Problemas de Matemáticas II Aplicadas a las ciencias sociales

Por materias

(PAU 2020-2021)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

4 de octubre de 2021

Índice general

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Resúmenes teóricos

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- La matriz tiene que ser cuadrada

a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

- Propiedades:

a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.
- Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama

Singulares.

Rango de una matriz

Es el número de filas linealmente independientes.

De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinate de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right.$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.

Si $|A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) < nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si Rango($\overline{A}$) $\neq$Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 =$

$\cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango$(A) < m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- Si Rango$(A) = m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.
- Si Rango$(A) < m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entoces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|},\ \ x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

1.2. Andalucia

1.2.1. Modelo de 2020

Problema 1.2.1 Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ m & 3 \end{pmatrix}$.

a) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3X + 2Y = A \\ -4X + Y = B \end{array} \right.$$

b) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz C?

c) Para $m = 1$, calcule la matriz inversa de C.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} 3X + 2Y = A \\ -4X + Y = B \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3X + 2Y = A \\ 8X - 2Y = -2B \end{array} \right. \Longrightarrow 11X = A - 2B \Longrightarrow$$

$$X = \frac{1}{11}(A - 2B) \Longrightarrow X = \frac{1}{11}\left[\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3X + 2Y = A \\ -4X + Y = B \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12X + 8Y = 4A \\ -12X + 3Y = 3B \end{array} \right. \Longrightarrow 11Y = 4A + 3B \Longrightarrow$$

$$Y = \frac{1}{11}(4A + 3B) \Longrightarrow Y = \frac{1}{11}\left[4\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $|C| = 12 - 6m = 0 \Longrightarrow m = 2 \Longrightarrow \exists C^{-1} \ \forall m \in \mathbb{R} - \{2\}$.

c) Para $m = 1 \Longrightarrow C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$

1.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.2.2 Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A?

b) Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $XA - A^2 = I_3$.

Solución:

a) $|A| = -2m^2 + 3m + 5 = 0 \Longrightarrow m = -1$ y $m = \dfrac{5}{2} \Longrightarrow \exists\, A^{-1} \ \forall m \in \mathbb{R} - \left\{ -1, \dfrac{5}{2} \right\}$

b) Si $m = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -1/3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}$

$XA - A^2 = I_3 \Longrightarrow XA = I_3 + A^2 \Longrightarrow X = (I_3 + A^2)A^{-1} = I_3A^{-1} + AAA^{-1} =$

$$A^{-1} + A = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -1/3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

1.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.2.3 Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$.

a) Determine para qué valores del parámetro a, la matriz A tiene inversa

b) Para $a = 1$, calcule la inversa de A.

c) Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $AX = B^t$, siendo $B = (0\ 1\ \ -1)$

Solución:

a) $|A| = -a - 8 = 0 \Longrightarrow a = -8 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \ \forall a \in \mathbb{R} - \{-8\}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/9 & 1/9 & -2/9 \\ 1/9 & -2/9 & 4/9 \\ -2/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$

c) $AX = B^t \Longrightarrow X = A^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 4/9 & 1/9 & -2/9 \\ 1/9 & -2/9 & 4/9 \\ -2/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

1.3. Aragón

1.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.3.1 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $(B - A)^{-1}$.

b) Calcula la matriz X, que verifica $2X - AB = BA$.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones: $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $(B - A)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $2X - AB = BA \Longrightarrow X = \dfrac{1}{2}(BA + AB) =$
$\dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right] =$
$\dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}$

c) Se trata de un sistema homogéneo y el sistema es siempre compatible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |C| = 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

1.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.3.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Determina los valores del parámetro m para que A tenga inversa. Para $m = 2$, calcula A^{-1}.

b) Discute y resuelve, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones:

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = 9 - 6m = 0 \Longrightarrow m = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Si $m = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\overline{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & m & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right)$; $|B| = 9 - 6m = 0 \Longrightarrow m = \dfrac{3}{2}$

- ☛ Si $m \neq \dfrac{3}{2} \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 3 = \text{Rango}(\overline{M}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas, el sistema es compatible determinado y la solución es única.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{9 - 6m} = \frac{2}{2m - 3};\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{9 - 6m} = \frac{1}{3 - 2m};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{9 - 6m} = \frac{2}{2m - 3}$$

- ☛ Si $m = \dfrac{3}{2}$: $\overline{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3/2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

1.4. Asturias

1.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.4.1 Un hotel compra azúcar y sal a su proveedor habitual. El azúcar lo compra a $7m$ euros el kilogramo y la sal a $2m$ euros el kilogramo. La última compra ha sido de 22,5 kilogramos en total, entre azúcar y sal, y por ella ha pagado $98m$ euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades de azúcar y de sal compradas.

b) Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de la sal fuese 0,2 euros por kilogramo? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el precio de la sal. ¿Cuántos kilogramos compró de azúcar en tal caso?

Solución:

a) Sea x la cantidad de azúcar e y la cantidad de sal.

$$\begin{cases} 7mx + 2my = 98m \\ x + y = 22,5 \end{cases}$$

b) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 7m & 2m & 98m \\ 1 & 1 & 22,5 \end{array} \right)$ con $|A| = 5m = 0 \Longrightarrow m = 0$

☛ Si $m \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2 =$Rango$(A) =$nº de incognitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
La respuesta es afirmativa:

$$\begin{cases} 0,7x + 0,2y = 9,8 \\ x + y = 22,5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7x + 2y = 98 \\ x + y = 22,5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 53/5 \simeq 10,6 \\ y = 119/10 \simeq 11,9 \end{cases}$$

Si el precio de la sal es 0,2 euros por kg tenemos $2m = 0,2 \Longrightarrow m = 0,1 \Longrightarrow m \neq 0 \Longrightarrow$ compró 10,6 kg de azúcar y 11,9 kg de sal.

☛ Si $m = 0$: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 22,5 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones) En nuestro caso sería absurdo, el precio de la sal y del azúcar serían cero euros.

1.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.4.2 Un bar realiza todas las semanas un pedido de cerveza y vino a uno de sus dos proveedores. El proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro. El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a m euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1000 euros, mientras que si lo realiza al proveedor B paga $500m$ euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean los litros de cerveza y vino, respectivamente, comprados cada semana.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que el precio del litro de vino en el proveedor B sea también de dos euros? En caso afirmativo, ¿cuánto vino compra por semana, si el pedido semanal de cerveza es de 400 litros? Determina la cantidad de cerveza y vino comprada semanalmente en cualquier otro caso, es decir, cuando el precio del litro de vino en el proveedor B no sea de dos euros.

Solución:

a) Sea x litros de cerveza e y litros de vino.

$$\left\{\begin{array}{l} x + my = 500m \\ x + 2y = 1000 \end{array}\right.$$

b) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 500m \\ 1 & 2 & 1000 \end{array}\right)$ con $|A| = 2 - m = 0 \Longrightarrow m = 2$

- ☛ Si $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incognitas y el sistema es compatible determinado (solución única)

- ☛ Si $m = 2$: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1000 \\ 1 & 2 & 1000 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

  $x + 2y = 1000 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1000 - 2\lambda \\ y = \lambda \end{array}\right.$

- ☛ El sistema siempre tiene solución. Cuando $m \neq 2$ es única y cuando $m = 2$ infinitas. Luego si es posible que el vino valga 2 euros.
  Si se piden, en este último caso, 400 litros de cerveza: $400 = 1000 - 2\lambda \Longrightarrow y = \lambda = 300$ litros de vino.
  Si $m \neq 2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + my = 500m \\ x + 2y = 1000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 500 \end{array}\right.$

1.5. Cantabria

1.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.5.1 Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222€; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168€.

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las tres tarifas.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resolverlo.

d) El día que una familia formada por 2 adultos, 2 niños y 3 jubilados visita el museo, se ha aplicado un descuento especial de un 15 % a cada tarifa. ¿Cuánto pagan en total?

Solución:

a) Sea x el precio de una entrada de adulto, y el precio de una entrada de niño y z el precio de una entrada de jubilado.

$$\left\{\begin{array}{l} x + z = 5y \\ 5x + 3y + 3z = 222 \\ 3x + 2y + 4z = 168 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 5y + z = 0 \\ 5x + 3y + 3z = 222 \\ 3x + 2y + 4z = 168 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 4 & 168 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -2 & 222 \\ 0 & 17 & 1 & 168 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 28F_3 - 17F_2 \end{array}\right]$
$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -2 & 222 \\ 0 & 0 & 62 & 930 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible determindo. Solución única.

c) $z = \dfrac{930}{62} = 15$, $28y - 30 = 222 \Longrightarrow y = \dfrac{252}{28} = 9$ y $x - 45 + 15 = 0 \Longrightarrow x = 30$
La entrada de adulto cuesta 30€, la de niño 9€ y la de jubilado 15€.

d) Un día sin oferta la familia pagaría $2 \cdot 30 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 15 = 123$€. Si se ha aplicado un 15 % de descuento a las tres entradas, la familia ha pagado $123 \cdot 0,85 = 104,55$€.

1.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.5.2 Tres estudiantes de Economía, Cristina, Juan y Pedro, han preparado un trabajo de investigación que deben exponer en clase. Se repartieron las tareas de la siguiente forma: Cristina llevó a cabo la labor de recopilación de datos, en la que empleó un 40 % más que el tiempo que Juan necesitó para redactar el texto. Pedro desempeñó las tareas de revisión y de preparación de la exposición, siendo el tiempo dedicado a ello la mitad del empleado en total por Cristina y Juan. El tiempo total empleado fue de 18 horas. ¿Cuánto dedicó cada alumno a la elaboración del trabajo?

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el tiempo empleado por cada estudiante.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resolverlo.

Solución:

a) Sea x el tiempo empleado por Cristina, y el tiempo empleado por Juan y z el tiempo empleado por Pedro.

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1,4y \\ z = \dfrac{1}{2}(x+y) \\ x + y + z = 18 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ 5x - 7y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 5 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & -12 & -5 & -90 \\ 0 & 0 & -3 & -18 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible determinado. Solución única.

c) $z = \dfrac{18}{3} = 6$, $-12y - 30 = -90 \Longrightarrow y = \dfrac{60}{12} = 5$ y $x + 5 + 6 = 18 \Longrightarrow x = 7$
Cristina emplea 7 horas, Juan emplea 5 horas y Pedro 6 horas.

