria

Responda a **CUATRO** de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Problema 7.3.1 (2,5 puntos) Considere la función polinómica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.

- a) (1,25 puntos) Justifique que su gráfica corta el eje de abscisas en un punto del intervalo $[-2, 0]$. Dé un intervalo de longitud 0,5 donde se encuentre este punto de corte.
- b) (1,25 puntos) Estudie las zonas de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de $y = f(x)$. ¿Cuántos puntos de corte tiene exactamente la gráfica de esta función con el eje de abscisas? Justifique su respuesta.

Solución:

- a) la función es continua en $[-2, 0]$ por ser un polinomio. Tenemos $f(-2) = -24614 < 0$ y $f(0) = 2 > 0 \implies f$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano que afirma, en estas condiciones $\exists c \in (-2, 0)$ tal que $f(c) = 0$. Como el intervalo $(-2, 0)$ tiene longitud 2 hay que buscar otro encajado en $(-2, 0)$ de tamaño 0,5.

Probamos con el intervalo $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ y tenemos $f(-1) = -6 < 0$ y $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1,37 > 0 \implies f$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano y, por tanto, $\exists c \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$. La longitud de este intervalo tiene longitud 0,5.

- b) $f'(x) = 39x^{12} + 15x^2 = 3x^2(13x^{10} + 5) = 0 \implies x = 0$
 $f''(x) = 468x^{11} + 30x \implies f''(0) = 0 \implies x = 0$ no es un extremo.
 $f'(x) \geq 0 \implies f$ es creciente en $\mathbb{R}$ y cumple:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^{13} + 5x^3 + 2) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^{13} + 5x^3 + 2) = +\infty$ y se trata de una función continua, luego por el teorema de Bolzano $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$ y por ser f siempre creciente este punto es único.

Problema 7.3.2 (2,5 puntos) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde m es un parámetro real.

$$\begin{cases} x - 3y + mz = -2 \\ x + my + 2z = 3 \\ x + y + 2z = m \end{cases}.$$

- a) (1,25 puntos) Discuta el sistema según el valor del parámetro m .
- b) (0,5 puntos) Encuentre la solución del sistema para $m = 0$.
- c) (0,75 puntos) Para $m = 2$, dé una solución (x, y, z) del sistema que, además, cumpla $x = 5y$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & m & -2 \\ 1 & m & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & m \end{array} \right) \implies |A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \implies m = 1 \text{ y } m = 2.$

• Si $m \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^o \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

• Si $m = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$$

• Si $m = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 4F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)}$$

b) Si $m = 0$ resolvemos por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 4F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -14 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} -2z = -14 \Rightarrow z = 7 \\ 3y + 14 = 5 \Rightarrow y = -3 \\ x + 9 = -2 \Rightarrow x = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = -3 \\ z = 7 \end{cases}$$

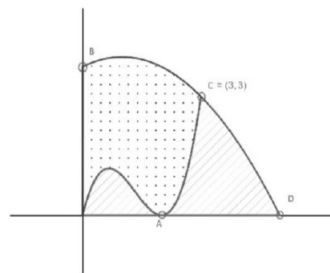
c) Si $m = 2$:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ 5y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}.$$

$$\text{Si } x = 5y \Rightarrow x = 5 \Rightarrow 5 = 1 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = -2.$$

$$\text{Luego } (x, y, z) = (5, 1, -2)$$

Problema 7.3.3 (2,5 puntos) La clase de Èlia ha diseñado el siguiente logotipo para pintarlo en la pared del instituto:



La curva que pasa por el punto A es $y = f(x)$, con $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, y la que pasa por los puntos B , $C = (3, 3)$ y D es $y = g(x)$, con $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$

a) (0,75 puntos) Calcule las coordenadas de los puntos A , B y D .

b) (1,25 puntos) Calcule el área de la zona punteada.

- c) (0,5 puntos) Los alumnos quieren pintar la parte punteada de color azul y la parte rayada de color rojo. Sabiendo que el área total del logotipo es $\frac{175}{12} \text{ m}^2$, ¿de qué color necesitarán más pintura?

Solución:

- a) A es punto de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas: $x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \implies x = 0$ y $x = 2$.
Luego $A(2, 0)$

B es el punto de corte de la función $g(x)$ con el eje de ordenadas: $g(0) = -\left(\frac{0-1}{2}\right)^2 + 4 \implies$
 $B\left(0, \frac{15}{4}\right)$

D es el punto de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas $g(x) = 0 \implies -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 = 0 \implies$
 $x^2 - 2x - 15 = 0 \implies x = -3$ y $x = 5 \implies D(5, 0)$.

- b) Hacemos $f(x) = g(x) \implies x^3 - 4x^2 + 4x = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 \implies (x-3)(4x^2 - 3x + 5) = 0 \implies x = 3$
El intervalo de integración es $[0, 3]$:

$$S = \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^3 \left[-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 - (x^3 - 4x^2 + 4x) \right] dx =$$

$$\int_0^3 \left[-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 - (x^3 - 4x^2 + 4x) \right] dx = \frac{1}{4} \int_0^3 (-4x^3 + 15x^2 - 14x + 15) dx =$$

$$\frac{1}{4} (-x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 15x) \Big|_0^3 = 9 \text{ m}^2$$

- c) La parte puntuada es 9 m^2 y el logotipo $\frac{175}{12} \simeq 14,5833 \text{ m}^2 \implies 14,5833 - 9 = 5,5833 \text{ m}^2$ la zona rayada. Luego la zona rayada tiene una superficie menor que la punteada y se necesita más pintura azul que roja.

Problema 7.3.4 (2,5 puntos) Se estima que el 20 % de los habitantes de una región padecen algún tipo de arritmia. Para diagnosticarla, existe la posibilidad de colocar al paciente un monitor Holter, que detecta la arritmia en un 95 % de los casos de personas que la padecen, pero que también da falsos positivos, por motivos eléctricos, en personas que no padecen arritmias en un 0,5 % de los casos.

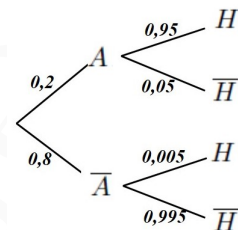
- a) (0,75 puntos) Si se escogen 4 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas padezca arritmias?
- b) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar obtenga un diagnóstico positivo de arritmia?
- c) (1 punto) Si una persona obtiene un diagnóstico negativo en la prueba del Holter, ¿cuál es la probabilidad de que realmente padezca arritmias?

Solución:

Sean A padece arritmia, $\bar{A}$ no padece arritmia, H el monitor Holter detecta positivo y $\bar{H}$ detecta

negativo.

- a) $p = P(A) = 0,2 \Rightarrow X \approx B(4; 0,2)$.
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) =$
 $1 - \binom{4}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^4 = 0,5904$
- b) $P(H) = P(H|A)P(A) + P(H|\bar{A})P(\bar{A}) =$
 $0,95 \cdot 0,2 + 0,005 \cdot 0,8 = 0,194$
- c) $P(A|\bar{H}) = \frac{P(\bar{H}|A)P(A)}{P(\bar{H})} = \frac{0,05 \cdot 0,2}{1 - 0,194} = 0,0124$

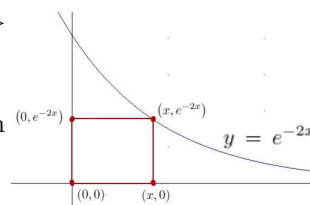


Problema 7.3.5 (2,5 puntos) Para cada punto (x, y) de la curva $y = e^{-2x}$, con $x > 0$ e $y > 0$, considere el rectángulo con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ y (x, y) .

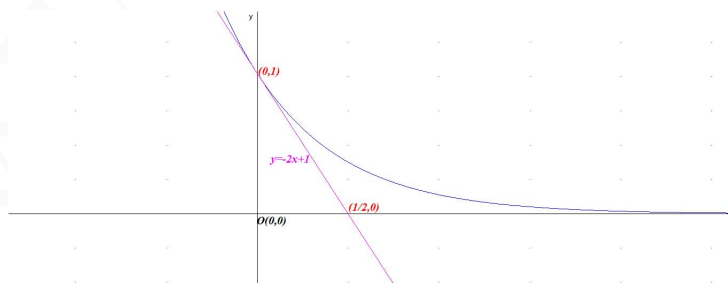
- a) (1,5 puntos) Compruebe que, de entre todos estos rectángulos, el que tiene $x = \frac{1}{2}$ es el de área máxima. ¿Cuál es el valor de esta área?
- b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $y = e^{-2x}$ en el punto de abscisa $x = 0$, y su punto de corte con el eje de abscisas.

Solución:

- a) Tenemos:
 $S(x) = xe^{-2x} \Rightarrow S'(x) = (1 - 2x)e^{-2x} = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow$
 $x = \frac{1}{2}$
 $S''(x) = 4(x - 1)e^{-2x} \Rightarrow S''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{e} < 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ es un
 máximo relativo, en nuestro caso absoluto.
 El valor del área será: $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{2e} \simeq 0,1839 \text{ u}^2$



- b) En $x = 0 \Rightarrow (0, e^0) = (0, 1)$ es el punto de tangencia. $((a, b) = (0, 1))$
 $f'(x) = -2e^{-2x} \Rightarrow m = f'(0) = -2 \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1$
 El punto de corte de esta recta con el eje de abscisas es $-2x + 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$



Problema 7.3.6 (2,5 puntos) Considere el punto $P = (1, 3, 0)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 2z = -7$.

- a) (1 punto) Sea r la recta que es perpendicular a π y pasa por P . Calcule el punto de intersección de π con r .
- b) (0,5 puntos) Calcule la distancia d del punto P al plano π .
- c) (1 punto) Calcule la ecuación de otro plano π' que sea paralelo a π y que también esté a distancia d de P .

Solución:

$$\text{a) } r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, 2, -2) \\ P_r = P(1, 3, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo r en π :

$$(1 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 2(-2\lambda) = -7 \implies \lambda = -\frac{14}{9} \implies P' \left(-\frac{5}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{28}{9} \right)$$

$$\text{b) } d(P, \pi) = \frac{|1 + 6 - 0 + 7|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{14}{3} \text{ u}$$

- c) Sea $\pi' \parallel \pi \implies \pi' : x + 2y - 2z + a = 0$ un punto de π puede ser $Q(-7, 0, 0)$ y $d(Q, \pi') = \frac{14}{3}$.

Luego:

$$d(Q, \pi') = \frac{|7 + 0 - 0 + a|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|7 + a|}{3} = \frac{14}{3} \implies |7 + a| = 14 \implies$$

$$\begin{cases} 7 + a = 14 \implies a = 7 \implies \pi' : x + 2y - 2z + 7 = 0 \\ 7 + a = -14 \implies a = -21 \implies \pi' : x + 2y - 2z - 21 = 0 \end{cases}$$

“www.musat.net”

Capítulo 8

Comunidad Valenciana

8.1. Ordinaria

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 8.1.1 (10 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}$$

Se pide:

- (6 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m .
- (4 puntos) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución.

Solución:

$$\text{a) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -m^2 + m + 6 = 0 \Rightarrow m = -2 \text{ y } m = 3.$$

• Si $m \in \mathbb{R} - \{-2, 3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^o \text{ de incógnitas} \Rightarrow$
Sistema Compatible Determinado (solución única)

• Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 4F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible (no tiene solución)}$$

• Si $m = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} 2F_1 + F_2 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 1 & 15 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

b) Para $m = 3$:

$$\begin{cases} 5y + z = 15 \\ 2x + 3y - z = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 12 - 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 15 - 5\lambda \end{cases}$$

Problema 8.1.2 (10 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se pide:

- (3 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m .
- (4 puntos) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$.
- (3 puntos) Para $m = 0$, calcular A^5 .

Solución:

a) $|A| = m^2 - m^3 = 0 \implies m = 1 \text{ y } m = 0$

• Si $m \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$

• Si $m = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2.$$

• Si $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2.$$

b) Si $m = -1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$AX = B \implies X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Si $m = 0$:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2 \implies A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 8.1.3 (10 puntos) Se considera la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi : 3x - my + z = 1$, Se pide:

- (4 puntos) Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r .
- (3 puntos) Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π , que contenga a la recta r .
- (3 puntos) Calcular, en función de m , la distancia entre π y el punto $P = (1, -1, -2)$.

Solución:

- a) $r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ P_r(1, -1, -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \text{ y } \vec{u}_\pi = (3, -m, 1)$
- $r \parallel \pi \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi \Rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = 0 \Rightarrow (2, 3, -1) \cdot (3, -m, 1) = 6 - 3m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{3}$
- Para este valor podría ser $r \subset \pi$ comprobamos si $P_r \in \pi : 3x - \frac{5}{3}y + z = 1 \Rightarrow 3 + \frac{5}{3} - 2 = \frac{8}{3} \neq 1 \Rightarrow r \not\parallel \pi$
- No existe valor de m para que $r \subset \pi$.
- b) Si $m = \frac{5}{3} \Rightarrow \pi : 3x - \frac{5}{3}y + z = 1 \Rightarrow \pi : 9x - 5y + 3z = 3$
- $\pi' \parallel \pi \Rightarrow 9x - 5y + 3z = a \xrightarrow{P_r \in \pi'} 9 + 5 - 6 = a \Rightarrow a = 8 \Rightarrow \pi' : 9x - 5y + 3z = 8$
- c) $d(P, \pi) = \frac{|3 + m - 2 - 1|}{\sqrt{9 + m^2 + 1}} = \frac{|m|}{\sqrt{10 + m^2}} u$

Problema 8.1.4 (10 puntos) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P(2, 1, 3)$ y $Q(1, 3, 1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4, 7, 6)$.

- a) (2 puntos) Calcular la ecuación de la recta r .
- b) (3 puntos) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado.
- c) (5 puntos) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

Solución:

- a) $r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, -2) \\ P_r = R(4, 7, 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases}$
- b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, -2) \\ \overrightarrow{PR} = (2, 6, 3) \\ P(2, 1, 3) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 18x - y - 10z - 5 = 0$
- c) Calculamos un plano $\pi' \perp r$ que contenga al punto P :
- $\vec{u}_{\pi'} = \vec{u}_r = (-1, 2, -2) \Rightarrow -x + 2y - 2z + a = 0 \xrightarrow{P \in \pi'} -2 + 2 - 6 + a = 0 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow \pi' : -x + 2y - 2z + 6 = 0$
- Calculamos el punto de corte P' de π' con r :
- $-(4 - \lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 2(6 - 2\lambda) + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{9} \Rightarrow P' \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9} \right)$.
- Para encontrar el otro punto
- $Q' = P' + \overrightarrow{P'Q'} = P' + \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9} \right) + (-1, 2, -2) = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9} \right)$

Problema 8.1.5 (10 puntos) Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

- a) (3 puntos) El dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- b) (5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.

c) (2 puntos) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

a)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ El denominador no se anula nunca.

 Asíntotas:

- Verticales no hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales: $y = 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-kx}{e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-kxe^{2x}) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{2e^{2x}} = 0$$

- Oblícuas: cuando no hay por haber horizontales y cuando $x \rightarrow -\infty$ tampoco:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ke^{2x}) = \pm\infty$$

b) $f'(x) = ke^{-2x}(1 - 2x) = 0 \implies x = \frac{1}{2}$ si $k \neq 0$:

 Si $k = 0 \implies f'(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x)$ es una función constante.

 Si $k > 0$:

	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

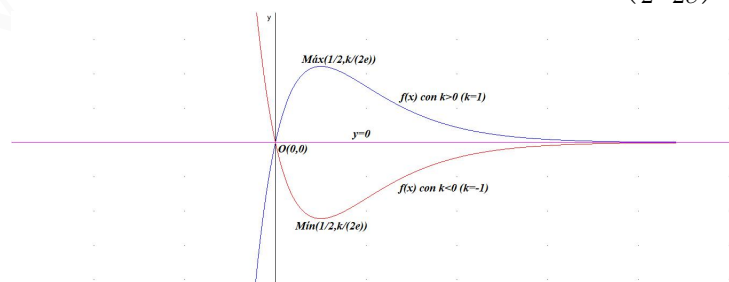
La función presenta un máximo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2}; \frac{k}{2e}\right)$

 Si $k < 0$:

	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y creciente en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

La función presenta un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2}; \frac{k}{2e}\right)$



c) f es una función continua en $[-1, 1]$ y además cambia de signo en los extremos de los intervalos se cual sea el valor k :

$$\text{Si } k > 0 \implies f(-1) = -\frac{k}{e^{-2}} < 0 \text{ y } f(1) = \frac{k}{e^{-2}} > 0$$

$$\text{Si } k < 0 \implies f(-1) = -\frac{k}{e^{-2}} > 0 \text{ y } f(1) = \frac{k}{e^{-2}} < 0$$

Luego, independientemente del valor de k la función cumple las condiciones del teorema de Bolzano que nos asegura que $\exists c \in (-1, 1)$ que cumple $f(c) = 0$.

Problema 8.1.6 (10 puntos) Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano $(-1, 0), (1, 0), (1, 1)$ y $(-1, 1)$. Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$, contenidas dentro de R . Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R .

Solución:

El área del rectángulo es $2u^2$.

Los puntos de corte de las dos gráficas son:

$$f(x) = g(x) \implies x^2 = a \implies x = \pm\sqrt{a} \xrightarrow{0 < a < 1} \text{hay tres recintos } S_1 : [-1, -\sqrt{a}], S_2 : [-\sqrt{a}, \sqrt{a}] \text{ y } S_3 : [\sqrt{a}, 1].$$

$$F(x) = \int (x^2 - a) dx = \frac{x^3}{3} - ax$$

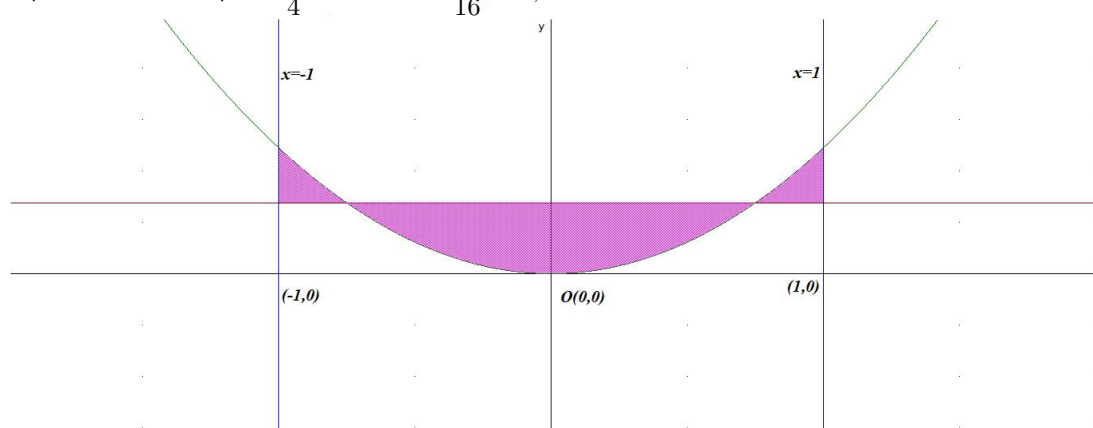
$$S_1 = \int_{-1}^{-\sqrt{a}} (x^2 - a) dx = F(-\sqrt{a}) - F(-1) = \frac{2a^{3/2} - 3a + 1}{3}$$

$$S_2 = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (x^2 - a) dx = F(\sqrt{a}) - F(-\sqrt{a}) = -\frac{4a^{3/2}}{3}$$

$$S_3 = \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a) dx = F(1) - F(\sqrt{a}) = \frac{2a^{3/2} - 3a + 1}{3}$$

$$S(a) = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{2a^{3/2} - 3a + 1}{3} + \frac{4a^{3/2}}{3} + \frac{2a^{3/2} - 3a + 1}{3} = \frac{8a^{3/2} - 6a + 2}{3}$$

$$S(a) = \frac{8a^{3/2} - 6a + 2}{3} = \frac{2}{3} \implies 8a^{3/2} - 6a = 0 \implies 2a(4\sqrt{a} - 3) = 0 \implies a = 0 \text{ (no válida) y } 4\sqrt{a} - 3 = 0 \implies \sqrt{a} = \frac{3}{4} \xrightarrow{0 < a < 1} a = \frac{9}{16} = 0,5625$$



Problema 8.1.7 (10 puntos) Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2 . La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0,6. La moneda M_2 tiene una cara impresa

en ambos lados.

- a) (3 puntos) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.

a) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras?

b) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz?

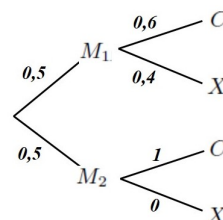
- b) (4 puntos) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1 . Responder a la misma pregunta para la moneda M_2 .

Solución:

Sean C cara y X cruz.

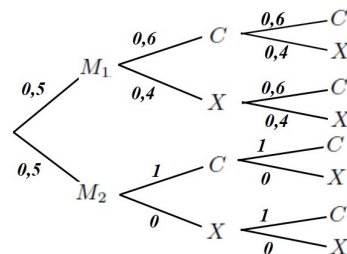
- a) Tenemos:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|M_1)P(M_1) + P(C|M_2)P(M_2) = \\ &= 0,6 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0,8 \text{ y } P(X) = 1 - P(C) = 0,2 \\ P(CCC) &= 0,8^3 = 0,512 \\ P(\text{una cruz}) &= P(XCC) + P(CXC) + P(CCX) = \\ &= 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,384 \end{aligned}$$



- b) Tenemos:

$$\begin{aligned} P(CC) &= P(CC|M_1)P(M_1) + P(CC|M_2)P(M_2) = \\ &= 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0,68 \\ P(CC|M_1) &= 0,6 \cdot 0,6 = 0,36 \\ P(M_1|CC) &= \frac{P(CC|M_1)P(M_1)}{P(CC)} = \frac{0,36 \cdot 0,5}{0,68} = 0,2647 \\ P(M_2|CC) &= \frac{P(CC|M_2)P(M_2)}{P(CC)} = \frac{1 \cdot 0,5}{0,68} = 0,7353 \end{aligned}$$



Problema 8.1.8 (10 puntos) Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30 % de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

- a) (3 puntos) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas.
b) (3 puntos) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas.
c) (4 puntos) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas.

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

$$B(10; 0,7)$$

- a) $P(X > 7) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{8} 0,7^8 \cdot 0,3^2 + \binom{10}{9} 0,7^9 \cdot 0,3^1 + \binom{10}{10} 0,7^{10} \cdot 0,3^0 = 0,3828$
- b) $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)] = 1 - \left[\binom{10}{0} 0,7^0 \cdot 0,3^{10} + \binom{10}{1} 0,7^1 \cdot 0,3^9 + \binom{10}{2} 0,7^2 \cdot 0,3^8 + \binom{10}{3} 0,7^3 \cdot 0,3^7 + \binom{10}{4} 0,7^4 \cdot 0,3^6 \right] = 0,9527$
- c) $P(3 \leq X \leq 8) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 9) + P(X = 10)] = 1 - \left[\binom{10}{0} 0,7^0 \cdot 0,3^{10} + \binom{10}{1} 0,7^1 \cdot 0,3^9 + \binom{10}{2} 0,7^2 \cdot 0,3^8 + \binom{10}{9} 0,7^9 \cdot 0,3^1 + \binom{10}{10} 0,7^{10} \cdot 0,3^0 \right] = 0,8491$

8.2. Extraordinaria

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 8.2.1 (10 puntos) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real.

- a) (2 puntos) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible?
- b) (4 puntos) Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de A .
- c) (4 puntos) Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$.

Solución:

a) $|A| = k^2 - k - 2 = 0 \implies k = -1 \text{ y } k = 2 \implies \exists A^{-1} \forall k \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

b) Si $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Sea $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ y tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3c \\ 0 & \frac{b}{3} & c \\ 2a & -b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a \\ 0 & \frac{b}{3} & b \\ 2c & -c & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3c = 3a \Rightarrow a = c \\ c = b \\ 2a = 2c \Rightarrow a = c \\ -b = -c \Rightarrow b = c \end{cases} \Rightarrow a = b = c$$

Luego $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Problema 8.2.2 (10 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) (5 puntos) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2 X = B$ tiene una única solución.
- b) (5 puntos) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2 X = B$, encontrar el valor de α , β y γ dependiendo del parámetro real a .

Solución:

- a) $|A^2| = |A|^2 = (2(3-2a))^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$, luego $\exists (A^2)^{-1} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ y $X = (A^2)^{-1}B$ solución única de la ecuación.
- b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 & 8 \\ a+9 & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $\begin{pmatrix} 6a-5 \\ 3a+8 \\ 10a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6a-5 \\ \beta = 3a+8 \\ \gamma = 10a-9 \end{cases}$

Problema 8.2.3 (10 puntos) Se dan las rectas $r : x-1 = y-2 = \frac{z-1}{2}$ y $s : \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Se pide:

- a) (5 puntos) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.
- b) (5 puntos) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(1, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, -1, 2) \\ P_s(3, 3, -1) \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 3 - 2\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

a) $\overrightarrow{P_r P_s} = (3, 3, -1) - (1, 2, 1) = (2, 1, -2)$

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan o son paralelas.}$$

Como $\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \implies r \text{ y } s \text{ se cortan.}$

$$\implies \begin{cases} x = 1 + \lambda = 3 - 2\mu \\ y = 2 + \lambda = 3 - \mu \\ z = 1 + 2\lambda = -1 + 2\mu \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases} \implies P(1, 2, 1)$$

$$\text{b) } t \perp r \text{ y } t \perp s \implies \vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4, -6, 1)$$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (4, -6, 1) \\ P_t = P(1, 2, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 4\gamma \\ y = 2 - 6\gamma \\ z = 1 + \gamma \end{cases} \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}$$

Problema 8.2.4 (10 puntos) Sea el plano $\pi : 6x + 4y - 3z - d = 0$, Se pide:

- (2 puntos) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad.
- (3 puntos) Calcular, en función del parámetro d , las coordenadas de los puntos A , B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X , Y y Z , respectivamente.
- (5 puntos) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior.

Solución:

$$\text{a) } d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 - 0 - d|}{\sqrt{36 + 16 + 9}} = \frac{|-d|}{\sqrt{61}} = 1 \implies d = \pm\sqrt{61}$$

$$\text{b) } \text{Con el eje } OX \text{ hacemos } y = 0 \text{ y } z = 0 \implies 6x + 0 - 0 - d = 0 \implies x = \frac{d}{6} \implies A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$$

$$\text{Con el eje } OY \text{ hacemos } x = 0 \text{ y } z = 0 \implies 0 + 4y - 0 - d = 0 \implies y = \frac{d}{4} \implies B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$$

$$\text{Con el eje } OZ \text{ hacemos } x = 0 \text{ e } y = 0 \implies 0 + 0 - 3z - d = 0 \implies z = -\frac{d}{3} \implies C\left(0, 0, -\frac{d}{3}\right)$$

$$\text{c) } \vec{AB} = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right) = d\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, 0\right)$$

$$\vec{AC} = \left(0, 0, -\frac{d}{3}\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, 0, -\frac{d}{3}\right) = d\left(-\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{\frac{1}{36} + 0 + 0}{\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{16} + 0} \cdot \sqrt{\frac{1}{36} + 0 + \frac{1}{9}}} = \frac{2}{\sqrt{65}} \implies \alpha = 75^\circ 38' 12''$$

Problema 8.2.5 (10 puntos) Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

- (3 puntos) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$
- (2 puntos) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$.

c) (5 puntos) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas.

Solución:

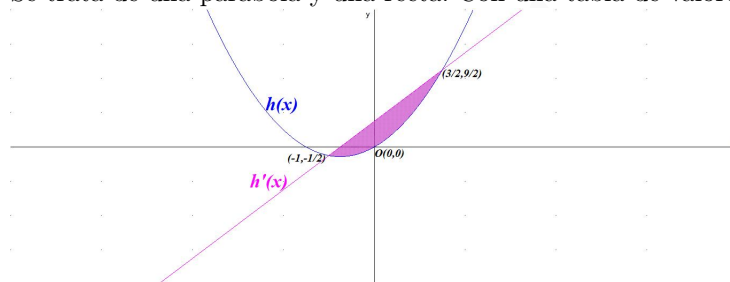
a) $h'(x) = a + 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada:

$h''(x) = 2 \Rightarrow h\left(-\frac{3}{4}\right) = 2 > 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$ es un mínimo.

b) $h(x) = \frac{3x}{2} + x^2 \Rightarrow g(x) = h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$

Se trata de una parábola y una recta. Con una tabla de valores dibujamos:



Los puntos de corte de ambas gráficas serán:

$$h(x) = g(x) \Rightarrow \frac{3x}{2} + x^2 = \frac{3}{2} + 2x \Rightarrow x = -1, \quad x = \frac{3}{2}$$

los puntos son: $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

c) $S : \left[-1, \frac{3}{2}\right]$ será el recinto de integración:

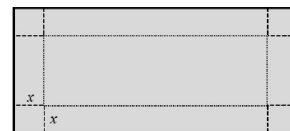
$$S = \int_{-1}^{3/2} (g(x) - h(x)) dx = \int_{-1}^{3/2} \left(\frac{3}{2} + 2x - \frac{3x}{2} - x^2 \right) dx = \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right) dx =$$

$$\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} \right]_{-1}^{3/2} = \frac{125}{48} \simeq 2,6042 \text{ u}^2$$

La integral sale positiva por estar la función $g(x) = h'(x)$ por encima de $h(x)$.

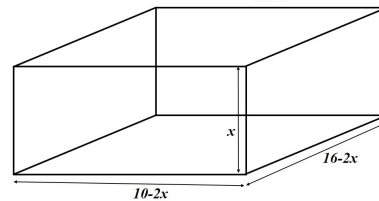
Problema 8.2.6 (10 puntos) Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

- a) (8 puntos) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible.
- b) (2 puntos) Dicho volumen.



Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } V(x) &= (10 - 2x)(16 - 2x)x = \\
 &= 4x^3 - 52x^2 + 160x \xrightarrow{0 < x < 5} \\
 V'(x) &= 12x^2 - 104x + 160 = 0 \implies \\
 x &= 2 \text{ y } x = \frac{20}{3} \text{ (No válida)} \\
 V''(x) &= 24x - 104 \implies \\
 V''(2) &= -56 < 0 \implies x = 2 \text{ es un máximo relativo.} \\
 \text{La caja tiene } 10 - 4 &= 6 \text{ cm de ancho, } 16 - 4 = 12 \text{ cm} \\
 \text{de largo y } 2 \text{ cm de alto.}
 \end{aligned}$$



$$\text{b) } V(2) = 144 \text{ cm}^3$$

Problema 8.2.7 (10 puntos) Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10,25 % de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30 % de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10 % defectuosas. El 25 % de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5 % defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

- (4 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa?
- (3 puntos) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina?
- (3 puntos) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina?

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

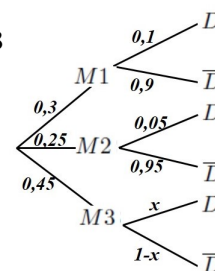
Solución:

Sean $M1$ primera máquina, $M2$ segunda máquina, $M3$ tercera máquina, D defectuoso y $\bar{D}$ no defectuoso.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(D) &= P(D|M1)P(M1) + P(D|M2)P(M2) + P(D|M3)P(M3) \implies \\
 0,1025 &= 0,1 \cdot 0,3 + 0,05 \cdot 0,25 + x \cdot 0,45 \implies x = P(D|M3) = \frac{2}{15} \simeq 0,1333
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(M1|\bar{D}) = \frac{P(\bar{D}|M1)P(M1)}{P(\bar{D})} = \frac{0,9 \cdot 0,3}{1 - 0,1025} = 0,3008$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } P(M1 \cup M3|D) &= \frac{P(D|M1)P(M1) + P(D|M3)P(M3)}{P(D)} = \\
 \frac{0,1 \cdot 0,3 + 0,1333 \cdot 0,45}{0,1025} &= 0,8779
 \end{aligned}$$



Problema 8.2.8 (10 puntos) Se ha determinado que en el 60 % de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

- (3 puntos) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos.
- (3 puntos) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos.
- (4 puntos) Ocho o más mensajes tengan emoticonos.

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

$$B(10; 0, 6)$$

$$\text{a) } P(X = 0) = \binom{10}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^{10} = 0,0001$$

$$\text{b) } P\left(X = \frac{2}{5} \cdot 10\right) = P(X = 4) = \binom{10}{4} 0,6^4 \cdot 0,4^6 = 0,1115$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \\ &\binom{10}{8} 0,6^8 \cdot 0,4^2 + \binom{10}{9} 0,6^9 \cdot 0,4^1 + \binom{10}{10} 0,6^{10} \cdot 0,4^0 = 0,1673 \end{aligned}$$

Capítulo 9

Extremadura

9.1. Ordinaria

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de 10 preguntas, cuyo valor es de 2 puntos. El estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras cuestiones/preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tomada en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el sexto lugar. Se deben justificar todas las respuestas y soluciones.

Problema 9.1.1 (2 puntos) Sea $b \in \mathbb{R}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b+1 \\ b+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$

- a) (1 punto) Calcular los valores de b para los que A tiene inversa.
- b) (1 punto) Hallar A^{-1} para el caso $b = 0$ (debe justificarse adecuadamente la respuesta).

Solución:

a) $|A| = 1 - b^2 = 0 \implies b = \pm 1 \implies \exists A^{-1} \forall b \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Problema 9.1.2 (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \\ a-b & 1 \end{pmatrix}$ y $N =$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar los valores de a y b para que el producto $A \cdot M$ sea igual a la inversa de la matriz N .

Solución:

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \\ a-b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b & 1 \\ b-a & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot M = N^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-b & 1 \\ b-a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a-b=2 \\ -a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$$

Problema 9.1.3 (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x-y-4z+1=0 \\ x-2z+1=0 \end{cases} \text{ y es paralelo a la recta de ecuación } s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{3}.$$

Solución:

$$r : \begin{cases} x-y-4z+1=0 \\ x-2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, -2, 1) \\ P_r(-1, 0, 0) \end{cases}$$

$$s : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{3} \Rightarrow s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, -1, 3) \\ P_s(1, 3, 0) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, -2, 1) \\ \vec{u}_s = (2, -1, 3) \\ P_r(-1, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi : -5x - 4y + 2z - 5 = 0 \Rightarrow \pi : 5x + 4y - 2z + 5 = 0$$

Problema 9.1.4 (2 puntos) Dados los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(0, 3, 1)$ y $C(1, 0, -1)$. Determinar:

a) (1 punto) Un vector unitario y ortogonal a los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

b) (0,5 puntos) El ángulo determinado por dichos vectores.

c) (0,5 puntos) El área del triángulo que forman A , B y C .

Solución:

$$a) \vec{AB} = (0, 3, 1) - (1, 2, 1) = (-1, 1, 0) \text{ y } \vec{AC} = (1, 0, -1) - (1, 2, 1) = (0, -2, -2)$$

$$\vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-2, -2, 2) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{AB}, \vec{AC}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(-2, -2, 2)}{\sqrt{12}} = \frac{(-2, -2, 2)}{2\sqrt{3}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\text{También sería válido el } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$b) \cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{(-1, 1, 0) \cdot (0, -2, -2)}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

$$c) S_t = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(-2, -2, 2)| = \sqrt{3} u^2$$

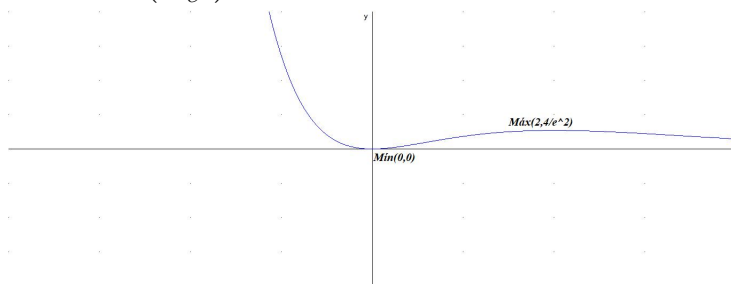
Problema 9.1.5 (2 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y los puntos extremos de la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Solución:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y creciente en el $(0, 2)$, tiene un máximo relativo en $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$ y un mínimo relativo en $(0, 0)$.



Problema 9.1.6 (2 puntos) Calcular el valor de a para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - xe^x}{x^2 - 2\cos x + 2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ sea continua en } x = 0.$$

Solución:

f continua en $x = 0$:

$$f(0) = a \text{ y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - xe^x}{x^2 - 2\cos x + 2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x - xe^x}{2x + 2\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - e^x - e^x - xe^x}{2 + 2\cos x} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ luego}$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a \implies a = -\frac{1}{2}$$

Problema 9.1.7 (2 puntos) Hallar una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (2x + 5)e^{-2x}$ que cumpla $F(0) = 0$.

Solución:

$$F(x) = \int (2x + 5)e^{-2x} dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x + 5 \implies du = 2dx \\ dv = e^{-2x} dx \implies v = -\frac{e^{-2x}}{2} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = -\frac{(2x + 5)e^{-2x}}{2} + \int e^{-2x} dx =$$

$$-\frac{(2x + 5)e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + C = -e^{-2x} \left(\frac{2x + 5}{2} + \frac{1}{2} \right) + C = -(x + 3)e^{-2x} + C$$

$$F(0) = 0 \implies -3 + C = 0 \implies C = 3 \implies F(x) = -(x + 3)e^{-2x} + 3$$

Problema 9.1.8 (2 puntos) Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 5x$ y $g(x) = -x$.

Solución:

$$f(x) = g(x) \implies x^3 - 5x = -x \implies x^3 - 4x = 0 \implies x = 0, x = \pm 2 \implies \text{hay dos áreas: } S_1 : [-2, 0]$$

y $S_2 : [0, 2]$

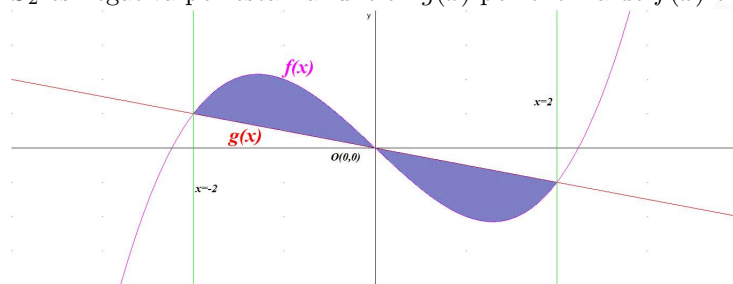
$$F(x) = \int (x^3 - 4x) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + C$$

$$S_1 = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx = F(0) - F(-2) = 0 + 4 = 4$$

$$S_2 = \int_0^2 (x^3 - 4x) dx = F(2) - F(0) = -4$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4 + 4 = 8 \text{ u}^2$$

S_2 es negativa por estar la función $g(x)$ por encima de $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$



Problema 9.1.9 (2 puntos) En una residencia de ancianos el 80 % de los residentes tiene cuenta de correo electrónico, el 60 % tiene redes sociales, y el 10 % no tiene ni correo electrónico ni redes sociales. Se pide calcular la probabilidad

- (0,5 puntos) De que un residente use correo electrónico y redes sociales.
- (0,75 puntos) De que un residente use sólo una de las dos cosas.
- (0,75 puntos) De que un residente use correo electrónico sabiendo que no usa redes sociales.

Solución:

Sean C tiene cuenta de correo electrónico y R tiene redes sociales.

$$P(C) = 0,8, P(R) = 0,6 \text{ y } P(\overline{C} \cap \overline{R}) = 0,1$$

- $P(\overline{C} \cap \overline{R}) = P(\overline{C \cup R}) = 1 - P(C \cup R) = 0,1 \implies P(C \cup R) = 0,9$
 $P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) \implies 0,9 = 0,8 + 0,6 - P(C \cap R) \implies P(C \cap R) = 0,5$
- $P(C \cap \overline{R}) + P(\overline{C} \cap R) = P(C) + P(R) - 2P(C \cap R) = 0,8 + 0,6 - 1 = 0,4$
- $P(C|\overline{R}) = \frac{P(C \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{P(C) - P(C \cap R)}{1 - P(R)} = \frac{0,8 - 0,5}{0,4} = \frac{3}{4} = 0,75$

Problema 9.1.10 (2 puntos) Luis es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 10 días Luis llega tarde como mucho 3 días, le subirá 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Luis llegue tarde a clase cada día es 0,5, determinar:

- (0,5 puntos) El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Luis llega tarde a clase en los próximos 10 días. ¿Cuáles son sus parámetros?
- (0,75 puntos) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?
- (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Luis consiga esa subida de 1 punto en la nota final?

Solución:

$$B(15; 0, 3)$$

- a) Se trata de una distribución binomial $B(10; 0, 5)$ donde $n = 10$, $p = 0, 5$ y $q = 1 - p = 0, 5$.
- b) La media de la distribución es $\mu = np = 5$ y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0, 5 \cdot 0, 5} = 1,5811$
- c) $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
 $\binom{10}{0} 0,5^0 \cdot 0,5^{10} + \binom{10}{1} 0,5^1 \cdot 0,5^9 + \binom{10}{2} 0,5^2 \cdot 0,5^8 + \binom{10}{3} 0,5^3 \cdot 0,5^7 = 0,171875$

9.2. Extraordinaria

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de 10 preguntas, cuyo valor es de 2 puntos. El estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras cuestiones/preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el sexto lugar. Se deben justificar todas las respuestas y soluciones.

Problema 9.2.1 (2 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- a) (1 punto) Calcular la inversa de la matriz $A + A^t$ donde A^t es la traspuesta de A .
- b) (1 punto) Encontrar la matriz X que verifica $XA + XA^t = C$

Solución:

$$\text{a) } |A + A^t| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\exists (A + A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } XA + XA^t = C \Rightarrow X(A + A^t) = C \Rightarrow X = C(A + A^t)^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 9.2.2 (2 puntos) Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$ según sea el valor de m .

Solución:

$$|A| = 2(m^3 - 3m + 2) = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ y } m = -2.$$

☛ Si $m \in \mathbb{R} - \{1, -2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

• Si $m = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

• Si $m = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 9.2.3 (2 puntos)

- a) (1 punto) Dados los vectores $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (5, 0, 1)$, $\vec{w} = (a, b, 1)$ calcular a y b para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además los tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.
- b) (1 punto) Calcular el volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z} = (1, 2, 1)$.

Solución:

- a) • $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente dependientes:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = a - 2b - 5 = 0.$$

• $\vec{u} \perp \vec{w}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 1, 0) \cdot (a, b, 1) = 2a + b = 0$$

• $\begin{cases} a - 2b = 5 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

b) $V_P = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}]| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = |-8| = 8$

Problema 9.2.4 (2 puntos) Se consideran las rectas $r : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = -6\lambda \end{cases}$ y $s : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{a} = \frac{z}{3}$.

- a) (1 punto) Calcular a para que ambas rectas sean paralelas.
- b) (1 punto) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano de ecuación $-3x + 4y - 4 = 0$.

Solución:

a) $r : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = -6\lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 2, -6) = -2(1, -1, 3) \\ P_r(1, 5, 0) \end{cases}$

$$s : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{a} = \frac{z}{3} \Rightarrow s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, a, 3) \\ P_s(-1, 1, 0) \end{cases}$$

$$r \parallel s \Rightarrow \vec{u}_r = k\vec{u}_s \Rightarrow (1, -1, 3) = k(1, a, 3) \Rightarrow \begin{cases} 1 = k \\ -1 = ak \\ 3 = 3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Si $a = -1$ las rectas son paralelas o coincidentes, comprobamos si $P_s \in r$:

$$\begin{cases} -1 = 1 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \\ 1 = 5 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = -2 \\ 0 = -6\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow P_s \notin r \Rightarrow r \parallel s.$$

b) $\vec{u}_\pi = (-3, 4, 0)$:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{|\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{u}_\pi| \cdot |\vec{u}_r|} = \frac{|(-3, 4, 0) \cdot (1, -1, 3)|}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{1+1+9}} = \frac{|-7|}{5\sqrt{11}} = \frac{7\sqrt{11}}{55} \Rightarrow$$

$$\alpha = 24^\circ 58' 6''$$

Problema 9.2.5 (2 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{4x+4}{x^2}$

a) (1,5 puntos) Estudiar sus asíntotas, monotonía y extremos relativos.

b) (0,5 puntos) Representarla gráficamente.

Solución:

a) Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x+4}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x+4}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$

- Horizontales: $y = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+4}{x^2} = 0$

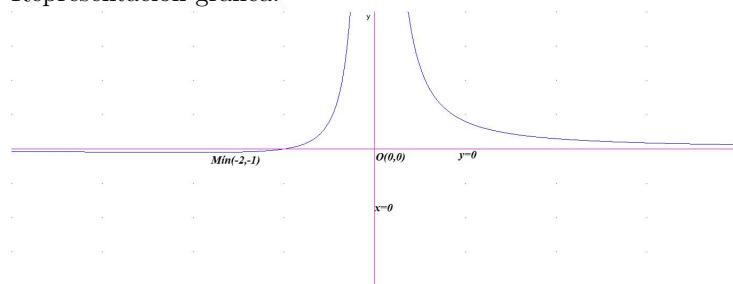
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Monotonía: $f'(x) = -\frac{4(x+2)}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ y creciente en el $(-2, 0)$ con un mínimo relativo en el punto $(-2, -1)$

b) Representación gráfica:



Problema 9.2.6 (2 puntos) Calcular a y b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - b & \text{si } x < 0 \\ a + cx & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ cumpla los requisitos del teorema de Rolle en el intervalo } [-2, 2]$$

Solución:

Condiciones del teorema de Rolle:

☛ f continua en $[-2, 2]$:

Las dos ramas son polinomios y son continua en el intervalo, hay que imponer que lo sea en

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + ax - b) = -b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (a + cx) = a \\ f(0) = a \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \xRightarrow{\quad} a = -b \Rightarrow$$

$$a + b = 0$$

☛ f derivable en $(-2, 2)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + a & \text{si } x < 0 \\ c & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = a \\ f'(0^+) = c \end{cases} \xRightarrow{f'(0^-)=f'(0^+)} a = c \Rightarrow a - c = 0$$

☛ $f(-2) = f(2)$:

$$\begin{cases} f(-2) = 4 - 2a - b \\ f(2) = a + 2c \end{cases} \xRightarrow{f(-2)=f(2)} 4 - 2a - b = a + 2c \Rightarrow 3a + b + 2c = 4$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - c = 0 \\ 3a + b + 2c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Problema 9.2.7 (2 puntos) Hallar la integral $\int \frac{-x^2 + 7x + 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx$.

Solución:

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \text{ y } x = -2 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$$

$$\frac{-x^2 + 7x + 6}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x^3 + x^2 - 2x}$$

$$-x^2 + 7x + 6 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 6 = -2A \Rightarrow A = -3 \\ x = 1 \Rightarrow 12 = 3B \Rightarrow B = 4 \\ x = -2 \Rightarrow -12 = 6C \Rightarrow C = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-x^2 + 7x + 6}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{-3}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{-2}{x+2}$$

$$\int \frac{-x^2 + 7x + 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \int \left(\frac{-3}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{-2}{x+2} \right) dx = -3 \ln |x| + 4 \ln |x-1| - 2 \ln |x+2| + K$$

Problema 9.2.8 (2 puntos) Determinar el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6$ y $g(x) = 2x + 6$.

Solución:

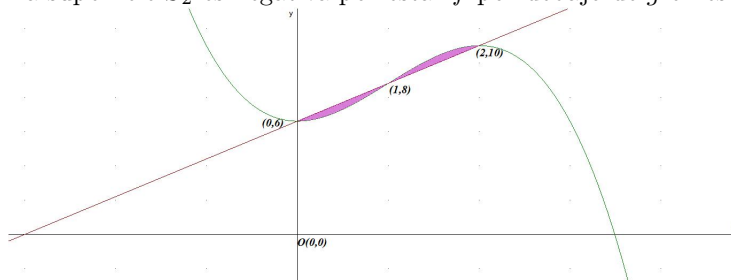
$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^3 + 3x^2 + 6 = 2x + 6 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \text{ y } x = 2$ luego tenemos dos recintos: $S_1 : [0, 1]$ y $S_2 : [1, 2]$

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$S_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2 = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ u}^2$$

La superficie S_2 es negativa por estar f por debajo de g en ese intervalo.



Problema 9.2.9 (2 puntos) En una votación se registran 900 votos en total. El candidato A consigue 300 votos; el B consigue el 25 % del total y el candidato C se lleva el resto. Se sabe que el 60 % de los que han votado al candidato A eran mujeres; el 60 % de los del B eran hombres, y el 20 % de los del candidato C eran mujeres.

- (1 punto) Si se elige un votante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- (1 punto) Si un votante es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado al candidato A ?

Solución:

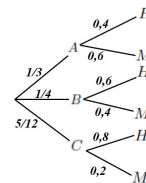
Sean A vota al candidato A , B vota al candidato B , C vota al candidato C , H es hombre y M es mujer.

$$P(A) = \frac{300}{900} = \frac{1}{3}, P(B) = 0,25 = \frac{1}{4} \text{ y } P(C) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}$$

$$P(M|A) = 0,6, P(H|B) = 0,6 \text{ y } P(M|C) = 0,2$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(M) &= P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|C)P(C) = \\ &= 0,6 \cdot \frac{1}{3} + 0,4 \cdot \frac{1}{4} + 0,2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{23}{60} \simeq 0,3833 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(A|H) = \frac{P(H|A)P(A)}{P(H)} = \frac{0,4 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{23}{60}} = \frac{8}{37} \simeq 0,2162$$



Problema 9.2.10 (2 puntos) La probabilidad de que un jugador de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es de 0,4. Si realiza 5 lanzamientos, calcula

- (0,75 puntos) La probabilidad de que no haga ningún hoyo.
- (0,75 puntos) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos.
- (0,5 puntos) El número medio de hoyos.

Solución:

$$B(5; 0,4)$$

$$\text{a) } P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^5 = 0,07776$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ &= \binom{5}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^3 = 0,68256 \end{aligned}$$

$$\text{c) } np = 5 \cdot 0,4 = 2 \text{ hoyos.}$$

“www.musat.net”

Capítulo 10

Galicia

10.1. Ordinaria

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un MÁXIMO DE 5, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.

Números y Álgebra:

Problema 10.1.1 (2 puntos) Sean A y B dos matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, y $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Calcule A^2 .
- b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2X - (A + B)^T = 3I - 2X$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^T$ la traspuesta de $A + B$.

Solución:

$$\text{a) } \begin{cases} A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \implies A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A^2X - (A + B)^T &= 3I - 2X \implies A^2X + 2X = 3I + (A + B)^T \implies \\ (A^2 + 2I)X &= 3I + (A + B)^T \implies X = (A^2 + 2I)^{-1}(3I + (A + B)^T) = \\ \left[\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right] &= \\ \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ -1/3 & 5/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problema 10.1.2 (2 puntos) Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3 \\ 2mx + 3my + 2z = 5 \\ (m-4)y + mz = m \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & m+2 & 1 & 3 \\ 2m & 3m & 2 & 5 \\ 0 & m-4 & m & m \end{array} \right), |A| = m^2(m-4) = 0 \implies m = 0 \text{ y } m = 4.$$

• Si $m \in \mathbb{R} - \{0, 4\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)}$

• Si $m = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 1 & 3 \\ 8 & 12 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \implies$$

Sistema Incompatible

• Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \implies \text{Sistema incompatible}$$

Análisis

Problema 10.1.3 (2 puntos)

a) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.

b) Calcule $\int x^3 e^{x^2} dx$.

Solución:

a) • **Teorema de Bolzano**

Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ ($a < b$) y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

• **Teorema de Rolle**

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) . Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$\text{b) } \int x^3 e^{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \implies du = 2x dx \\ dv = x e^{x^2} dx \implies v = \frac{1}{2} e^{x^2} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \int x e^{x^2} dx = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + C =$$

$$\frac{e^{x^2}(x^2 - 1)}{2} + C$$

Problema 10.1.4 (2 puntos) Calcule los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x e^{\sin x} - e^x}{2x} \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x} - e^x}{2} = 0$$

Geometría:

Problema 10.1.5 (2 puntos)

- a) Considere el plano $\pi : 4x + 2y + bz = 2$ y la recta $r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$ donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π .
- b) Calcule la distancia del punto $P(1, 3, 1)$ al plano $\pi' : 4x + 2y - 4z = 2$

Solución:

$$a) r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 2, 4) \\ P_r(2, c, 3) \end{cases} \text{ y } \vec{u}_\pi = (4, 2, b)$$

$$\vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi \implies \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = 0 \implies (3, 2, 4) \cdot (4, 2, b) = 12 + 4 + 4b = 0 \implies b = -4$$

$$P_r \in \pi \implies 8 + 2c + 3b = 2 \implies 2c + 3b = -6 \implies 2c - 12 = -6 \implies c = 3$$

b) $d(P, \pi') = \frac{|4 + 6 - 4 - 2|}{\sqrt{16 + 4 + 16}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} u$

Problema 10.1.6 (2 puntos)

- a) Considere los puntos $Q(-1, 3, -5)$, $R(3, 1, 0)$ y $S(0, 1, 2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a Q , R y S .
- b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, -1)$ y sea perpendicular al plano $\pi : 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

Solución:

$$a) \vec{QR} = (3, 1, 0) - (-1, 3, -5) = (4, -2, 5) \text{ y } \vec{QS} = (0, 1, 2) - (-1, 3, -5) = (1, -2, 7)$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{QR} = (4, -2, 5) \\ \vec{QS} = (1, -2, 7) \\ S(0, 1, 2) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -4x - 23y - 6z + 35 = 0 \implies$$

$$\pi : 4x + 23y + 6z - 35 = 0$$

b) $r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (4, 23, 6) \\ P_r = P(3, -1, -1) \end{cases} \implies \text{ecuación paramétrica: } \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = -1 + 23\lambda \\ z = -1 + 6\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ y ecuación}$

continua: $r : \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{23} = \frac{z+1}{6}$

Probabilidad y estadística

Problema 10.1.7 (2 puntos) Sabiendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$

- a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A}|\bar{A} \cup \bar{B})$
b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A}|\bar{A} \cup \bar{B})$

Solución:

a) $\bullet P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \stackrel{P(A \cap B) = P(A)P(B)}{=} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$$\bullet P(\bar{A}|\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A} \cap B)} = \frac{1 - 1/3}{1 - 1/6} = \frac{2/3}{5/6} = \frac{4}{5}$$

b) $\bullet P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \stackrel{P(A \cap B) = 0}{=} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

$$\bullet P(\bar{A}|\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A} \cap B)} = \frac{1 - 1/3}{1 - 0} = \frac{2}{3}$$

Problema 10.1.8 (2 puntos) Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

- a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?
b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5 % de estas botellas?

Solución:

$$N(500, 4)$$

a) $P(499 \leq X \leq 502) = P\left(\frac{499 - 500}{4} \leq Z \leq \frac{502 - 500}{4}\right) = P(-0,25 \leq Z \leq 0,5) =$
 $P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq -0,25) = P(Z \leq 0,5) - (1 - P(Z \leq 0,25)) = 0,6915 - (1 - 0,5987) =$
 $0,2902$

b) $P(X \geq a) = 0,975 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 500}{4}\right) = P\left(Z \leq -\frac{a - 500}{4}\right) = 0,975 \Rightarrow$
 $-\frac{a - 500}{4} = 1,96 \Rightarrow a = 492,16.$

La cantidad de líquido excedida por el 97,5 % es de 492,16 mililitros.

10.2. Extraordinaria

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un MÁXIMO DE 5, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.

Números y Álgebra:

Problema 10.2.1 (2 puntos) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ dé respuesta a los dos apartados siguientes:

- a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.
- b) Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

Solución:

- a) X es antisimétrica si $X^t = -X$.

$$\text{Sea } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -a \Rightarrow a = 0 \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \Rightarrow d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y & -x \end{pmatrix}$$

$$XA = b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -x & -y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = XA \Rightarrow b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y & -x \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -x & -y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{b \neq 0} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

- b) Si $x = -1$ e $y = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ como $|A| = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$2M = A^{-1} - AM \Rightarrow 2M + AM = A^{-1} \Rightarrow (2I + A)M = A^{-1} \Rightarrow M = (2I + A)^{-1} A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 & -1/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$$

Problema 10.2.2 Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = m \\ x - y + 2z = 2m \\ mx + 3z = m \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 & 2m \\ m & 0 & 3 & m \end{array} \right), |A| = 3m - 9 = 0 \Rightarrow m = 3.$$

☛ Si $m \in \mathbb{R} - \{3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^o$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $m = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Análisis

Problema 10.2.3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{k - xe^x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en $x = 0$ para cualquier valor de b ?
- b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x = 0$?

Solución:

- a) Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + bx - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k - xe^x}{x} \stackrel{k=0}{=} \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x+1)e^x}{1} = -1 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$
$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)}_{k=0}$$

- b) Como f tiene que ser continua $k = 0$ por el apartado anterior. Tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{si } x \leq 0 \\ -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(0^-) = b \\ f'(0^+) = -1 \end{cases} \xrightarrow{f'(0^-)=f'(0^+)} b = -1$$

Problema 10.2.4 (2 puntos) Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ la parábola $y = ax^2 + 4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

Solución:

Los puntos de corte de la recta y la parábola son:

$$ax^2 + 4x = -2x \implies ax^2 + 6x = 0 \implies x(ax + 6) = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = -\frac{6}{a} \text{ con } a > 0$$

El recinto de integración es $S : \left[-\frac{6}{a}, 0 \right]$:

$$S = \left| \int_{-6/a}^0 (-2x - ax^2 - 4x) dx \right| = \left| \int_{-6/a}^0 (-6x - ax^2) dx \right| = \left| -3x^2 - \frac{ax^3}{3} \right|_{-6/a}^0 = \left| 0 + \frac{36}{a^2} \right| = \frac{36}{a^2}$$

La integral es positiva al estar la recta por encima de parábola en este intervalo.

$$\frac{36}{a^2} = 9 \implies a^2 = 4 \implies a = \pm 2 \xrightarrow{a>0} a = 2$$

Geometría:

Problema 10.2.5 (2 puntos) Considérense el plano $\pi : x + 2y - 2z = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2, 1, 2)$ y $B(0, 1, 1)$. Se pide:

- a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π .

b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

Solución:

$$\text{a) } r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{BA} = (2, 0, 1) \\ P_r = B(0, 1, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Sustituyendo } r \text{ en } \pi \implies (2\lambda) + 2 \cdot 1 - 2(1 + \lambda) = 0 \implies 0 = 0 \implies r \subset \pi$$

$$\text{b) } \pi' : \begin{cases} \vec{u}_{\pi'} = (1, 2, -2) \\ \vec{u}_r = (2, 0, 1) \\ P_r(0, 1, 1) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 5y - 4z + 9 = 0$$

Problema 10.2.6 (2 puntos) Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1, 3, -5)$ y $B(1, 2, -5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5, 0, 1)$ y es perpendicular a r . Se piden las ecuaciones paramétricas de r , la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π .

Solución:

$$\bullet r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (2, -1, 0) \\ P_r = B(1, 2, -5) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \vec{u}_{\pi} = \vec{u}_r = (2, -1, 0) \implies \pi : 2x - y + K = 0 \xrightarrow{C \in \pi} 10 - 0 + 0 + K = 0 \implies K = -10$$

$$\pi : 2x - y - 10 = 0$$

• Sustituyendo r en π :

$$2(1 + 2\lambda) - (2 - \lambda) - 10 = 0 \implies \lambda = 2 \implies H(5, 0, -5) \text{ es el punto de corte de } r \text{ con } \pi.$$

Probabilidad y estadística

Problema 10.2.7 (2 puntos) En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13 % de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

Solución:

Sea p la probabilidad de infértil y tenemos $B(7; 0, 13)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left(\binom{7}{0} \cdot 0,13^0 \cdot 0,87^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,13^1 \cdot 0,87^6 \right) = 0,22815$$

Problema 10.2.8 (2 puntos) La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?

b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5 % de estos aparatos?

Solución:

$$N(20000; 2500)$$

$$\text{a) } P(X \leq 17000) = P\left(Z \leq \frac{17000 - 20000}{2500}\right) = P(Z \leq -1,2) = 1 - P(Z \leq 1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151$$

$$\begin{aligned} \text{b) Tenemos } P(X \geq a) &= 0,985 \\ P(X \geq a) &= P\left(Z \geq \frac{a - 20000}{2500}\right) = P\left(Z \leq -\frac{a - 20000}{2500}\right) = 0,985 \Rightarrow \\ -\frac{a - 20000}{2500} &= 2,17 \Rightarrow a = 14575 \text{ horas} \end{aligned}$$

Capítulo 11

Islas Baleares

11.1. Ordinaria

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4.

Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Problema 11.1.1 (10 puntos) Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- ☛ Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
 - ☛ Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
 - ☛ Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
 - ☛ Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €
- a) (3 puntos) Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debe de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.
- b) (2 puntos) ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?
- c) (5 puntos) Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

Solución:

Sean x el precio de una botella de vino tinto, y de blanco y z de rosado.

- ☛ $3x + 2y = 67$
- ☛ $2x + 4y + z = 85$

☛ $x + z = 21$

☛ $4y + 5z = 85$

a)
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$$

b) Sobra una ecuación que tiene que ser combinación lineal de las otras para que el sistema tenga solución.

c)
$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 67 \\ 2 & 4 & 1 & 85 \\ 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \\ 3 & 2 & 0 & 67 \\ 2 & 4 & 1 & 85 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_1 \\ F_4 - 2F_1 \end{array} \right] = \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 43 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \\ F_4 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \\ 0 & 0 & -11 & -77 \\ 0 & 0 & -6 & -42 \end{array} \right) = \\ & \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 11F_4 - 6F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \\ 0 & 0 & -11 & -77 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} -11z = -77 \Rightarrow z = 7 \\ 4y + 35 = 85 \Rightarrow y = 12,5 \\ x + 7 = 21 \Rightarrow x = 14 \end{cases} \end{aligned}$$

La botella de vino tinto tiene un precio de 14 €, la de blanco 12,5 € y la de rosado a 7 €.

Problema 11.1.2 (10 puntos) Consideramos las matrices A de dimensión 3×3 que satisfacen que $3A + I = A^2$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3 .

a) (3 puntos) Calcula la expresión de la matriz inversa de A .

b) (3 puntos) Dada la ecuación matricial

$$A + 3AX = 5I$$

donde A es una de las matrices del enunciado. Calcula, en función solo de la matriz A (no de su inversa) y de la identidad I , la matriz X . ¿Qué dimensión tiene la matriz X ? Justifica la respuesta.

c) (4 puntos) Calcula todas las matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

tales que cumplan las condiciones del enunciado.

Solución:

a) $3A + I = A^2 \Rightarrow A^2 - 3A = I \Rightarrow (A - 3I)A = I \Rightarrow A^{-1} = A - 3I$

b) $A + 3AX = 5I \Rightarrow 3AX = 5I - A \Rightarrow X = \frac{1}{3}(A^{-1}(5I - A)) = \frac{1}{3}(5A^{-1} - I) = \frac{1}{3}(5(A - 3I) - I) = \frac{1}{3}(5A - 16I).$

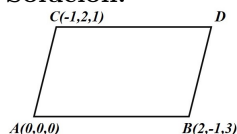
Todas las matrices son cuadradas de orden 3 y, por tanto, X es de orden 3.

c) $(A - 3I)A = I \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} =$
 $\begin{pmatrix} a-3 & 1 & 0 \\ 1 & b-3 & 0 \\ 0 & 0 & c-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} =$
 $\begin{pmatrix} a^2-3a+1 & a+b-3 & 0 \\ a+b-3 & b^2-3b+1 & 0 \\ 0 & 0 & c(c-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $\begin{cases} a^2-3a+1=1 \\ a+b-3=0 \\ b^2-3b+1=1 \\ c(c-3)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=0 \\ c=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ y } \begin{cases} a=0 \\ b=3 \\ c=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

Problema 11.1.3 (10 puntos) Consideremos los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,-1,3)$ y $C(-1,2,1)$.

- a) (3 puntos) Calcula el punto D tal que $ABDC$ es un paralelogramo.
- b) (4 puntos) Calcula uno de los puntos E del espacio de manera que la recta AE sea perpendicular al plano ABC y que la distancia entre los puntos A y E sea 1.
- c) (3 puntos) Escribe la ecuación de uno de los planos paralelos al plano ABC que dista una unidad de este.

Solución:



a) $D = B + \overrightarrow{BD} = B + \overrightarrow{AC} = (2, -1, 3) + (-1, 2, 1) = (1, 1, 4)$

b) Sea π el plano $ABC \Rightarrow \pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, -1, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1) \\ A(0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow$

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7x - 5y + 3z = 0 \Rightarrow \pi : 7x + 5y - 3z = 0 \Rightarrow \vec{u}_\pi = (7, 5, -3)$$

Tenemos $\overrightarrow{AE} = k\vec{u}_\pi = k(7, 5, -3) \Rightarrow E = A + \overrightarrow{AE} = A + k\vec{u}_\pi = (7k, 5k, -3k)$

$$|\overrightarrow{AE}| = |k|(7, 5, -3)| = |k|\sqrt{49 + 25 + 9} = 1 \Rightarrow |k| = \frac{1}{\sqrt{83}}$$

$$E\left(\frac{7}{\sqrt{83}}, \frac{5}{\sqrt{83}}, -\frac{3}{\sqrt{83}}\right) \text{ o bien } E\left(-\frac{7}{\sqrt{83}}, -\frac{5}{\sqrt{83}}, \frac{3}{\sqrt{83}}\right)$$

c) Un plano $\pi' \parallel \pi$ sería $\pi' : 7x + 5y - 3z + \lambda = 0 \implies \text{dis}(\pi, \pi') = \text{dis}(A, \pi') = \frac{|0 + 0 + 0 + \lambda|}{\sqrt{49 + 25 + 9}} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{83}} = 1 \implies |\lambda| = \sqrt{83} \implies \begin{cases} \lambda = \sqrt{83} \implies \pi' : 7x + 5y - 3z + \sqrt{83} = 0 \\ \lambda = -\sqrt{83} \implies \pi' : 7x + 5y - 3z - \sqrt{83} = 0 \end{cases}$

Problema 11.1.4 (10 puntos)

- a) (5 puntos) Discute, según los valores de a y b (parámetros reales), la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \text{ y } \pi_2 : 6x + y - 2z = b$$

Es decir, si son coincidentes, paralelos o se cortan. En el último caso, especifica si lo hacen perpendicularmente.

- b) (5 puntos) Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta s y el mismo plano π , siendo

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \text{ y } s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

para α y β valores reales cualquiera.

Solución:

- a) Comparando los coeficientes de ambos planos:

$$\frac{3}{6}, \frac{a}{1}, \frac{-1}{-2}, \frac{1}{b}$$

• Si $a = \frac{1}{2}$ y $b = 2 \implies \frac{3}{6} = \frac{1/2}{1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \implies \pi_1 \equiv \pi_2$

• Si $a = \frac{1}{2}$ y $b \neq 2 \implies \frac{3}{6} = \frac{1/2}{1} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{b} \implies \pi_1 \parallel \pi_2$

• Si $a \neq \frac{1}{2} \implies \frac{3}{6} \neq \frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{b} \implies \pi_1$ y π_2 son secantes.

Para que los planos sean perpendiculares: $\vec{u}_{\pi_1} \perp \vec{u}_{\pi_2} \implies \vec{u}_{\pi_1} \cdot \vec{u}_{\pi_2} = (3, a, -1) \cdot (6, 1, -2) = 18 + a + 2 = 0 \implies a = -20$

De los diferentes valores de $a \neq \frac{1}{2}$ sólo serían perpendiculares para $a = -20$.

b) $\pi : \begin{cases} \vec{u} = (4, 0, 1) \\ \vec{v} = (-1, 3, 0) \\ P(2, 0, 1) \end{cases} \implies$

$$\pi : \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3x - y + 12z - 6 = 0 \implies \pi : 3x + y - 12z + 6 = 0 \implies \vec{u}_{\pi} = (3, 1, -12)$$

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculamos el punto de corte Q de r con π :

$$3(1 + 2\lambda) + 2\lambda - 12(1 - \lambda) + 6 = 0 \implies \lambda = \frac{3}{20} \implies Q\left(\frac{13}{10}, \frac{3}{10}, \frac{17}{20}\right)$$

$$\text{La recta } s \text{ sería } s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi = (3, 1, -12) \\ P_s = Q\left(\frac{13}{10}, \frac{3}{10}, \frac{17}{20}\right) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = \frac{13}{10} + 3\lambda \\ y = \frac{3}{10} + \lambda \\ z = \frac{17}{20} - 12\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 11.1.5 (10 puntos) Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m, 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

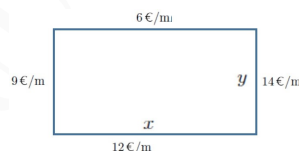
Solución:

$$(6 + 12)x + (9 + 14)y = 18x + 23y = 1000 \implies y = \frac{1000 - 18x}{23}$$

$$S(x, y) = xy \implies S(x) = x \frac{1000 - 18x}{23} = \frac{1000x - 18x^2}{23}$$

$$S'(x) = \frac{4(250x - 9x)}{23} = 0 \implies x = \frac{250}{9} \simeq 27,778$$

	$(0, 250/9)$	$(250/9, \infty)$
$S'(x)$	+	-
$S(x)$	creciente ↗	decreciente ↘



La función es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{250}{9}\right)$ y decreciente en el $\left(\frac{250}{9}, \infty\right)$ con un máximo re-

lativo en $x = \frac{250}{9} \text{ m} \implies y = \frac{1000 - 18 \cdot 250/9}{23} \simeq 21,739 \text{ m}$.