1.6. Castilla La Mancha

1.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.6.1 En un examen final de historia al que se presentan 120 alumnos se deja elegir entre 3 opciones (A, B o C). El número de alumnos que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C. Hay el doble de alumnos que realizan la opción C que las que escogen B.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos alumnos eligen cada opción.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sea x el número de alumnos que eligen la opción A, y el número de alumnos que eligen la opción B y z el número de alumnos que eligen la opción C.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=120\\ x=3(y+z)\\ z=2y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=120\\ x-3y-3z=0\\ 2y-z=0 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&1&120\\ 1&-3&-3&0\\ 0&2&-1&0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&1&120\\ 0&-4&-4&-120\\ 0&2&-1&0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3+F_2 \end{array}\right]$
$=\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&1&120\\ 0&-4&-4&-120\\ 0&0&-6&-120 \end{array}\right)\Longrightarrow$ sistema compatible determinado. Solución única:
$z=\dfrac{120}{6}=20$, $-4y-80=-120\Longrightarrow y=\dfrac{40}{4}=10$ y $x+10+20=120\Longrightarrow x=90$
La opción A la eligen 90 alumnos, la B la eligen 10 alumnos y la C la eligen 20 alumnos.

Problema 1.6.2 Se realiza una encuesta a los habitantes de un pueblo (con respuestas **SI, NO** o **NO SABE/NO CONTESTA**) sobre la necesidad de construir otra piscina cubierta. Se pregunta a las 600 personas mayores de edad que viven en el pueblo y los que dicen **NO** son la mitad de los que **NO SABE/NO CONTESTA**. Por estudios paralelos de fiabilidad se sabe que el 30 % del total de los que contestan **SI** o **NO**, mienten, y el total de estos últimos son 135 personas:

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar qué cantidad de personas eligen cada respuesta.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sea x el número de encuestados que responden **SI**, y el número de encuestados que responden **NO** y z el número de encuestados que responden **NO SABE/NO CONTESTA**.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=600\\ y=z/2\\ 0,3x+0,3y=135 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=600\\ 2y-z=0\\ x+y=450 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&1&600\\ 0&2&-1&0\\ 1&1&0&450 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&1&600\\ 0&2&-1&0\\ 0&0&-1&-150 \end{array}\right)\Longrightarrow$ sistema compatible determinado. Solución única:
$z=150$, $2y-150=0\Longrightarrow y=\dfrac{150}{2}=75$ y $x+75+150=600\Longrightarrow x=375$
Responden **SI** 375 personas, responden **NO** 75 personas y responden **NO SABE/NO CONTESTA** 150 personas.

Problema 1.6.3 Se pide:

a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ comprueba que $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M{-1}$.

b) Resuelve la ecuación $M \cdot X = N$

Solución:

a) $(M \cdot N)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

$M^{-1} \cdot N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Luego $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M{-1}$

b) $M \cdot X = N \Longrightarrow X = M^{-1}N = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

1.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.6.4 Una carpintería ofrece tres modelos de mesas cuyo precio varía en función del tipo de madera utilizada y lo clasifica en: gama baja, media y superior. El precio de la mesa de gama superior es el mismo que de las otras dos juntas. Vendiendo 50 mesas de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior y por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo de mesa.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sea x el número de mesas de gama baja, y el número de mesas de gama media y z el número de mesas de gama superior.

$$\begin{cases} x + y = z \\ 50y = 30z \\ 5x + 5y + 10z = 7500 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 1500 \end{cases}$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1500 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1500 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible determinado. Solución única:

$z = \dfrac{1500}{3} = 500$, $5y - 1500 = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{1500}{5} = 300$ y $x + 300 - 500 = 0 \Longrightarrow x = 200$

Se venden a 200€ las mesas de gama baja, a 300€ las mesas de gama media y a 500€ las mesas de gama alta.

Problema 1.6.5 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot C + D^T$.

b) Razona si A y B tienen matriz inversa (no es necesario calcularlas).

c) ¿Qué dimensiones tienen las matrices resultantes de los productos $D \cdot C$ y $D^T \cdot C^T$? (no es necesario hacer las multiplicaciones).

Solución:

a) $A \cdot C + D^T = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11/3 \end{pmatrix}$

b) $|A| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$
$|B| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$

c) $\underset{1\times 2}{D} \cdot \underset{2\times 1}{C} = \underset{1\times 1}{D \cdot C}$
$\underset{2\times 1}{D^T} \cdot \underset{1\times 2}{C^T} = \underset{2\times 2}{D^T \cdot C^T}$

Problema 1.6.6 En un concesionario de motos disponen de 100 motos dispuestas para su venta. Las motos son de tres tipos: las que consumen gasolina únicamente, las que usan gasolina y aceite y las eléctricas. Las más numerosas son las que usan gasolina y aceite, y la diferencia entre la cantidad de estas y las de gasolina es igual a la mitad del número de eléctricas. La diferencia entre las de gasolina y las eléctricas es igual a la tercera parte de las que utilizan gasolina y aceite.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas motos hay de cada tipo.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sea x el número de motos de gasolina, y el número de motos de gasolina y aceite y z el número de motos eléctricas.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ y - x = z/2 \\ x - z = y/3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 100 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 4 & 1 & 200 \\ 0 & -4 & -6 & -300 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} =$
$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 4 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & -5 & -100 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible determinado. Solución única:
$z = \dfrac{100}{5} = 20$, $4y + 20 = 200 \Longrightarrow y = \dfrac{180}{4} = 45$ y $x + 45 + 20 = 100 \Longrightarrow x = 35$
Hay 20 motos eléctricas, 45 de gasolina y aceite y 35 de gasolina.

1.7. Castilla León

1.7.1. Modelo de 2020

Problema 1.7.1 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y-z=a \\ ax+2y-z=3a \\ 2x+ay-z=6 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ a & 2 & -1 & 3a \\ 2 & a & -1 & 6 \end{array}\right); \quad |A|=2a-a^2=0 \Longrightarrow a=0,\ \ a=2$$

- Si $a\neq 0$ y $a\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a=2$:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+2y-z=6 \\ 2x+2y-z=6 \end{cases}\Longrightarrow \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\begin{cases} x+y-z=2 \\ z=2 \end{cases}\Longrightarrow \begin{cases} x=4-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases}$$

Problema 1.7.2 Se consideran las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{c} 1 \\ -3 \end{array}\right)$. Calcular, cuando sea posible, los productos matriciales AB y BA.
Solución:

$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

Problema 1.7.3 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz $Y = A^2 + BB^t$ donde B^t es la matriz traspuesta de B.

b) Determinar la matriz X para que se verifique la ecuación $2AX = B$.

Solución:

a) $Y = A^2 + BB^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

b) $2AX = B \Longrightarrow X = \frac{1}{2}A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$

Problema 1.7.4 Añadir una ecuación al sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$, de forma que el sistema resultante sea incompatible.

Solución:

Bastaría añadir la ecuación $x = 7$: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \\ x = 7 \end{cases}$

1.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.7.5 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - az = 1 \\ x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right); \quad |A| = 4a - 5 = 0 \Longrightarrow a = \frac{5}{4}$$

- Si $a\neq \dfrac{5}{4}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=\dfrac{5}{4}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -5/4 & 1\\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -9/4 & 0\\ 0 & 4 & -3 & -3 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 3F_3-4F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -9/4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=1\\ x+y-z=1\\ x+2y-2z=-2 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=4\\ y=6\\ z=9 \end{array}\right.$$

Problema 1.7.6 Un hijo tiene 22 años menos que su padre y la suma de sus edades es 46 años ¿qué edad tiene el hijo?
Solución:
Sea x la edad del hijo e y la edad del padre.

$$\left\{\begin{array}{l} x+22=y\\ x+y=46 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x-y=-22\\ x+y=46 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=12\\ y=34 \end{array}\right.$$

1.8. Cataluña

1.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.8.1 En una fiesta familiar se han reunido 20 personas. Si contamos al total de hombres y mujeres juntos, observamos que hay el triple que de niños. Además, sabemos que, si hubiera asistido una mujer más, el número de mujeres habría sido igual que el número de hombres.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños asistir a la fiesta.

b) Resolver el sistema del apartado anterior e interprete el resultado.

Solución:
Sean x : nº de hombres, y : nº de mujeres y z : nº de niños.

a) $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=20\\ 3z=x+y\\ x=y+1 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x+y+z=20\\ x+y-3z=0\\ x-y=1 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=8\\ y=7\\ z=5 \end{array}\right.$$

b) Hay 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños.

Problema 1.8.2 Considere la matriz $A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{array}\right)$

a) Hallar la expresión general de A^n. Demostrar que la inversa de A^n es $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Encuentra la matriz X que satisface la ecuación matricial $A^{10}X - A^{20} = A$.

Solución:

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|A^n| = 1$, $Adj(A^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (Adj(A^n))^t = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A^n)^{-1} = \dfrac{(Adj(A^n))^t}{|A^n|} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{10}X - A^{20} = A \Longrightarrow A^{10}X = A + A^{20} \Longrightarrow X = (A^{10})^{-1}(A + A^{20}) = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.8.3 La tabla siguiente muestra los ingresos, en miles de euros, de una tienda que dispone de tres locales, durante los meses de enero, febrero y marzo de 2020.

	Enero	Febrero	Marzo
Local 1	13,5	13,2	4,2
Local 2	11	12,5	3,8
Local 3	15	14	2,7

Hemos recogido la información anterior en la matriz A, en el que cada fila indica un local y cada columna el mes correspondiente:

$$A = \begin{pmatrix} 13,5 & 13,2 & 4,2 \\ 11 & 12,5 & 3,8 \\ 15 & 14 & 2,7 \end{pmatrix}$$

a) Considere los vectores $v = (1\ 1\ 1)$ y $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Haga las operaciones $v \cdot A$ y $A \cdot w$. Interprete en cada caso el resultado obtenido.

b) La matriz B recoge los resultados del trimestre siguiente, es decir, los ingresos correspondientes a los meses de abril, mayo y junio de 2020:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix}$$

Desconocemos el dato correspondiente al mes de junio del local 3, que hemos denominado x, pero sabemos que el rango de la matriz B es 2. Encuentre el valor de x.

Solución:

a) $v\cdot A=(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 13,5 & 13,2 & 4,2\\ 11 & 12,5 & 3,8\\ 15 & 14 & 2,7\end{pmatrix}=(39,5\ \ 39,7\ \ 10,7)$ y representa los ingresos de los tres locales juntos por meses: Enero con 39500€, Febrero con 39700€ y Marzo con 10700€.

$A\cdot w=\begin{pmatrix} 13,5 & 13,2 & 4,2\\ 11 & 12,5 & 3,8\\ 15 & 14 & 2,7\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30,9\\ 27,3\\ 31,7\end{pmatrix}$ y representa los ingresos de cada uno de los locales: Local 1 con 30900€, Local 2 con 27300€ y Local 3 con 31700€.

b) $|B|=2(x-7)=0\Longrightarrow x=7$. Cuando $x=7\Longrightarrow |B|=0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 6\\ 2 & 7\end{vmatrix}=2\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(B)=2$. Luego el valor buscado es $x=7$.

Problema 1.8.4 La Filomena hace una fiesta e invita a amigos a comer un pastel. Ha ido a la tienda y ha comprado una docena de huevos, una bolsa de harina de almendra y un paquete de azúcar moreno. La fiesta ha sido un éxito y decide repetir el encuentro y volver a hacer el pastel. Volver a la tienda y compra otra docena de huevos y dos bolsas de harina de almendra. Pero una vez en casa se da cuenta que no tiene nada de azúcar. Volver a la tienda y compra un paquete de azúcar moreno y también otra docena de huevos. La primera compra le costó 6€, la segunda 6,5€ y la última 3,5€.

a) Plantea un sistema de ecuaciones con los datos del problema.

b) Calcule el precio de una docena de huevos, el de una bolsa de harina de almendra y el de un paquete de azúcar moreno.

Solución:
Sean x : precio de una docenas de huevos, y : precio de una bolsa de harina y z : precio de un paquetes de azúcar.

a) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=6\\ x+2y=6,5\\ x+z=3,5\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=6\\ 2x+4y=13\\ 2x+2y=7\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1,5\\ y=2,5\\ z=2\end{array}\right.$

b) La docena de huevos ha costado $1,5$€, bolsa de harina $2,5$€ y el paquete de azúcar 2€.

1.9. Comunidad valenciana

1.9.1. Modelo de 2020

Problema 1.9.1 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$
Se pide:

a) Calcular $(AB)^{-1}$.

b) Calcular AB^t-A^tB.

c) Resolver la ecuación $B^tX+A^tB=A^t$.

siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B, respectivamente.

Solución:

a) Calcule $(AB)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$.

b) $AB^t - A^tB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

c) $B^tX + A^tB = A^t \Longrightarrow B^tX = A^t - A^tB = A^t(I - B) \Longrightarrow X = (B^t)^{-1}A^t(I - B)$
$B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$X = (B^t)^{-1}A^t(I-B) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

1.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.9.2 En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de 62000 euros. En la empresa hay trabajadores de tres categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de 1000 euros y el de los trabajadores de la categoría C de 2000 euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un 4 % el salario a los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará en un 10 % el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios en el próximo mes será un 2 % inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa?

Solución:

Sean x : nº de trabajadores de categoría A, y : nº de trabajadores de categoría B y z : nº de trabajadores de categoría C.

- ☛ $\begin{cases} x + y + z = 57 \\ 800x + 1000y + 2000z = 62000 \\ 800 \cdot 1,04x + 1000y + 2000 \cdot 0,9z = 0,98 \cdot 62000 \end{cases} \Longrightarrow$
$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ 4x + 5y + 10z = 310 \\ 104x + 125y + 225z = 7595 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 16 \\ z = 11 \end{cases}$

- ☛ Hay 30 trabajadores de categoría A, 16 trabajadores de categoría B y 11 trabajadores de categoría C.

1.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.9.3 Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniata, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8,50€ el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10€, 6€ y 8€. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo de café que ha de utilizarse en la mezcla.

Solución:

Sean x : cantidad de café colombiano, y : cantidad de café colombiano y z cantidad de café keniata.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 10x + 6y + 8z = 8,5 \\ x = 3y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 4,25 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 3/8 = 0,375 \\ y = 1/8 = 0,125 \\ z = 1/2 = 0,5 \end{cases}$$

La mezcla debe llevar un 37,5 % de café colombiano, un 12,5 % de café brasileño y un 50 % de café keniata.

Problema 1.9.4 Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la inversa de la matriz $A - B$.

b) Calcula la matriz X de dimensión 2×3, que satisface la ecuación $XA + C = XB$.

c) ¿Es posible hacer el producto BC? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué.

Solución:

a) $(A-B)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $XA + C = XB \Longrightarrow XA - XB = -C \Longrightarrow X(A-B) = -C \Longrightarrow$

$X = -C(A-B)^{-1} = -\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1/3 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$

c) $\underset{3\times 3}{B} \cdot \underset{2\times 3}{C} \Longrightarrow$ no se pueden multiplicar, el número de columnas de B es distinto del número de filas de C.

$\underset{2\times 3}{C} \cdot \underset{3\times 3}{B} = \underset{2\times 3}{CB} \Longrightarrow$ si se pueden multiplicar, el número de columnas de C es igual al número de filas de B.

$CB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

1.10. Extremadura

1.10.1. Modelo de 2020

Problema 1.10.1 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Halla la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $AX + X = B$. Justifica la respuesta.

Solución:

$AX + X = B \Longrightarrow (A+I)X = B \Longrightarrow (A+I)^{-1}(A+I)X = (A+I)^{-1}B \Longrightarrow X = (A+I)^{-1}B$

$$X = \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 & -4 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.10.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ x & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z & 8 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2.
Calcula, justificando la respuesta, los valores de x, y y z para que se verifique que $A^tB = I + C$ siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Solución:
$A^tB = I+C \Longrightarrow = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 8 \\ 15 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3x-2 & 4x+2y \\ 15 & 16-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 & 8 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 3x - 2 = z + 1 \\ 4x + 2y = 8 \\ 16 - 3y = 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 1.10.3 Sea A la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & x \end{pmatrix}$

a) Determina, justificando la respuesta para qué valores de x no existe la inversa de A.

b) Calcula la inversa de A para $x = 0$.

Solución:

a) $|A| = -6(x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1$

b) Si $x = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.10.4 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $AX - B^t = 2C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

Solución:
$AX - B^t = 2C \Longrightarrow AX = 2C + B^t \Longrightarrow X = A^{-1}(2C + B^t) =$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right] =$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 & -1 \\ 1 & 20 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 1.10.5 Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

b) Calcular la inversa de A para $x = 2$.

Solución:

a) $|A| = 4x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Problema 1.10.6 Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -3x + 2y - z = -2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 0 & 5 & 2 & 16 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible determinado.

$z = 3,\ -5y - 3 = -13 \Longrightarrow y = 2,\ x + 2 + 3 = 6 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}\right.$

1.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.10.7 Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left\{\begin{array}{l} 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2X - 3Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Solución:

$\left[3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\right](2) + \left[2X - 3Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix}\right](-3) \Longrightarrow$

$13Y = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 30 & -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 26 & -26 \end{pmatrix} \Longrightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$3X + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow 3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Problema 1.10.8 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A.

b) Para $x = 2$, resuelve la ecuación matricial $AX - B = C$.

Solución:

a) $|A| = x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

b) $AX - B = C \Longrightarrow AX = C + B \Longrightarrow X = A^{-1}(C + B) =$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 7 & -1 \\ 15 & -7 \end{pmatrix}$$

Problema 1.10.9 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2.

Calcular, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique que $A^tB = C - zI$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4y - 2x & x - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z & 1 \\ 0 & -z - 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ 4y - 2x = 0 \\ x - 12 = -z - 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

1.11. Galicia

1.11.1. Modelo de 2020

Problema 1.11.1 Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule las matrices $A + B$ y $3C - B$

b) Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear $A+B = 3C-B$ y resuélvalo.

Solución:

a) $A+B=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$3C-B=3\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a+b=3c-b \\ a-b=-9+b \\ a+3=3c-3 \end{array}\right.\Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} a+2b-3c=0 \\ a-2b=-9 \\ a-3c=-6 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=-3 \\ b=3 \\ c=1 \end{array}\right.$$

1.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.11.2 Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A.

b) Despeje la matriz X tal que $XA+B=C$ y calcúlela para $m=1$.

Solución:

a) $|A|=2m=0\Longrightarrow m=0\Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall m\in\mathbb{R}-\{0\}$

b) $XA+B=C\Longrightarrow XA=C-B\Longrightarrow X=(C-B)A^{-1}=$

$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

1.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.11.3 Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores x, y, z para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Calcule A^{-1} para $x=3$, $y=1$, $z=0$.

c) Resuelva el sistema $BA=C$ para $a=1$.

Solución:

a) $|A| = y^2(1-z) = 0 \Longrightarrow y = 0$ y $z = 1 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$

b) Si $x = 3$, $y = 1$, $z = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $BA = C \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} x+2y+3 & y+3z & x+2y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{cases} x+2y+3 = 4 \\ y+3z = 0 \\ x+2y+3z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 1/3 \end{cases}$

1.12. Islas Baleares

1.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.12.1 Dado el sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 5x + ay - z = 11 \\ 3x - y + az = 2 \end{cases}$$

a) Discutir para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

b) Resolverlo la solución del sistema para $a = 2$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & a & -1 & 11 \\ 3 & -1 & a & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a^2 - 8a - 9 = 0 \Longrightarrow a = -1$ y $a = 9$.