Problema 11.1.6 (10 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} be^x + a + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + b(x + 3) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a \cos(\pi x) + 7bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) (5 puntos) Calcula los valores a y b para que la función $f(x)$ es continua.

b) (5 puntos) Sea $a = 3$ y $b = 2$, calcula el área comprendida entre $x = -1$, $x = 0$ y el eje OX .

Solución:

a) Las ramas son continuas, son polinomios, exponenciales y la trigonométrica coseno. Hay que estudiar la continuidad en $x = 0$ y en $x = 1$:

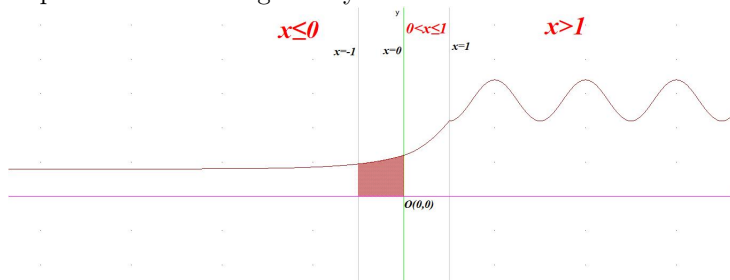
$$\begin{aligned} \bullet \text{ En } x = 0: & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (be^x + a + 1) = b + a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + b(x + 3)) = 3b \\ f(0) = b + a + 1 \end{cases} \implies b + a + 1 = 3b \implies a - 2b = -1 \\ \bullet \text{ En } x = 1: & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + b(x + 3)) = a + 4b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a \cos(\pi x) + 7bx) = -a + 7b \\ f(1) = a + 4b \end{cases} \implies a + 4b = -a + 7b \implies 2a - 3b = 0 \\ \bullet & \begin{cases} a - 2b = -1 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

b) Si $a = 3$ y $b = 2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2e^x + 4 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x^2 + 2x + 6 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3\cos(\pi x) + 14x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

En el intervalo $[-1, 0] \Rightarrow f(x) = 2e^x + 4 > 0$ por lo que no hay ningún punto de corte de la función f con el eje de abscisas.

$$S = \int_{-1}^0 (2e^x + 4) dx = 2e^x + 4x \Big|_{-1}^0 = 2 - \frac{2}{e} + 4 = \frac{6e - 2}{e} \simeq 5,2642 \text{ u}^2$$

Representación de la gráfica y el recinto:



Bloque IV.- Probabilidad y estadística

Problema 11.1.7 (10 puntos) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisfacen que $P(A \cup B) = 0,7$, $P(A \cap B) = 0,1$ y $P(A \cap B^c) = 0,35$. Siendo B^c el suceso complementario de B , calcula:

- (3 puntos) $P(A)$.
- (3 puntos) $P(B)$
- (2 puntos) $P(A^c \cup B^c)$
- (2 puntos) ¿Son A y B sucesos independientes?

Solución:

Por comodidad $A^c = \bar{A}$

- $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,35 = P(A) - 0,1 \Rightarrow P(A) = 0,45$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,7 = 0,45 + P(B) - 0,1 \Rightarrow P(B) = 0,35$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$
- $P(A) \cdot P(B) = 0,45 \cdot 0,35 = 0,1575 \neq P(A \cap B) \Rightarrow A$ y B no son independientes.

Problema 11.1.8 (10 puntos) La duración de los embarazos humanos desde la concepción hasta el nacimiento se aproxima a una distribución normal con una media de 266 días y una desviación típica de 16 días,

- (4 puntos) ¿Qué proporción de todos los embarazos durará entre 240 y 270 días (aproximadamente entre 8 y 9 meses)?
- (6 puntos) Si nos fijamos en el 70 % de los embarazos que más duran, ¿cuál es su duración?

Solución:

$$N(266; 16)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(240 \leq X \leq 270) &= P\left(\frac{240 - 266}{16} \leq Z \leq \frac{270 - 266}{16}\right) = \\ &= P(-1,63 \leq Z \leq 0,25) = P(Z \leq 0,25) - P(Z \leq -1,63) = P(Z \leq 0,25) - (1 - P(Z \leq 1,63)) = \\ &= 0,5987 - (1 - 0,9484) = 0,5471 \Rightarrow 54,71\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \geq a) &= 0,7 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 266}{16}\right) = P\left(Z \leq -\frac{a - 266}{16}\right) = 0,7 \Rightarrow \\ -\frac{a - 266}{16} &= 0,525 \Rightarrow a = 257,6 \end{aligned}$$

El 70% de los embarazos que más duran tendrán una duración superior a 257,6 días.

11.2. Extraordinaria

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4.

Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Problema 11.2.1 (10 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

- a) (3 puntos) Calcula la matriz $M = A^T A - B B^T$, donde A^T y B^T representan las matrices transpuestas de A y B respectivamente.
- b) (3 puntos) Justifica si M es o no invertible. En caso afirmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones

$$M \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa de la matriz M . Comprueba que la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

para los valores a , b , c y d calculados, es la matriz inversa de M .

- c) (4 puntos) Calcula la matriz X que cumple la igualdad $XM + A = C$.

Solución:

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } |M| = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } XM + A = C &\implies XM = C - A \implies X = (C - A)M^{-1} = \\ X &= \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 & 4 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problema 11.2.2 (10 puntos) Sea I_3 la matriz identidad de orden 3×3 y A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (4 puntos) Calcula la matriz $B = 3A - kI_3$, indicando su expresión en función del parámetro real k .
- (4 puntos) Discute el rango de la matriz B según el parámetro k .
- (2 puntos) ¿Para qué valores de k se puede calcular la inversa de B ? Justifica la respuesta.

Solución:

$$\text{a) } B = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & -k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } |B| = \begin{vmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & -k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{vmatrix} = -k(k-3)^2 = 0 \implies k = 0 \text{ y } k = 3.$$

$$\bullet \text{ Si } k \in \mathbb{R} - \{0, 3\} \implies |B| \neq 0 \implies \text{Rango}(B) = 3$$

$$\bullet \text{ Si } k = 0 \implies |B| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \implies \text{Rango}(B) = 2$$

$$\bullet \text{ Si } k = 3 \implies B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{la primera fila es de ceros y las otras dos son proporcionales, luego } \text{Rango}(B) = 1.$$

- Para que $\exists B^{-1}$ tiene que cumplirse $|B| \neq 0$ y por el apartado anterior concluimos:

$$\exists B^{-1} \quad \forall k \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$$

Problema 11.2.3 (10 puntos) Sean $P = (-1, 1, 1)$, $Q = (7, 1, 7)$, $R = (-4, 1, 5)$ puntos de $\mathbb{R}^3$.

- (3 puntos) Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.
- (3 puntos) ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justifica la respuesta.
- (4 puntos) Prueba que, para todo valor de a real, el punto $S = (a, 1, 0)$ es coplanario con P , Q y R .

Solución:

- a) Sean $\overrightarrow{PQ} = (8, 0, 6)$ y $\overrightarrow{PR} = (-3, 0, 4) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (8, 0, 6) \cdot (-3, 0, 4) = -24 + 24 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR} \Rightarrow$ el ángulo en P es de 90° , además los tres puntos no están alineados formando un triángulo rectángulo.
- b) $|\overrightarrow{PQ}| = |(8, 0, 6)| = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$, $|\overrightarrow{PR}| = |(-3, 0, 4)| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow$ los catetos tienen distinta medida, luego no podemos construir un cuadrado.
- c) Calculamos el plano π que contiene a los tres puntos:
- $$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (8, 0, 6) \\ \overrightarrow{PR} = (-3, 0, 4) \\ P(-1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 8 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 50(1-y) = 0 \Rightarrow \pi : y-1 = 0$$
- Comprobamos si $S = (a, 1, 0) \in \pi$ sustituyendo $a \cdot 0 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow S = (a, 1, 0) \in \pi \quad \forall a \in \mathbb{R}$
Luego los cuatro puntos son coplanarios.

Problema 11.2.4 (10 puntos) Sean las rectas

$$r : \begin{cases} x+2y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s : x+1 = \frac{y-1}{2} = z$$

Calcula:

- a) (5 puntos) La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan o se cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.
- b) (5 puntos) La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas r y s , y pasa por el punto $A = (2, 2, 1)$.

Solución:

$$r : \begin{cases} x+2y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 1, 0) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases}$$

$$s : x+1 = \frac{y-1}{2} = z \Rightarrow s : \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, 1) \\ P_s(-1, 1, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 1, 0) - (-1, 0, 1) = (0, 1, -1)$

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = (-2, 1, 0) \cdot (1, 2, 1) = -2 + 2 + 0 = 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan perpendicularmente.}$$

b) $\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 1, 0) \\ \vec{u}_s = (1, 2, 1) \\ A(2, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x + 2y - 5z - 1 = 0$

Problema 11.2.5 (10 puntos) Resuelve los siguientes apartados:

- a) (5 puntos) Dada la función $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determina los valores de a y b sabiendo que $f(x)$ tiene su máximo en $x = 100$ y que pasa por el punto $(49, 91)$.
- b) (5 puntos) Dada la función.

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1}$$

Indica cuál es su dominio. ¿Es $g(x)$ una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

Solución:

$$\text{a) } f(x) = ax + b\sqrt{x} \implies f'(x) = a + \frac{b}{2\sqrt{x}} = \frac{2a\sqrt{x} + b}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{cases} f'(100) = 0 \implies a + \frac{b}{20} = 0 \\ f(49) = 91 \implies 49a + 7b = 91 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = 20 \end{cases} \implies f(x) = -x + 20\sqrt{x}$$

Habría que comprobar que $x = 100$ es un máximo:

$$f'(x) = -1 + \frac{10}{\sqrt{x}} \implies f''(x) = -\frac{5}{x\sqrt{x}}$$

$$f''(100) = -\frac{5}{1000} = -0,005 < 0 \implies x = 100 \text{ máximo}$$

- b) Por la raíz el dominio sería $x \geq 0 \implies [0, \infty)$. Por el denominador $x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$ quitando estos puntos en el intervalo anterior tenemos que $x = -1$ ya estaba eliminado y eliminando $x = 1$ tenemos: $\text{Dom}(g) = [0, 1) \cup (1, \infty)$.

En este dominio la función es continua y en $x = 1$ analizamos el tipo de discontinuidad:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x}}}{2x} = \frac{1}{2}$$

Luego se trata de una discontinuidad evitable (un agujero) Se podría hacer una extensión por continuidad imponiendo $g(1) = \frac{1}{2}$, sería como taponar ese agujero y la nueva función sería continua en $[0, \infty)$

Problema 11.2.6 (10 puntos) Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ y sus puntos de corte.

Solución:

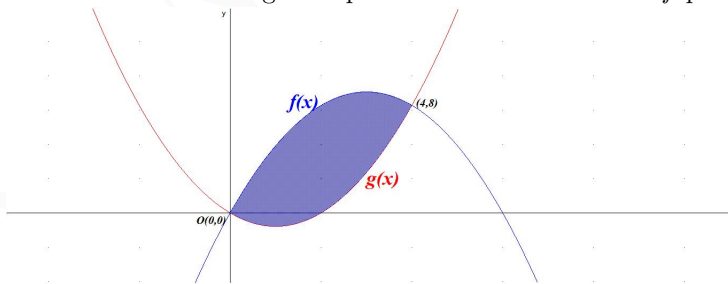
Puntos de corte: $f(x) = g(x) \implies 6x - x^2 = x^2 - 2x \implies -2x^2 + 8x = 0 \implies x = 0$ y $x = 4$.

El recinto de integración es $S_1 : [0, 4]$

$$S_1 = \int_0^4 (-2x^2 + 8x) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 \right]_0^4 = \frac{64}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{64}{3} \simeq 21,3333 \text{ u}^2$$

El resultado de la integral es positivo al estar la función f por encima de la g en el intervalo $[0, 4]$.



Problema 11.2.7 (10 puntos) El 38 % de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21 % prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) (3 puntos) Que las dos personas sean aficionadas a la natación.
- b) (3 puntos) Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.
- c) (4 puntos) Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

Solución:

Sean $N1$ aficionado a la natación elegido en primer lugar, $C1$ al ciclismo elegido en primer lugar, $R1$ restantes deportes elegido en primer lugar, $N2$ aficionado a la natación elegido en segundo lugar, $C2$ al ciclismo elegido en segundo lugar y $R2$ restantes deportes elegido en segundo lugar. Tenemos dos casos posibles, uno de ellos es suponer que tenemos una muestra pequeña de habitantes, por ejemplo 100, y otra una muestra grande, por ejemplo 2000. Todo depende de la cantidad de habitantes del pueblo. El enunciado no dice nada sobre ello, por tanto, supongo que se trata de una población lo suficientemente grande de forma que la probabilidad de elección de la primera persona y la segunda sea la misma.

$$P(N1) = P(N2) = 0,38, P(C1) = P(C2) = 0,21 \text{ y } P(R1) = P(R2) = 0,41$$

$$\text{a) } P(N1 \cap N2) = 0,38 \cdot 0,38 = 0,1444.$$

$$\text{b) } P(N1 \cap C2) + P(C1 \cap N2) = 0,38 \cdot 0,21 + 0,21 \cdot 0,38 = 0,1596$$

$$\text{c) } P(\overline{C2}|C1) = \frac{P((N2 \cup R2) \cap C1)}{P(C1)} = \frac{P((N2 \cap C1) \cup (R2 \cap C1))}{P(C1)} = \frac{0,38 \cdot 0,21 + 0,41 \cdot 0,21}{0,21} = 0,79$$

La otra manera de ver el problema es suponer que el pueblo tiene 100 habitantes. En este caso tenemos 38 personas que prefieren la natación, 21 el ciclismo y 49 el resto de deportes. Tenemos: $P(N1) = \frac{38}{100}$, $P(N2|N1) = \frac{37}{99}$, $P(C1) = \frac{21}{100}$, $P(C2|C1) = \frac{20}{99}$, $P(R1) = \frac{41}{100}$ y $P(R2|R1) = \frac{40}{99}$.

$$\text{a) } P(N1 \cap N2) = \frac{38}{100} \cdot \frac{37}{99} = \frac{703}{4950} = 0,1420.$$

$$\text{b) } P(N1 \cap C2) + P(C1 \cap N2) = \frac{38}{100} \cdot \frac{21}{99} + \frac{21}{100} \cdot \frac{38}{99} = \frac{133}{825} = 0,1612$$

$$\text{c) } P(\overline{C2}|C1) = \frac{P((N2 \cup R2) \cap C1)}{P(C1)} = \frac{P((N2 \cap C1) \cup (R2 \cap C1))}{P(C1)} = \frac{\frac{38}{99} \cdot \frac{21}{100} + \frac{41}{99} \cdot \frac{21}{100}}{\frac{21}{100}} = \frac{79}{99} = 0,798$$

Problema 11.2.8 (10 puntos) El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media μ y desviación típica 7,8. Teniendo en cuenta que el 10 % de estas latas contienen menos de 200 g. calcula:

- a) (6 puntos) El valor de la media μ redondeándola a las unidades.
- b) (2 puntos) El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.
- c) (2 puntos) El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

Solución:

a) $N(\mu; 7, 8)$

$$P(X \leq 200) = P\left(Z \leq \frac{200 - \mu}{7,8}\right) = 0,1 \implies P\left(Z \leq -\frac{200 - \mu}{7,8}\right) = 0,9 \implies$$
$$-\frac{200 - \mu}{7,8} = 1,285 \implies \mu = 210,023 \simeq 210$$

b) $P(X \geq 225) = P\left(Z \geq \frac{225 - 210}{7,8}\right) = P(Z \geq 1,92) = 1 - P(Z \leq 1,92) = 1 - 0,9726 =$
 $0,0274 \implies 2,74\%$

c) $P(190 \leq X \leq 225) = P\left(\frac{190 - 210}{7,8} \leq Z \leq \frac{225 - 210}{7,8}\right) = P(-2,56 \leq Z \leq 1,92) =$
 $P(Z \leq 1,92) - P(Z \leq -2,56) = P(Z \leq 1,92) - (1 - P(Z \leq 2,56)) = 0,9726 - (1 - 0,9948) =$
 $0,9674 \implies 96,74\%$

Capítulo 12

Islas Canarias

12.1. Ordinaria

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque I.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.1.1 (2,5 puntos) La empresa “Plátanos Islas Canarias” se dedica a la producción de plátanos, un cultivo muy importante en las islas. Los costes de producción están dados por la función:

$$C(x) = \frac{3x}{5\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \geq 0$$

donde $C(x)$ son miles de €, x miles de kilos de plátanos producidos. Responder a las siguientes preguntas.

- (0,5 puntos) Averiguar el coste de la producción de un kilo de plátanos.
- (0,5 puntos) Si la empresa pudiera producir cantidades muy grandes de plátanos, ¿a qué valor tenderían los costes de producción de los plátanos?
- (0,75 puntos) Un economista afirma que superada cierta cantidad de kilos producidos, el coste de producción disminuirá. Justificar la veracidad de la afirmación del economista.
- (0,75 puntos) Calcular: $\int_0^4 C(x) dx$. Interpretar el resultado en el contexto del problema.

Solución:

- Tenemos $x = 0,001$ miles de kg $\Rightarrow C(0,001) = 0,0006 \Rightarrow 0,6$ € el kg.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{5\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow$
Los costes de producción tienden a estabilizarse en $0,6 \times 1000 = 600$ €.

c) $C'(x) = \frac{3}{5(x^2+1)^{3/2}} > 0 \implies$ no hay ni máximos ni mínimos y la función es siempre creciente, luego la afirmación del economista es falsa.

$$d) F(x) = \int C(x) dx = \int \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ dx = \frac{1}{2x} dt \end{array} \right] = \frac{3}{5} \int \frac{x}{t^{1/2}} \cdot \frac{1}{2x} dt = \frac{3}{10} \int t^{-1/2} dt =$$

$$\frac{3t^{1/2}}{5} + K = \frac{3\sqrt{x^2+1}}{5} + K$$

$$\int_0^4 C(x) dx = F(4) - F(0) = \frac{3\sqrt{17}}{5} - \frac{3}{5} = \frac{3(\sqrt{17}-1)}{5} \simeq 1,8739$$

El coste medio de producción sería $\frac{\int_0^4 C(x) dx}{4-0} = \frac{1,8739}{4} = 0,4685 \implies$ El coste medio sería de 468,5 €

Problema 12.1.2 (2,5 puntos) Dada la función definida por: $f(x) = \frac{\ln(x+2) + a}{3x+4}$

a) (1,25 puntos) Determinar el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ es 10. Dar la expresión de la función.

b) (1,25 puntos) Para el valor $a = 0$, estudiar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

Solución:

$$a) f'(x) = \frac{\frac{1}{x+2}(3x+4) - 3(\ln(x+2) + a)}{(3x+4)^2} \implies m = f'(-1) = 1 - 3a = 10 \implies a = -3 \implies$$

$$f(x) = \frac{\ln(x+2) - 3}{3x+4}$$

$$b) \text{ Si } a = 0 \implies f(x) = \frac{\ln(x+2)}{3x+4}$$

• Se tiene $\ln(x+2) \implies x+2 > 0 \implies (-2, +\infty)$ y por el denominador $3x+4 = 0 \implies x = -\frac{4}{3}$ hay que quitarlo del intervalo. Luego $\text{Dom}(f) = \left(-2, -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$

• Asíntotas:

• Verticales: $x = -\frac{4}{3}$ y $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow (-4/3)^-} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \left[\frac{\ln(2/3)}{0^-} \right] = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow (-4/3)^+} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \left[\frac{\ln(2/3)}{0^+} \right] = -\infty$$

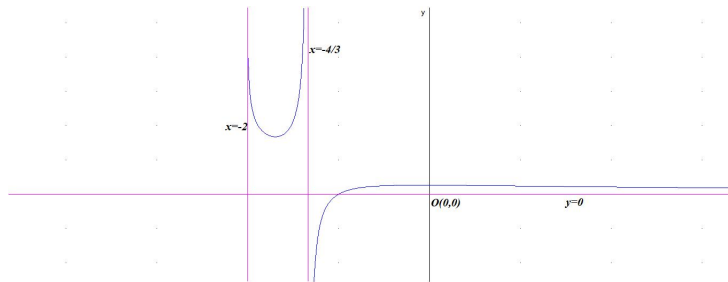
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \text{No existe}; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

• Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \text{fuera de dominio.}$$

• Oblícuas no hay por haber horizontales.



Bloque II.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.1.3 (2,5 puntos) Resolver el siguiente sistema matricial:

$$\begin{cases} 5X - 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X - 6Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 5X - 4Y = A \\ 4X - 6Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{7}(3A - 2B) \\ Y = \frac{1}{14}(4A - 5B) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{7} \left[3 \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ Y = \frac{1}{14} \left[4 \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Problema 12.1.4 (2,5 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con un parámetro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} kx + y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -4 \\ kx + y - kz = 1 \end{cases}$$

- (1,25 puntos) Discutir la resolución del sistema según los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.
- (1,25 puntos) Resolver el sistema cuando $k = 4$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ k & 1 & -k & 1 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -k^2 + 2k + 3 = 0 \Rightarrow k = -1, k = 3$$

☛ Si $k \in \mathbb{R} - \{-1, 3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)

☛ Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible (no tiene solución)}$$

☛ Si $k = 3$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema Incompatible (no tiene solución)

b) Si $k = 4$:

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -4 \\ 4x + y - 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right) \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 4F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -z = -4 \Rightarrow z = 4 \\ 5y + 4 = -11 \Rightarrow y = -3 \\ 4x - 3 - 12 = 5 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

Bloque III.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.1.5 (2,5 puntos) En el espacio tridimensional tenemos el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(-7, 3, 4); \quad r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} ; \quad \pi : x + 2y - 5z + 5 = 0$$

a) (1,5 puntos) Encontrar el punto A intersección del plano π con una recta s . Esta recta s es una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto P .

b) (1 punto) Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano π .

Solución:

$$r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

$$\pi : x + 2y - 5z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{u}_\pi = (1, 2, -5)$$

$$\text{a) } s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_r = (1, -1, -1) \\ P_s = P(-7, 3, 4) \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = -7 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad \text{sustituimos en } \pi \text{ y tenemos:}$$

$$(-7 + \lambda) + 2(3 - \lambda) - 5(4 - \lambda) + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow A(-3, -1, 0)$$

$$\text{b) } \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_\pi|} = \frac{|(1, -1, -1) \cdot (1, 2, -5)|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{30}} = \frac{4}{3\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = 24^\circ 56' 17''$$

Problema 12.1.6 (2,5 puntos) En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r : \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} ; \quad s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s .
 b) (1 punto) Encontrar el plano π , paralelo a la recta r y que contiene a la recta s .

Solución:

$$r : \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -5, -7) \\ P_r(0, -3, -7) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \mu \\ y = -3 - 5\mu \\ z = -7 - 7\mu \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 1) \\ P_s(3, 0, 1) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_s P_r} = (0, -3, -7) - (3, 0, 1) = (-3, -3, -8)$

$$[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -8 \\ 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) $\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -5, -7) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 1) \\ P_s(3, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 8y + 6z - 12 = 0 \Rightarrow$

$$\pi : x - 4y + 3z - 6 = 0$$

Bloque IV.- Probabilidad y estadística (seleccione solo una pregunta)

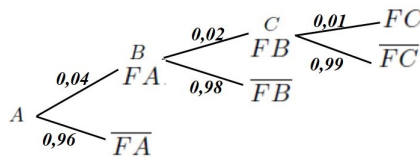
Problema 12.1.7 (2,5 puntos) En un avión de pasajeros se han instalado tres paracaídas A , B y C . Si falla A , se pone B en funcionamiento, y si también falla B , se activa el paracaídas C . Las probabilidades de que funcione correctamente cada paracaídas son, respectivamente, 0,96, 0,98 y 0,99.

- a) (0,5 puntos) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos.
 b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente.
 c) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que funcione algún paracaídas.

Solución:

Sean los paracaídas A , B , C , los sucesos F falla y $\overline{F}$ no falla.

- a) El diagrama sería:



b) $P(B \cap \overline{FB}) = 0,04 \cdot 0,98 = 0,0392$

c) $P(\overline{FA} \cup (\overline{FB} \cap FA) \cup (FA \cap FB \cap \overline{FC})) = 0,96 + 0,04 \cdot 0,98 + 0,04 \cdot 0,02 \cdot 0,99 = 0,999992$

Problema 12.1.8 (2,5 puntos) Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale un número par.

- a) (1,25 puntos) Si juega 100 veces, calcular la probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones.
- b) (1,25 puntos) Si juega 200 veces, un jugador afirma que la probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es menor que $3/4$. Justificar si esta afirmación es cierta o no.

Solución:

$$p = \frac{12}{25} = 0,48 \implies B(n; 0,48)$$

a) $B(100; 0,48)$ con $n > 30$, $np = 48 > 5$ y $nq = 52 > 5 \implies B(100; 0,48) \overset{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(48, 5)$
 $P(X > 50) = P\left(Z \geq \frac{50,5 - 48}{5}\right) = P(Z \geq 0,5) = 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$

b) $B(200; 0,48)$ con $n > 30$, $np = 96 > 5$ y $nq = 104 > 5 \implies B(200; 0,48) \overset{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(96, 7,07)$
 En este apartado no queda claro si en la probabilidad pedida tenemos que coger los extremos 90 y 110, yo he creído pensar que no están incluidos, pero textualmente no queda claro ni mi decisión ni la contraria.
 $P(90 < X < 110) = P\left(\frac{90,5 - 96}{7,07} \leq Z \leq \frac{109,5 - 96}{7,07}\right) = P(-0,78 \leq Z \leq 1,91) =$
 $P(Z \leq 1,91) - P(Z \leq -0,78) = P(Z \leq 1,91) - (1 - P(Z \leq 0,78)) = 0,9719 - (1 - 0,7823) = 0,7542$

La probabilidad obtenida es mayor que $\frac{3}{4} = 0,75$ y, por tanto, la afirmación es falsa.

12.2. Extraordinaria

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque I.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.2.1 (2,5 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{ax}{e^x - 1} + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) (1,75 puntos) Estudiar los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$.
- b) (0,75 puntos) Para los valores $a = 1$ y $b = -2$, hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x = -1$.

Solución:

- a) Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax}{e^x - 1} + 2 \right) = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{e^x} = a + 2 \implies \\ f(0) = 3 \end{cases}$$

$$a + 2 = 3 \implies a = 1$$

- Derivabilidad en $x = 0$: (con $a = 1$)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{bx^2 - 12x - 3b}{(x^2 + 3)^2} & \text{si } x < 0 \\ -\frac{e^x(x-1)+1}{(e^x-1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} f'(0^-) = -\frac{b}{3} \\ f'(0^+) = -\frac{1}{2} \end{cases} \implies$$

$$-\frac{b}{3} = -\frac{1}{2} \implies b = \frac{3}{2}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x-1)+1}{(e^x-1)^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{2e^{2x} - 2e^x} =$$

$$-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2e^x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2e^x} = -\frac{1}{2}$$

- b) Si $a = 1$ y $b = -2$ la función en $x = -1$ es $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 9}{x^2 + 3}$.

$$\text{Tenemos } x_0 = -1 \implies y_0 = f(x_0) = f(-1) = 2 \text{ y } f'(x) = -\frac{2(x^2 + 6x - 3)}{(x^2 + 3)^2} \implies$$

$$m = f'(x_0) = f'(-1) = 1 \xrightarrow{y-y_0=m(x-x_0)} y - 2 = x + 1 \implies y = x + 3$$

Problema 12.2.2 (2,5 puntos) El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y = x(3 - x)$ e $y = x^2 - 7x + 8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €.

Solución:

- a) Se trata de dos parábolas que dibujamos con unas tablas de valores. Calculamos los puntos de corte de ambas:

$$x(3 - x) = x^2 - 7x + 8 \implies x = 1, \quad x = 4$$

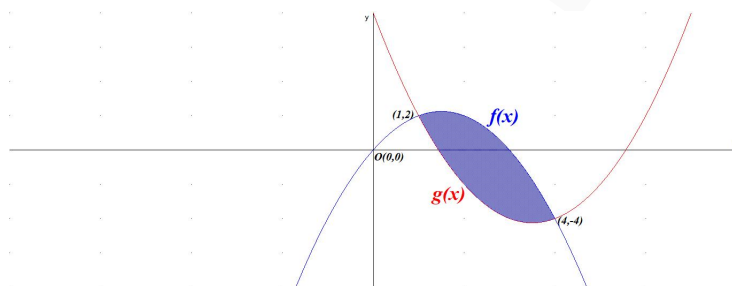
El recinto de integración es $S_1 : [1, 4]$

$$S_1 = \int_1^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^4 (-2x^2 + 10x - 8) dx = -\frac{2x^3}{3} + 5x^2 - 8x \Big|_1^4 = 9$$

$$S = |S_1| = 9 \text{ u}^2$$

La integral es positiva por estar la función $f(x) = x(3-x)$ por encima de la $g(x) = x^2 - 7x + 8$ en el intervalo $[1, 4]$

El precio de construcción será: $9 \cdot 65 = 585 \text{ €}$.



Bloque II.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.2.3 (2,5 puntos) Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es $11/5$. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno.

Solución:

Sean x el dinero de Aythami, y el de Besay y z el de Chamaida.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{11}{5} \\ x-z = 2y \\ 2(y+z) = x+2 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x-8y=0 \\ x-2y-z=0 \\ x-2y-2z=-2 \end{cases} \implies \begin{cases} x=8\text{€} \\ y=3\text{€} \\ z=2\text{€} \end{cases}$$

Resolvemos por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \\ 3F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & -6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right) \implies \begin{cases} -3z = -6 \implies z = 2 \\ 2y - 6 = 0 \implies y = 3 \\ 3x - 24 = 0 \implies x = 8 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 8\text{€} \\ y = 3\text{€} \\ z = 2\text{€} \end{cases}$$

Problema 12.2.4 (2,5 puntos) Dada la siguiente matriz:

$$M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k-3 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- a) (1,25) Estudiar el rango de la matriz M_k , dependiendo de los valores del parámetro k .
- b) (1,25) Tomamos M_1 como la matriz anterior para el valor $k = 1$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X que satisface la ecuación: $X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B$

Solución:

a) $|M_k| = k^2(3 - k) = 0 \implies k = 0 \text{ y } k = 3$

• Si $k \in \mathbb{R} - \{0, 3\} \implies |M_k| \neq 0 \implies \text{Rango}(M_k) = 3$

• Si $k = 0$:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(M_0) = 1$$

• Si $k = 3$:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies |M_3| = 0 \text{ y el menor } \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \text{Rango}(M_3) = 2$$

b) $X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B \implies X(M_1 + M_1^T) = B \implies X = B(M_1 + M_1^T)^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bloque III.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.2.5 (2,5 puntos) En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:

$$r_1 : \begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases}, \quad r_2 : \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2}$$

- a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores.
- b) (1,5 punto) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1 .

Solución:

a) $r_1 : \begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases} \implies r_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 1, 1) \\ P_{r_1}(1, 1, 0) \end{cases}$

$$r_2 : \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2} \implies r_2 : \begin{cases} x = 1 - 2\mu \\ y = \mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \implies r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (-2, 1, -2) \\ P_{r_2}(1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (1, 0, 1) - (1, 1, 0) = (0, -1, 1)$$

$$[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan.}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \vec{u}_s &= \vec{u}_{r_1} \times \vec{u}_{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3, 0, 3) = 3(-1, 0, 1) \\
s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 0, 1) \\ P_s = P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right) \end{cases} &\implies s : \begin{cases} x = -\gamma \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \gamma \end{cases} \quad \forall \gamma \in \mathbb{R} \\
\begin{cases} x = 1 + \lambda = -\gamma \\ y = 1 + \lambda = \frac{1}{2} \\ z = \lambda = \gamma \end{cases} &\implies \lambda = \gamma = -\frac{1}{2} \implies \text{el punto de corte de las dos rectas es } Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Problema 12.2.6 (2,5 puntos) Responder a las siguientes cuestiones:

- a) (0,75 puntos) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que compartan el punto de origen, y cumplan que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$
- b) (1,75 puntos) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes:

$$\pi : x + 3y + 2z + 3 = 0, \quad r : \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como el ángulo que forman.

Solución:

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \implies \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} > 1 \implies \nexists \alpha \text{ tal que } \cos \alpha = \frac{4}{3}$
luego no existen dos vectores cumpliendo las condiciones del problema.

$$\begin{aligned}
\text{b) } r : \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases} &\implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5(1, 1, -1) \\ P_r(-1, -2, 0) \end{cases} \implies \\
r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en $\pi : (-1 + \lambda) + 3(-2 + \lambda) + 2(-\lambda) + 3 = 0 \implies \lambda = 2 \implies P(1, 0, -2)$ de corte de r con π .

Ahora tenemos $\vec{u}_r = (1, 1, -1)$ y $\vec{u}_\pi = (1, 3, 2)$:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_\pi|} = \frac{|(1, 1, -1) \cdot (1, 3, 2)|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{42}} \implies \alpha = 17^\circ 58' 31''$$

Bloque IV.- Probabilidad y estadística (seleccione solo una pregunta)

Problema 12.2.7 (2,5 puntos) Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A , B , C . En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A , dos con el B y cinco con el C . La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es $1/3$, que la produzca B es $2/3$ y que la produzca C es $1/7$.

- a) (1,5 puntos) Se elige uno de los tubos anteriores al azar y se inyecta el virus contenido en el tubo a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que al animal le produzca la enfermedad?
- b) (1 punto) Si se inyecta un virus de los anteriores a un animal y no le produce la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se haya inyectado el virus C ?

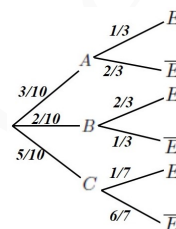
Solución:

Sean A se elige tubo con A , B se elige tubo con B , C se elige tubo con C , E produce la enfermedad y $\bar{E}$ no produce la enfermedad.

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0,3, \quad P(B) = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ y } P(C) = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\text{a) } P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{10} = \frac{32}{105} \simeq 0,30476$$

$$\text{b) } P(C|\bar{E}) = \frac{P(\bar{E}|C)P(C)}{P(\bar{E})} = \frac{\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{10}}{1 - \frac{32}{105}} = \frac{45}{73} \simeq 0,61644$$



Problema 12.2.8 (2,5 puntos) El delantero de un equipo de fútbol suele marcar gol en tres de cada cinco penaltis lanzados. Sabemos que realiza 70 lanzamientos en cada entrenamiento.

- (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento.
- (0,75 puntos) Si la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis es superior al 90 %, se seleccionará para jugar en una categoría superior. ¿Será seleccionado este delantero? Justificar la respuesta.
- (0,5 puntos) Si en una temporada lanza 450 penaltis, calcular el número de penaltis que se espera que haya marcado este jugador durante una temporada.

Solución:

$$B(70; 0,6)$$

Como $n = 70 > 10$, $np = 70 \cdot 0,6 = 42 > 5$ y $nq = 70 \cdot 0,4 = 28 > 5 \implies$

$$B(70; 0,6) \stackrel{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(42; 4,0988)$$

$$\text{a) } P(40 \leq X \leq 45) = P\left(\frac{39,5 - 42}{4,0988} \leq Z \leq \frac{45,5 - 42}{4,0988}\right) = P(-0,61 \leq Z \leq 0,85) = P(Z \leq 0,85) - P(Z \leq -0,61) = P(Z \leq 0,85) - (1 - P(Z \leq 0,61)) = 0,8023 - (1 - 0,7291) = 0,5314$$

$$\text{b) } P\left(X > \frac{70}{2}\right) = P\left(Z \geq \frac{35,5 - 42}{4,0988}\right) = P(Z \geq -1,59) = P(Z \leq 1,59) = 0,9441 \implies 94,41 \% > 90 \% \implies \text{el jugador será seleccionado.}$$

$$\text{c) } \text{Ahora } n = 450 \implies E(X) = np = 450 \cdot 0,6 = 270 \text{ goles.}$$

“www.musat.net”

Capítulo 13

La Rioja

13.1. Ordinaria

El alumno contestará a **SÓLO CINCO** ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Problema 13.1.1 (2 puntos) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/x$ en el punto $(3, 1/3)$. Comprueba que el segmento de esta recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{x} \implies f'(x) = -\frac{1}{x^2} \implies m = f'(3) = -\frac{1}{9} \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}(x - 3) \implies$$

$$y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$$

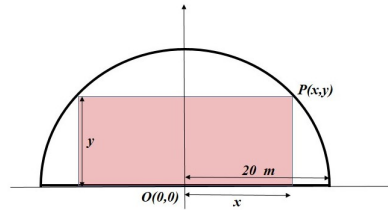
Esta recta corta el eje de ordenadas en el punto $x = 0 \implies A(0, 2/3)$

y el de abscisas en el $-\frac{1}{9}x + \frac{2}{3} = 0 \implies B(6, 0)$.

El punto medio entre estos dos puntos es $C = \frac{A+B}{2} = \frac{(0, 2/3) + (6, 0)}{2} = \frac{(6, 2/3)}{2} = \left(3, \frac{1}{3}\right)$ que coincide con el punto de tangencia.

Problema 13.1.2 (2 puntos) En una finca con forma de semicírculo de radio 20 m se quiere poner un jardín rectangular, de tal manera que uno de los lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte de la curva. Calcula las dimensiones del jardín para que su área sea máxima.

Solución:



Centramos la figura en el origen de coordenadas como en la figura anterior. Tenemos la ecuación de una circunferencia de centro el origen de coordenadas $O(0,0)$ y radio $r = 20 \Rightarrow x^2 + y^2 = 400 \Rightarrow y = \sqrt{400 - x^2}$ la coordenada y negativa no es relevante al tratarse de un semicírculo. Hay que optimizar $S(x, y) = 2xy \Rightarrow S(x) = 2x\sqrt{400 - x^2}$

$$S'(x) = 2 \left(\sqrt{400 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{400 - x^2}} \right) = \frac{800 - 4x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = 10\sqrt{2}$$

	$(0, 10\sqrt{2})$	$(10\sqrt{2}, \infty)$
$S'(x)$	+	-
$S(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(0, 10\sqrt{2})$ y decreciente en el $(10\sqrt{2}, \infty)$ con un máximo relativo en el punto $(10\sqrt{2}, f(10\sqrt{2})) = (10\sqrt{2}, 10\sqrt{2})$.

El rectángulo tiene de base $2x = 20\sqrt{2}$ m y altura $y = 10\sqrt{2}$ m.

El área encerrada sería $2xy = 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} = 400$ m².

Problema 13.1.3 (2 puntos) Halla la función f sabiendo que

$$\int f(x) dx = \ln \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} + k$$

Analiza la continuidad de la función f en las abscisas $x = 1$ y $x = -2$.

Solución:

$$\text{Sea } g(x) = \ln \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} + k \Rightarrow \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} > 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = (1, +\infty)$$

$f(x) = g'(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2}$, los puntos de abscisas $x = -2$ y $x = 1$ no pertenecen al dominio de la función, luego la función es continua en todo el dominio $(1, +\infty)$.

Problema 13.1.4 (2 puntos) Dada la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla x e y para que su inversa, A^{-1} , coincida con su traspuesta, A^T . En tal caso, halla $A^T A^2 - 2A$.

Solución:

$$AA^T = AA^{-1} = I \Rightarrow AA^T = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3/5y - 3/5x & 0 \\ 3/5y - 3/5x & 9/25 + y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9/25 + x^2 = 1 \\ 9/25 + y^2 = 1 \\ 3/5y - 3/5x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = \frac{4}{5} \\ x = y = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$A^T A^2 - 2A = A^T AA - 2A = IA - 2A = A - 2A = -A = \begin{cases} \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Problema 13.1.5 (2 puntos) Añade una ecuación al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

de modo que sea

- (I.) incompatible.
- (II.) compatible determinado.
- (III.) compatible indeterminado.

Solución:

- (I.) incompatible:

Hacemos una combinación lineal de las dos ecuaciones que no cumpla el término independiente. hacemos $E_1 + E_2 : 3x + z = 3$ esta ecuación haría del sistema uno compatible indeterminado, y si cambiamos el término independiente la nueva ecuación $3x + z = 5$ haría del sistema uno incompatible.

- (II.) compatible determinado:

Ponemos una ecuación $x + y + z = 0$ de forma que el determinante $|A| \neq 0$, comprobamos $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

- (III.) compatible indeterminado: contestado en el primer apartado.

Problema 13.1.6 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ halla dos matrices B y C tales que satisfagan las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} B + C^{-1} = A \\ B - C^{-1} = A^T \end{cases}$$

Donde denotamos por A^T , la matriz traspuesta de A .

Solución:

$$\begin{cases} B + C^{-1} = A \\ B - C^{-1} = A^T \end{cases} \implies \begin{cases} B = \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} \\ C^{-1} = \frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \implies C = (C^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Problema 13.1.7 (2 puntos) Determine los valores de a para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi_1 : x + y + z = a - 1 \\ \pi_2 : 2x + y + az = a \\ \pi_3 : x + ay + z = 1 \end{cases}$$

(I.) se corten en un punto.

(II.) se corten en una recta.

(III.) no se corten.

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right), |A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \implies a = 1 \quad a = 2.$$

(I.) Si $a \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.

(II.) Si $a = 2$:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \\ &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \end{aligned}$$

Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ es la recta en la que se cortan los tres planos.}$$

(III.) Si $a = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \implies \text{Sistema incompatible}$$

$\pi_1 \parallel \pi_3$ y π_2 corta a ambos.

Problema 13.1.8 (2 puntos) Halla la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano $\pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = -1 \\ 4x - y + z = 3 \end{cases}$$

Solución:

$$r : \begin{cases} x + y + z = -1 \\ 4x - y + z = 3 \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 3, -5) \\ P_r(0, -2, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 1 - 5\lambda \end{cases}$$

sustituimos en $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$ y tenemos:

$$2\lambda + (-2 + 3\lambda) - 2(1 - 5\lambda) + 1 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{5} \implies$$

r y π se cortan en el punto $P_s\left(\frac{2}{5}, -\frac{7}{5}, 0\right)$

$$\vec{u}_s \perp \vec{u}_\pi \text{ y } \vec{u}_s \perp \vec{u}_r \implies \vec{u}_s = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1, -1, -1) = -(1, 1, 1)$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 1) \\ P_s\left(\frac{2}{5}, -\frac{7}{5}, 0\right) \end{cases} \implies s : \frac{x-2/5}{1} = \frac{y+7/5}{1} = \frac{z}{1}$$

Problema 13.1.9 (2 puntos) En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0,6 y -0,8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

- (I.) la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.
- (II.) entre qué puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60 % de los estudiantes.

Solución:

$$(I.) P(73 \leq X \leq 94) = P\left(\frac{73-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{94-\mu}{\sigma}\right) = P(-0,8 \leq Z \leq 0,6) \implies$$

$$\begin{cases} \frac{73-\mu}{\sigma} = -0,8 \implies \mu - 0,8\sigma = 73 \\ \frac{94-\mu}{\sigma} = 0,6 \implies \mu + 0,6\sigma = 94 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu = 85 \\ \sigma = 15 \end{cases} \implies N(85, 15)$$

$$(II.) P(85-a \leq X \leq 85+a) = P\left(\frac{85-a-85}{15} \leq Z \leq \frac{85+a-85}{15}\right) = P\left(\frac{-a}{15} \leq Z \leq \frac{a}{15}\right) =$$

$$P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - P\left(Z \leq \frac{-a}{15}\right) = P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right)\right] = 2P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) - 1 =$$

$$0,6 \implies P\left(Z \leq \frac{a}{15}\right) = 0,8 \implies \frac{a}{15} = 0,845 \implies a = 12,675$$

El 60 % de las notas estarían entre $\mu - a = 85 - 12,675 = 72,325$ y $\mu + a = 85 + 12,675 = 97,675$

Problema 13.1.10 (2 puntos) Dados los sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0,27$, $P(B') = 0,82$, $P(A \cup B) = 0,4$. Determina si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles.

Calcula $P((A \cup B)')$ y $P(A' \cup B')$, (A' significa suceso complementario).

Solución:

Por comodidad utilizo $A' = \bar{A}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies 0,4 = 0,27 + (1 - 0,82) - P(A \cap B) \implies$$

$$P(A \cap B) = 0,05 \neq 0 \implies A \text{ y } B \text{ son compatibles.}$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,05 = 0,95$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,05 = 0,95.$$

13.2. Extraordinaria

El alumno contestará a **SÓLO CINCO** ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Problema 13.2.1 (2 puntos) Escribe, si existen, las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$f(x) = |x| \exp(-x)$$

en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -1$.

Solución:

$$f(x) = |x|e^{-x} = \begin{cases} -xe^{-x} & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -(x-1)e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En $x = -1$ la función es continua y derivable por ser una exponencial $f(x) = -xe^{-x}$ y tenemos:

$$a = -1 \implies b = f(-1) = e \text{ y } m = f'(-1) = -2e \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y-e = -2e(x+1) \implies y = -2ex-e$$

En $x = 0$ la función es continua:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

Pero no es derivable en $x = 0$:

$$f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$$

Luego no se puede calcular una única tangente en $x = 0$, en ese punto la función tiene un pico (un vértice Υ)

Problema 13.2.2 (2 puntos) Un nadador se encuentra a 2 km de la playa enfrente del puesto de la Cruz Roja. Desea ir a la caseta de las duchas que está en la misma playa a 3 km de distancia del puesto de la Cruz Roja. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, determinar a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a las duchas en el menor tiempo posible.

Solución:

$$\text{Tenemos: } t_y = \frac{y}{V(y)} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} \text{ y } t_x = \frac{3-x}{V(x)} = \frac{3-x}{5}$$

$$T(x) = t_y + t_x = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{3-x}{5}$$

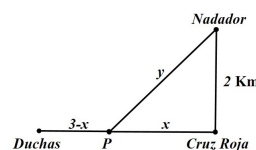
$$T'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5} = 0 \implies \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{5} \implies$$

$$5x = 3\sqrt{x^2+4} \implies 25x^2 = 9(x^2+4) \implies 16x^2 = 36 \implies$$

$$x^2 = \frac{9}{4} \implies x = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ Km, la solución negativa no es válida.}$$

$$T''(x) = \frac{4}{3\sqrt{(x^2+4)^3}} \implies T''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{32}{375} > 0 \implies x = \frac{3}{2} \text{ es un mínimo relativo.}$$

En conclusión el nadador nadará $y = \sqrt{x^2+4} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+4} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ Km}$ y andará $3-x = 3-\frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ km}$ utilizando el menor tiempo posible de $T\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{15} \simeq 1,13333333 \simeq 1 \text{ h } 18 \text{ m.}$



Problema 13.2.3 (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = (1 - x^2) \tan x$$

Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $(0, \pi/2)$.

Solución:

Como $\tan \frac{\pi}{2} = \pm\infty$ cogemos un intervalo más pequeño contenido en el dado. Además queremos que se cumpla que $f(a) = f(b)$ siendo (a, b) el nuevo intervalo. Si $a = 0 \implies f(0) = 1 \cdot \tan 0 = 0$ y $b = 1 \implies 0 \cdot \tan 1 = 0$, luego el intervalo $(0, 1)$ cumple $f(0) = f(1) = 0$.

Por otro lado tenemos que f es continua y derivable en el intervalo $(0, 1)$. Continua por ser composición de funciones continuas y su derivada es:

$$f'(x) = -2x \tan x + \frac{1 - x^2}{\cos^2 x}$$

Luego f cumple las condiciones del teorema de Rolle que afirma que $\exists \alpha \in (0, 1)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Luego en $(0, \pi/2)$ hay un posible extremo relativo.

Analizamos el signo de la primera derivada: (tomando valores muy próximos al 0 y al 1 o ellos mismos)

	$(0, \alpha)$	$(\alpha, 1)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(0, \alpha)$ y decreciente en el $(\alpha, 1)$ con un máximo relativo en el punto de abscisa $x = \alpha$

Problema 13.2.4 (2 puntos) Halla la matriz X que satisface

$$AXA + B = B(2A + I)$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

$$AXA + B = B(2A + I) \implies AXA = 2BA + B - B = 2BA \implies AX = 2BAA^{-1} = 2B \implies X = 2A^{-1}B = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 13.2.5 (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y + az = a \\ ax + y - z = a \\ (a + 1)x + z = a + 2 \end{cases}$$

halla la matriz $A^{-1}b$ sin calcular la matriz inversa de A , siendo A la matriz de coeficientes y b la de términos independientes.

Solución:

Tenemos: $AX = b$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & a \\ a & 1 & -1 & a \\ a+1 & 0 & 1 & a+2 \end{array} \right), |A| = -a^2 + a + 2 = -(a-2)(a+1) = 0 \implies$$

$a = 2 \quad a = -1 \implies \exists A^{-1} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

Para $\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ se puede resolver por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & a & -1 \\ a+1 & a+2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 1 \quad y \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & a \\ a+1 & 0 & a+2 \end{vmatrix}}{|A|} = 1$$

La solución del sistema $AX = b \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ es $x = y = z = 1$

También se podría haber resuelto por Gauss.

Luego:

$$A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 13.2.6 (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, halla a para que $A^2 - A = 12I + B$ con I la matriz identidad de orden 2. A continuación, halla la matriz X tal que $XA = AX = I$.

Solución:

$$\begin{aligned} A^2 - A &= A(A - I) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 0 & -a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a-1) & -1 \\ 0 & a(a+1) \end{pmatrix} \\ 12I + B &= \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+8 & -1 \\ 0 & 2a+12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(a-1) & -1 \\ 0 & a(a+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+8 & -1 \\ 0 & 2a+12 \end{pmatrix} \implies \\ &\begin{cases} a^2 - a = a + 8 \implies a^2 - 2a - 8 = 0 \implies a = -2, \quad a = 4 \\ a^2 + a = 2a + 12 \implies a^2 - a - 12 = 0 \implies a = -3, \quad a = 4 \end{cases} \implies a = 4 \end{aligned}$$

$$XA = I \implies X = A^{-1}:$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2 = 0 \implies a = 0 \implies \exists A^{-1} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 1/a^2 \\ 0 & -1/a \end{pmatrix}$$

Problema 13.2.7 (2 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3a \end{cases}$$

Analiza según los valores del parámetro a su posición relativa.

Solución:

$$|\overline{A}| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 + F_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ a+1 & 0 & 2 & a^2+1 \\ a+3 & 0 & 0 & a^2+1 \\ a+6 & 0 & 2 & a^2+3a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a+1 & 2 & a^2+1 \\ a+3 & 0 & a^2+1 \\ a+6 & 2 & a^2+3a \end{vmatrix} =$$

$$4(a^2 - 4a + 4) = 0 \implies a = 2$$

Si $a \in \mathbb{R} - \{2\} \implies |\bar{A}| \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 4 \neq \text{Rango}(A) \leq 3 \implies$ sistema incompatible.

Si $a = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right) \implies |\bar{A}| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{array} \right| = 10 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(\bar{A}) = 3 = \text{Rango}(A) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado. Los cuatro planos se cortan en un punto.

Analizamos para $a \neq 2$:

$$A_1 = \left| \begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{array} \right| = 2a + 6 = 0 \implies a = -3:$$

$$\begin{cases} \pi_1 : -3x + y + z = 9 \\ \pi_2 : x - y + z = 1 \\ \pi_3 : 3x - y - z = 1 \\ \pi_4 : 6x - y + z = -6 \end{cases} \implies \begin{cases} \pi_1 \text{ con } \pi_2 : \text{ se cortan} \\ \pi_1 \text{ con } \pi_3 : \text{ son paralelos} \\ \pi_1 \text{ con } \pi_4 : \text{ se cortan} \\ \pi_2 \text{ con } \pi_3 : \text{ se cortan} \\ \pi_2 \text{ con } \pi_4 : \text{ se cortan} \\ \pi_3 \text{ con } \pi_4 : \text{ se cortan} \end{cases}$$

Si $a \neq -3$:

Los planos π_1 y π_3 son paralelos.

Los planos π_1, π_2 y π_4 se cortarían en un punto.

Los planos π_2, π_3 y π_4 se cortarían en un punto.

Como un sillón con respaldo: π_1 y π_3 los apoyabrazos, π_2 la espalda y π_4 el asiento.

Problema 13.2.8 (2 puntos) Dado el punto $P \equiv (2, -1, 3)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a P .

I. Paralelo a $\pi : 4x + 3y - 2z + 4 = 0$.

II. Perpendicular a la recta $r : \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4}$

Solución:

$$\text{I. } \pi' \parallel \pi \implies \vec{u}_{\pi'} = \vec{u}_{\pi} \implies \pi' : 4x + 3y - 2z + \lambda = 0 \xrightarrow{P \in \pi'} 8 - 3 - 6 + \lambda = 0 \implies \lambda = 1 \implies \pi' : 4x + 3y - 2z + 1 = 0$$

$$\text{II. } \pi'' \perp r \implies \vec{u}_{\pi''} = \vec{u}_r = (3, 2, -4) \implies \pi'' : 3x + 2y - 4z + \lambda = 0 \xrightarrow{P \in \pi''} 6 - 2 - 12 + \lambda = 0 \implies \lambda = 8 \implies \pi'' : 3x + 2y - 4z + 8 = 0$$

Problema 13.2.9 (2 puntos) Una máquina de café está regulada de modo que la cantidad de café que echa está distribuida por una normal de media 125 ml y una desviación típica de 20 ml. Calcula:

I. el porcentaje de vasos que se llenarán con más de 150 ml.

II. entre qué capacidades (ml) está el 60 % de los cafés que dispensa la máquina.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Solución:

$$N(125; 20)$$

$$\text{I. } P(X \geq 150) = P\left(Z \geq \frac{150 - 125}{20}\right) = P(Z \geq 1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056 \Rightarrow 10,56\%$$

II. Entendemos que se trata de un intervalo centrado en la media.

$$P(125 - a \leq X \leq 125 + a) = P\left(\frac{125 - a - 125}{20} \leq Z \leq \frac{125 + a - 125}{20}\right) = P\left(-\frac{a}{20} \leq Z \leq \frac{a}{20}\right) = 2P\left(Z \leq \frac{a}{20}\right) - 1 = 0,6 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{20}\right) = 0,8 \Rightarrow \frac{a}{20} = 0,845 \Rightarrow a = 16,9$$

Entre $125 - 16,9 = 108,1$ ml y $125 + 16,9 = 141,9$ ml.

Problema 13.2.10 (2 puntos) El 2 % de la población mundial padece una cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectarla, pero no es fiable. En el 98 % de los casos da positivo en personas enfermas. Y en el 4 % de los casos da positivo en personas sanas. Halla

I. la probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva.

II. habiendo salido la prueba negativa, la probabilidad de que una persona esté enferma.

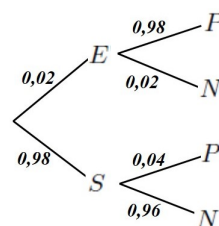
Solución:

Sean E enfermas, S sanas, P da positivo y N da negativo.

$$\text{a) } P(P) = P(P|E)P(E) + P(P|S)P(S) = 0,98 \cdot 0,02 + 0,04 \cdot 0,98 = 0,0588$$

$$P(S|P) = \frac{P(P|S)P(S)}{P(P)} = \frac{0,04 \cdot 0,98}{0,0588} = 0,6667$$

$$\text{b) } P(E|N) = \frac{P(N|E)P(E)}{P(N)} = \frac{0,02 \cdot 0,02}{1 - 0,0588} = 0,0004$$



Capítulo 14

Madrid

14.1. Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.1.1 (2,5 puntos) La primera interpretación en EE.UU. de la octava sinfonía de Mahler tuvo lugar en Filadelfia en 1916 con la participación de una orquesta, dos coros con el mismo número de miembros, un tercer coro infantil y, además, ocho cantantes solistas invitados especialmente y que no pertenecían a ninguno de los coros. La décima parte del número total de intérpretes de los tres coros era menor en 15 unidades al de miembros de la orquesta. Los miembros de cada uno de los dos coros no infantiles superaban en 140 unidades a la suma de componentes del coro infantil y los de la orquesta. El número de miembros de la orquesta excedía en 21 unidades a la doceava parte del total de intérpretes. ¿Cuántos intérpretes tenían la orquesta y cada uno de los coros? ¿Cuántos intérpretes había en total?

Solución:

Sean x el número de intérpretes de la orquesta, y el número de intérpretes de cada coro y z el número de intérpretes del coro infantil.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2y+z}{10} + 15 = x \\ y = 140 + z + x \\ x - 21 = \frac{x + 2y + z + 8}{12} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 10x - 2y - z = 150 \\ x - y + z = -140 \\ 11x - 2y - z = 260 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 110 \text{ intérpretes} \\ y = 400 \text{ intérpretes} \\ z = 150 \text{ intérpretes} \end{array} \right.$$

La orquesta tiene 110 intérpretes, cada coro 400 y el coro infantil 150. El total de intérpretes es: $x + 2y + z + 8 = 110 + 800 + 150 + 8 = 1068$ intérpretes.

Por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -140 \\ 10 & -2 & -1 & 150 \\ 11 & -2 & -1 & 260 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 10F_1 \\ F_3 - 11F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -140 \\ 0 & 8 & -11 & 1550 \\ 0 & 9 & -12 & 1800 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 8F_3 - 9F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -140 \\ 0 & 8 & -11 & 1550 \\ 0 & 0 & 3 & 450 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 3z = 450 \Rightarrow z = 150 \\ 8y - 1650 = 1550 \Rightarrow y = 400 \\ x - 400 + 150 = -140 \Rightarrow x = 110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 110 \\ y = 400 \\ z = 150 \end{cases}$$

Problema 14.1.2 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

- a) (0,75 punto) Halle $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}}$.
- b) (1,75 puntos) Halle el área, en el primer cuadrante, comprendida entre la recta $y = x$ y la gráfica de la función $f(x)$.

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2-1)^{2/3}}{(x-1)^{2/3}} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x[(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}]}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x(x+1)^{2/3}) = \sqrt[3]{4}$$

- b) Calculamos los puntos de corte entre $f(x)$ e $y = x$:

$f(x) = x \Rightarrow x\sqrt[3]{(x^2-1)^2} = x \Rightarrow x = 0$ y $x = \pm\sqrt{2}$. Como es en el primer cuadrante el intervalo de integración será $[0, \sqrt{2}]$.

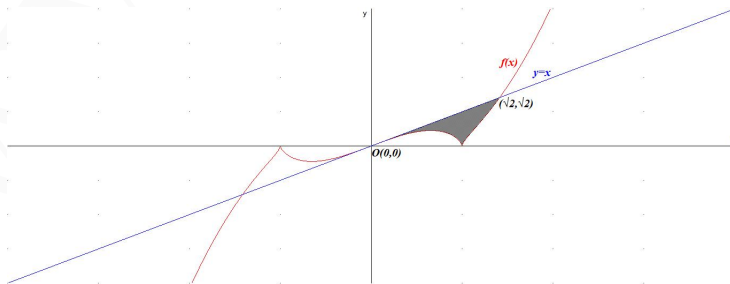
$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (x(x^2-1)^{2/3} - x) dx = \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = t \\ 2x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right] =$$

$$-\frac{x^2}{2} + \int (xt^{2/3}) \cdot \frac{dt}{2x} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int t^{2/3} dt = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{5/3}}{5/3} = -\frac{x^2}{2} + \frac{3(x^2-1)^{5/3}}{10} + C$$

$$S_1 = \int_0^{\sqrt{2}} (f(x) - g(x)) dx = F(\sqrt{2}) - F(0) = -\frac{7}{10} + \frac{3}{10} = -\frac{2}{5}$$

El resultado es negativo por estar la función $y = x$ por encima de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, \sqrt{2}]$.

$$S = |S_1| = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ u}^2$$



Problema 14.1.3 (2,5 puntos) Sea la recta $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : z = 0$.

- a) (1 punto) Halle una ecuación de la recta paralela al plano π cuya dirección sea perpendicular a r y que pase por el punto $(1, 1, 1)$.
- b) (1,5 puntos) Halle una ecuación de una recta que forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes con la recta r , que esté contenida en el plano π y pase por el punto $(0, 0, 0)$.

Solución:

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, 0) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \quad \text{y } \pi : z = 0 \implies \vec{u}_\pi = (0, 0, 1)$$

$$a) \quad s \perp \vec{u}_\pi \text{ y } s \perp r \implies \vec{u}_s = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, 0)$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (0, 1, 0) \\ P_s(1, 1, 1) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

$$b) \quad t \in \pi \implies \vec{u}_t \perp \vec{u}_\pi \implies \vec{u}_t \cdot \vec{u}_\pi = (a, b, c) \cdot (0, 0, 1) = c = 0 \implies \vec{u}_t = (a, b, 0).$$

$$\cos(\widehat{(t, r)}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|\vec{u}_t \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{u}_t| \cdot |\vec{u}_r|} = \frac{|(a, b, 0) \cdot (1, 0, 0)|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \implies a^2 + b^2 = 2a^2 \implies a^2 = b^2 \implies$$

$$\begin{cases} b = a \implies \vec{u}_t = (a, a, 0) = a(1, 1, 0) \implies t_1 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \\ b = -a \implies \vec{u}_t = (a, -a, 0) = a(1, -1, 0) \implies t_2 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Problema 14.1.4 (2,5 puntos) La selección española competirá en la Copa Mundial Femenina de Fútbol 2023. En los dos primeros partidos de la fase de grupos, que consta de tres partidos, la probabilidad de ganar cada uno de ellos es del 80 %. Sin embargo, debido al aumento en la moral de las jugadoras, si ganan los dos primeros partidos la probabilidad de ganar el tercero asciende al 90 %. En caso contrario, la probabilidad de ganar el tercer partido se mantendrá en el 80 %. Se pide:

- a) (0,5 puntos) Determinar la probabilidad de que la selección española no gane ningún partido durante la fase de grupos.
- b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la selección gane el tercer partido de la fase de grupos.
- c) (1 punto) Si sabemos que la selección ha ganado el tercer partido, determinar la probabilidad de que no haya ganado alguno de los dos encuentros anteriores.

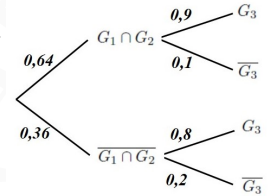
Solución:

- a) Sea G el suceso ganar el partido con $P(G) = 0,8$ y $P(\overline{G}) = 0,2$.
 $P(\overline{G} \cap \overline{G} \cap \overline{G}) = 0,2^3 = 0,008$

- b) Sean los sucesos G_1 gana el primer partido, G_2 gana el segundo partido y G_3 gana el tercer partido.

Tenemos $P(G_1 \cap G_2) = 0,8^2 = 0,64$, $P(G_3|G_1 \cap G_2) = 0,9$ y $P(G_3|\overline{G_1 \cap G_2}) = 0,8$

$$P(G_3) = P(G_3|G_1 \cap G_2)P(G_1 \cap G_2) + P(G_3|\overline{G_1 \cap G_2})P(\overline{G_1 \cap G_2}) = 0,9 \cdot 0,64 + 0,8 \cdot 0,36 = 0,864$$



$$c) P(\overline{G_1 \cap G_2}|G_3) = \frac{P(G_3|\overline{G_1 \cap G_2})}{P(G_3)} = \frac{0,8 \cdot 0,36}{0,864} = \frac{1}{3} = 0,3333$$

Opción B

Problema 14.1.5 (2,5 puntos) Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se pide:

- a) (0,75 puntos) Estudiar si existe algún valor de m para el cual la matriz BA tiene inversa.
- b) (0,75 puntos) Estudiar el rango de la matriz AB en función del parámetro m .
- c) (1 punto) Para $m = 1$, discutir el sistema $(A^t A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$, según los valores de a .

Solución:

$$a) BA = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m^2 + 1 & 3m + 1 \\ 0 & m^2 & 3m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$$

$$|BA| = 0 \implies \nexists (BA)^{-1} \forall m \in \mathbb{R}$$

$$b) AB = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m^2 + m + 1 \\ 0 & m^2 + 3 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = m(m^2 + 3) = 0 \implies m = 0$$

$$\bullet \text{ Si } m \neq 0 \implies |AB| \neq 0 \implies \text{Rango}(AB) = 2$$

$$\bullet \text{ Si } m = 0 \implies AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(AB) = 1$$

- c) Si $m = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A^t A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 4 & 10 & a^2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & a^2 - a \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - a \end{array} \right)$$

$a^2 - a = 0 \implies a = 0$ y $a = 1$
Si $a = 0$ o $a = 1 \implies$ Sistema compatible indeterminado.
Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \implies$ Sistema incompatible.

Problema 14.1.6 (2,5 puntos) Dada la función real de variable real $f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2}$, se pide:

- (0,75 puntos) Hallar el dominio de definición de $f(x)$ y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de las asíntotas de su gráfica.
- (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función, así como sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- (0,75 puntos) Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que sea paralela a la recta de ecuación $9x - 8y = 6$.

Solución:

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ y las asíntotas:

• Verticales: En $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x - \frac{4}{(x-1)^2} \right) = \left[1 - \frac{4}{0^+} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x - \frac{4}{(x-1)^2} \right) = \left[1 - \frac{4}{0^+} \right] = -\infty$$

• Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{4}{(x-1)^2} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{4}{(x-1)^2} \right) = \infty$$

• Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x(x-1)^2} \right) = 1$$

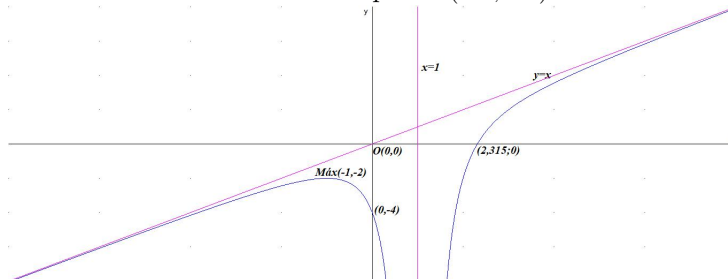
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{4}{(x-1)^2} - x \right) = 0$$

$y = x$

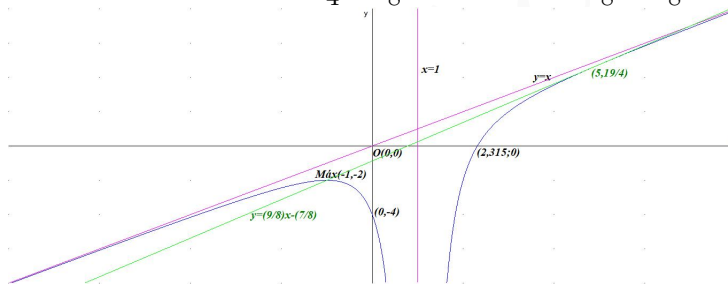
b) $f'(x) = 1 + \frac{8}{(x-1)^3} = 0 \implies x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(-1, 1)$, tiene un máximo relativo en el punto $(-1, -2)$.



$$\begin{aligned} \text{c) } 9x - 8y = 6 &\Rightarrow y = \frac{9}{8}x - \frac{3}{4} \Rightarrow m = f'(a) = \frac{9}{8} \\ f'(a) = 1 + \frac{8}{(a-1)^3} &= \frac{9}{8} \Rightarrow a = 5 \\ b = f(a) = f(5) &= \frac{19}{4} \\ y - b = m(x - a) &\Rightarrow y - \frac{19}{4} = \frac{9}{8}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{9}{8}x - \frac{7}{8} \end{aligned}$$



Problema 14.1.7 (2,5 puntos) Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 0, -1)$, $D(1, 1, 2)$, se pide:

- (0,75 puntos) Comprobar que los puntos A , B , C y D no son coplanarios y hallar el volumen del tetraedro que forman.
- (0,75 puntos) Hallar el área del triángulo que forman los puntos B , C y D y el ángulo $\widehat{B}$ del mismo.
- (1 punto) Hallar uno de los puntos E del plano determinado por A , B y C tales que el cuadrilátero $ABCE$ sea un paralelogramo. Hallar el área de dicho paralelogramo.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{AB} &= (1, 1, 0) - (0, 0, 1) = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{AC} &= (1, 0, -1) - (0, 0, 1) = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{AD} &= (1, 1, 2) - (0, 0, 1) = (1, 1, 1) \end{aligned}$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

A, B, C y D no son coplanarios.

$$V_T = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{|-2|}{6} = \frac{1}{3} u^3$$

b) $\vec{BC} = (1, 0, -1) - (1, 1, 0) = (0, -1, -1)$

$$\vec{BD} = (1, 1, 2) - (1, 1, 0) = (0, 0, 2)$$

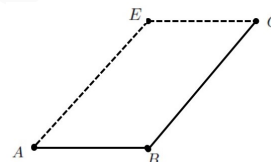
$$S_t = \frac{1}{2} |\vec{BC} \times \vec{BD}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-2, 0, 0)| = 1 u^2$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{\vec{BC} \cdot \vec{BD}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{BD}|} = \frac{(0, -1, -1) \cdot (0, 0, 2)}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{B} = 135^\circ$$

c) Como se pide uno de los puntos E , considero el caso en el que los puntos A, B y C son consecutivos:

$$E = A + \vec{AE} = A + \vec{BC} = (0, 0, 1) + (0, -1, -1) = (0, -1, 0)$$

$$S = |\vec{AB} \times \vec{AE}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(-2, 1, -1)| = \sqrt{6} u^2$$



Problema 14.1.8 (2,5 puntos) En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 de probabilidad 0,5 y A_2 de probabilidad 0,3 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$. De cierto suceso B de probabilidad 0,4 se sabe que es independiente de A_1 y que la probabilidad del suceso $A_3 \cap B$ es 0,1. Con estos datos se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de A_3 .

b) (1,5 puntos) Decidir si B y A_2 son independientes.