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 9 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & -6 & -14 \\ 0 & -4 & -4 & -13 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & -6 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible no tiene solución

- Si $a = 9$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 9 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & 9 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_2 - 3F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & -14 \\ 0 & -4 & 6 & -13 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible no tiene solución

b) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 5 \\ 5x + 2y - z = 11 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 8/7 \\ y = 64/21 \\ z = 17/21 \end{array}\right.$$

Problema 1.12.2 Considera las siguientes matrices:

$$M = \left(\begin{array}{ccc} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{array}\right), \quad N = \left(\begin{array}{rr} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{array}\right)$$

a) Razona si es posible calcular los productos MN y M^2. En caso de que lo sea, Calcular los mismos.

b) Estudia para qué valores de k es MN invertible.

c) Calcular la inversa de MN para $k = 1$.

d) Para $k = 1$, Calcular la matriz X que cumple $(MN)X = B$ con $B = \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$

Solución:

a) $\underset{2\times 3}{M} \cdot \underset{3\times 2}{N} = \underset{2\times 2}{MN} \Longrightarrow$ el producto es posible hacerlo y su resultado es una matriz 2×2.
$M^2 = \underset{2\times 3}{M} \cdot \underset{2\times 3}{M} \Longrightarrow$ el producto no es posible hacerlo, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda.

b) $MN = \left(\begin{array}{ccc} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rc} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{array}\right)$

c) $|MN| = k(23k - 2) = 0 \Longrightarrow k = 0$ y $k = \dfrac{2}{23} \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall k \in \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{2}{23}\right\}$

d) Si $k = 1 : MN = \left(\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -7 & 14 \end{array}\right) \Longrightarrow (MN)^{-1} = \left(\begin{array}{rr} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{array}\right)$

e) $(MN)X = B \Longrightarrow X = (MN)^{-1}B = \left(\begin{array}{rr} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rr} 4/3 & -1/21 \\ 2/3 & 1/21 \end{array}\right)$

1.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.12.3 Dadas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calcular A^2

b) Calcular a, b y c tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a+b = 0 \\ b^2 = 1 \\ b+c = 0 \\ c^2 = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \pm 1 \\ a+b = 0 \\ b = \pm 1 \\ b+c = 0 \\ c^2 = \pm 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1, \; b = -1, \; c = 1 \\ a = -1, \; b = 1, \; c = -1 \end{array} \right.$$

Problema 1.12.4 En una tienda de fruta hemos comprado manzanas a 0,5 euros cada una, aguacates a 1 euro y piñas a 1,5 euros la pieza. Al llegar a la caja nos damos cuenta que llevamos 70 piezas de fruta, el coste total de las cuales es de 68 euros. También observamos que si las manzanas que llevamos fueran aguacates y los aguacates fueran manzanas, la compra nos saldría 4 euros más barata.

a) Identifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Determinar el número de piezas de cada fruta que hemos comprado.

Solución:
Sean x el número de manzanas, y el número de aguacates y z el número de piñas.

a) $\left\{ \begin{array}{l} x+y+z = 70 \\ 0,5x+y+1,5z = 68 \\ x+0,5y+1,5z = 64 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z = 70 \\ x+2y+3z = 136 \\ 2x+y+3z = 128 \end{array} \right.$

b)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & 2 & 3 & 136 \\ 2 & 1 & 3 & 128 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 2 & 66 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 2 & 66 \\ 0 & 0 & 3 & 54 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\text{Sistema compatible determinado}$$
$$z = \frac{54}{3} = 18,\ y + 36 = 66 \Longrightarrow y = 30,\ x + 30 + 18 = 70 \Longrightarrow x = 22$$

La compra se compone de 22 manzanas, 30 aguacates y 18 piñas.

1.13. Islas Canarias

1.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.13.1 Tres nietos desean hacer un regalo de 60€ a su abuela y deciden reunir esta cantidad de la siguiente forma: Luis, el mayor, aporta el triple de lo que aportan los otros dos juntos. Carmen aporta 3€ por cada dos que aporta Pedro.

a) Plantear el sistema de ecuaciones lineales.

b) Resolver el sistema.

c) ¿Cuánto aporta cada nieto?

Solución:
Sean x lo que aporta Luis, y lo que aporta Carmen y z lo que aporta Pedro.

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x = 3(y + z) \\ 2y = 3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x - 3y - 3z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{array}\right.$

b)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -4 & -4 & -60 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -4 & -4 & -60 \\ 0 & 0 & -10 & -60 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\text{Sistema compatible determinado}$$

$$z = \frac{60}{10} = 6,\ -4y - 24 = -60 \Longrightarrow y = 9,\ x + 9 + 6 = 60 \Longrightarrow x = 45$$

Luis pone 45€, Carmen 9€ y Pedro 6€.

1.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.13.2 En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos: A, sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros; B, con defecto no apreciable, con una rebaja del 20 % sobre el precio de los anteriores y C, con defecto apreciable, con una rebaja del 60 % sobre el precio de los que no tienen defecto. Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40 % de los que no lo tienen.

a) Plantear el sistema de ecuaciones.

b) Resolver correctamente.

c) ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

Solución:
Sean x sin defecto, y con defecto no apreciable y z con defecto apreciable.

a) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ y+z=0,4x \\ 20x+0,8\cdot 20y+0,4\cdot 20z=1280 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ 2x-5y-5z=0 \\ 5x+4y+2z=320 \end{array}\right.$

b)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 2 & -5 & -5 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 320 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-5F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -7 & -7 & -140 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 7F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -7 & -7 & -140 \\ 0 & 0 & -14 & -70 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible determinado

$$z=\frac{70}{14}=5,\ -7y-35=-140\Longrightarrow y=15,\ x+15+5=70\Longrightarrow x=50$$

c) Hay 50 pantalones tipo A, sin defecto, 15 tipo B, con defecto no apreciable y 5 tipo C, con defecto apreciable.

1.14. La Rioja

1.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.14.1 Discute el siguiente sistema en función del parámetro a.

$$\left\{\begin{array}{l} x+ay=1 \\ 2x-ay+2az=5 \\ x+3y-z=0 \end{array}\right.$$

Resuelve el sistema si $a=1$.
Solución:

- $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & -a & 2a & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$; $|A|=2a^2-3a=0\Longrightarrow a=0$ y $a=\dfrac{3}{2}$

- Si $a\neq 0$ y $a\neq\dfrac{3}{2}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$nº incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Luego el sistema es incompatible (no tiene solución)

☛ Si $a = \dfrac{3}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3/2 & 0 & 1 \\ 2 & -3/2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & -9/2 & 3 & 3 \\ 0 & 3/2 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & -9/2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + 2F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 3 \\ -3y + 6 = 3 \Longrightarrow y = 1 \\ x + 1 = 1 \Longrightarrow x = 0 \end{array}\right. \quad \text{Luego: } x = 0,\ y = 1 \text{ y } z = 3.$$

Problema 1.14.2 Consideramos la ecuación matricial

$$X^2 - X = 2I$$

Donde I es la matriz identidad.

a) ¿Qué matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen la ecuación?

b) ¿Se puede expresar en general la diferencia $X^2 - X$ como un producto de matrices?

c) Si X es una matriz cuadrada de orden n que cumple la ecuación, ¿cuál es su rango?

Solución:

a) $X^2 - X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} a^2 & ab - b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} a^2 - a & ab - 2b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} a^2 - a = 2 \Longrightarrow a = -1,\ a = 2 \\ ab - 2b = 0 \Longrightarrow a = 2,\ b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1, \text{ y } b = 0 \\ a = 2, \text{ y } b = \text{cualquiera} \end{array}\right.$

b) $X^2 - X = X(X - I)$

c) $X^2 - X = 2I \Longrightarrow X^2 - X = X(X - I) = 2I \Longrightarrow$
$X\left(\dfrac{1}{2}(X - I)\right) = I \Longrightarrow \exists X^{-1} = \dfrac{1}{2}(X - I) \Longrightarrow |X| \neq 0 \Longrightarrow$
Rango$(X) = n$.

1.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.14.3 En el último sorteo de la lotería primitiva Juan acertó 4 números. Su padre le preguntó qué números había acertado. Juan le planteó el siguiente acertijo para que adivinase tres de ellos: la suma de los tres números es 73; si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienes la suma de los otros dos; el doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades.

a) ¿Cuáles eran esos tres números?

b) ¿Cuál es el cuarto número, si es la mitad de la suma de los dos mayores de los tres anteriores?

Solución:

a) Sean x el número mayor, y el número intermedio y z el número menor.

$$\begin{cases} x+y+z=73 \\ x-3=y+z \\ 2z+x=3y+8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=73 \\ x-y-z=3 \\ x-3y+2z=8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=38 \\ y=20 \\ z=15 \end{cases}$$

b) El cuarto número$=\dfrac{38+20}{2}=29$

Problema 1.14.4 Sea A una matriz invertible de orden 2.

a) Halla las matrices X e Y que cumplen que

$$\begin{cases} AX+Y=I \\ AX-Y=O \end{cases}$$

(donde I es la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y O es la matriz nula)

b) En particular, calcula las soluciones X e Y para $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Sumando $2AX=I \Longrightarrow X=\dfrac{1}{2}A^{-1}$ y sustituyendo $A\dfrac{1}{2}A^{-1}-Y=O \Longrightarrow Y=A\dfrac{1}{2}A^{-1}=\dfrac{1}{2}AA^{-1}=\dfrac{1}{2}I$

b) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Luego:

$$X=\frac{1}{2}A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1.15. Madrid

1.15.1. Modelo de 2020

Problema 1.15.1 Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a, b y c para que se verifique $A^2 = A - B$.

b) Para $a = b = c = 2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ ac+2b & 2c & 1 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ ac+2b & 2c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{cases} 2a = a-1 \\ ac+2b = b-1 \\ 2c = c-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$

b) Para $a = b = c = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 1.15.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + z = 2a - 1 \\ 2x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \; a = 2$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 0 & -2\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=-1\\ 2x+y=1\\ x+z=1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3/2\\ y=-2\\ z=-1/2\end{array}\right.$$

1.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.15.3 Se considera la matriz A

$$A=\left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 1\\ 0 & b & 0\\ 1 & 0 & a\end{array}\right)$$

.

a) Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que $A=A^{-1}$.

b) Para $a=b=2$, calcule la matriz inversa de A.