Solución:

Tenemos: $P(A_1) = 0,5$, $P(A_2) = 0,3$, $P(A_1 \cap A_2) = 0$, $P(B) = 0,4$,
 $P(B \cap A_1) = P(B)P(A_1) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$ y $P(A_3 \cap B) = 0,1$.

a) $P(A_3) = P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)] = 1 - (0,5 + 0,3 - 0) = 0,2$

b) $P(B) \cdot P(A_2) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$

Como A_1, A_2 y A_3 son disjuntos:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) \Rightarrow$$

$$0,4 = 0,2 + P(B \cap A_2) + 0,1 \Rightarrow P(B \cap A_2) = 0,1$$

Como $P(B \cap A_2) \neq P(B) \cdot P(A_2) \Rightarrow B$ y A_2 no son independientes.

14.2. Ordinaria

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.2.1 (2,5 puntos) Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Solución:

Sean x longitud del listón largo, y longitud del listón intermedio y z longitud del listón corto.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3y + 15z \\ x - 17 = y + z \\ 9z + 7 = y + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 15z = 0 \\ x - y - z = 17 \\ x + y - 9z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 107 \text{ cm} \\ y = 71 \text{ cm} \\ z = 19 \text{ cm} \end{cases}$$

El listón largo mide 107 cm, el intermedio 71 cm y el corto 19 cm Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \\ 2 & 1 & -15 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -8 & -10 \\ 0 & 3 & -13 & -34 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -38 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} -2z = -38 \Rightarrow z = 19 \\ 2y - 152 = -10 \Rightarrow y = 71 \\ x - 71 - 19 = 17 \Rightarrow x = 107 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 107 \\ y = 71 \\ z = 19 \end{cases}$$

Problema 14.2.2 (2,5 puntos) Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

- (0,5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.
- (1 punto) Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.
- (1 punto) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución:

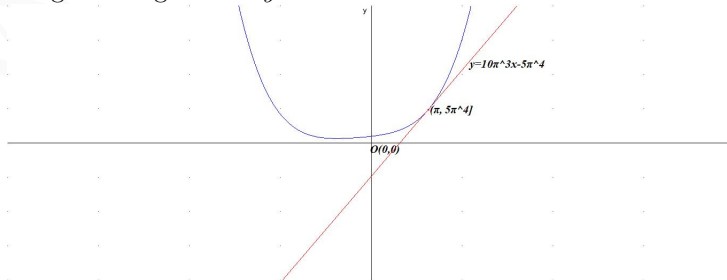
- Tenemos $a = \pi \Rightarrow b = f(a) = f(\pi) = 5\pi^4$.

$$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3 \Rightarrow m = f'(\pi) = 10\pi^3$$

La ecuación punto pendiente de la recta tangente en el punto $(a, b) = (\pi, 5\pi^4)$ con pendiente

$$m = 10\pi^3 \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y - 5\pi^4 = 10\pi^3(x - \pi)$$

Luego la tangente es: $y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$



b) La función es continua y derivable, para que cumpla las condiciones del teorema de Rolle hay que comprobar si $f(-\pi) = f(0)$:

- ☛ $f(-\pi) = \pi^4$
- ☛ $f(0) = \pi^4$
- ☛ Luego $f(-\pi) = f(0)$

La función cumple las condiciones del teorema de Rolle que nos asegura que $\exists x \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(x) = 0$.

Para llegar a este resultado por el teorema de Bolzano analizamos $f'(x)$ que es una función continua, y tenemos:

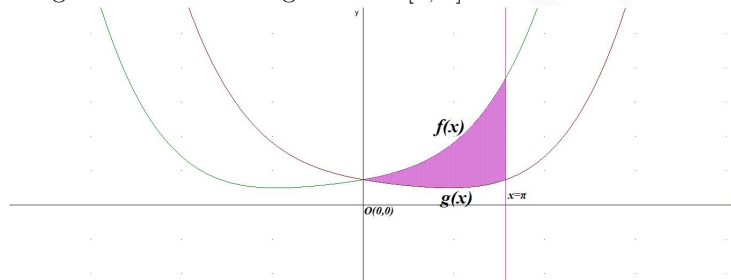
- ☛ $f'(-\pi) = -2\pi^3$
- ☛ $f'(0) = \pi^3$
- ☛ Luego la función cambia de signo en los extremos del intervalo

La función derivada cumple las condiciones del teorema de Bolzano que nos asegura que $\exists x \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(x) = 0$.

c) $g(x) = f(-x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$ y calculamos los puntos de corte entre las dos funciones:

$$f(x) = g(x) \implies x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4 \implies 2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 0 \implies x = 0$$

Luego el recinto de integración es $[0, \pi]$.



$$\text{Sea } F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (2\pi x^3 + 2\pi^3 x) dx = \frac{\pi x^4}{2} + \pi^3 x^2 + C.$$

$$S = \left| \int_0^\pi (f(x) - g(x)) dx \right| = |F(\pi) - F(0)| = \frac{3\pi^5}{2} u^2$$

Problema 14.2.3 (2,5 puntos) Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 1, 0)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.
- b) (1,5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2 , que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Solución:

$$\text{a) } \pi : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (0, 0, 1) \\ \vec{AB} = (1, 1, -1) \\ A(0, 0, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x + y = 0$$

$$\pi : x - y = 0$$

$$\begin{aligned}
b) \quad r_1 : \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (a, b, c) \\ P_{r_1}(0, 0, 1) \end{cases} &\implies r_1 : \begin{cases} x = a\lambda \\ y = b\lambda \\ z = 1 + c\lambda \end{cases} \quad y \\
r_2 : \begin{cases} \vec{u}_{r_2} = (a, b, c) \\ P_{r_2}(1, 1, 0) \end{cases} &\implies r_2 : \begin{cases} x = 1 + a\mu \\ y = 1 + b\mu \\ z = c\mu \end{cases} \\
\vec{u}_{r_1} = \vec{u}_{r_2} \perp \vec{u}_\pi &\implies (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = a + c = 0 \implies c = -a \implies \vec{u}_{r_1} = \vec{u}_{r_2} = (a, b, -a) \\
|\vec{AB} \times \vec{u}_{r_2}| &= \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & -a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(-b + a, 0, a - b)| = \sqrt{2(a - b)^2} \\
d(r_1, r_2) = d(A, r_2) &= \frac{|\vec{AB} \times \vec{u}_{r_2}|}{|\vec{u}_{r_2}|} = \frac{\sqrt{2(a - b)^2}}{\sqrt{2a^2 + b^2}} = 1 \implies 2(a - b)^2 = 2a^2 + b^2 \implies b^2 - 4ab = \\
b(b - 4a) = 0 &\implies b = 0 \text{ y } b = 4a
\end{aligned}$$

☛ Si $b = 0$:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_{r_1} = \vec{u}_{r_2} &= (a, 0, -a) = a(1, 0, -1) \\
r_1 : \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (1, 0, -1) \\ P_{r_1}(0, 0, 1) \end{cases} &\implies r_1 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad y \\
r_2 : \begin{cases} \vec{u}_{r_2} = (1, 0, -1) \\ P_{r_2}(1, 1, 0) \end{cases} &\implies r_2 : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 \\ z = -\mu \end{cases}
\end{aligned}$$

☛ Si $b = 4a$:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_{r_1} = \vec{u}_{r_2} &= (a, 4a, -a) = a(1, 4, -1) \\
r_1 : \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (1, 4, -1) \\ P_{r_1}(0, 0, 1) \end{cases} &\implies r_1 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad y \\
r_2 : \begin{cases} \vec{u}_{r_2} = (1, 4, -1) \\ P_{r_2}(1, 1, 0) \end{cases} &\implies r_2 : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + 4\mu \\ z = -\mu \end{cases}
\end{aligned}$$

Problema 14.2.4 (2,5 puntos) Sabiendo que: $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A|B) - P(B|A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

b) (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$

Solución:

$$\text{Tenemos } P(A) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$$

$$\begin{aligned}
a) \quad P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = \frac{9}{20} - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \implies P(A \cap B) = \frac{3}{20} \\
P(A|B) - P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3/20}{P(B)} - \frac{3/20}{9/20} = \frac{1}{24} \implies P(B) = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

b) A y C independientes: $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = \frac{9P(C)}{20}$
 $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \Rightarrow \frac{14}{25} = \frac{9}{20} + P(C) - \frac{9P(C)}{20} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{5}.$

Opción B

Problema 14.2.5 (2,5 puntos) Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$

y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) (0,75 puntos) Calcular el determinante de la matriz AA^t .

c) (0,5 puntos) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

Solución:

a) $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
 $BCB^{-1} = A \Rightarrow b \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{b} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

La igualdad se cumple $\forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) $|AA^t| = |A||A^t| = |A||A| = |A|^2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}^2 = 12^2 = 144$

c) Si $b = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} z = 5 \\ -y - 5 = -7 \Rightarrow y = 2 \\ x + 4 + 5 = 3 \Rightarrow x = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$$

Problema 14.2.6 (2,5 puntos) Calcule:

a) (1,25 puntos) $\int_1^e (x+2) \ln x \, dx$

b) (1,25 punto) Halle $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x} \right)}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= \int (x+2) \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = (x+2)dx \implies v = \frac{x^2+4x}{2} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = \\ &= \frac{(x^2+4x) \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+4x}{x} dx = \frac{(x^2+4x) \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int (x+4) dx = \\ &= \frac{(x^2+4x) \ln x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 4x \right) + C = \frac{2(x^2+4x) \ln x - x^2 - 8x}{4} + C \\ \int_1^e (x+2) \ln x \, dx &= F(e) - F(1) = \frac{e^2}{4} - \left(-\frac{9}{4} \right) = \frac{e^2+9}{4} \simeq 4,097264024 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Sea } \lambda &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x} \right)} \implies \ln \lambda = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left[\left(\tan \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x} \right)} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} \right) \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\ln \left(\tan \frac{x}{2} \right)}{\cos x} \right) &= \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)}}{\tan \left(\frac{x}{2} \right)}}{-\sin x} = \frac{\frac{\frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \right)}}{\tan \left(\frac{\pi}{4} \right)}}{-\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{-1} = -1 \implies \ln \lambda = -1 \implies \\ \lambda &= e^{-1} \end{aligned}$$

Problema 14.2.7 (2,5 puntos) Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1 , P_2 , P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 1, 0)$ y $P_3(1, 3, 2)$, pero del cuarto punto $P_4(3, a, 3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

- a) (1,5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a .
- b) (1 punto) Dado el punto $Q(3, 3, 3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2 , P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

Solución:

Tenemos $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 1)$ y $\overrightarrow{P_1P_4} = (2, a-1, 2)$

$$\begin{aligned} \text{a) } V &= \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4} \right] \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |9-a| = 1 \implies |9-a| = 6 \implies \\ &\begin{cases} 9-a=6 \implies a=3 \\ 9-a=-6 \implies a=15 \end{cases} \end{aligned}$$

• si $a = 3$ tenemos:

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = |(1, 0, -1)| = \sqrt{2} < 10, \quad |\overrightarrow{P_1P_3}| = |(0, 2, 1)| = \sqrt{5} < 10, \quad |\overrightarrow{P_1P_4}| = |(2, 2, 2)| = 2\sqrt{3} < 10 \implies \text{solución válida.}$$

• si $a = 15$ tenemos:

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = |(1, 0, -1)| = \sqrt{2} < 10, \quad |\overrightarrow{P_1P_3}| = |(0, 2, 1)| = \sqrt{5} < 10, \quad |\overrightarrow{P_1P_4}| = |(2, 14, 2)| = 2\sqrt{56} > 10 \implies \text{solución no válida.}$$

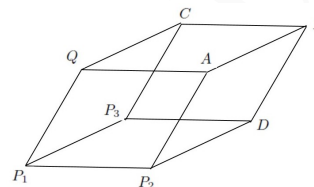
- b) Tenemos los puntos $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 1, 0)$, $P_3(1, 3, 2)$ y $Q(3, 3, 3)$
 Tenemos los vectores $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 1)$ y $\overrightarrow{P_1Q} = (2, 2, 2)$
 Luego:

$$\bullet D = P_2 + \overrightarrow{P_2D} = P_2 + \overrightarrow{P_1P_3} = (2, 1, 0) + (0, 2, 1) = (2, 3, 1)$$

$$\bullet A = Q + \overrightarrow{QA} = Q + \overrightarrow{P_1P_2} = (3, 3, 3) + (1, 0, -1) = (4, 3, 2)$$

$$\bullet B = A + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{P_1P_3} = (4, 3, 2) + (0, 2, 1) = (4, 5, 3)$$

$$\bullet C = Q + \overrightarrow{QC} = Q + \overrightarrow{P_1P_3} = (3, 3, 3) + (0, 2, 1) = (3, 5, 4)$$



Problema 14.2.8 (2,5 puntos) Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.
- b) (1,5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

Solución:

Construimos el espacio muestral en una tabla:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	8	10	12	14
3	4	5	6	7	8	9
4	6	8	10	12	14	16
5	6	7	8	9	10	11
6	8	10	12	14	16	18

$$a) P(10) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \text{ y } P(\text{Impar}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$b) P(\text{Par azul} | 8) = \frac{3}{5}$$

$$P(\text{Impar rojo} | \text{Par}) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

14.3. Ordinaria-Coincidente

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 14.3.1 (2,5 puntos) Tras una gran cosecha de sandías en una comarca, la producción se mete en cajas cúbicas de 1 m de lado que se amontonan en una gran pila compacta en forma de ortoedro. Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2 m para llegar a ser la suma del ancho y el alto. Pero el largo supera en 8 m al ancho menos el alto. El perímetro de la base es 54 m. ¿Cuántas cajas de sandías ha producido esta cosecha?

Solución:

Sean x el lado largo de la base, y el lado ancho de la base y z el lado alto.

$$\begin{cases} 2x + 2 = y + z \\ x = 8 + y - z \\ 2x + 2y = 54 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - y - z = -2 \\ x - y + z = 8 \\ x + y = 27 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 12 \text{ m} \\ y = 15 \text{ m} \\ z = 11 \text{ m} \end{cases}$$

El número de cajas es $12 \cdot 15 \cdot 11 = 1980$ cajas.

Por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & -2 & 1 & -19 \\ 0 & -3 & -1 & -56 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & -2 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & -5 & -55 \end{array} \right) \implies \begin{cases} -5z = -55 \implies z = 11 \\ -2y + 11 = -19 \implies y = 15 \\ x + 15 + 0 = 27 \implies x = 12 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 12 \\ y = 15 \\ z = 11 \end{cases}$$

Problema 14.3.2 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, se pide:

- (1,25 puntos) Hallar su dominio y estudiar las asíntotas de su gráfica.
- (0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 7/3)$.
- (0,5 puntos) Encontrar, si es posible, algún punto x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1.

Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

- En $x = 1$ No hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable (un agujero)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x} = 1$$

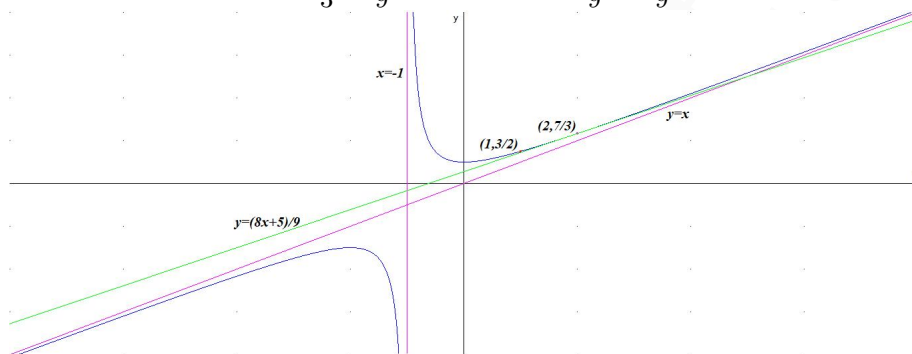
$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + x}{x^2 - 1} = 0$$

$y = x$

b) $b = f(a) = f(2) = \frac{7}{3}$

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \Rightarrow m = f'(2) = \frac{8}{9}$$

$$y - b = m(x - a) \Rightarrow y - \frac{7}{3} = \frac{8}{9}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{8}{9}x + \frac{5}{9}$$



c) $f'(x_0) = \frac{x_0(x_0+2)}{(x_0+1)^2} = 1 \Rightarrow x_0(x_0+2) = (x_0+1)^2 \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 = x_0^2 + 2x_0 + 1 \Rightarrow$
 $0 = 1 \Rightarrow$ No existe el punto buscado.

Problema 14.3.3 (2,5 puntos) Dados el punto $P(-1, 2, 6)$, el plano $\pi : 3x - 2y + z - 5 = 0$ y la recta $s : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-1} \therefore$

a) (1,5 puntos) Halle una ecuación de la recta que pasa por P , es secante a s y paralela al plano π .

b) (1 punto) Halle el simétrico del punto P respecto al plano π .

Solución:

$$\vec{u}_\pi = (3, -2, 1), s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, -1) \\ P_s(-1, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos un plano paralelo a π que contenga a P :

$$\pi' : 3x - 2y + z + a = 0 \xrightarrow{P \in \pi'} -3 - 4 + 6 + a = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \pi' : 3x - 2y + z + 1 = 0$$

☛ Calculamos el punto de corte P' de s con π' :

$$3(-1 + 2\lambda) - 2(2 + \lambda) + (-\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow P'(3, 4, -2)$$

☛ La recta r que buscamos pasa por los puntos P y P' :

$$r : \begin{cases} \vec{u}_s = \overrightarrow{PP'} = (4, 2, -8) = 2(2, 1, -4) \\ P(-1, 2, 6) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 6 - 4\lambda \end{cases}$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos una recta t perpendicular a π que contiene a P :

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (3, -2, 1) \\ P(-1, 2, 6) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$$

☛ Calculamos el punto de corte Q de t con π :

$$3(-1 + 3\lambda) - 2(2 - 2\lambda) + (6 + \lambda) - 5 = 0 \implies \lambda = \frac{3}{7} \implies Q\left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}\right)$$

☛ El punto Q es el punto medio entre P y el que buscamos H :

$$\frac{H + P}{2} = Q \implies H = 2Q - P = 2\left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}\right) - (-1, 2, 6) = \left(\frac{11}{7}, \frac{2}{7}, \frac{48}{7}\right)$$

Problema 14.3.4 (2,5 puntos) Para conocer la opinión de los usuarios sobre su servicio, la empresa de transporte público de una ciudad ha realizado una encuesta. De esa encuesta se desprende que la nota global otorgada al servicio por sus usuarios se puede considerar una normal de media 6,7 y de desviación típica 1,25. Si un usuario da una nota menor que 5 se considera que ve como insatisfactorio el servicio; si la nota está entre 5 y 7,5, que para el usuario el servicio es satisfactorio; y si la nota es mayor que 7,5, que el servicio es excelente.

- (0,75 puntos) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es excelente?
- (1 punto) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es satisfactorio?
- (0,75 puntos) Para conocer de forma más directa la opinión de sus usuarios, de entre todos ellos la empresa convoca a 25 elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de entre los convocados consideren el servicio insatisfactorio?

Solución:

$$N(6, 7; 1, 25)$$

- $P(X \geq 7,5) = P\left(Z \geq \frac{7,5 - 6,7}{1,25}\right) = 1 - P(Z \leq 0,64) = 1 - 0,7389 = 0,2611$
- $P(5 \leq X \leq 7,5) = P\left(\frac{5 - 6,7}{1,25} \leq Z \leq \frac{7,5 - 6,7}{1,25}\right) = P(-1,36 \leq Z \leq 0,64) = P(Z \leq 0,64) - P(Z \leq -1,36) = P(Z \leq 0,64) - (1 - P(Z \leq 1,36)) = 0,7389 - (1 - 0,9131) = 0,652$

$$c) P(X \leq 5) = P\left(Z \leq \frac{5-6,7}{1,25}\right) = P(Z \leq -1,36) = 1 - P(Z \leq 1,36) = 1 - 0,9131 = 0,0869$$

$$B(25; 0,0869)$$

$p = 0,0869$, $n = 25 > 10$, $np = 2,1725 < 5$, luego no es aconsejable una aproximación por la normal.

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left(\binom{25}{0} 0,0869^0 \cdot 0,9131^{25} + \binom{25}{1} 0,0869^1 \cdot 0,9131^{24} \right) = 0,6518$$

Nota informativa: Cuando la probabilidad es tan baja la distribución adecuada sería la de Poisson.

Opción B

Problema 14.3.5 (2,5 puntos) Sean X e Y dos matrices reales y cuadradas de orden dos tales que $5X - 3Y = A$ y $3X + 6Y = B$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar X , Y y X^{-1} .

b) (1 punto) Calcular A^{127} .

Solución:

$$a) \begin{cases} 5X - 3Y = A \\ 3X + 6Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{13}(2A + B) \\ Y = \frac{1}{39}(5B - 3A) \end{cases}$$

$$X = \frac{1}{13}(2A + B) = \frac{1}{13} \left[2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{39}(5B - 3A) = \frac{1}{39} \left[5 \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 5 & 1/3 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) A^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I, A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A, A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = I \text{ y } A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A. \text{ Luego:}$$

$$A^{127} = (A^4)^{31} \cdot A^3 = I \cdot (-A) = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 14.3.6 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Analice la monotonía y los extremos relativos de $f(x)$.

b) (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por la recta $y = \frac{1}{2}$ y la gráfica de $f(x)$.

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1} = \begin{cases} -\frac{x}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Monotonía:

• Se trata de una función continua en $\mathbb{R}$ (los denominadores no se anulan nunca y

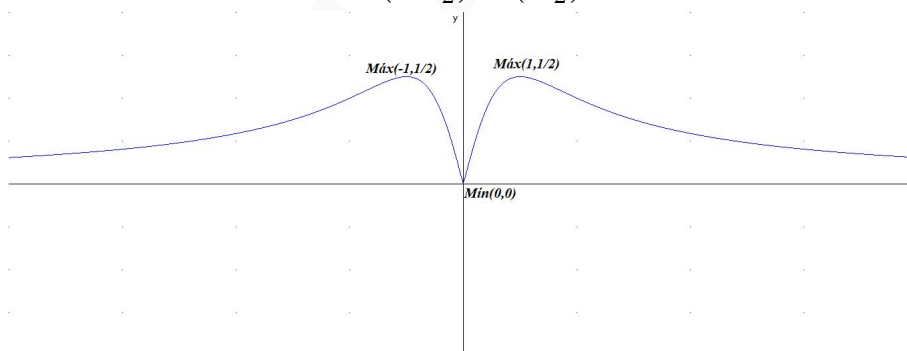
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

• Derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ ya que $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = -1 & \text{si } x < 0 \\ -\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y decreciente en el $(-1, 0) \cup (1, \infty)$, tiene dos máximos relativos en $(-1, \frac{1}{2})$ y $(1, \frac{1}{2})$ y un mínimo relativo en $(0, 0)$.



b) Calculamos los puntos de corte de la recta con $f(x)$:

$$\begin{cases} -\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \implies x = -1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \implies x = 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

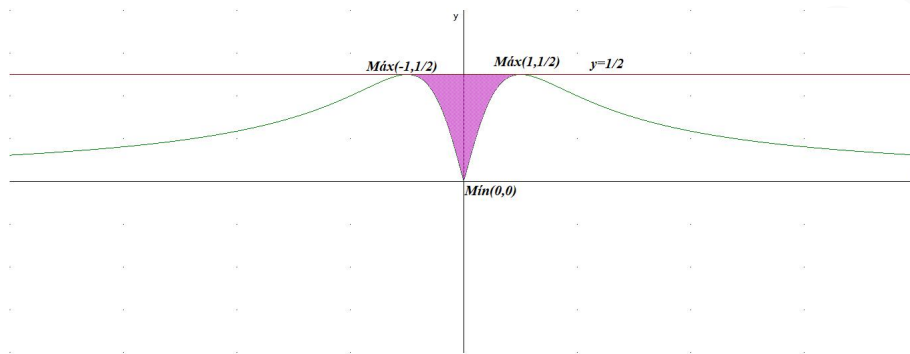
Hay dos recintos de integración:

• Para $f(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}$ es $[-1, 0]$

• Para $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ es $[0, 1]$

Luego hay dos áreas:

$$\begin{aligned}
 \bullet S_1 &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\ln(x^2+1)}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{1-\ln 2}{2} \\
 \bullet S_2 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\ln(x^2+1)}{2} \right]_0^1 = \frac{1-\ln 2}{2} \\
 \bullet S &= |S_1| + |S_2| = \frac{1-\ln 2}{2} + \frac{1-\ln 2}{2} = 1 - \ln 2 = 0,3069 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$



Problema 14.3.7 (2,5 puntos) En el punto $A(1, 0, -1)$ se encuentra un emisor láser que dispara un rayo de luz (unidimensional) apuntando hacia el punto $B(3, 1, 0)$. Dicho rayo incide en un punto

P del plano $\pi : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 2 + 2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Llamamos al punto P el punto de incidencia del rayo de luz sobre el plano π . Se pide:

- (1,25 puntos) Calcular una ecuación del plano de incidencia, es decir, el plano perpendicular a π que contiene al rayo de luz.
- (0,75 puntos) Calcular la distancia que recorre el rayo de luz desde el emisor hasta el punto P .
- (0,5 puntos) Calcular el ángulo que debería girar el emisor para que la distancia entre él y el nuevo punto de incidencia sobre π sea mínima.

Solución:

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 2 + 2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases} \implies \pi : \begin{cases} \vec{u} = (-1, 0, 1) \\ \vec{v} = (0, 2, -2) = 2(0, 1, -1) \\ A(2, 2, 0) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : x + y + z - 4 = 0 \implies \vec{u}_\pi = (1, 1, 1)$$

$$\text{a) } \pi' : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (1, 1, 1) \\ \vec{AB} = (3, 1, 0) - (1, 0, -1) = (2, 1, 1) \\ A(1, 0, -1) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi' : y - z - 1 = 0$$

$$\text{b) Sea } r \text{ la recta que define el rayo } r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{AB} = (2, 1, 1) \\ P_r = A(1, 0, -1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}.$$

Calculamos el punto P de corte de r con π :

$$(1 + 2\lambda) + \lambda + (-1 + \lambda) - 4 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P(3, 1, 0)$$

$$d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = |(3, 1, 0) - (1, 0, -1)| = |(2, 1, 1)| = \sqrt{6} u.$$

c) La distancia es mínima cuando el rayo incide verticalmente:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\pi}}) = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{|(2, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \implies \theta = 19^\circ 28' 16''$$

Problema 14.3.8 (2,5 puntos) En la sección de idiomas de una biblioteca municipal se tienen libros, en francés o inglés, de tres categorías: el 50 % son cuentos infantiles, el 30 %, novelas históricas y el resto, manuales técnicos. Uno de cada cinco de los cuentos está en francés y una de cada tres de las novelas, en inglés. Por otra parte, uno de cada siete de los libros en francés es un manual técnico. Se toma un libro al azar y se pide:

- a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté en francés si no es un manual técnico.
- b) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés, y la probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

Solución:

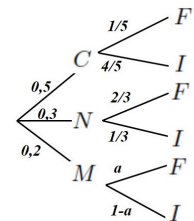
Sean C cuentos infantiles, N novelas históricas, M manuales técnicos, F en francés e I en inglés.

$$P(C) = 0,5; \quad P(N) = 0,3; \quad P(M) = 0,2; \quad P(F|C) = \frac{1}{5}; \quad P(I|N) = \frac{1}{3}; \quad P(M|F) = \frac{1}{7}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(F|\overline{M}) &= \frac{P(F \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{P(F \cap C) + P(F \cap N)}{P(C) + P(N)} = \\ &= \frac{P(F|C)P(C) + P(F|N)P(N)}{P(C) + P(N)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0,5 + \frac{2}{3} \cdot 0,3}{0,5 + 0,3} = \frac{3}{8} = 0,375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(F) &= P(F|C)P(C) + P(F|N)P(N) + P(F|M)P(M) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot 0,5 + \frac{2}{3} \cdot 0,3 + a \cdot 0,2 = 0,3 + 0,2a \\ P(M|F) &= \frac{P(F|M)P(M)}{P(F)} = \frac{a \cdot 0,2}{0,3 + 0,2a} = \frac{1}{7} \implies a = \frac{1}{4} = 0,25 \\ P(F) &= 0,3 + 0,2 \cdot 0,25 = 0,35 \end{aligned}$$

$$P(N|I) = \frac{P(I|N)P(N)}{P(I)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,3}{1 - 0,35} = 0,154$$



14.4. Extraordinaria

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.4.1 (2,5 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ ,
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de λ .
- (1 punto) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a) \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda - 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ y } \lambda = 2.$$

• Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^o \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ sistema compatible determinado. (Solución única)

• Si $\lambda = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema incompatible. (No tiene solución)

• Si $\lambda = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

b) Si $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\mu \\ y = 1 - \mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } x = 5 \Rightarrow \mu = -5 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -5 \end{cases}$$

Problema 14.4.2 (2,5 puntos)

- (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.
- (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1, 1)$.
- (0,5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

Solución:

- a) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c \implies f'(x) = 2ax + b \implies m = f'(0) = b = 1$ y $f(0) = c = 0 \implies f(x) = ax^2 + x, \forall a \in \mathbb{R}$ Si cogemos $a = 1 \implies f(x) = x^2 + x$
- b) Ahora $f(1) = 1 \implies a + b + c = 1$ y $f'(1) = 2a + b = 0 \implies b = -2a$ si cogemos $a = 1 \implies 1 - 2 + c = 1 \implies c = 2$ tenemos $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Hay que comprobar si es un máximo $f'(x) = 2x - 2 \implies f''(x) = 2 \implies f''(1) = 2 > 0 \implies x = 1$ es un mínimo, luego a tiene que ser negativa $a \in (-\infty, 0)$ por ejemplo $a = -1 \implies -1 + 2 + c = 1 \implies c = 0 \implies f(x) = -x^2 + 2x \implies f'(x) = -2x + 2 = 0 \implies x = 1$ y $f''(x) = -2 \implies f''(1) = -2 < 0 \implies (1, 1)$ es un máximo relativo. La función sería $f(x) = -x^2 + 2x$.
- c) No es posible, la derivada de una función polinómica de grado 2 es otra de grado 1 que al igualar a cero sólo tendría una solución y, por tanto, como mucho un extremo relativo.

Problema 14.4.3 (2,5 puntos) Sean los puntos $P(1, -1, 3)$ y $Q(2, 1, -1)$:

- a) (1 punto) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.
- b) (1,5 puntos) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

Solución:

- a) Se trata del plano mediador. Un punto de este plano $H(x, y, z)$ cumple: $d(P, H) = d(Q, H) \implies |\overrightarrow{PH}| = |\overrightarrow{QH}| \implies \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2} \implies$
- $$\pi : 2x + 4y - 8z + 5 = 0$$

- b) $r : x - 2 = y = z \implies \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies R(2 + \lambda, \lambda, \lambda)$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |(1, 2, -4)|^2 = 21$$

$$|\overrightarrow{PR}|^2 = |(1 + \lambda, \lambda + 1, \lambda - 3)|^2 = 2(1 + \lambda)^2 + (\lambda - 3)^2$$

$$|\overrightarrow{QR}|^2 = |(\lambda, \lambda - 1, \lambda + 1)|^2 = \lambda^2 + (\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2$$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 + |\overrightarrow{PR}|^2 + |\overrightarrow{QR}|^2 = 6\lambda^2 - 2\lambda + 34 = 34 \implies 2\lambda(3\lambda - 1) = 0 \implies \lambda = 0 \text{ y } \lambda = \frac{1}{3}.$$

Como ninguna de las coordenadas de R puede ser nula tenemos como única solución válida:

$$R\left(2 + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Problema 14.4.4 (2,5 puntos) En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2 , de igual probabilidad 0,4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0,2). De cierto suceso B se sabe que $P(B|A_1) = P(B|A_2)$ y $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$. Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C|A_2) = 0,3$ y $P(C|A_3) = 0,6$. Con estos datos se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0,25$.
- b) (1,5 puntos) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2 .

Solución:

- a) Tenemos que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ y además son incompatibles dos a dos. Por el teorema de la probabilidad total: $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$

Calculamos estas probabilidades:

$$P(B \cap A_1) = P(A_1)P(B|A_1) = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1$$

$$P(B \cap A_2) = P(A_2)P(B|A_2) = P(A_1)P(B|A_1) = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1$$

$$P(B \cap A_3) = P(A_3)P(B|A_3) = P(A_3) \cdot 2P(B|A_1) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$$

$$\text{Luego } P(B) = 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3$$

- b) Tenemos igualmente que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ y además son incompatible dos a dos. Por el teorema de la probabilidad total: $P(C) = P(C \cap A_1) + P(C \cap A_2) + P(C \cap A_3)$

Calculamos estas probabilidades:

$$P(C \cap A_1) = P(A_1)P(C) = 0,4P(C)$$

$$P(C \cap A_2) = P(A_2)P(C|A_2) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$$

$$P(C \cap A_3) = P(A_3)P(C|A_3) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12$$

$$\text{Luego } P(C) = 0,4P(C) + 0,12 + 0,12 \implies 0,6P(C) = 0,24 \implies P(C) = 0,4$$

$$P(C \cap A_2) = 0,12 \text{ y } P(C) \cdot P(A_2) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16 \implies P(C \cap A_2) \neq P(C) \cdot P(A_2) \implies C \text{ y } A_2 \text{ no son independientes.}$$

Opción B

Problema 14.4.5 (2,5 puntos) Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes

$$\det(A + B) = \det A + \det B$$

no es cierta en general.

- a) (0,75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $\det(A + B) = \det A + \det B$, pruebe que entonces

$$\det((A + B)^2) = \det(A^2) + \det(B^2) + 2\det(AB).$$

- b) (1 punto) Dadas las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(C + D) = \det C + \det D$.

- c) (0,75 puntos) Para el valor $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

Solución:

$$\text{a) } |(A + B)^2| = |A + B|^2 = (|A| + |B|)^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2|A||B| = |A|^2 + |B|^2 + 2|AB|$$

$$\text{b) } |C + D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha + 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha + 1 \end{vmatrix} = 4\alpha, \quad |C| = 2\alpha + 2 \text{ y } |D| = 2.$$

$$|C + D| = |C| + |D| \implies 4\alpha = 2\alpha + 2 + 2 \implies \alpha = 2$$

- c) Si $\alpha = -1$: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = 0$ y como se trata de un sistema homogéneo es un sistema compatible indeterminado:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Problema 14.4.6 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

- a) (0,75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
b) (1,75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x-3)$.

Solución:

- a) $f(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x) \Rightarrow f$ es IMPAR. Simétrica respecto al origen de coordenadas.
 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

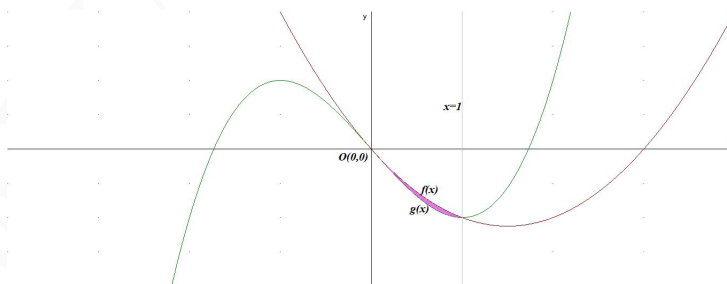
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y decreciente en el $(-1, 1)$. Presenta un máximo relativo en el punto $(-1, 2)$ y un mínimo relativo en el $(1, -2)$

- b) $f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x = x^2 - 3x \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 1$. El recinto de integración será $S_1 : [0, 1]$

$$S_1 = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (x^3 - x^2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{12}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{12} u^2$$

La integral sale negativa por estar la función $g(x)$ por encima de la $f(x)$.



Problema 14.4.7 (2,5 puntos) Dado el punto $P(5, -1, 2)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}, \quad s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.
- b) (1,5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, -1, 1) \\ P_r(2, -1, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, -1) \\ P_s(0, -5, 3) \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Tenemos $\overrightarrow{P_s P_r} = (2, 4, -3)$

$$a) \left[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s \right] = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(0, 4, 4)| = 4\sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{|\left[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s \right]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$

- b) Calculamos un plano $\pi \perp r$ tal que $P \in \pi$:

$$\pi : 3x - y + z + a = 0 \implies 15 + 1 + 2 + a = 0 \implies a = -18 \implies \pi : 3x - y + z - 18 = 0$$

Calculamos el punto de corte Q de r con π :

$$3(2 + 3\lambda) - (-1 - \lambda) + \lambda - 18 = 0 \implies \lambda = 1 \implies Q(5, -2, 1)$$

La recta buscada t pasa por P y Q :

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \overrightarrow{PQ} = (5, -2, 1) - (2, -1, 0) = (3, -1, 1) \\ P_t(2, -1, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 14.4.8 (2,5 puntos) Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el 25% de sus lanzamientos y Benito en el 30%, se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.
- b) (1,5 puntos) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

Solución:

- a) Sean A las dianas de Antonio y B las de Benito.

No es necesario llegar al cuarto lanzamiento si solo uno de los lanzadores ha acertado tres dianas en los tres primeros lanzamientos mientras el otro los ha fallado:

$$\begin{aligned}
P(AAABBB) &= 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,70 \cdot 0,70 \cdot 0,70 = 0,005359375 \\
P(AAABBB) &= 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,30 \cdot 0,30 \cdot 0,30 = 0,011390625 \\
P(AAABBB) + P(AAABBB) &= 0,005359375 + 0,011390625 = 0,01675
\end{aligned}$$

$$b) B(60; 0,75) \implies np = 60 \cdot 0,75 = 45 > 5, nq = 15 > 5 \implies$$

$$B(60; 0,75) \stackrel{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(45; 3,354)$$

$$\begin{aligned}
P\left(X \geq \frac{2 \cdot 60}{3}\right) &= P(X \geq 40) = P\left(Z \geq \frac{39,5 - 45}{3,354}\right) = P(Z \geq -1,64) = \\
P(Z \leq 1,64) &= 0,9495
\end{aligned}$$

14.5. Extraordinaria-Coincidente

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Opción A

Problema 14.5.1 (2,5 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro real a ,

$$\begin{cases} 2x - y + az = -a \\ x + 2y + 3z = -2 \\ ax + ay + 2z = -8 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función del parámetro a .

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para $a = -10$.

Solución:

$$a) \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & a & -a \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ a & a & 2 & -8 \end{array} \right) \implies |A| = -a^2 - 9a + 10 \implies a = -10, a = 1$$

☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{-10, 1\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ \text{ de incógnitas} \implies$ sistema compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a = 1$:

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -8 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -15 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 3F_2 \end{array} \right] = \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -66 \end{array} \right) &\implies \text{Sistema incompatible. (No tiene solución)}
\end{aligned}$$

Si $a = -10$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -10 & -10 & 2 & -8 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 + 5F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 0 & 5 & 16 & -14 \\ 0 & -15 & -48 & 42 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 0 & 5 & 16 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

(Infinitas soluciones)

b) Si $a = -10$:

$$\begin{cases} 2x - y - 10z = 10 \\ 5y + 16z = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{5} + \frac{17}{5}\lambda \\ y = -\frac{14}{5} - \frac{16}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 14.5.2 (2,5 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x < 1 \\ e + \frac{x \ln x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $x = 1$.

b) (0,75 puntos) Calcular: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) (0,75 puntos) Calcular: $\int_0^1 f(x) dx$

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} xe^x = e \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(e + \frac{x \ln x}{x^2 + 1} \right) = e \\ f(1) = e \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = e \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 1.$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} (x+1)e^x & \text{si } x < 1 \\ \frac{(\ln x + 1)(x^2 + 1) - 2x^2 \ln x}{(x^2 + 1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 2e \\ f'(1^+) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego $f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow f$ no es derivable en $x = 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e + \frac{x \ln x}{x^2 + 1} \right) = e + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} e + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} e + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2} = e$

$$\begin{aligned} \text{c) } F(x) &= \int x e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = (x-1)e^x \\ \int_0^1 f(x) dx &= F(1) - F(0) = 0 - (-1) = 1 \end{aligned}$$

Problema 14.5.3 (2,5 puntos) Los vértices de un triángulo son $A(-1, 0, 1)$, $B(0, 1, 0)$ y un punto C situado sobre la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = -1 \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos) Calcule las posibles coordenadas de C sabiendo que el área del triángulo es $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- b) (1 punto) Determine una ecuación de la recta que pasa por $P(2, 1, -1)$ y es paralela a la recta dada r .

Solución:

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = -1 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -1) \\ P_r(0, 0, -1) \end{cases}$$

- a) $C(\lambda, 2\lambda, -1 - \lambda)$ y tenemos: $\vec{AB} = (1, 1, -1)$, $\vec{AC} = (\lambda + 1, 2\lambda, -2 - \lambda)$

$$V = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lambda + 1 & 2\lambda & -2 - \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(2 - \lambda, -1, 1 - \lambda)| =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{(2 - \lambda)^2 + 1 + (1 - \lambda)^2} = \frac{\sqrt{2(\lambda^2 - 3\lambda + 3)}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 2$$

Si $\lambda = 1 \Rightarrow C(1, 2, -2)$ y si $\lambda = 2 \Rightarrow C(2, 4, -3)$

- b) $t \parallel r$ y $P \in t$:

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_r = (1, 2, -1) \\ P_t = P(2, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow t : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 14.5.4 (2,5 puntos) En un espacio muestral se consideran tres sucesos A , B y C , tales que, $P(A \cup B \cup C) = 1$. Sabiendo que los sucesos B y C son independientes y que $P(A) = 0,5$, $P(\bar{C}) = 0,3$, $P(B \cup C) = 0,73$, $P(A \cap C) = 0,21$ y $P(A \cap B \cap C) = 0,06$. se pide:

- a) (1 punto) Estudiar si los sucesos A y $B \cup C$ son independientes.
- b) (1,5 puntos) Calcular $P(B)$ y $P(C \cap (A \cup B))$.

Solución:

- a) $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \Rightarrow$
 $1 = 0,5 + 0,73 - P(A \cap (B \cup C)) \Rightarrow P(A \cap (B \cup C)) = 0,23$
 $P(A) \cdot P(B \cup C) = 0,5 \cdot 0,73 = 0,365$
 Luego $P(A \cap (B \cup C)) \neq P(A) \cdot P(B \cup C) \Rightarrow A$ y $B \cup C$ no son independientes.

b) $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = 0,7P(B)$
 $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = P(B) + 0,7 - 0,7P(B) = 0,73 \implies$
 $0,3P(B) = 0,03 \implies P(B) = 0,1$
 Ahora tenemos $P(B \cap C) = 0,1 \cdot 0,7 = 0,07$
 $P(C \cap (A \cup B)) = P((C \cap A) \cup (C \cap B)) = P(C \cap A) + P(C \cap B) - P(A \cap B \cap C) =$
 $0,21 + 0,07 - 0,06 = 0,22$

Opción B

Problema 14.5.5 (2,5 puntos) Halle un número natural de tres cifras del que se conoce que: sus cifras suman 13; si al número dado se le resta el doble del número que resulta de intercambiar las cifras de las centenas y de las unidades, el resultado es 437; además, la cifra de las decenas excede en una unidad a la media aritmética de las otras dos cifras.

Solución:

Sea x la cifra de las centenas, y la cifra de las decenas y z la de las unidades. El número según se lee es xyz que corresponde al $100x + 10y + z$.

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ 100x + 10y + z - 2(100z + 10y + x) = 437 \\ y - 1 = \frac{x + z}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 13 \\ 98x - 10y - 199z = 437 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

El número buscado es 751.

Solución del sistema por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 98 & -10 & -199 & 437 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 98F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & -15 \\ 0 & -108 & -297 & -837 \end{array} \right) \implies$$

$$\begin{cases} -3y = -15 \implies y = 5 \\ -540 - 297z = -837 \implies z = 1 \\ x + 5 + 1 = 13 \implies x = 7 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 14.5.6 (2,5 puntos)

- a) (0,5 puntos) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Escriba también un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas solo en los puntos $x = 1$ y $x = 0$.
- b) (1 punto) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 que tenga un máximo relativo en el punto $(0, 0)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$.
- c) (1 punto) Justifique si la gráfica de una función polinómica de grado 3 puede no cortar al eje de las abscisas.

Solución:

a) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \implies \begin{cases} f(0) = 0 \implies d = 0 \\ f(1) = 0 \implies a + b + c + d = 0 \\ f(2) = 0 \implies 8a + 4b + 2c + d = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b = -3a \\ c = 2a \\ d = 0 \end{cases}.$

Si cogemos $a = 1 \implies f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \implies \begin{cases} f(0) = 0 \implies d = 0 \\ f(1) = 0 \implies a + b + c + d = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = b - c \\ d = 0 \end{cases}.$

Si cogemos $b = 2$ y $c = 1 \implies a = 1 \implies f(x) = x^3 + 2x^2 + x$

$$\text{b) Ahora tenemos } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \implies \begin{cases} f(0) = 0 \implies d = 0 \\ f(1) = -1 \implies a + b + c + d = -1 \\ f'(0) = 0 \implies c = 0 \\ f'(1) = 0 \implies 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \implies f(x) = 2x^3 - 3x^2.$$

Hay que comprobar los extremos: $f'(x) = 6x^2 - 6x$ y $f''(x) = 12x - 6$.

$f''(0) = -6 < 0 \implies (0, 0)$ es un máximo relativo y $f''(1) = 6 > 0 \implies (1, -1)$ es un mínimo relativo.

La función es $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

c) Una función polinómica es siempre una función continua en $\mathbb{R}$ y además tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = a \cdot (-\infty) \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = a \cdot (+\infty).$$

Por el teorema de Bolzano $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $f(k) = 0$.

Luego una función polinómica de grado 3 siempre tendrá al menos un punto de corte con el eje de abscisas.

Problema 14.5.7 (2,5 puntos) Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$

a) (0,5 puntos) Calcule el ángulo que forma la recta r con el vector normal al plano $z = 0$.

b) (1,25 puntos) Sean π_1 y π_2 dos planos que se cortan en la recta r . Calcule unas ecuaciones de ambos planos sabiendo que π_1 pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y que π_2 no corta al eje OZ .

c) (0,75 puntos) Estudie la posición relativa de la recta r y la recta s de ecuación $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -1, -1) \\ P_r(2, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{a) } \pi : z = 0 \implies \vec{u}_\pi = (0, 0, 1)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_\pi|} = \frac{|(3, -1, -1) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \implies \alpha = 72^\circ 27' 6''$$

b) Un haz de planos que contenga a la recta r sería:

$$x + 2y + z - 2 + k(x + y + 2z - 2) = 0 \xrightarrow{P \in \pi_1} 1 + 4 + 3 - 2 + k(1 + 2 + 6 - 2) = 0 \implies k = -\frac{6}{7} \implies$$

$$\pi_1 : x + 2y + z - 2 - \frac{6}{7}(x + y + 2z - 2) = 0 \implies \pi_1 : x + 8y - 5z - 2 = 0$$

$x + 2y + z - 2 + k(x + y + 2z - 2) = 0$ se tienen que anular las $z \implies z = -2kz \implies k = -\frac{1}{2}$ y tenemos:

$$x + 2y + z - 2 - \frac{1}{2}(x + y + 2z - 2) = 0 \implies \pi_2 : x + 3y - 2 = 0$$

$$r : \begin{cases} \pi_1 : x + 8y - 5z - 2 = 0 \\ \pi_2 : x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$c) \ s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -2, 3) \\ P_s(-2, 1, 1) \end{cases} \implies \overrightarrow{P_s P_r} = (2, 0, 0) - (-2, 1, 1) = (4, -1, -1)$$

$$[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

Problema 14.5.8 (2,5 puntos) Entre los procesadores que utiliza cierta marca de ordenadores portátiles para un modelo, un 30 % son de una nueva tecnología que promete una mayor efectividad. Se utilizan todos los procesadores, se empaquetan los ordenadores fabricados en palés de 10 portátiles y se envían 20 palés a cada una de sus tiendas. Se pide:

- (1,5 puntos) Determinar la distribución, la media y la desviación típica de la variable “número de portátiles con los procesadores de la nueva tecnología en un palé” Calcular la probabilidad de que en un palé haya exactamente dos portátiles con la nueva tecnología.
- (1 punto) Calcular, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 75 % de los portátiles recibidos en una tienda no lleven los procesadores de la nueva tecnología.

Solución:

$$a) \ B(10; 0,3), \mu = np = 3, \sigma = \sqrt{npq} = 1,449 \text{ y } P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^8 = 0,2335$$

$$b) \ n = 200, p = 0,7 \text{ y } q = 0,3 \implies B(200; 0,7). \text{ Como } n > 30, np = 140 > 5 \text{ y } \\ nq = 60 > 5 \implies B(200; 0,7) \overset{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(140; 6,481)$$

$$P(X \geq (0,75 \cdot 200)) = P(X \geq 150) = P\left(Z \geq \frac{149,5 - 140}{6,481}\right) =$$

$$P(Z \geq 1,47) = 1 - P(Z \leq 1,47) = 1 - 0,9292 = 0,0708$$

“www.musat.net”

Capítulo 15

Murcia

15.1. Ordinaria

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Problema 15.1.1 (2,5 puntos) En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10000 puntos. El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.

En la siguiente tabla se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías:

Grand Slam = 2000 puntos	Masters 1000 = 1000 puntos	ATP 500 = 500 puntos
--------------------------	----------------------------	----------------------

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

Solución:

Sean x los Grand Slam ganados, y los Masters 1000 y z los ATP 500.

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2000x + 1000y + 500z = 10000 \\ z - 1 = \frac{x + y}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 4x + 2y + z = 20 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 \text{ Grand Slam} \\ y = 4 \text{ Masters 1000} \\ z = 4 \text{ ATP 500} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array} \right) \implies \begin{cases} -3z = -12 \implies z = 4 \\ -2y - 12 = -20 \implies y = 4 \\ x + 4 + 4 = 10 \implies x = 2 \end{cases}$$

Problema 15.1.2 (2,5 puntos) Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y -1's y cumple que $A \cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

- a) (1 punto) Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- b) (0,75 puntos) Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.
- c) (0,75 puntos) Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t .

Solución:

- a) Las dos matrices están formadas por unos y menos unos, habrá que comprobar si cumplen la segunda condición:

$$\bullet A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I \Rightarrow \text{es una matriz de Hadamard.}$$

$$\bullet A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \neq 2I \Rightarrow \text{no es una matriz de Hadamard.}$$

- b) $|A \cdot A^t| = |A||A^t| = |A||A| = |A|^2 = |2I| = 4 \Rightarrow |A| = \pm 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$
 $A \cdot A^t = 2I \Rightarrow \frac{1}{2}A \cdot A^t = I \Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{2}A^t\right) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}A^t$

Problema 15.1.3 (2,5 puntos) Calcule los siguientes límites:

- a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2}$
- b) (0,75 puntos) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x-9})$
- c) (0,75 puntos) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Solución:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin 3x + 2 \sin 2x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \cos 3x + 4 \cos 2x}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x-9}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+9} - \sqrt{x-9})(\sqrt{x+9} + \sqrt{x-9})}{\sqrt{x+9} + \sqrt{x-9}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18}{\sqrt{x+9} + \sqrt{x-9}} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Problema 15.1.4 (2,5 puntos)

- a) (1,5 puntos) Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 \sin x \, dx$

- b) (1 punto) Determine el área del recinto limitado por el eje OX , las rectas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \sin x$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int x^2 \sin x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx \\ dv = \int \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x \\ \int u \, dv = uv - \int v \, du \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \int \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x \\ \int u \, dv = uv - \int v \, du \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x \, dx \right] = \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C = \\ &= (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C \end{aligned}$$

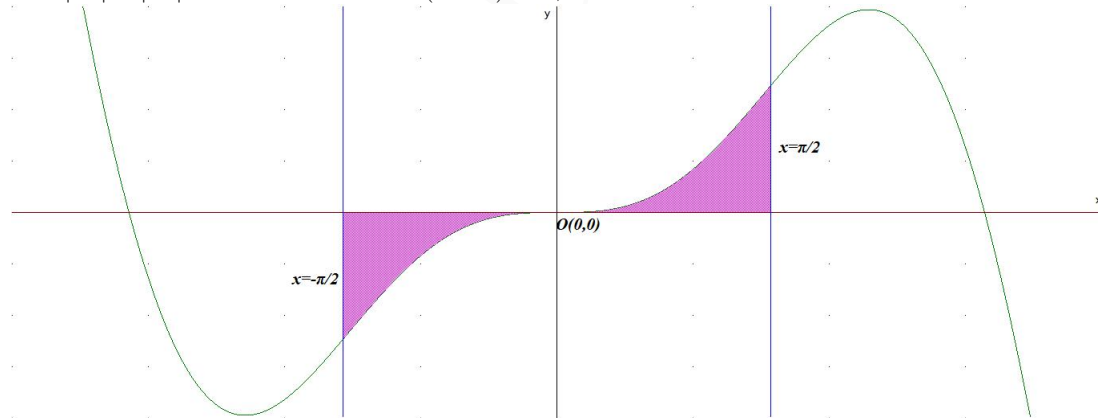
- b) Buscamos posible punto de corte de $f(x)$ con OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$x^2 \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{hay dos recintos de integración } S_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \text{ y } S_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$S_1 = \int_{-\pi/2}^0 f(x) \, dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \Big|_{-\pi/2}^0 = 2 - \pi$$

$$S_2 = \int_0^{\pi/2} f(x) \, dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \pi - 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \pi - 2 + \pi - 2 = 2(\pi - 2) \simeq 2,2832 \, u^2$$



Problema 15.1.5 (2,5 puntos) Considere el plano π de ecuación $x + y + z = -1$ y la recta r dada por $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}$.

- a) (1 punto) Compruebe que el plano π y la recta r son paralelos.
b) (0,5 punto) Calcule la distancia de la recta r al plano π .
c) (1 punto) Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

Solución:

$$\text{a) } r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 0) \\ P_r(0, 1, 0) \end{cases}$$

Sustituimos r en π :

$$\lambda + (1 - \lambda) + 0 = -1 \Rightarrow 1 = -1 \Rightarrow r \parallel \pi$$

$$\text{b) } d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|0 + 1 + 0 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} u$$

$$\text{c) } \pi' : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (1, 1, 1) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 0) \\ P_r(0, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x + y - 2z - 1 = 0$$

Problema 15.1.6 (2,5 puntos) Considere las siguientes rectas:

$$r : \begin{cases} x + 2y = 13 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} y + 2z = 4 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Compruebe que ambas rectas se cruzan en el espacio.
- b) (0,5 puntos) Compruebe que el punto $P(0, 3, 0)$ no está en ninguna de las dos rectas.
- c) (1 punto) Calcule la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) que contiene al punto P y es paralelo a ambas rectas.

Solución:

$$r : \begin{cases} x + 2y = 13 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 13 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 1, 0) \\ P_r(13, 0, 2) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} y + 2z = 4 \\ -x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, -2, 1) \\ P_s(1, 4, 0) \end{cases}$$

$$\text{a) } \overrightarrow{P_s P_r} = (13, 0, 2) - (1, 4, 0) = (12, -4, 2)$$

$$[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 12 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) Sustituyendo $P(0, 3, 0)$ en r :

$$\begin{cases} 0 + 6 \neq 13 \\ 0 \neq 2 \end{cases} \Rightarrow P \notin r.$$

Sustituyendo $P(0, 3, 0)$ en s :

$$\begin{cases} 3 + 0 \neq 4 \\ 0 + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow P \notin s.$$

$$\text{c) } \pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 1, 0) \\ \vec{u}_s = (-2, -2, 1) \\ P(0, 3, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x & y-3 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = x + 2y + 6z - 6 = 0$$

Problema 15.1.7 (2,5 puntos) El juego de los dados de Efron tiene 4 dados diferentes. Todos ellos son dados perfectos de 6 caras equiprobables, pero la numeración de sus 6 caras es diferente en cada uno, según se detalla en la siguiente tabla:

Dado A	0	0	4	4	4	4
Dado B	3	3	3	3	3	3
Dado C	2	2	2	2	6	6
Dado D	1	1	1	5	5	5

Ana elige el dado A , Bea elige el dado B , Ceci elige el dado C y Delia elige el dado D . El juego consiste en que cada jugador lanza su dado, gana aquel que saque la mayor puntuación y pierde aquel que saque la menor puntuación. Pueden jugar uno contra uno o todos contra todos. Calcule:

- (0,5 puntos) Si Ana juega contra Bea, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ana?
- (0,75 puntos) Si Ana juega contra Bea 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces?
- (0,5 puntos) Si Ana juega contra Ceci, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ceci?
- (0,75 puntos) Si juegan todos contra todos, ¿cuál es la probabilidad de que Ana ni gane ni pierda?

Solución:

$$a) P(\text{gana Ana}) = P(\text{Ana saca 4}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,6667$$

$$b) P(\text{gana Bea}) = 1 - P(\text{gana Ana}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow B\left(8, \frac{1}{3}\right)$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$$

$$1 - \left[\binom{8}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{8}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \binom{8}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \right] = 0,5318$$

$$c) P(\text{Ceci gana a Ana}) = P(\text{Ceci saca 2 y Ana saca 0}) + P(\text{Ceci saca 6}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{9} = 0,5556$$

d) Los sucesos serían:

- $X \equiv$ Ana saca un 4, Ceci saca un 6 y Delia saca un 1
- $Y \equiv$ Ana saca un 4, Ceci saca un 6 y Delia saca un 5
- $Z \equiv$ Ana saca un 4, Ceci saca un 2 y Delia saca un 5

$$P(\text{Ana no gana ni pierde}) = P(X) + P(Y) + P(Z) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{9} = 0,4444$$

Problema 15.1.8 (2,5 puntos) Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 6,68 % de estos estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87 % tiene un CI menor que 102,5.

- (0,5 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115?

- b) (1 punto) Si se eligen al azar 6 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115?
- c) (1 punto) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

Solución:

$$N(\mu, \sigma)$$

- a) $P(102,5 \leq X \leq 115) = P(X \leq 115) - P(X \leq 102,5) = (1 - P(X \geq 115)) - P(X \leq 102,5) = (1 - 0,0668) - 0,5987 = 0,3345$
- b) $p = P(X \leq 115) = 1 - 0,0668 = 0,9332 \Rightarrow B(6; 0,9332)$
 $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{6}{5} 0,9332^5 \cdot 0,0668^1 + \binom{6}{6} 0,9332^6 \cdot 0,0668^0 = 0,9441$
- c) $P(X \geq 115) = 0,0668 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{115 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{115 - \mu}{\sigma}\right) = 0,0668 \Rightarrow$
 $P\left(Z \leq \frac{115 - \mu}{\sigma}\right) = 0,9332 \Rightarrow \frac{115 - \mu}{\sigma} = 1,5 \Rightarrow \mu + 1,5\sigma = 115$
 $P(X \leq 102,5) = 0,5987 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{102,5 - \mu}{\sigma}\right) = 0,5987 \Rightarrow \frac{102,5 - \mu}{\sigma} = 0,25 \Rightarrow$
 $\mu + 0,25\sigma = 102,5$

$$\begin{cases} \mu + 1,5\sigma = 115 \\ \mu + 0,25\sigma = 102,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 100 \\ \sigma = 10 \end{cases}$$

15.2. Extraordinaria

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Problema 15.2.1 (2,5 puntos) Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube. Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares.

Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.

Solución:

Sea x el número de seguidores en Instagram (en millones), y en X y z en YouTube.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 435 \\ x + \frac{z}{2} = 2(y + z) \\ 10x + 20y + 30z = 6500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 435 \\ 2x - 4y - 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 650 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 280 \\ y = 95 \\ z = 60 \end{cases}$$

b) Resolvemos por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 435 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 650 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 435 \\ 0 & -6 & -5 & -870 \\ 0 & 1 & 2 & 215 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 6F_3 + F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 435 \\ 0 & -6 & -5 & -870 \\ 0 & 0 & 7 & 420 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 7z = 420 \Rightarrow z = 60 \\ -6y - 300 = -870 \Rightarrow y = 95 \\ x + 95 + 60 = 435 \Rightarrow x = 280 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 280 \\ y = 95 \\ z = 60 \end{cases}$$

Taylor Swift tiene 280 millones de seguidores en Instagram, 95 millones en X y 60 millones en YouTube.

Problema 15.2.2 (2,5 puntos) Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A \cdot A^t = I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) (1 punto) Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

b) (0,75 puntos) Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) (0,75 puntos) Justifique que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A \cdot B$ también lo es.

Solución:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{la matriz es ortogonal.}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{la matriz no es ortogonal.}$$

b) Sea A una matriz regular de orden 2, tenemos:

$$|A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = |I| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

$$\text{c) } C \cdot C^t = A \cdot B \cdot (A \cdot B)^t = A \cdot B \cdot B^t \cdot A^t = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I$$

Problema 15.2.3 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 3}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) (0,5 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) (1,5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$ y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

c) (0,5 puntos) Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

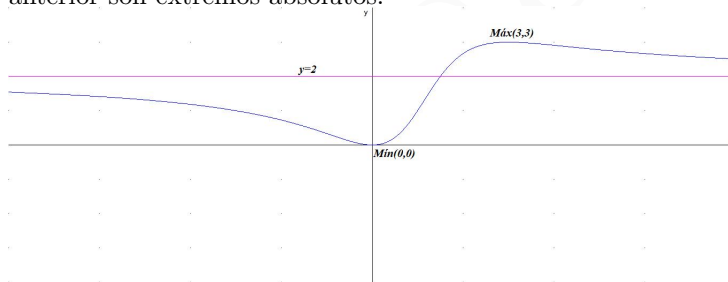
b) El denominador no se anula nunca y $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -\frac{4x(x-3)}{(x^2-2x+3)^2} = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = 3$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ y creciente en el $(0, 3)$. Tiene un máximo relativo en $(3, 3)$ y un mínimo relativo en el $(0, 0)$.

c) Por el apartado a) hay una asíntota horizontal en $y = 2$ que está por encima del mínimo y por debajo del máximo, como no puede haber otros extremos los calculados en el apartado anterior son extremos absolutos.



Problema 15.2.4 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, definida para todo valor $x > 0$.

a) (0,5 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) (1,5 puntos) Calcule la integral indefinida $\int f(x) dx$.

c) (0,5 puntos) Determine el valor de $a > 0$ para el cual se cumple que $\int_1^a f(x) dx = 4$

Solución:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } F(x) &= \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^{-1/2} dx \implies v = 2x^{1/2} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int \frac{x^{1/2}}{x} dx = \\ &= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_1^a f(x) dx &= F(a) - F(1) = 2\sqrt{a}(\ln a - 2) + 4 = 4 \implies 2\sqrt{a}(\ln a - 2) = 0 \implies \\ &\begin{cases} 2\sqrt{a} = 0 \implies a = 0 \text{ (no válida)} & a > 0 \\ \ln a - 2 = 0 \implies \ln a = 2 \implies a = e^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 15.2.5 (2,5 puntos) Considere los planos $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$ y los puntos $P(1, 2, 3)$ y $Q(1, 1, 3)$.

- (0,75 puntos) Compruebe que ambos planos se cortan en una recta r y calcule la ecuación continua de dicha recta.
- (1 punto) Compruebe que el punto P no está en ninguno de los dos planos y calcule la ecuación de la recta que pasa por P y no corta a ninguno de los dos planos.
- (0,75 puntos) Determine el punto de la recta r que equidista de P y de Q .

Solución:

$$\text{a) } \pi : x - y + z = 0 \text{ y } \pi' : x + y - z = 2 \text{ como } \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \implies \pi \text{ y } \pi' \text{ se cortan.}$$

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases} \implies$$

$$r : \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

- Comprobamos si $P \in \pi \implies 1 - 2 + 3 = 2 \neq 0 \implies P \notin \pi$
Comprobamos si $P \in \pi' \implies 1 + 2 - 3 = 0 \neq 2 \implies P \notin \pi'$
Calculamos la recta $s \parallel r$ tal que $P \in s$:

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ P_s = P(1, 2, 3) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Un punto de r sería $P_r(1, 1 + \lambda, \lambda)$ y se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{PP_r}| = |\overrightarrow{QP_r}| \implies |(0, -1 + \lambda, -3 + \lambda)| = |(0, \lambda, -3 + \lambda)| \implies \sqrt{0 + (\lambda - 1)^2 + (\lambda - 3)^2} = \sqrt{0 + \lambda^2 + (\lambda - 3)^2} \implies \sqrt{2\lambda^2 - 8\lambda + 10} = \sqrt{2\lambda^2 - 6\lambda + 9} \implies$$

$$(\lambda - 1)^2 = \lambda^2 \implies 1 - 2\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{1}{2} \implies P_r\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Problema 15.2.6 (2,5 puntos) Considere los planos $x + y + z = -3$ y $x + y - z = 3$ y la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$$

- (0,75 puntos) Compruebe que ambos planos se cortan y calcule el ángulo que forman.
- (0,75 puntos) Estudie la posición relativa de la recta r con el plano $x + y - z = 3$.
- (1 punto) Determine los puntos de la recta r que equidistan de ambos planos.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 3) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\pi : x + y + z = -3 \implies \vec{u}_\pi = (1, 1, 1) \text{ y } \pi' : x + y - z = 3 \implies \vec{u}_{\pi'} = (1, 1, -1)$$

- a) Comparando los coeficientes de π y π' : $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow \pi$ y π' se cortan en una recta.

Sea α el ángulo que forman:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_{\pi'}|}{|\vec{u}_\pi| |\vec{u}_{\pi'}|} = \frac{|(1, 1, 1) \cdot (1, 1, -1)|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 70^\circ 31' 44''$$

- b) Sustituimos r en $\pi' \Rightarrow (1 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) - 3\lambda = 3 \Rightarrow 0 = 3! \Rightarrow r \parallel \pi'$
- c) Sea $P_r(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$ y tenemos $d(P_r, \pi) = d(P_r, \pi') \Rightarrow$
- $$\begin{cases} d(P_r, \pi) = \frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 3|}{\sqrt{3}} = \frac{|6\lambda + 3|}{\sqrt{3}} \\ d(P_r, \pi') = \frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda - 3\lambda - 3|}{\sqrt{3}} = \frac{|-2\lambda - 3|}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow$$
- $$\frac{|6\lambda + 3|}{\sqrt{3}} = \frac{|-2\lambda - 3|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |2\lambda + 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 1 = 1 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow P_r(1, -1, 0) \\ 2\lambda + 1 = -1 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P_r(-1, -2, -3) \end{cases}$$

Problema 15.2.7 (2,5 puntos) El 60 % de los habitantes de una población consume pan integral, el 40 % consume pan blanco y el 20 % consume ambos tipos de pan.