Solución:

a) $A=A^{-1}\Longrightarrow AA=AA^{-1}\Longrightarrow A^2=I\Longrightarrow A\cdot A=\left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 1\\ 0 & b & 0\\ 1 & 0 & a\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 1\\ 0 & b & 0\\ 1 & 0 & a\end{array}\right)=$

$$\left(\begin{array}{ccc} a^2+1 & 0 & 2a\\ 0 & b^2 & 0\\ 2a & 0 & a^2+1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a^2+1=1\\ a=0\\ b^2=1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=0\\ b=\pm 1\end{array}\right.$$

b) Para $a=b=2\Longrightarrow A=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{array}\right)\Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{ccc} 2/3 & 0 & -1/3\\ 0 & 1/2 & 0\\ -1/3 & 0 & 2/3\end{array}\right)$

Problema 1.15.4 Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y-z=-1\\ x-y+a^2z=3\\ 2x-y+z=4\end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a=1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & a^2 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right);\quad |A|=3(a^2-1)=0\Longrightarrow a=\pm 1$$

- Si $a\neq\pm 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 4\\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3-3F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y-z=-1\\ x-y+z=3\\ 2x-y+z=4 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=-2+\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

1.15.3. Convocatoria Ordinaria-Coincidente junio de 2020

Problema 1.15.5 Se consideran las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} a & 2 & 6\\ 2 & a & 4\\ 2 & a & 6 \end{array}\right);\quad B=\left(\begin{array}{c} 3\\ 4\\ 2 \end{array}\right)$$

a) Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.

b) Para $a=1$, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que $AX=B$.

Solución:

a) $|A|=2(a^2-4)=0\Longrightarrow a=\pm 2\Longrightarrow \nexists A^{-1}$ si $a=\pm 2\}$

b) Si $a=1\Longrightarrow A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 6\\ 2 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right)\Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{rrr} -1/3 & 1 & -1/3\\ 2/3 & 1 & -4/3\\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$

$$AX=B\Longrightarrow X=A^{-1}B=\left(\begin{array}{rrr} -1/3 & 1 & -1/3\\ 2/3 & 1 & -4/3\\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 3\\ 4\\ 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{r} 7/3\\ 10/3\\ -1 \end{array}\right)$$

Problema 1.15.6 Se desea rellenar una piñata para un cumpleaños con juguetes de 1, 2 y 5 euros. Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros, por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro. Si para rellenar la piñata se compran juguetes por valor de 228 euros, ¿cuántos juguetes de 1, 2 y 5 euros habría que comprar para introducir en la piñata?
Solución:
Sean x los juguetes de un euro, y los de dos euros y z los de tres euros

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+5z=228 \\ -5y+z=0 \\ 2x-3y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12 \\ y=8 \\ z=40 \end{array}\right.$$

1.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.15.7 Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $a=2$, calcule, si existe, la matriz X que satisface $AX=B$.

Solución:

a) $|A|=-a-1=0 \Longrightarrow a=-1 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \ \forall a \in \mathbb{R}-\{-1\}$

b) Si $a=2 \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

$$AX=B \Longrightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.15.8 Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2ay+z=0 \\ -x-ay=1 \\ -y-z=-a \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuelva el sistema para $a=3$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right)$, $|A|=1-a=0 \Longrightarrow a=1$.

- Si $a \in \mathbb{R}-\{1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a=1$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\\ F_3\end{array}\right]=$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a=3$:
$$\left\{\begin{array}{l} x+6y+z=0\\ -x-3y=1\\ -y-z=-3\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=-1\\ z=4\end{array}\right.$$

1.16. Murcia

1.16.1. Modelo de 2020

Problema 1.16.1 Sean las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 2 & 1\\ 1 & 1\end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} 1 & a\\ a & 0\end{array}\right)$ y $C=\left(\begin{array}{rr} 0 & -1\\ -1 & 2\end{array}\right)$.

a) Calcule A^{-1}.

b) Calcule el valor del parámetro a para que $B+C=A^{-1}$.

c) Calcule el valor del parámetro a para que $A+B+C=3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) Calcule $A^{-1}=\left(\begin{array}{rr} 1 & -1\\ -1 & 2\end{array}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{cc} 1 & a\\ a & 0\end{array}\right)+\left(\begin{array}{rr} 0 & -1\\ -1 & 2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 1 & a-1\\ a-1 & 2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} 1 & -1\\ -1 & 2\end{array}\right)\Longrightarrow a-1=-1\Longrightarrow a=0$

c) $\left(\begin{array}{cc} 2 & 1\\ 1 & 1\end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} 1 & a\\ a & 0\end{array}\right)+\left(\begin{array}{rr} 0 & -1\\ -1 & 2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 3 & a\\ a & 3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 3 & 0\\ 0 & 3\end{array}\right)\Longrightarrow a=0$

1.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.16.2 Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:
$$\left\{\begin{array}{l} x+3y+z=5\\ ax+2z=0\\ ay-z=a\end{array}\right.$$
Resolverlo para $a=1$.

Solución:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 3 & 1 & 5\\ a & 0 & 2 & 0\\ 0 & a & -1 & a\end{array}\right);\quad |A|=a(a+1)=0\Longrightarrow a=0,\ a=-1$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ x + 2z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2z = -2 \Longrightarrow z = 1 \\ -3y + 1 = -5 \Longrightarrow y = 2 \\ x + 6 + 1 = 5 \Longrightarrow x = -2 \end{array}\right.$$

1.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.16.3 Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular el valor de a y b para que se cumpla: $AB = BA$.

b) Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación $XB - A = I$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12 = 3b \\ 2 = 2a \\ 3a = 3 \\ 3b = 12 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 4 \end{array}\right.$$

b) $XB - A = I \Longrightarrow XB = I + A \Longrightarrow X = (I + A)B^{-1} =$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.17. Navarra

1.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.17.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes cuestiones:

a) Calcule A^{-1} y B^{-1}

b) Resuelva la ecuación matricial $C - A = 2X - 6I$

c) Resuelva la ecuación matricial $AXB = C$

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $C - A = 2X - 6I \Longrightarrow 2X = C - A + 6I \Longrightarrow X = \dfrac{1}{2}(C - A + 6I) =$
$\dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 11/2 \end{pmatrix}$

c) $AXB = C \Longrightarrow X = A^{-1}CB^{-1} =$
$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}$

1.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.17.2 Un cajero automático contiene billetes de 10€, 20€ y 50€. En total hay 800 billetes con un importe de 21000€. El número de billetes de 10€ es igual que el número de billetes de 20€ y 50€ juntos. Calcule cuántos billetes hay de cada tipo.

a) Plantee el sistema de ecuaciones lineales.

b) Resuelva el sistema por el método de Gauss.

Solución:

Sean x el número de billetes de 10€, y el número de billetes de 20€ y z el número de billetes de 50€.

a) $\begin{cases} x + y + z = 800 \\ 10x + 20y + 50z = 21000 \\ x = y + z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 800 \\ x + 2y + 5z = 2100 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & 2 & 5 & 2100 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 1300 \\ 0 & -2 & -2 & -800 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_1 \end{bmatrix} =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 1300 \\ 0 & 0 & 6 & 1800 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible determinado.

$z = \dfrac{1800}{6} = 300$, $y + 1200 = 1300 \Longrightarrow y = 100$ y $x + 100 + 300 = 800 \Longrightarrow x = 400$
$x = 400$ billetes de 10€, $y = 100$ billetes de 20€, y $z = 300$ billetes de 50€.

1.18. País Vasco

1.18.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.18.1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Obtener los valores de los parámetros m y n para que la matriz A coincida con su traspuesta, y no tenga inversa.

b) Para $m = 0$ y $n = 3$, obtener, si se puede, la matriz inversa.

c) Para $m = 0$ y $n = 3$, resolver la ecuación matricial:

$$XA + 2I_3 = A^2$$

Solución:

a) $A = A^t \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = n \end{cases} \Longrightarrow$
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$|A| = n - 5 = 0 \Longrightarrow n = 5$. Si $n = 5 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.
En conclusión $n = 5$ y $m = -1$

b) Si $m = 0$ y $n = 3 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) Si $m = 0$ y $n = 3$:
$XA + 2I_3 = A^2 \Longrightarrow XA = A^2 - 2I_3 \Longrightarrow X = (A^2 - 2I_3)A^{-1} = AAA^{-1} - 2I_3A^{-1} =$
$A - 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -7 & 9 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

1.18.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.18.2 Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) ¿Se verifica la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Razona la respuesta.

b) Resolver la ecuación matricial:
$$XA = 2B^t + I_2$$

Solución:

a) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA + AB + BA + BB = A^2 + AB + BA + B^2$, para que se cumpla la expresió $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ tiene que cumplirse $AB = BA$:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Luego $AB = BA \Longrightarrow (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Esto no tiene por qué cumplirse con todas las matrices.

b) $XA = 2B^t + I_2 \Longrightarrow X = (2B^t + I_2)A^{-1} =$
$\left[2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}^{-1} =$
$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2/7 \\ 0 & -1/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10/7 \\ -2 & -3/7 \end{pmatrix}$

Capítulo 2

Programación Lineal

2.1. Andalucía

2.1.1. Modelo de 2020

Problema 2.1.1 Se pide:

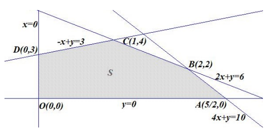
a) Represente gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones y determine sus vértices:

$$2x + y \le 6, \quad 4x + y \le 10, \quad -x + y \le 3, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$$

b) Calcule el máximo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto anterior e indique dónde se alcanza.

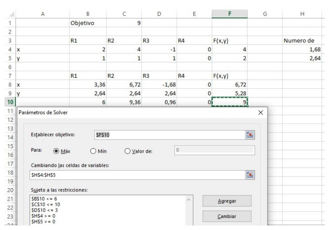
Solución:

a) Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(5/2,0)$, $B(2,2)$ y $C(1,4)$ y $D(0,3)$



b) $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto S: $\left\{\begin{array}{l} f(0,0) = -3 \\ f(5/2,0) = 7 \\ f(2,2) = 9 \\ f(1,4) = 9 \\ f(0,3) = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow$

Solución por solver :



El valor máximo será de 9 y se alcanza en cualquier punto del segmento que une los puntos $B(2,2)$ y $C(1,4)$.

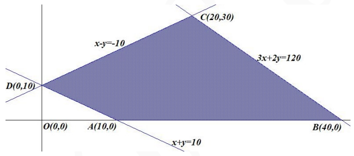
2.1.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.1.2 Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción.

Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?
Solución:
Sea x el nº de baterías tipo A e y el nº de baterías tipo B.

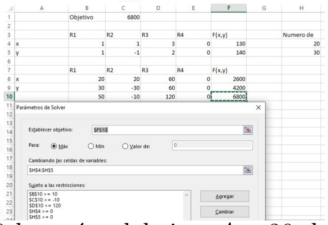
$f(x, y) = 130x + 140y$ en el recinto S:

$$\begin{cases} x + y \geq 10 \\ y \leq x + 10 \\ 150x + 100y \leq 6000 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \geq 10 \\ x - y \geq -10 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(10, 0)$, $B(40, 0)$, $C(20, 30)$ y $D(0, 10)$.

Solución por solver :



$f(x, y) = 130x + 140y$

$$\begin{cases} f(10, 0) = 1300 \\ f(40, 0) = 5200 \\ f(20, 30) = 6800 \\ f(0, 10) = 1400 \end{cases} \Longrightarrow$$

El valor máximo será de 6800€ y se alcanza con la producción de 20 baterías del tipo A y 30 del tipo B.

2.1.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.1.3 Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 4y \leq -19 \quad 3x - 4y \leq -13 \quad x \geq -7 \quad -x - y \geq 2$$

a) Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

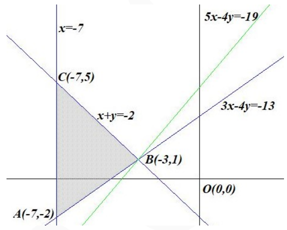
b) ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función $G(x, y) = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?

c) Responda de forma razonada si la función $G(x, y) = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{5}{2}y$ puede alcanzar el valor $\dfrac{47}{3}$ en la región factible hallada.

Solución:

a) La región es S:

$$\begin{cases} 5x - 4y \leq -19 \\ 3x - 4y \leq -13 \\ x \geq -7 \\ x + y \leq -2 \end{cases}$$

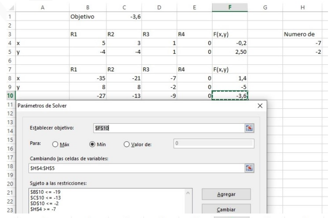


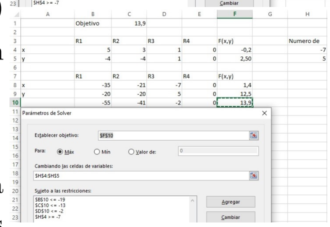
Los vértices a estudiar serán: $A(-7,-2)$, $B(-3,1)$ y $C(-7,5)$.

b) $G(x,y) = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{5}{2}y$

$$\begin{cases} G(-7,-2) = -\dfrac{18}{5} \simeq -3,6 \ \text{Mínimo} \\ \\ G(-3,1) = \dfrac{31}{10} \simeq 3,1 \qquad\qquad \Longrightarrow \\ \\ G(-7,5) = \dfrac{139}{10} \simeq 13,9 \ \text{Máximo} \end{cases}$$

Solución por solver :





La función $G(x,y)$ tiene el mínimo valor en el punto $A(-7,-2)$ y vale $-\dfrac{18}{5}$. Y tiene un máximo valor en el punto $C(-7,5)$ con un valor de $\dfrac{139}{10}$.

c) $\dfrac{47}{3} \simeq 15,667 > 13,9$ que es el valor máximo que puede tomar la función en ese recinto y, por tanto, es imposible obtener valores superiores.

2.2. Aragón

2.2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.2.1 Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en 1 par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines que vende a 120 euros. Se pide:

a) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b) Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

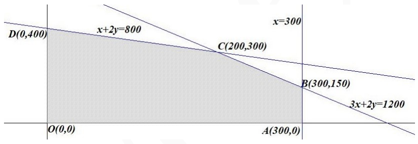
Solución:
Sea x el nº de ofertas A e y el nº de ofertas B.

	botas	mocasines	zapatillas	venta
A	1	3	7	360
B	2	2	0	120
	≤ 800	≤ 1200	≤ 2100	

a) $f(x,y) = 360x + 120y$ en el recinto S:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 800 \\ 3x + 2y \leq 1200 \\ 7x \leq 2100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 800 \\ 3x + 2y \leq 1200 \\ x \leq 300 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

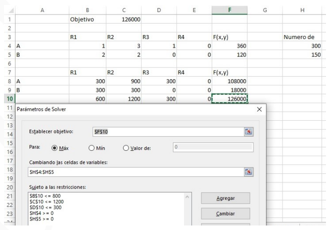
Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(300,0)$, $B(300,150)$, $C(200,300)$ y $D(0,400)$.



$$f(x,y) = 360x + 120y$$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(300,0) = 108000 \\ f(300,150) = 126000 \\ f(200,300) = 108000 \\ f(0,400) = 48000 \end{cases} \Longrightarrow$$

Solución por solver :



El valor máximo será de 126000€ y se alcanza con la venta de 300 ofertas A y 150 ofertas B.

b)

	botas	mocasines	zapatillas	venta
A	300	900	2100	108000
B	300	300	0	18000
$A+B$	600	1200	2100	126000
existencias	800	1200	2100	
sobrantes	200	0	0	

Quedan 200 botas.

2.2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.2.2 El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3€ y 2€, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60€.

a) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.

b) Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

Solución:
Sea x el nº de kg de soja e y el nº de kg de maíz.

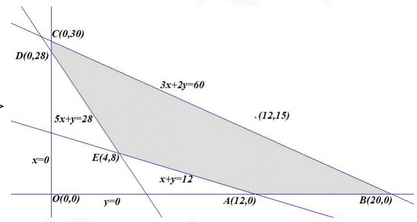
a)

	proteina	grasa vegetal	precio
soja	5	3	3
maiz	1	3	2
	≥ 28	≥ 36	

$f(x,y) = 3x + 2y$ en el recinto S:

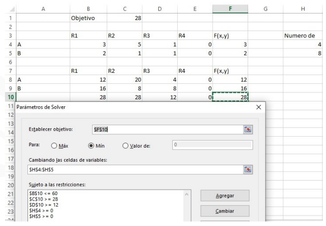
$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 605x + y \geq 28 \\ 3x + 3y \geq 36 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 605x + y \geq 28 \\ x + y \geq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(12,0)$, $B(20,0)$, $C(0,30)$, $D(0,28)$ y $E(4,8)$.

Solución por solver :



$f(x,y) = 3x + 2y$

$$\begin{cases} f(12,0) = 36 \\ f(20,0) = 60 \\ f(0,30) = 60 \\ f(0,28) = 56 \\ f(4,8) = 28 \end{cases} \Longrightarrow$$

El coste mínimo será de 28€ y se alcanza con el consumo de 4 kg de soja y 8 kg de maíz.

b) El punto $(12,15)$ está fuera de la región factible y no puede ser una solución posible.

2.3. Asturias

2.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.3.1 Una empresa monta dos tipos de palés. Cada palé tipo A requiere 3 horas de preparación en el taller $T1$ y 4 horas de preparación en el taller $T2$. Cada palé tipo B requiere 1 hora de preparación en el taller $T1$ y 3 horas de preparación en el taller $T2$. Cada semana, se dispone de un total de 30 horas de uso del taller $T1$ y de 60 horas de uso del taller $T2$. Cada palé tipo A contiene 1 caja y cada palé tipo B contiene 2 cajas, existiendo un compromiso comercial de entregar al menos 4 cajas semanales.

a) ¿Cuántos palés de cada tipo puede preparar en una semana para cumplir con todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría preparar 4 palés de cada tipo en una semana?

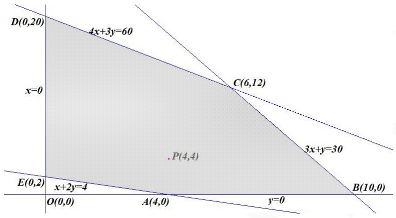
b) Si se obtiene un beneficio neto de 2000 euros con la venta de cada palé tipo A y de 1000 euros con cada palé tipo B, ¿cuántos debería preparar de cada tipo para maximizar el beneficio neto? ¿a cuánto ascendería dicho beneficio?

Solución:
Sea x el n$^{\text{o}}$ de palés tipo A e y el n$^{\text{o}}$ de palés tipo B.

a)

	Taller $T1$	Taller $T2$	cajas
A	3	4	2
B	1	3	1
	≤ 30	≤ 60	≥ 4

$$\begin{cases} 3x + y \leq 30 \\ 4x + 3y \leq 60 \\ 2x + y \geq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



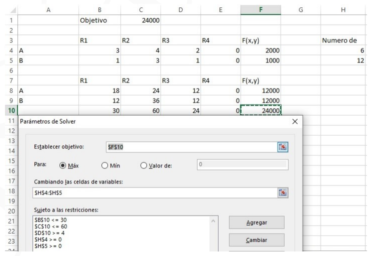
Los vértices a estudiar serán: $A(4,0)$, $B(10,0)$, $C(6,12)$, $D(0,20)$ y $E(0,2)$.
El punto $P(4,4)$ se encuentra dentro de la región factible. Luego se trata de una solución posible aunque no sea la óptima.

b) $f(x,y) = 2000x + 1000y$

$$\begin{cases} f(4,0) = 8000 \\ f(10,0) = 20000 \\ f(6,12) = 24000 \implies \\ f(0,20) = 20000 \\ f(0,2) = 2000 \end{cases}$$

Se deberán preparar 6 palés del tipo A y 12 del B con un beneficio máximo de 24000€.