- a) (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “consumir pan integral” y “consumir pan blanco”?
- b) (0,5 puntos) Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?
- c) (0,75 puntos) Calcule el porcentaje de la población que no consume ninguno de los dos tipos de pan.
- d) (0,75 puntos) Sabiendo que un habitante no consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

Solución:

Sean I consume pan integral y B consume pan blanco.

Tenemos $P(I) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ y $P(I \cap B) = 0,2$

- a) $P(I) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24 \neq P(I \cap B) = 0,2 \Rightarrow I$ y B no son independientes.
- b) $P(B|I) = \frac{P(I \cap B)}{P(I)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3} = 0,3333$
- c) $P(\bar{I} \cap \bar{B}) = P(\overline{I \cup B}) = 1 - P(I \cup B) = 1 - (P(I) + P(B) - P(I \cap B)) = 1 - (0,6 + 0,4 - 0,2) = 0,2 \Rightarrow 20\%$
- d) $P(B|\bar{I}) = \frac{P(B \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{P(B) - P(I \cap B)}{1 - P(I)} = \frac{0,4 - 0,2}{1 - 0,6} = \frac{1}{2} = 0,5$

Problema 15.2.8 (2,5 puntos) Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. Una fábrica de componentes de ordenador produce 2500 microprocesadores al día. Sabiendo que el porcentaje de microprocesadores defectuosos fabricados es del 2 %, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

- a) (0,5 puntos) ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de microprocesadores defectuosos fabricados al día?

- b) (0,5 puntos) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
- c) (0,75 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57?
- d) (0,75 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50?

Solución:

- a) Se trata de una binomial $B(2500; 0,02)$. En cursos futuros se verá que cuando n se hace muy grande y la probabilidad es muy pequeña la distribución adecuada sería la de Poisson.
- b) $\mu = np = 50$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0,02 \cdot 0,98} = 7$
- c) Como $n = 2500 > 50$, $np = 50 > 5$ y $nq = 2450 > 5 \implies B(2500; 0,02) \stackrel{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(50, 7)$

$$P(X \leq 57) = P\left(Z \leq \frac{57,5 - 50}{7}\right) = P(Z \leq 1,07) = 0,8577$$
- d)
$$P(X = 50) = P\left(\frac{49,5 - 50}{7} \leq Z \leq \frac{50,5 - 50}{7}\right) = P(-0,07 \leq Z \leq 0,07) =$$

$$P(Z \leq 0,07) - P(Z \leq -0,07) = P(Z \leq 0,07) - (1 - P(Z \leq 0,07)) =$$

$$2P(Z \leq 0,07) - 1 = 2 \cdot 0,5279 - 1 = 0,0558$$

“www.musat.net”

Capítulo 16

Navarra

16.1. Ordinaria

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

Problema 16.1.1 (2,5 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (2-a)x - ay + 2z = -4 \\ (a-2)x + (a+1)y = 5 \\ y + (a^2-a)z = 3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2-a & -a & 2 & -4 \\ a-2 & a+1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{array} \right), |A| = -(a-2)(a^2-a-2) = 0 \implies a = 2 \text{ y } a = -1.$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -a & 2 \\ 5 & a+1 & 0 \\ 3-a & 1 & a^2-a \end{vmatrix}}{|A|} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2-a & -4 & 2 \\ a-2 & 5 & 0 \\ 0 & 3-a & a^2-a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a+3}{a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2-a & -a & -4 \\ a-2 & a+1 & 5 \\ 0 & 1 & 3-a \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{1}{a+1}$$

☛ Si $a = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

☛ Si $a = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + 3F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} -2y + 2z = -4 \\ 6z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{5}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 16.1.2 (2,5 puntos) Halla el rango de la matriz M según el valor de m , siendo

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|M_1| = \begin{vmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 + 5m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ y } m = 4$$

Si $m \in \mathbb{R} - \{1, 4\} \Rightarrow |M_1| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 3$.

Si $m = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_1| = |M_2| = |M_3| = |M_4| = 0 \text{ y el menor } \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$$

$\text{Rango}(M) = 2$

Si $m = 4$:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_1| = 0 \text{ y } |M_2| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 3.$$

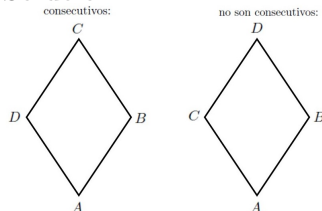
En conclusión: Si $m \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \text{Rango}(M) = 3$ y si $m = 1 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 2$.

Problema 16.1.3 (2,5 puntos) Los puntos $A(4, -2, -3)$, $B(2, -1, 1)$ y $C(0, -3, -1)$ son vértices de un rombo.

a) (1,75 puntos) Encuentra el cuarto vértice del rombo.

b) (0,75 puntos) Calcula el área del rombo.

Solución:



a) Hay dos casos posibles según la figura adjunta:

☛ Si los vértices son consecutivos se tiene que cumplir $|\vec{AC}| > |\vec{AB}|$ y $|\vec{AC}| > |\vec{BC}|$:
Tenemos $|\vec{AC}| = |(-4, -1, 2)| = \sqrt{21}$ y $|\vec{AB}| = |(-2, 1, 4)| = \sqrt{21}$ que no cumplen la desigualdad $|\vec{AC}| > |\vec{AB}|$, luego los puntos no pueden ser consecutivos.

☛ Los vértices no son consecutivos: $D = B + \vec{BD} = B + \vec{AC} = (2, -1, 1) + (-4, -1, 2) = (-2, -2, 3)$

b) $\vec{AB} = (-2, 1, 4)$ y $\vec{AC} = (-4, -1, 2)$

$$S = |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right| = |6(1, -2, 1)| = 6\sqrt{6} u^2$$

Problema 16.1.4 (2,5 puntos) Queremos construir un tetraedro de volumen $3 u^3$, siendo tres de los vértices los puntos de corte del plano $\pi : 2x - y - 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.

a) (1,5 puntos) A que distancia de π tiene que estar el cuarto vértice del tetraedro?

b) (1 punto) Encuentra dos puntos que sirvan como cuarto vértice de tetraedros con la base dada y el volumen señalado.

Solución:

a) Calculamos los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas:

☛ Con OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \implies 2x - 2 = 0 \implies A(1, 0, 0)$

☛ Con OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \implies -y - 2 = 0 \implies B(0, -2, 0)$

☛ Con OZ hacemos $x = 0$ y $y = 0 \implies -2z - 2 = 0 \implies C(0, 0, -1)$

Tenemos los vectores $\vec{AB} = (-1, -2, 0)$ y $\vec{AC} = (-1, 0, -1)$ y el área del triángulo formado por estos tres puntos es:

$$S_t = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-2, -1, 2)| = \frac{3}{2} u^2$$

$$V_T = \frac{S_t \cdot h}{3} \implies 3 = \frac{\frac{3}{2} \cdot h}{3} \implies h = 6 u$$

La distancia al plano π es la altura h del tetraedro.

- b) Calculamos un plano $\pi' \parallel \pi$ tal que $d(\pi', \pi) = d(A, \pi') = 6$. El plano π' tiene de ecuación $\pi' : 2x - y - 2z + \lambda = 0$ y tenemos: $d(A, \pi') = \frac{|2 - 0 - 0 + \lambda|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|2 + \lambda|}{3} = 6 \Rightarrow$
 $|2 + \lambda| = 18 \Rightarrow \begin{cases} 2 + \lambda = 18 \Rightarrow \lambda = 16 \Rightarrow \pi' = 2x - y - 2z + 16 = 0 \\ 2 + \lambda = -18 \Rightarrow \lambda = -20 \Rightarrow \pi' = 2x - y - 2z - 20 = 0 \end{cases}$
 Cualquier punto de estos planos cumple las condiciones planteadas. Como hay que elegir tomo el plano $\pi' = 2x - y - 2z + 16 = 0$ y de él los puntos $P_1(0, 0, 8)$ y $P_2(0, 16, 0)$

Problema 16.1.5 (2,5 puntos) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

- a) (1,25 puntos) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x}$
 b) (1,25 puntos) $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$

Solución:

- a) $\ln f(x) = \cos x \ln \frac{1}{x} = \cos x (\ln 1 - \ln x) = -\cos x \ln x \Rightarrow$
 $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sin x \ln x - \frac{\cos x}{x} \Rightarrow f'(x) = f(x) \left(\sin x \ln x - \frac{\cos x}{x} \right) \Rightarrow$
 $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x} \left(\sin x \ln x - \frac{\cos x}{x} \right)$
 b) $g'(x) = \frac{(2x + 4)(x + 2)^2 - (x^2 + 4x + 1)2(x + 2)}{(x + 2)^4} = \frac{(2x + 4)(x + 2) - (x^2 + 4x + 1)2}{(x + 2)^3} =$
 $\frac{2x^2 + 4x + 4x + 8 - 2x^2 - 8x - 2}{(x + 2)^3} = \frac{6}{(x + 2)^3}$

Problema 16.1.6 (2,5 puntos) Halla los máximos y mínimos (relativos y absolutos), los puntos de inflexión y las asíntotas de la función $f(x) = e^{-x^2}$. Representa, de manera aproximada, la gráfica de f .

Solución:

$$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

- ☛ Monotonía: $f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el $(0, \infty)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(0, 1)$, que también es absoluto.

- ☛ Curvatura: $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	cóncava ∪	convexa ∩	cóncava ∪

La función es cóncava $\cup$ en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ y convexa $\cap$ en el $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ con dos puntos de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$

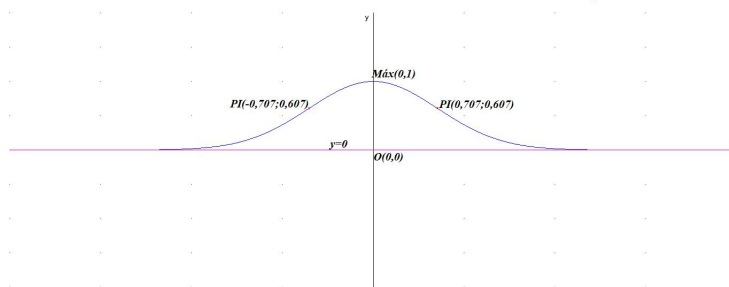
☛ Asíntotas:

- Verticales: no hay

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

- Oblicuas no hay por haber horizontales.



☛ Representación gráfica:

Problema 16.1.7 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = x^2 + e^{\frac{x}{4}}$.

a) (1,25 puntos) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, 4]$.

b) (1,25 puntos) Comprueba que existen dos valores reales α y β tales que $f(\alpha) = 2 = f(\beta)$.
Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

a) La función es composición de funciones continuas y, por tanto, continua en $\mathbb{R}$.

b) Utilizaremos el teorema de Bolzano:

Sea f una función continua en intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, si se cumple $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Consideramos la función $g(x) = f(x) - 2 = x^2 + e^{\frac{x}{4}} - 2$ función continua en el intervalo $[-2, 0]$ y se cumple $g(-2) \cdot g(0) = (2 + e^{1/2}) \cdot (-1) = -(2 + e^{1/2}) < 0 \implies \exists \alpha \in (-2, 0)$ tal que $g(\alpha) = f(\alpha) - 2 = 0 \implies f(\alpha) = 2$

Consideramos la misma función $g(x) = f(x) - 2 = x^2 + e^{\frac{x}{4}} - 2$ función continua en el intervalo $[0, 4]$ y se cumple $g(0) \cdot g(4) = (-1) \cdot (e + 14) \cdot (-1) = -(e + 14) < 0 \implies \exists \beta \in (0, 4)$ tal que $g(\beta) = f(\beta) - 2 = 0 \implies f(\beta) = 2$

Luego existen dos valores reales α y β tales que $f(\alpha) = 2 = f(\beta)$ en el intervalo $[-2, 4]$.

Problema 16.1.8 (2,5 puntos) Calcula los puntos del plano en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \frac{9}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 10x - x^3$$

Tomando los dos puntos de corte con $x > 0$, calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas en el semiplano de abscisa positiva.

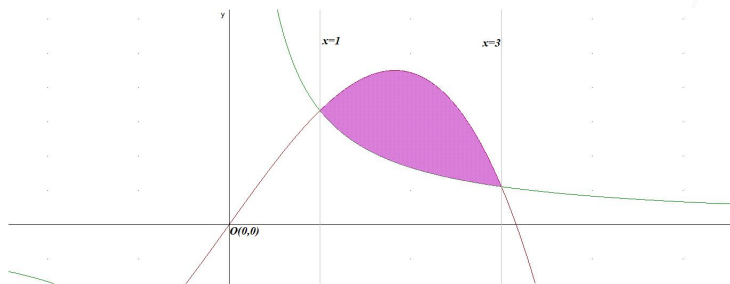
Solución:

$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{9}{x} = 10x - x^3 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ y $x = \pm 3$. Como $x > 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = 3$ tendríamos el intervalo de integración $S_1 : [1, 3]$

$$S_1 = \int_1^3 \left(\frac{9}{x} - 10x + x^3 \right) dx = 9 \ln |x| - 5x^2 + \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = 9 \ln 3 - 20$$

$$S = |S_1| = 20 - 9 \ln 3 \simeq 10,1125 \text{ u}^2$$

El resultado de la integral es negativo por estar f por debajo de g .



16.2. Extraordinaria

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

Problema 16.2.1 (2,5 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 + a)z = 0 \\ x + (2a - 1)y + (a + 1)z = a \\ (2a - 1)y + (a + 1)z = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a^2 + a & 0 \\ 1 & 2a - 1 & a + 1 & a \\ 0 & 2a - 1 & a + 1 & 0 \end{array} \right), |A| = 2a^3 + a^2 - a = a(a + 1)(2a - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$a = 0, a = -1 \text{ y } a = \frac{1}{2}.$$

• Si $a \in \mathbb{R} - \left\{ 0, -1, \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & a^2 + a \\ a & 2a - 1 & a + 1 \\ 0 & 2a - 1 & a + 1 \end{vmatrix}}{|A|} = a$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2 + a \\ 1 & a & a + 1 \\ 0 & 0 & a + 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{2a - 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a - 1 & a \\ 0 & 2a - 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{1}{a + 1}$$

☛ Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Tiene un grado de libertad:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

☛ Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

☛ Si $a = \frac{1}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 16.2.2 (2,5 puntos) Sean A , P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $Q \cdot A \cdot P = I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) (1,5 puntos) Demuestra que $A \cdot P \cdot Q \cdot A = Q^{-1} \cdot P^{-1}$

b) (1 punto) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{a) } Q \cdot A \cdot P = I \implies \begin{cases} A \cdot P = Q^{-1} \\ Q \cdot A = P^{-1} \end{cases} \implies A \cdot P \cdot Q \cdot A = Q^{-1} \cdot P^{-1}$$

$$\text{b) } Q \cdot A \cdot P = I \implies A = Q^{-1} \cdot P^{-1} = (P \cdot Q)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 16.2.3 (2,5 puntos) Se consideran el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 5 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ -x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$ y los puntos $A(3, 2, -1)$ y $B(1, 1, -1)$. Sea C la intersección entre la recta y el plano.

a) (1,25 puntos) Demuestra que los puntos A , B y C no están alineados.

b) (1,25 puntos) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos.

Solución:

$$r : \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ -x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -3 - 2\lambda \\ y = 7 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 3, 1) \\ P_r(-3, 7, 0) \end{cases}$$

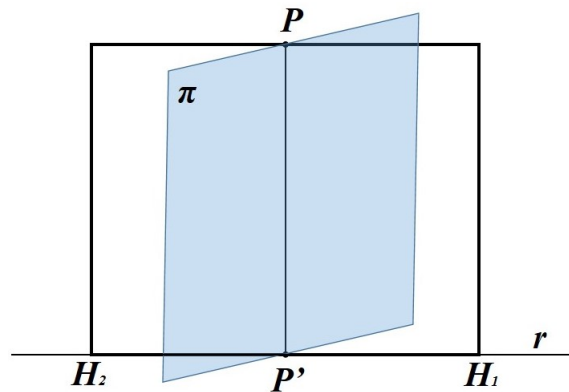
$$\text{Sustituyendo } r \text{ en } \pi \implies 2(-3 - 2\lambda) + (7 + 3\lambda) - \lambda - 5 = 0 \implies \lambda = -2 \implies C(1, 1, -2)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{AB} &= (1, 1, -1) - (3, 2, -1) = (-2, -1, 0) \\ \vec{AC} &= (1, 1, -2) - (3, 2, -1) = (-2, -1, -1) \\ A, B \text{ y } C &\text{ están alineados si } \exists k \neq 0 \text{ que cumpla: } \vec{AB} = k\vec{AC} \implies (-2, -1, 0) = k(-2, -1, -1) \implies \\ &\begin{cases} -2 = -2k \implies k = 1 \\ -1 = -k \implies k = 1 \\ 0 = -k \implies k = 0 \end{cases} \implies \nexists k \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tal que } \vec{AB} = k\vec{AC} \implies \\ &A, B \text{ y } C \text{ no están alineados.} \end{aligned}$$

$$\text{b) } S_t = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(1, -2, 0)| = \frac{\sqrt{5}}{2} u^2$$

Problema 16.2.4 (2,5 puntos) El punto $P(4, 5, 0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado. El lado paralelo al anterior está contenido en la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$. Calcula los dos vértices que determinan este segundo lado.

Solución:



☛ $r : \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -2, 2) \\ P_r(0, 1, -2) \end{cases}$

☛ Calculamos un plano $\pi \perp r$ que contenga a P :

$$\vec{u}_\pi = \vec{u}_r = (1, -2, 2) \Rightarrow \pi : x - 2y + 2z + k = 0 \xrightarrow{P \in \pi} 4 - 10 + 0 + k = 0 \Rightarrow k = 6$$

$$\pi : x - 2y + 2z + 6 = 0$$

☛ Calculamos el punto P' de corte de π con r :

$$\lambda - 2(1 - 2\lambda) + 2(-2 + 2\lambda) + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow P'(0, 1, -2)$$

☛ Calculamos la distancia de P a r . Tenemos $\overrightarrow{PP_r} = (0, 1, -2) - (4, 5, 0) = (-4, -4, -2)$,

$$|\overrightarrow{PP_r} \times \vec{u}_r| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \right| = |6(-2, 1, 2)| = 18 \text{ y } |\vec{u}_r| = \sqrt{9} = 3$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PP_r} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{18}{3} = 6$$

☛ La distancia de un punto $H(\lambda, 1 - 2\lambda, -2 + 2\lambda)$ de la recta r a P' tiene que ser $\frac{6}{2} = 3$:

$$d(H, P') = |\overrightarrow{P'H}| = |(\lambda, 1 - 2\lambda, -2 + 2\lambda) - (0, 1, -2)| = |(\lambda, -2\lambda, 2\lambda)| = 3|\lambda| = 3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \Rightarrow H_1(1, -1, 0) \\ \lambda = -1 \Rightarrow H_2(-1, 3, -4) \end{cases}$$

Problema 16.2.5 (2,5 puntos) Calcula los siguientes límites:

a) (1,25 puntos) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$

b) (1,25 puntos) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2x}{x-1}}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2 \ln x}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2x}{x-1}} &= [1^\infty] = e^\lambda \\ \lambda &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x-1}(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2x}{x-1}} &= [1^\infty] = e^2 \end{aligned}$$

Problema 16.2.6 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$

- a) (0,5 puntos) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, 1]$.
- b) (2 puntos) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

- a) Se trata de composición de funciones continuas $\forall x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, la función es continua en $[0, 1]$

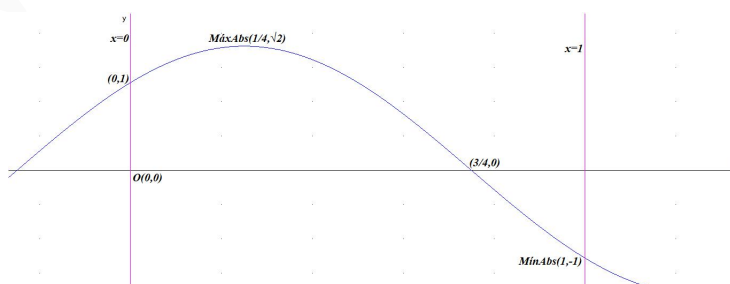
$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= -\pi \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x) = 0 \implies -\pi(\sin(\pi x) - \cos(\pi x)) = 0 \implies \sin(\pi x) - \cos(\pi x) = 0 \\ &\implies \tan(\pi x) = 1 \implies \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{4} \implies x = \frac{1}{4} \\ \pi x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \implies x = \frac{5}{4} \notin [0, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

	$\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, 1\right)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y decreciente en el $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$, con un máximo relativo en el punto de abscisa $x = \frac{1}{4} \implies \left(\frac{1}{4}, \sqrt{2}\right)$.

Por otro lado tenemos $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$, luego el máximo calculado es absoluto y el mínimo absoluto estaría en $(1, -1)$

Por el teorema de Weierstrass si una función es continua en un intervalo existen puntos dentro de éste donde la función alcanza máximos y mínimos absolutos.



Problema 16.2.7 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$.

- a) (1,25 puntos) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$.

- b) (1,25 puntos) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

- a) El polinomio $2x^2 + 2x + 3$ no tiene raíces reales y $2x^2 + 2x + 3 > 0$ luego f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, la función es continua en $[-1, 3]$. También es derivable al tratarse de la raíz de un polinomio que siempre es positivo. Luego f es continua en $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$.

- b) f cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio que afirma $\exists \alpha \in (-1, 3)$ tal que:

$$f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Problema 16.2.8 (2,5 puntos) Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \ln x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x-1}{e-1}$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Solución:

Calculamos los puntos de corte de la función f con g :

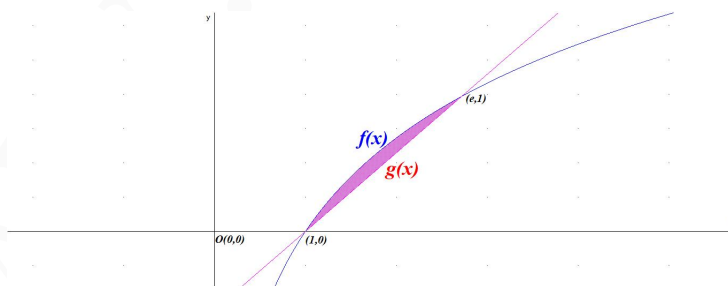
$f(x) = g(x) \implies \ln x = \frac{x-1}{e-1} \implies (e-1)\ln x = x-1 \implies x = 1 \text{ y } x = e$ Tenemos un recinto $S_1 : [1, e]$, en el que f está por encima de g y la integral será positiva. El área total será $S = |S_1|$.

$$F(x) = \int \left(\ln x - \frac{x-1}{e-1} \right) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \implies v = x \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] \implies$$

$$F(x) = x \ln x - \int dx - \frac{(x-1)^2}{2(e-1)} = x \ln x - x - \frac{(x-1)^2}{2(e-1)} + C$$

$$S_1 = \int_1^e (f(x) - g(x)) dx = F(e) - F(1) = \frac{3-e}{2} \simeq 0,14086 \text{ u}^2$$

$$S = |S_1| = \frac{3-e}{2} \simeq 0,14086 \text{ u}^2$$



“www.musat.net”

Capítulo 17

País Vasco

17.1. Ordinaria

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a **CUATRO** de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- ☛ pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- ☛ resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- ☛ cálculo de determinantes,
- ☛ cálculo de derivadas e integrales,
- ☛ almacenamiento de datos alfanuméricos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.1.1 (A1) (2,5 puntos)

- a) (2 puntos) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α :

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 2 \\ x + 2y + (\alpha - 1)z = -1 \\ 2x + y + (\alpha - 2)z = 1 \end{cases}$$

- b) (0,5 puntos) Resuelve el sistema, si es posible, en el caso $\alpha = 1$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha - 1 & -1 \\ 2 & 1 & \alpha - 2 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \implies \alpha = -1, \quad \alpha = 3$$

- ☛ Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 3\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ \text{ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)}$

☛ Si $\alpha = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

☛ Si $\alpha = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \\ 3F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Cuando $\alpha = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y = -1 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Problema 17.1.2 (B1) (2,5 puntos) Se sabe que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2$$

Calcula explicando las propiedades aplicadas,

a) (1,5 puntos) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$. b) (1 punto) $\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix}$.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} =$

(la primera fila estaba multiplicada por 3)

$$3 \left[\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} \right] =$$

(la segunda fila del determinante se separa como suma de dos y el primer determinante es cero por tener dos filas iguales)

$$3 \left[- \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} \right] =$$

(la tercera fila del determinante se separa como suma de dos, el segundo determinante es cero por tener dos filas iguales y el primero tiene la tercera fila multiplicada por 2)

$$-6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -12$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix} = (\text{el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta}) = \\ & \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 2p & 2q & 2r \end{vmatrix} = (\text{la tercera fila está multiplicada por dos}) = \\ & 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = (\text{se permutan las fila 2 y la 3}) = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -4 \end{aligned}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.1.3 (A2) (2,5 puntos) Se consideran las siguientes rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

- (1 punto) Calcula la posición relativa de las rectas r y s .
- (0,75 puntos) Calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
- (0,75 puntos) Dado el punto $P(-8, -8, 0)$, calcula el punto Q de la recta r de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a la recta r

Solución:

$$r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 4, -1) \\ P_r(0, -1, 2) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 \end{cases} \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, 0) \\ P_s(0, -1, 3) \end{cases}$$

$$\text{a) } \overrightarrow{P_r P_s} = (0, -1, 3) - (0, -1, 2) = (0, 0, 1)$$

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \implies r \text{ y } s \text{ se cortan.}$$

$$\text{b) } \pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 4, -1) \\ \vec{u}_s = (1, 2, 0) \\ P_r(0, -1, 2) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2x - y - 1 = 0$$

$$\text{c) } Q(2\lambda, -1 + 4\lambda, 2 - \lambda) \implies \overrightarrow{PQ} = (8 + 2\lambda, 7 + 4\lambda, 2 - \lambda)$$

$$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}_r \implies \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_r = 0 \implies$$

$$(8 + 2\lambda, 7 + 4\lambda, 2 - \lambda) \cdot (2, 4, -1) = 16 + 4\lambda + 28 + 16\lambda - 2 + \lambda = 0 \implies \lambda = -2 \implies Q(-4, -9, 4)$$

Problema 17.1.4 (B2) (2,5 puntos) Dados los puntos $P_1(1, 4, 5)$, $P_2(1, 2, -1)$, $P_3(0, -2, 3)$ y $P_4(-2, 0, 1)$, calcula:

- a) (1 punto) La ecuación del plano π que contiene los puntos P_2 , P_3 y P_4 .
 b) (1,5 puntos) El punto simétrico del P_1 respecto del plano π .

Solución:

a) $\overrightarrow{P_2P_3} = (0, -2, 3) - (1, 2, -1) = (-1, -4, 4)$ y $\overrightarrow{P_3P_4} = (0, -2, 3) - (-2, 0, 1) = (2, -2, 2)$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{P_2P_3} = (-1, -4, 4) \\ \overrightarrow{P_3P_4} = (2, -2, 2) \\ P_2(1, 2, -1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 10(y+z-1) = 0 \implies$$

$$\pi : y + z - 1 = 0$$

b) Seguimos el siguiente método:

• Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $P_1 \in t$:

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (0, 1, 1) \\ P_t = P_1(1, 4, 5) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

• Calculamos el punto P'_1 de corte de t con π :

$$4 + \lambda + 5 + \lambda - 1 = 0 \implies \lambda = -4 \implies P'_1(1, 0, 1)$$

• P'_1 es el punto medio entre P_1 y el que buscamos P''_1 :

$$\frac{P_1 + P''_1}{2} = P'_1 \implies P''_1 = 2P'_1 - P_1 = (2, 0, 2) - (1, 4, 5) = (1, -4, -3)$$

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.1.5 (A3) (2,5 puntos) Sea $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$.

- a) (0,5 puntos) Encuentra las asíntotas de f .
 b) (1 punto) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
 c) (0,5 puntos) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.
 d) (0,5 puntos) Haz una representación aproximada de la gráfica de la función f .

Solución:

a) $x^2 - 2x + 1 = 0 \implies x = 1 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
 Asíntotas:

• Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

☛ Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = 0$$

☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.

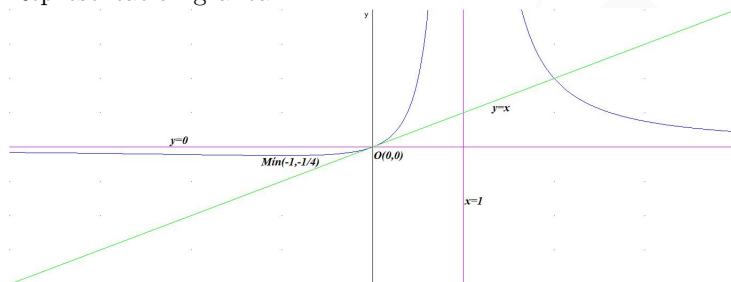
b) $f'(x) = -\frac{x+1}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y creciente en el $(-1, 1)$ con un mínimo relativo en el punto $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$

c) $a = 0 \Rightarrow b = f(0) = 0$ y $m = f'(0) = 1 \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y = x$

d) Representación gráfica:



Problema 17.1.6 (B3) (2,5 puntos) Se sabe que la función $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$ tiene un extremo relativo cuando $x = 1/2$ y la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 6x - 2$.

a) (1,5 puntos) Encuentra los valores de los parámetros A , B y C .

b) (1 punto) Encuentra todos los extremos relativos de la función f y razona si son máximos o mínimos.

Solución:

$$f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C \Rightarrow f'(x) = 4Ax^3 + 2Bx \Rightarrow f''(x) = 12Ax^2 + 2B$$

a) Por el enunciado:

☛ f tiene un extremo relativo en $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

☛ La pendiente de la recta tangente a f en $x = 1$ es $m = f'(1) = 6$

☛ $f(1) = 6 \cdot 1 - 2 = 4$

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \implies \frac{1}{2}A + B = 0 \\ f'(1) = 6 \implies 4A + 2B = 6 \\ f(1) = 4 \implies A + B + C = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \\ C = 3 \end{cases} \implies f(x) = 2x^4 - x^2 + 3$$

Se comprueba que $x = \frac{1}{2}$ es un extremo en el siguiente apartado.

b) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3 \implies f'(x) = 8x^3 - 2x \implies f''(x) = 24x^2 - 2$
 $f'(x) = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 0 \implies x = 0$ y $x = \pm \frac{1}{2}$

Tenemos:

• $f''(0) = -2 < 0 \implies (0, 3)$ es un máximo relativo.

• $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 4 > 0 \implies \left(\frac{1}{2}, \frac{23}{8}\right)$ es un mínimo relativo.

• $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 > 0 \implies \left(-\frac{1}{2}, \frac{23}{8}\right)$ es un mínimo relativo.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.1.7 (A4) (2,5 puntos) Calcula las dos integrales siguientes:

a) (1,25 puntos) $\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1} dx$

b) (1,25 puntos) $\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1} dx$

Solución:

a)

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x + 2) : (x^2 + 2x + 1) = x - 2 + \frac{4}{x^2 + 2x + 1} \\ \underline{-x^3 - 2x^2 - x} \\ -2x^2 - 4x + 2 \\ \underline{2x^2 + 4x + 2} \\ 4 \end{array}$$

$$\int \frac{2-3x+x^3}{(x+1)^2} dx = \int (x-2+4(x+1)^{-2}) dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{4}{x+1} + C$$

b) $\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{2-3x}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A+B(x+1)}{(x+1)^2} \\ 2-3x = A+B(x+1) \\ x=0 \implies A+B=2 \\ x=-1 \implies A=5 \implies B=-3 \\ \frac{2-3x}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+1} \end{array} \right] =$

$$\int \left(5(x+1)^{-2} - \frac{3}{x+1} \right) dx = -\frac{5}{x+1} - 3 \ln|x+1| + C$$

Problema 17.1.8 (B4) (2,5 puntos) Se consideran las curvas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{3}$ y la recta de ecuación $y = x$

- a) (1,25 puntos) Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas
- b) (1,25 puntos) Calcula el área de ese recinto.

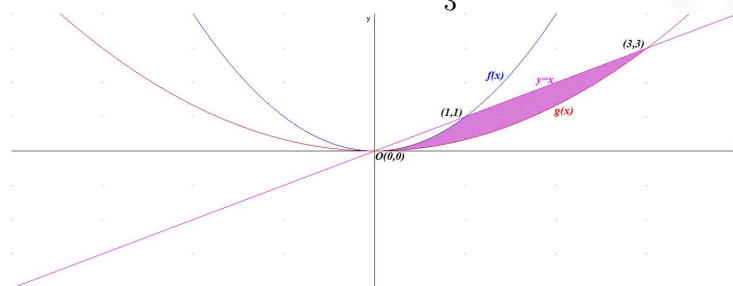
Solución:

- a) Se trata de dos parábolas verticales con vértice en el origen de coordenadas y la recta bisectriz del primer cuadrante. Con una simple tabla de valores se dibujan estas curvas y la recta.

Llamamos $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{x^2}{3}$

El punto de corte de f con la recta: $x^2 = x \Rightarrow x = 0$ y $x = 1 \Rightarrow (0, 0)$ y $(1, 1)$

El punto de corte de g con la recta: $\frac{x^2}{3} = x \Rightarrow x = 0$ y $x = 3 \Rightarrow (0, 0)$ y $(3, 3)$



- b) Hay dos áreas:

$S_1 : [0, 1]$ entre f y g con f por encima.

$S_2 : [1, 3]$ entre la recta $y = x$ y g con la recta por encima.

$$S_1 = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{3} \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^2 dx = \frac{2x^3}{9} \Big|_0^1 = \frac{2}{9}$$

$$S_2 = \int_1^3 \left(x - \frac{x^2}{3} \right) dx = \frac{1}{3} \int_1^3 (3x - x^2) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{3}{2} - \frac{7}{18} = \frac{10}{9}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{2}{9} + \frac{10}{9} = \frac{4}{3} \simeq 1,3333 \text{ u}^2$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.1.9 (A5) (2,5 puntos) Tenemos dos urnas con bolas de colores. La urna A contiene 3 bolas verdes 5 bolas rojas y 4 bolas azules. La urna B contiene 2 bolas verdes 2 bolas rojas y 3 bolas azules. Se saca, al azar, una bola de la urna A y se mete en la urna B . Posteriormente se saca una bola de la urna B .