Solución por solver :



2.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.3.2 Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasas. Una empresa dedicada al cuidado de este tipo de mascotas plantea diseñar una dieta para las mismas basada en el consumo de latas de dos marcas distintas M_1 y M_2. Se sabe que cada lata de la marca M_1 contiene 3 unidades de hidratos de carbono, 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas y que cada lata de la marca M_2 contiene 1 unidad de hidratos de carbono, 9 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Además, se sabe que el precio de cada lata de la marca M_1 es de 22 euros y que el precio de cada lata de la marca M_2 es de 24 euros.

a) ¿Cuántas latas de cada tipo se puede dar en un día a la mascota para cumplir todos los requisitos anteriores relativos a su dieta? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se le podría dar una lata de la marca M_1 y dos latas de la marca M_2?

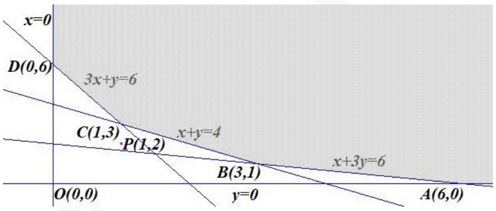
b) ¿Cuántas latas de cada tipo se debería dar en un día a la mascota para que el precio de su alimentación sea mínimo? ¿y para minimizar el número de latas de tipo M_1 que come ese día?

Solución:
Sea x el nº de latas M_1 e y el nº de latas M_2.

a)

	hidratos de carbono	proteínas	grasas	precio
M_1	3	3	1	22
M_2	1	9	1	24
	≥ 6	≥ 18	≥ 4	

$$\begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ 3x + 9y \geq 18 \\ x + y \geq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ x + 3y \geq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



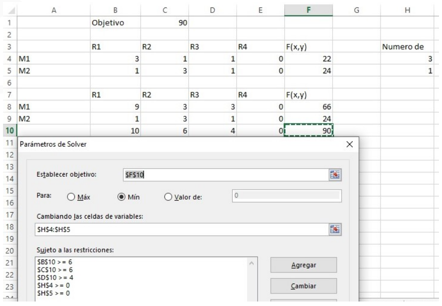
Los vértices a estudiar serán: $A(6,0)$, $B(3,1)$, $C(1,3)$ y $D(0,6)$
El punto $P(1,2)$ no se encuentra dentro de la región factible. Luego no es una solución posible.

b) $f(x,y) = 22x + 24y$

$$\begin{cases} f(6,0) = 132 \\ f(3,1) = 90 \\ f(1,3) = 94 \\ f(0,6) = 144 \end{cases} \Longrightarrow$$

Se deberán utilizar 3 latas del tipo M_1 y 1 del tipo M_2 con un gasto mínimo de 90€.
Si se quiere minimizar el número de latas M_1, se deberán utilizar 0 latas del tipo M_1 y 6 del tipo M_2 con un gasto mínimo de 144€.

Solución por solver :



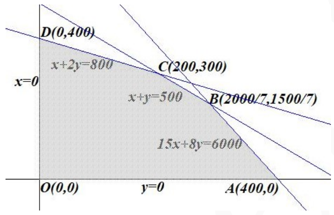
2.4. Cantabria

2.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.4.1 Una empresa elabora dos productos, A y B, que le proporcionan unos beneficios por kg de 5 y 7 euros respectivamente. Por cuestiones de logística, solo puede producir un máximo de 500 kg a la semana. Las horas semanales de trabajo disponibles son 3200; cada kg de A requiere 4 horas y cada kg de B, 8 h. Además, solo dispone de 1500 unidades de materia prima a la semana; cada kg de A necesita 3,75 unidades de materia prima; cada kg de B, 2 unidades. ¿Cuántos kilogramos de cada producto se pueden obtener semanalmente para maximizar los beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?
Solución:
Sea x el nº de kg del producto A e y el nº de kg del producto B.

$f(x,y) = 5x + 7y$ sujeto a

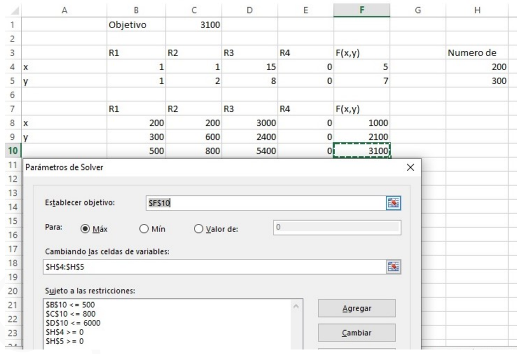
$$\begin{cases} x + y \leq 500 \\ 4x + 8y \leq 3200 \\ 3,75x + 2y \leq 1500 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 500 \\ x + 2y \leq 800 \\ 15x + 8y \leq 6000 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $O(0,0), A(400,0)$, $B\left(\dfrac{2000}{7}, \dfrac{1500}{7}\right)$, $C(200,300)$ y $D(0,400)$.
Sustituyendo en $f(x,y) = 5x + 7y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(400,0) = 2000 \\ f\left(\dfrac{2000}{7}, \dfrac{1500}{7}\right) = \dfrac{20500}{7} \simeq 2928,571428 \\ f(200,300) = 3100 \\ f(0,400) = 2800 \end{cases} \Longrightarrow$$



Se deberán elaborar 200 productos A y 300 del B con un beneficio máximo de 3100€.

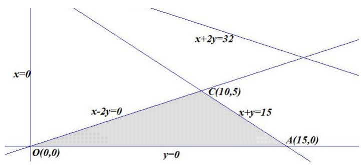
2.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.4.2 Una tienda de material informático dispone de 96 lapiceros con memoria USB y 15 tabletas digitales, para organizar dos tipos de lotes. Un lote A tendrá 3 lapiceros y una tableta; un lote B tendrá 6 lapiceros y una tableta. El precio de venta de un lote A es de 70 euros y el de un lote B, 160 euros. Además, el número de lotes B debe ser como máximo la mitad de lotes A. ¿Cuántos lotes deben prepararse y venderse para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden esos ingresos? **Solución:**
Sea x el nº de lotes A e y el nº de lotes B.

	lapiceros	tabletas	venta
A	3	1	70
B	6	1	160
	≤ 96	≤ 15	

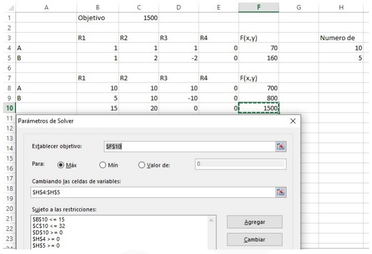
$f(x,y) = 70x + 160y$ sujeto a

$$\begin{cases} 3x + 6y \leq 96 \\ x + y \leq 15 \\ y \leq \dfrac{x}{2} \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 15 \\ x + 2y \leq 32 \\ x - 2y \geq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $O(0,0), A(15,0)$ y $B\,(10,5)$.

Solución por solver :



Sustituyendo en $f(x,y) = 70x + 160y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(15,0) = 1050 \\ f(10,5) = 1500 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Se deberán vender 10 lotes A y 5 del B con unos ingresos máximos de 1500€.

2.5. Castilla La Mancha

2.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.5.1 En el siguiente problema de programación lineal maximiza la función $f(x,y) = 12x - 2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x \geq y, \quad x + y \geq 0 \quad x \leq 3$$

a) Dibuja la región factible.

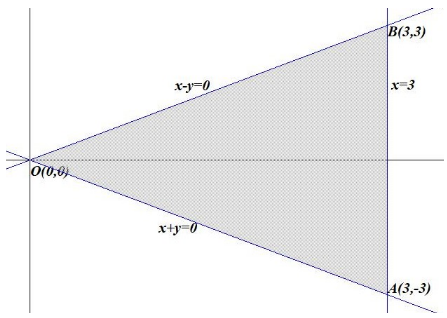
b) Determina los vértices de la región factible.

c) Indica el máximo del problema dado y su valor.

Solución:

a) Tenemos:

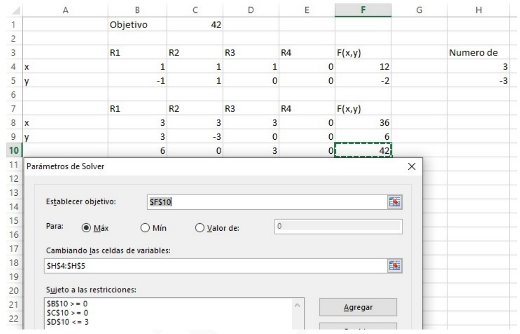
$$\left\{\begin{array}{l} x \geq y \\ x + y \geq 0 \\ x \leq 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \\ x \leq 3 \end{array}\right.$$



b) Los vértices a estudiar serán: $O(0,0), A(3,-3)$ y $B(3,3)$.

c) Sustituyendo en $f(x,y) = 12x - 2y$

Solución por solver :



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo	42					
2								
3		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
4	x	1	1	1	0	12		3
5	y	-1	1	0	0	-2		-3
6								
7		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
8	x	3	3	3	0	36		
9	y	3	-3	0	0	6		
10		6	0	3	0	42		

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(3,-3) = 42 \\ f(3,3) = 30 \end{cases} \Longrightarrow$$

El máximo se encuentra en el punto $A(3,-3)$ y su valor es 42.

2.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.5.2 En un terreno se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos. Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas. Por cada hectárea sembrada de aguacates y mangos se obtiene 10000 y 12000 euros respectivamente. Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor de la que ocupen los aguacates.

a) Expresa la función objetivo.

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

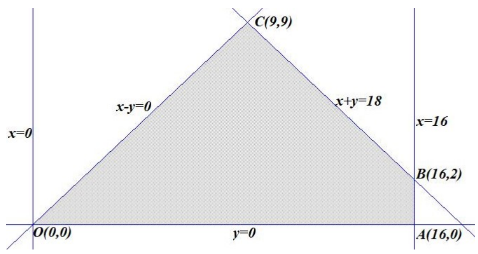
c) Determina cuántas hectáreas de cada tipo se debe dedicar a cada producto para conseguir máximo beneficio.