- a) (0,5 puntos) Realiza el correspondiente diagrama de árbol.
- b) (0,75 puntos) calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde.
- c) (0,5 puntos) calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde sabiendo que la bola extraída de la urna A ha sido roja.
- d) (0,75 puntos) Sabiendo que la bola extraída de la urna B es verde, calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna A haya sido roja.

Solución:

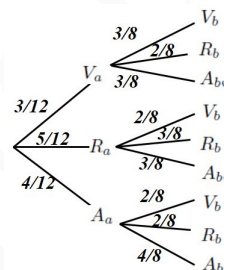
Sean V_a verde en la urna A , R_a roja en la urna A , A_a azul en la urna A , V_b verde en la urna B , R_b roja en la urna B y A_b azul en la urna B .

a) El diagrama se encuentra a la derecha.

$$\text{b) } P(V_b) = P(V_b|V_a)P(V_a) + P(V_b|R_a)P(R_a) + P(V_b|A_a)P(A_a) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{12} + \frac{2}{8} \cdot \frac{5}{12} + \frac{2}{8} \cdot \frac{4}{12} = \frac{9}{32} = 0,28125$$

$$\text{c) } P(V_b|R_a) = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\text{d) } P(R_a|V_b) = \frac{P(V_b|R_a)P(R_a)}{P(V_b)} = \frac{\frac{2}{8} \cdot \frac{5}{12}}{\frac{9}{32}} = \frac{10}{27} \simeq 0,3704$$



Problema 17.1.10 (B5) (2,5 puntos) Tras la realización de un estudio, se ha llegado a la conclusión de que el tiempo medio que un adulto aguanta bajo el agua sin respirar es de 45 segundos, con una desviación típica de 7,3 segundos, ajustandose los datos a una distribución normal.

a) (1 puntos) Calcula el porcentaje de adultos que aguanta más de 57 segundos.

b) (1,5 puntos) Calcula el porcentaje de adultos que aguanta entre 39 y 57 segundos.

Solución:

$$N(45; 7,3)$$

$$\text{a) } P(X \geq 57) = P\left(Z \geq \frac{57-45}{7,3}\right) = P(Z \geq 1,64) = 1 - P(Z \leq 1,64) = 1 - 0,9495 = 0,0505 \Rightarrow 5,05\% \text{ de los adultos aguantarán más de 57 segundos sin respirar.}$$

$$\text{b) } P(39 \leq X \leq 57) = P\left(\frac{39-45}{7,3} \leq Z \leq \frac{57-45}{7,3}\right) = P(-0,82 \leq Z \leq 1,64) = P(Z \leq 1,64) - P(Z \leq -0,82) = P(Z \leq 1,64) - (1 - P(Z \leq 0,82)) = 0,9495 - (1 - 0,7939) = 0,7434 \Rightarrow 74,34\% \text{ de los adultos aguantarán entre 39 de 57 segundos sin respirar.}$$

17.2. Extraordinaria

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a **CUATRO** de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.2.1 (A1)

(1 punto) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α :

$$\begin{cases} \alpha x + 4y + z = 3 \\ \alpha x - 5y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

Resuelve el sistema, si es posible,

a) (0,75 puntos) cuando $\alpha = 0$.

b) (0,75 puntos) cuando $\alpha = 1$.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 4 & 1 & 3 \\ \alpha & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = 26 - 26\alpha = 0 \implies \alpha = 1$$

☛ Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^o$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & 1 & -5 \\ 0 & -9 & 1 & -5 \end{array} \right) = \\ & \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \end{aligned}$$

Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

a) Cuando $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} 4y + z = 3 \\ -5y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{8}{13} \\ z = \frac{7}{13} \end{cases}$$

b) Cuando $\alpha = 1$:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 3 \\ -9y + z = -5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{7}{9} - \frac{13}{9}\lambda \\ y = \frac{5}{9} + \frac{1}{9}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 17.2.2 (B1) Calcula el rango de la matriz A dependiendo de los valores del parámetro m :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ m & 2-m & 2 & 1 \\ m & -2 & m-2 & 1 \end{pmatrix},$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ m & 2-m & 2 \\ m & -2 & m-2 \end{vmatrix} = 0; |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ m & 2 & 1 \\ m & m-2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 5m + 4 = 0 \implies m = 1 \text{ y } m = 4;$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 2-m & 1 \\ m & -2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 5m + 4 = 0 \implies m = 1 \text{ y } m = 4;$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2-m & 2 & 1 \\ -2 & m-2 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 5m - 4 = 0 \implies m = 1 \text{ y } m = 4$$

• Si $m \in \mathbb{R} - \{1, 4\} \implies \text{Rango}(A) = 3$.

• Si $m = 1 \implies \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

• Si $m = 4 \implies \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.2.3 (A2) Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

a) (1 punto) Determina su posición relativa.

b) (1,5 puntos) Si dichas rectas se cortan, calcula el ángulo mínimo formado entre ambas. En caso de que no se corten, calcula la distancia entre ambas rectas.

Solución:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \implies r : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -1 + 2\mu \\ z = -\mu \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \implies s : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{1} \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 3, 1) \\ P_s(0, -2, -1) \end{cases}$$

$$\text{a) } \overrightarrow{P_s P_r} = (1, -1, 0) - (0, -2, -1) = (1, 1, 1)$$

$$[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

$$\text{b) } |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(5, -2, 1)| = \sqrt{30}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{|4|}{\sqrt{30}} = \frac{2\sqrt{30}}{15} u$$

Problema 17.2.4 (B2) Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \quad \pi \equiv 2x - 3y + Az = 10$$

- (0,75 puntos) Calcula el valor del parámetro A para que la recta r y el plano π sean paralelos.
- (0,75 puntos) Si $A = 21$, calcula la intersección del plano π y la recta r .
- (1 punto) Si $A = 1$, calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π .

Solución:

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -2 + 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 7, 1) \\ P_r(-1, -2, 0) \end{cases} \quad \text{y} \quad \vec{u}_\pi = (2, -3, A)$$

- $r \parallel \pi \implies \vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi \implies \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = 0 \implies (3, 7, 1) \cdot (2, -3, A) = 6 - 21 + A = 0 \implies A = 15$
Luego $\pi : 2x - 3y + 15z = 10$, para que $r \parallel \pi$ tiene que cumplir $r \not\subset \pi \implies P_r \notin \pi$, es decir $2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) + 15 \cdot 0 = -2 + 6 + 0 = 4 \neq 10 \implies r \parallel \pi$
- Sustituimos r en $\pi : 2x - 3y + 21z = 10$:
 $2(-1 + 3\lambda) - 3(-2 + 7\lambda) + 21\lambda = 10 \implies \lambda = 1 \implies H(2, 5, 1)$
- Si $A = 1 \implies \pi : 2x - 3y + z = 10$ y seguimos el siguiente método:

• Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $O \in t$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (2, -3, 1) \\ P_t = O(0, 0, 0) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

• Calculamos el punto O' de corte de t con π :

$$2(2\lambda) - 3(-3\lambda) + \lambda = 10 \implies \lambda = \frac{5}{7} \implies O' \left(\frac{10}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{5}{7} \right)$$

• El punto simétrico O'' de O respecto del plano π cumple:

$$\frac{O + O''}{2} = O' \implies O'' = 2O' - O = 2 \left(\frac{10}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{5}{7} \right) - (0, 0, 0) = \left(\frac{20}{7}, \frac{-30}{7}, \frac{10}{7} \right)$$

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.2.5 (A3) Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Las rectas tangentes a la gráfica de la función f en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 2$ son paralelas. Además, f tiene un extremo relativo cuando $x = 1$ y $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

- (1,5 puntos) Encuentra los valores de los parámetros A , B y C .
- (1 punto) Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ para los valores de los parámetros $A = -3$, $B = 0$ y $C = 4$.

Solución:

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \implies f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B \implies f''(x) = 6x + 2A$$

$$\text{a) } \begin{cases} f'(-1) = f'(2) \implies 3 - 2A + B = 12 + 4A + B \implies -2A = 3 \\ f'(1) = 0 \implies 3 + 2A + B = 0 \implies B = -3 - 2A \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x - 3 \implies f''(1) = 3 \neq 0 \implies x = 1 \text{ es un extremo.}$$

$$f(0) = C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2 \implies C = 2$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$$

$$\text{b) } \begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \implies f'(x) = 3x^2 - 6x \\ a = -1 \implies b = f(a) = f(-1) = 0 \\ m = f'(a) = f'(-1) = 9 \end{cases} \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y - 0 = 9(x + 1) \implies y = 9x + 9$$

Problema 17.2.6 (B3) Sea $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

- a) (1 punto) Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
b) (1 punto) Encuentra los extremos relativos de f y razona si son máximos o mínimos.
c) (0,5 puntos) Calcula las asíntotas de f .

Solución:

$$\text{a) } f'(x) = 2e^{-2x^2}(1 - 4x^2) = 0 \implies x = \pm \frac{1}{2}$$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y decreciente en el $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

- b) La función tiene un máximo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2}, e^{-1/2}\right)$ y un mínimo relativo en el $\left(-\frac{1}{2}, -e^{-1/2}\right)$

- c) Asíntotas:

• Verticales: No tiene,

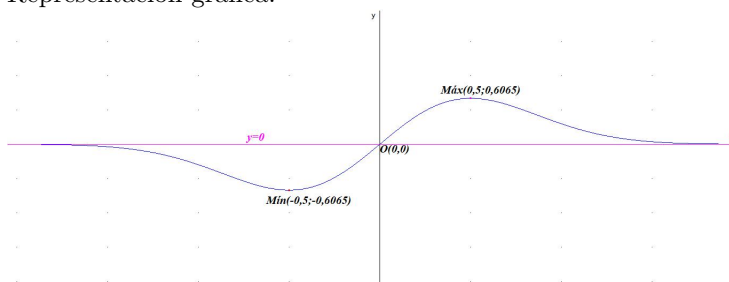
• Horizontales: $y = 0$ ya que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{2x^2}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4xe^{2x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2xe^{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^{2x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4xe^{2x^2}} = 0$$

• Oblicuas: no hay por haber horizontales.

Representación gráfica:



CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.2.7 (A4) Calcula la siguiente integral, y explica el método empleado:

$$\int x \ln^2 x \, dx$$

Solución:

Integración por partes: $\left(\int u \, dv = uv - \int v \, du \right)$

$$\int x \ln^2 x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln^2 x \implies du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ dv = x \, dx \implies v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] =$$

$$\frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \int x \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x \, dx \implies v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] =$$

$$\frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \left[\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x \, dx \right] = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C =$$

$$\frac{x^2(2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1)}{4} + C$$

Problema 17.2.8 (B4) Se consideran las curvas de ecuaciones $y = \frac{x^2}{3}$, $y = x^2 + 2x$ e $y = 3$.

- (1,25 puntos) Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por dichas curvas.
- (1,25 puntos) Calcula el área de ese recinto.

Solución:

- Tenemos:

• $f(x) = \frac{x^2}{3}$ parábola vertical con vértice en $(0, 0)$ donde tiene un mínimo y pasa por los puntos $\left(\pm 1, \frac{1}{3}\right)$ y $(\pm 3, 3)$. Los de abscisa negativa están fuera del primer cuadrante.

☛ $g(x) = x^2 + 2x$ corta al eje de abscisas en los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 0)$ fuera del primer cuadrante. $g'(x) = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$ y como $g''(x) = 2 \Rightarrow g''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow (-1, -1)$ es un mínimo relativo, fuera del primer cuadrante.

☛ $y = 3$ es una recta horizontal que pasa por el punto $(0, 3)$

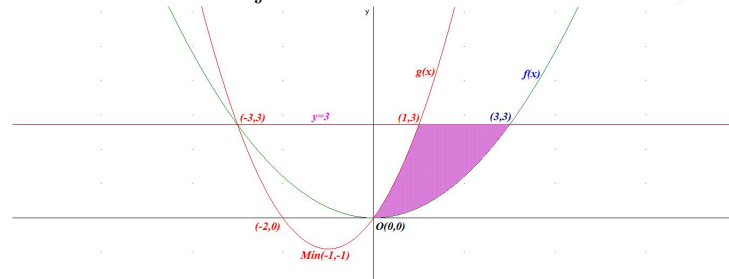
☛ Los puntos de corte de estas funciones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x^2}{3} = x^2 + 2x \Rightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = -3 \text{ fuera del primer cuadrante.}$$

$$f(x) = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \Rightarrow (\pm 3, 3) \text{ la negativa está fuera del cuadrante.}$$

$$g(x) = 3 \Rightarrow x^2 + 2x = 3 \Rightarrow (1, 3) \text{ y } (-3, 3) \text{ fuera del cuadrante.}$$

☛ Con estos datos dibujamos el recinto:



- b) Hay dos recintos $S_1 : [0, 1]$ con $g(x) - f(x)$ (la función g está por encima de la f) y $S_2 : [1, 3]$ con $3 - f(x)$ (la recta $y = 3$ está por encima de la f)

$$S_1 = \int_0^1 \left(x^2 + 2x - \frac{x^2}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2x^2}{3} + 2x \right) dx = \left[\frac{2x^3}{9} + x^2 \right]_0^1 = \frac{11}{9}$$

$$S_2 = \int_1^3 \left(3 - \frac{x^2}{3} \right) dx = \left[3x - \frac{x^3}{9} \right]_1^3 = \frac{28}{9}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{11}{9} + \frac{28}{9} = \frac{39}{9} = \frac{13}{3} \approx 4,3333 \text{ u}^2$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.2.9 (B5) Los resultados publicados en diciembre de 2019 sobre la aplicación de la vacuna M72 en Sudáfrica, Kenia y Zambia revelaron que la probabilidad de quedar protegido contra la tuberculosis pulmonar activa es de 0,54. Se aplica la vacuna a un grupo de 3289 adultos.

- (0,5 puntos) Identifica la distribución correspondiente al número de adultos que quedan protegidos, y determina sus parámetros.
- (1 punto) Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en 1800 adultos.
- (1 punto) Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en menos de 1700 adultos.

Solución:

- a) $B(3289; 0,54)$

Como $n > 10$, $np = 1776,06 > 5$ y $nq = 1512,94 > 5 \Rightarrow$

$$B(3289; 0,54) \stackrel{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(1776,06; 28,583)$$

$$\text{b) } P(X = 1800) = P\left(\frac{1799,5 - 1776,06}{28,583} \leq Z \leq \frac{1800,5 - 1776,06}{28,583}\right) = P(0,82 \leq Z \leq 0,86) = P(Z \leq 0,86) - P(Z \leq 0,82) = 0,8051 - 0,7939 = 0,0112$$

$$\text{c) } P(X < 1700) = P\left(Z \leq \frac{1699,5 - 1776,06}{28,583}\right) = P(Z \leq -2,68) = 1 - P(Z \leq 2,68) = 1 - 0,9963 = 0,0037$$

Problema 17.2.10 (A5) Sean A y B sucesos aleatorios independientes, siendo sus probabilidades $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,1$, y sean $\bar{A}$ y $\bar{B}$ los sucesos complementarios de A y B respectivamente. Calcula las siguientes probabilidades razonadamente, e indica claramente el proceso o ley aplicada:

a) (0,5 puntos) $P(A \cup B)$,

b) (0,5 puntos) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$,

c) (0,5 puntos) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$,

d) (0,5 puntos) $P(A \cap \bar{B})$,

e) (0,5 puntos) $P(\bar{A}|\bar{B})$,

Solución:

Por ser A y B sucesos aleatorios independientes: $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,1 = 0,07$
 $P(A) = 0,7 \implies P(\bar{A}) = 0,3$ y $P(B) = 0,1 \implies P(\bar{B}) = 0,9$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,1 - 0,07 = 0,73$

b) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,07 = 0,93$

c) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,73 = 0,27$

d) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,07 = 0,63$

e) $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,27}{0,9} = 0,3$

“www.musat.net”

Capítulo 18

Resúmenes teóricos

18.1. Álgebra

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- ☛ **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- ☛ **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- ☛ **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- ☛ La matriz tiene que ser cuadrada

a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

• Propiedades:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } |A^T| = |A|$$

$$\text{c) } |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

• Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij} .

• Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinante de una matriz por adjuntos:

Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.

A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.

Rango de una matriz

Es el número de filas linealmente independientes.

De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.

Si $|A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- ☛ Si $\text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) = n^\circ$ de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- ☛ Si $\text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) < n^\circ$ de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- ☛ Si $\text{Rango}(\bar{A}) \neq \text{Rango}(A)$ se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que $\text{Rango}(A) < m$ (n° de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

• Si $\text{Rango}(A) = m$ (n^0 de incógnitas) $\implies$ SCD $\implies x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ solución trivial.

• Si $\text{Rango}(A) < m$ (n^0 de incógnitas) $\implies$ SCI $\implies$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer

Sea $\bar{A} = (C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, B)$, entonces sustituimos la columna B en la matriz $\bar{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \dots, C_n|}{|A|}, x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \dots, C_n|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \dots, B|}{|A|}$$

18.2. Geometría

Vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

• $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes si $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$. En caso contrario uno de los vectores es combinación lineal de los otros.

• Producto escalar: $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha \end{cases}$

• Producto vectorial: $\vec{t} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$; el vector $\vec{t}$ es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Se cumple $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha$.
 $|\vec{u} \times \vec{v}| = S$ donde S es el área del paralelogramo que describen los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por paralelismo. (El área de un triángulo será $\frac{1}{2}S$)

• Producto mixto: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = V$, donde V es el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores por paralelismo. El volumen de un paralelepípedo es también $V = S_{\text{base}} \cdot \text{Altura}$. Para calcular el volumen de un tetraedro tenemos dos fórmulas:
 $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}V_{\text{paralelepípedo}}$ y $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3}S_{\text{base}} \cdot \text{Altura}$

Ecuaciones

Sea la recta $r : \begin{cases} \vec{u}_r = (u_1, u_2, u_3) \\ P_r(a, b, c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\vec{x} = P_r + \lambda \vec{u}_r$	$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \\ z = c + \lambda u_3 \end{cases}$	$\frac{x-a}{u_1} = \frac{y-b}{u_2} = \frac{z-c}{u_3}$	No hay

Sea el plano $\pi : \begin{cases} \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ P(a, b, c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\vec{x} = P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$	$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = b + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = c + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$	No hay	$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a \\ u_2 & v_2 & y-b \\ u_3 & v_3 & z-c \end{vmatrix} = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$

Ideas:

- ☛ Tres puntos $P_1(a_1, b_1, c_1)$, $P_2(a_2, b_2, c_2)$ y $P_3(a_3, b_3, c_3)$ no están alineados si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$
- ☛ El vector $\vec{u}_r$ y la recta r tienen la misma dirección.
- ☛ El vector $\vec{u}_\pi = (A, B, C)$ y el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ son perpendiculares.

Posiciones de rectas y planos:

- ☛ Dos rectas: $r : \begin{cases} \vec{u}_r \\ P_r \end{cases}$, $s : \begin{cases} \vec{u}_s \\ P_s \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$. Construimos la matriz $A = \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_s \\ \overrightarrow{P_r P_s} \end{pmatrix}$.
 Si $\text{Rango}(A) = 3 \Rightarrow$ Se cruzan.
 Si $\text{Rango}(A) = 2 : \begin{cases} \text{Rango} \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_s \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{Se cortan} \\ \text{Rango} \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_s \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \text{Son paralelas} \end{cases}$
 Si $\text{Rango}(A) = 1 \Rightarrow$ Coinciden.
- ☛ De una recta $r : \begin{cases} \vec{u}_r \\ P_r \end{cases}$ y un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$: Se pasa la recta a paramétricas y se sustituye en el plano: $A(a + \lambda u_1) + B(b + \lambda u_2) + C(c + \lambda u_3) + D = 0$ Al resolver esta ecuación pueden ocurrir tres casos:
 - a) Encuentro un valor de $\lambda = k \Rightarrow$ se cortan. El punto de corte se encuentra sustituyendo el valor de λ en la ecuación paramétrica de la recta.
 - b) Encuentro infinitos valores de $\lambda \Rightarrow$ la recta se encuentra contenida en el plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $0 = 0$)
 - c) No existen valores de $\lambda \Rightarrow$ la recta es paralela al plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $7 = 0$)
- ☛ De dos planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2$. Puede ocurrir:
 - a) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ o $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ o $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ en cualquiera de ellos los dos planos se cortan en una recta.
 - b) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ en este caso son paralelos.
 - c) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ en este caso coinciden.

- De tres planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2$ y $\pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3$. Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y se discute por el teorema de Roché. Si el sistema tiene solución única los tres planos se cortan en un punto. En el caso de que tenga infinitas soluciones se analizan los planos dos a dos. En el caso de que no tenga soluciones se analizan los planos dos a dos.

Fórmulas:

- Distancia entre dos puntos: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$
- Distancia de un punto a una recta: $d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}$
- Distancia de un punto a un plano: $d(P, \pi) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- Distancia entre dos rectas que se cruzan: $d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{PP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$
- Ángulo entre dos vectores: $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| |\overrightarrow{v}|}$
- Ángulo entre dos rectas: $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}| |\overrightarrow{u_s}|}$
- Ángulo entre dos planos: $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}| |\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}$
- Ángulo entre una recta y un plano: $\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_{\pi}}|}{|\overrightarrow{u_r}| |\overrightarrow{u_{\pi}}|}$
- Punto medio de P y Q es $A = \frac{P + Q}{2}$
- Punto simétrico de P respecto de Q es $A = 2Q - P$
- Esfera: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ es una esfera de centro $C(a, b, c)$ y radio $= r$.

Ideas métricas:

- Punto simétrico de P respecto al plano π :
 - Calculo r que pasa por P perpendicular a π , $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi}}$.
 - Calculo el punto de corte P' de r con π .
 - $P'' = 2P' - P$
- Punto simétrico de P respecto a la recta r :
 - Calculo π perpendicular a r que contenga a P , $\overrightarrow{u_{\pi}} = \overrightarrow{u_r}$.
 - Calculo el punto de corte P' de r con π .
 - $P'' = 2P' - P$

- ☛ Recta perpendicular a otras dos que se cruzan (y las corta): Se calcula como intersección de los dos planos $\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t \\ \vec{u}_r \\ P_r \end{cases}$, $\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t \\ \vec{u}_s \\ P_s \end{cases}$ donde $\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s$

- ☛ Recta que pasa por un punto P y corta a dos rectas que se cruzan: Se calcula como intersección de los dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_r P} \\ \vec{u}_r \\ P_r \text{ o } P \end{cases}, \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_s P} \\ \vec{u}_s \\ P_s \text{ o } P \end{cases}$$

- ☛ Recta paralela a un plano π y que corta a otra recta t que a su vez corta a π y que pasa por el punto P :

- Calculo un plano π' paralelo a π que contenga a P .
- Calculo P' punto de corte de π' y t .
- La recta buscada es la que une los puntos P y P' .

- ☛ Ecuación de la circunferencia resultante de cortar una esfera con un plano (vertical u horizontal). Si el plano es $z = k$, se sustituye en la ecuación y resulta una circunferencia. Tened cuidado, el centro de esta circunferencia es (a, b, k) .

- ☛ Plano tangente a una esfera de centro C en el punto de tangencia P : $\pi : \begin{cases} \vec{u}_\pi = \overrightarrow{CP} \\ \text{Contiene a } P \end{cases}$

- ☛ Encontrar los puntos de una recta r que están a una distancia λ de un punto P : Se calcula la ecuación de una esfera de centro P y radio λ . Se buscan los puntos de corte de esta esfera y la recta r .

- ☛ Plano Mediador π entre dos puntos P_1 y P_2 : Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, P_1) = d(P, P_2)$.

- ☛ Plano Bisector π entre dos planos π_1 y π_2 : Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.

18.3. Análisis

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones

Hay que seguir los siguientes pasos:

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ o $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists y = p \Rightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ ↗ Decreciente : $f'(x) < 0$ ↘ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7 Máximos y Mínimos	Máximo : ↗↘ de creciente a decreciente Mínimo : ↘↗ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0$ ∪ Convexa : $f''(x) < 0$ ∩ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f' dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x $	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f $
Exponencial	$\int e^x dx = e^x$	$\int e^f \cdot f' dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2 x dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f dx = \tan f$
	$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1 + \tan^2 f) dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2 x dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f dx = -\cot f$
	$\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1 + \cot^2 f) dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f} dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2} dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano – Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \ln \pm \arctan x$	Si $\frac{M \neq 0}{ax^2+bx+c}$ irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

☛ Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)

☛ Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Rightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad

Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a , entonces f tiene que ser continua en a .

Teorema de Weierstrass

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.

Teorema de Darboux

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ ($a < b$) y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) . Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del Valor Medio de Lagrange

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) . entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \text{donde } c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)

Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f , es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes

Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a, b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme})$$

Teorema del cambio de variable

Sea g una función con derivada g' continua en $[a, b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. Si hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

Límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que $\text{Grado}(P(x)) = n$ y $\text{Grado}(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

• $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.

• Si $n > m \Rightarrow L = \text{Signo}\left(\frac{A}{B}\right) \cdot \infty$

• Si $n < m \Rightarrow L = 0$

• Si $n = m \Rightarrow L = \frac{A}{B}$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x)(P(x) - 1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ o } \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \rightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x \ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \frac{\pi}{2} - x$

18.4. Probabilidad

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Rightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Rightarrow f_r(A) = \frac{f(A)}{N}$

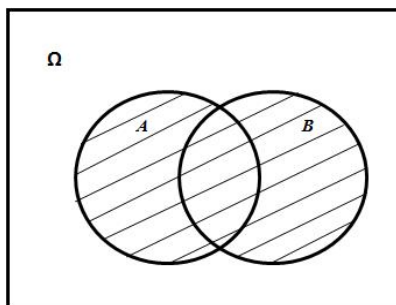
Ley de los grandes números: $\lim_{N \rightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

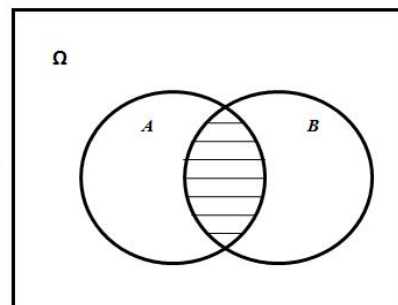
$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacío** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

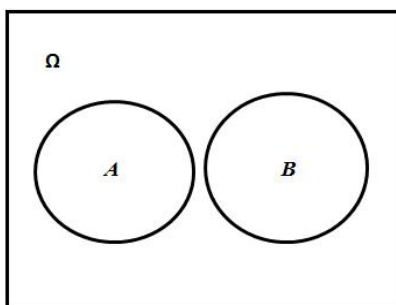
Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B : $A \cup B$



Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B : $A \cap B$



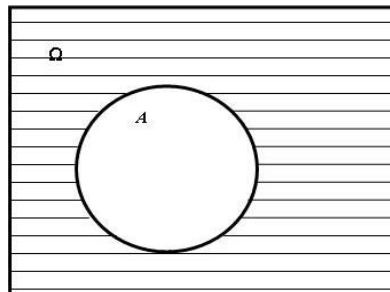
Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

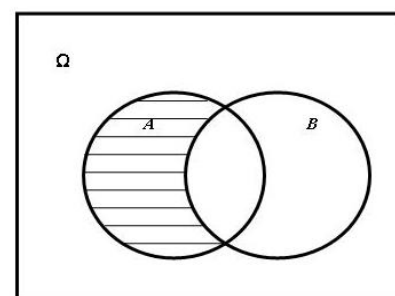
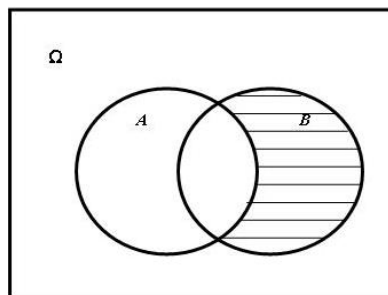
Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



$\bar{A}$ es el suceso contrario o complementario de A :

$$\bar{A} = \Omega - A \implies P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$



$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

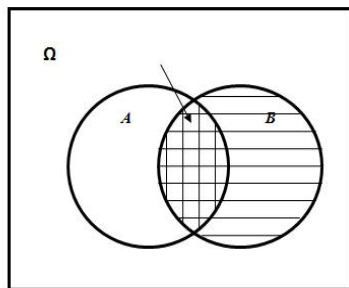
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ y $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, \dots, 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

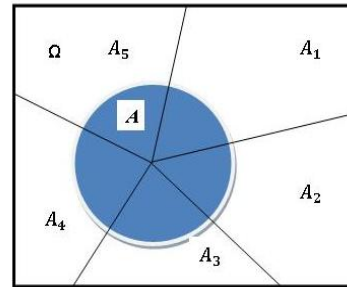
$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



Probabilidad condicionada:

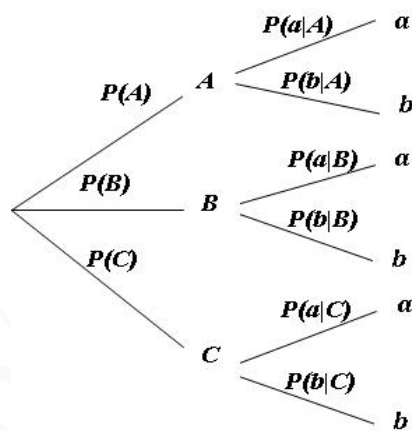
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$

Organización por árboles:



Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

$$P(B|S) = \frac{20}{475}, \quad P(N|M) = \frac{200}{210}, \quad P(B) = \frac{45}{1000}, \quad P(M) = \frac{210}{1000}$$

18.5. Estadística

Gráficos:

- Variable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i, p(x_i) = p_i, \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i, \text{ Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i^2 - \mu^2$$

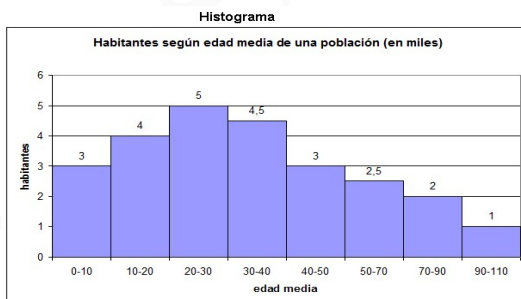
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i, f_i,$$

$$\text{Media} = \bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}, \text{ Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial $B(n, p)$:

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si $B(7, 0, 4) \Rightarrow n = 7, p = 0, 4$ y $q = 0, 6$:

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

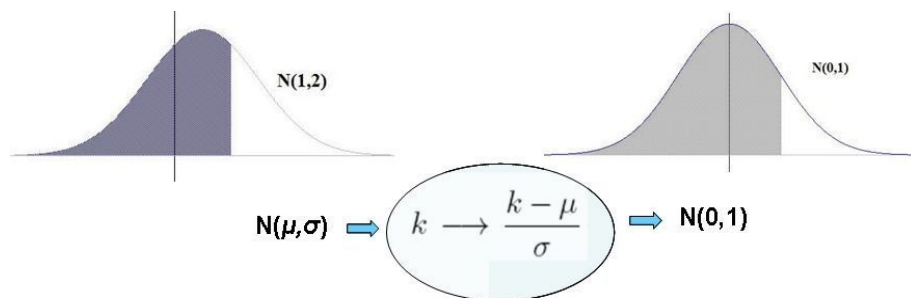
$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3), \text{ ó}$$

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

Su Media = $\mu = np$, su Varianza = $\sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica = $\sqrt{\text{Varianza}}$.

Distribución Normal $N(\mu, \sigma)$:

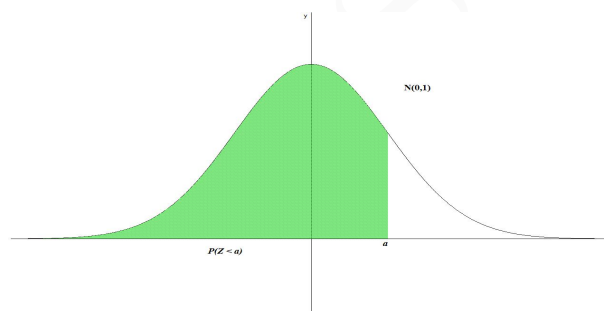
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Tipificación Paso de una normal $N(\mu, \sigma)$ a otra $N(0, 1)$: $k \rightarrow \frac{k - \mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal $N(\mu, \sigma)$ entonces Z seguirá una normal $N(0, 1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

Cuando una distribución binomial $B(n, p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:

$$P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$$

$$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$$

$$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$$

$$P(X > a) = P(X \geq a + 0,5)$$

$$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5)$$

Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95%: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ (α = **Nivel de significación**) $\Rightarrow \alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) =$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \text{ se busca en la tabla } N(0, 1) \text{ y obtenemos } z_{\alpha/2} = 1,96$$

Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\bar{X}$ de una $N(\mu, \sigma)$ la media $\bar{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$\text{Error: } E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Intervalo de Confianza: $(\bar{X} - E, \bar{X} + E) = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.

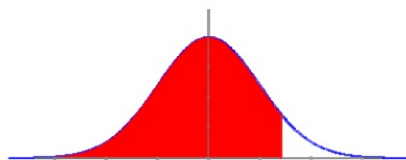
Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n , se distribuye como una $N \left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$

Error: $E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\hat{p} - E, \hat{p} + E) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \leq z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

“www.musat.net”

Agradecimientos

- ✍ A las Universidades por la publicación de los exámenes oficiales.
- ✍ A Íñigo Zunzunegui Monterrubio (<https://aprendeconmigomelon.com>) por sus correcciones.
- ✍ A Juan Antonio Martínez (<https://www.ebaumatematicas.com>) por el contenido de su página, me ha servido para contrastar resultados.
- ✍ A Paula Cabildo por el diseño de la portada y contraportada.

“www.musat.net”



Prof: Isaac Musat Hervás

Profesor de Matemáticas en el colegio Villaeuropa de Móstoles

Bachillerato y Selectividad en las dos opciones

Ferrovionario en la Dirección de Cercanías de Madrid

Diferentes estudios y trabajos

Jubilado en la actualidad

La educación ha sido mi pasión, el recuerdo del aula, el olor a tiza y el pantalón manchado de polvo blanco lo llevo siempre conmigo. Las voces con las preguntas de mis alumnos y mis respuestas, acertadas o no, quedan en nuestros recuerdos valiosos. He sido un afortunado, mi trabajo ha sido mi diversión favorita.