Solución:
Sean x las hectáreas de aguacates e y las hectáreas de mangos,

a) $f(x,y) = 10000x + 12000y$

b) Tenemos:

$$\begin{cases} x + y \le 18 \\ x \le 16 \\ y \le x \\ x, y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 18 \\ x \le 16 \\ x - y \ge 0 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$



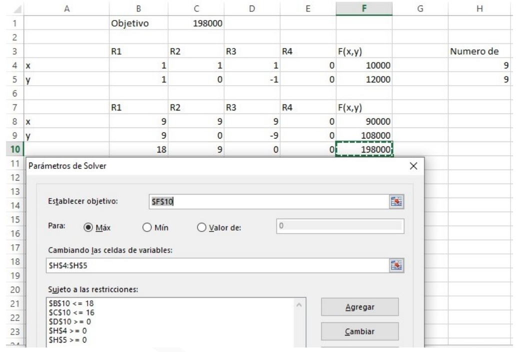
c) Los vértices a estudiar serán: $O(0,0), A(16,0)$, $B(16,2)$ y $C(9,9)$.

Sustituyendo en $f(x,y) = 10000x + 12000y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(16,0) = 160000 \\ f(16,2) = 184000 \\ f(9,9) = 198000 \end{cases} \Longrightarrow$$

Para obtener el máximo beneficio deberá sembrar 9 hectáreas de aguacates y 9 hectáreas de mango y el beneficio será de 198000€.

Solución por solver :



2.6. Castilla León

2.6.1. Modelo de 2020

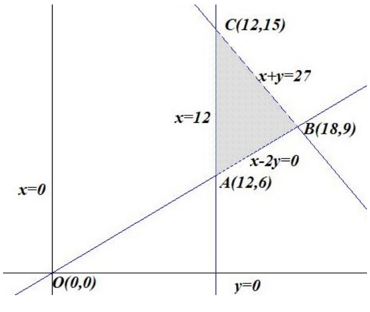
Problema 2.6.1 Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 €, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 €. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima?

Solución:
Llamamos x : nº de camiones con agua e y : nº de camiones con medicinas.

a) La región factible es:

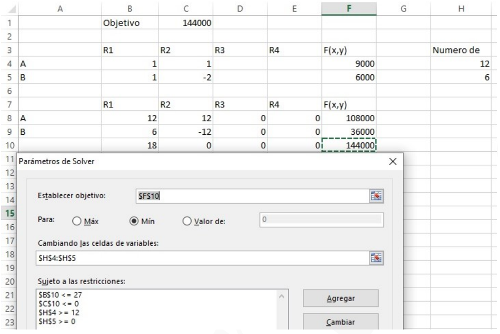
$$\begin{cases} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq \dfrac{x}{2} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 27 \\ x - 2y \leq 0 \\ x \geq 12 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(12,6)$, $B(18,9)$ y $C(12,15)$.



b) $f(x,y) = 9000x + 6000y$

Solución por solver:



$$\begin{cases} f(12,6) = 144000 \ \text{Mínimo} \\ f(18,9) = 216000 \\ f(12,15) = 198000 \end{cases}$$

Se deben mandar 12 camiones con agua y 6 con medicinas con un coste mínimo de 144000 €.

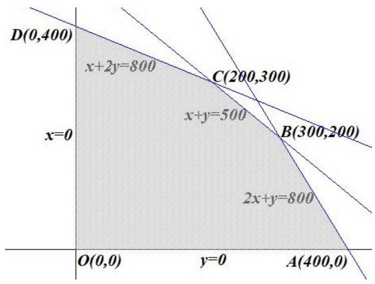
2.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.6.2 En un almacén de frutas disponen de 800 kg de manzanas, 800 kg de naranjas y 500 kg de plátanos. Con estas existencias van a poner a la venta dos tipos de lotes de frutas, A y B. El lote A consta de 1 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de plátanos; mientras que el lote B consta de 2 kg de manzanas, 1 kg de naranjas y 1 kg de plátanos. Si los lotes A se venden a 12 euros cada uno y los lotes B a 14 euros cada uno, determinar, mediante técnicas de programación lineal, el número de lotes de cada tipo que ha de vender el almacén para maximizar sus ingresos. ¿A cuánto asciende ese ingreso máximo?
Solución:
Sean x : nº de lotes A e y : nº de lotes B.

	manzanas	naranjas	plátanos	venta
A	1	2	1	12
B	2	1	1	14
	≤ 800	≤ 800	≤ 500	

☛ La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 800 \\ 2x + y \leq 800 \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

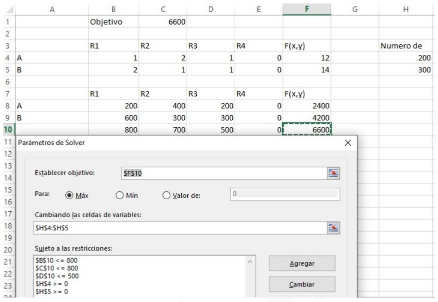


☛ Los vértices son: $O(0,0)$, $A(400,0)$, $B(300,200)$, $C(200,300)$ y $D(0,400)$.

☛ La función objetivo: $f(x,y) = 12x + 14y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(400,0) = 4800 \\ f(300,200) = 6400 \\ f(200,300) = 6600 \;\; \text{Máximo} \\ f(0,400) = 5600 \end{cases}$$



Se deben vender 200 lotes A y 300 lotes B con una venta máxima de 6600 €.

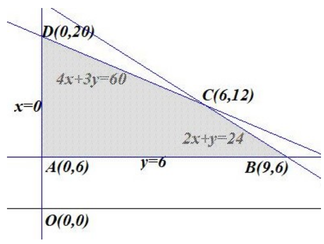
2.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.6.3 En una panadería hornean todos los días tartas y bizcochos que venden a 10€ y 6€, respectivamente. Para fabricar una tarta se necesitan 400 gramos de harina y 200 de azúcar, mientras que para un bizcocho se utilizan 300 gramos de harina y 100 de azúcar. Los dueños de la panadería saben que diariamente tienen que hornear, al menos, 6 bizcochos. Para la producción de hoy de tartas y bizcochos se dispone de 6 kg de harina y 2,4 kg de azúcar.
Utilizando técnicas de programación lineal, determinar la cantidad de cada uno de los productos que hay que hornear hoy para obtener los máximos ingresos.
Solución:
Sean x : nº de tartas A e y : nº de bizcochos.

	harina	azúcar	venta
tartas	400	200	10
bizcochos	300	100	6
	≤ 6000	≤ 2400	

☛ La región factible es:

$$\begin{cases} 400x + 300y \leq 6000 \\ 200x + 100y \leq 2400 \\ y \geq 6 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 3y \leq 60 \\ 2x + y \leq 24 \\ y \geq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

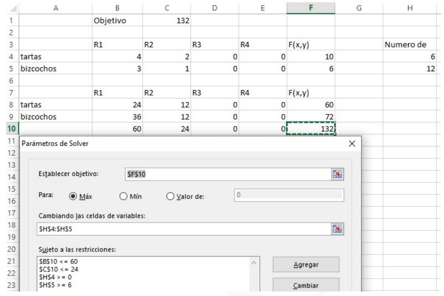


☛ Los vértices son: $A(0,6)$, $B(9,6)$, $C(6,12)$ y $D(0,20)$.

☛ La función objetivo: $f(x,y) = 10x + 6y$

$$\begin{cases} f(0,6) = 36 \\ f(9,6) = 126 \\ f(6,12) = 132 \;\; \text{Máximo} \\ f(0,20) = 120 \end{cases}$$

Deben vender 6 tartas y 12 bizcochos con una venta máxima de 132 €.



2.7. Cataluña

2.7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.7.1 En una pastelería quieren preparar cajitas de panellets para obsequiar los mejores clientes durante la semana de la Castañada. En total, disponen de 120 panellets de piñones y de 150 panellets de coco. Quieren preparar cajitas de dos tipos: las del primer tipo contendrán 3 panellets de piñones y 2 de coco, y las del segundo tipo contendrán 4 panellets de piñones y 6 de coco. La idea de la pastelería es preparar el número máximo de cajitas posible con los bollos de que disponen teniendo en cuenta que, como mínimo, deben preparar 9 cajitas de cada tipo.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

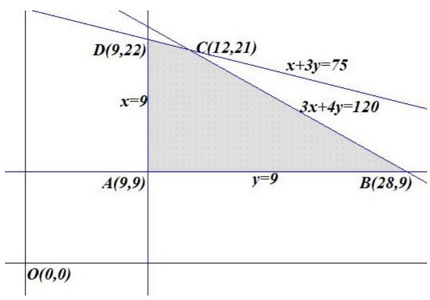
b) Determine cuantas cajitas hay que preparar de cada tipo para hacer el máximo número de obsequios posible. Indique si, en este caso, se utilizarán todos los bollos disponibles y, si no es así, ¿cuántos sobrarán de cada tipo.

Solución:
Sean x : nº de cajas del primer tipo e y : nº de cajas del segundo tipo.

	panellets de piñones	panellets de coco
primer tipo	3	2
segundo tipo	4	6
	≤ 120	≤ 150

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 3x + 4y \leq 120 \\ 2x + 6y \leq 150 \\ x \geq 9 \\ y \geq 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 4y \leq 120 \\ x + 3y \leq 75 \\ x \geq 9 \\ y \geq 9 \end{cases}$$

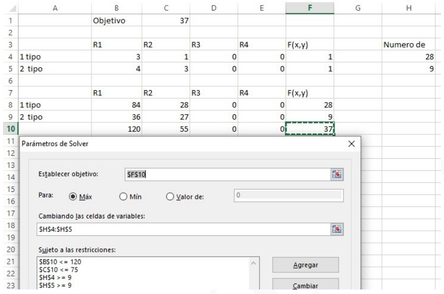


Los vértices son: $A(9,9)$, $B(28,9)$, $C(12,21)$ y $D(9,22)$.

b) La función objetivo: $f(x,y) = x + y$

$$\begin{cases} f(9,9) = 18 \\ f(28,9) = 37 \ \text{Máximo} \\ f(12,21) = 33 \\ f(9,22) = 31 \end{cases}$$

Se deben hacer 28 cajas del primer tipo y 9 cajas del segundo, con un total de 37 cajas.



	panellets de piñones	panellets de coco
primer tipo	84	56
segundo tipo	36	54
total	120	110

Se han utilizado 120 panellets de piñones, todos los que tenía.
Se han utilizado 110 panellets de coco. Sobran 150-110=40 panellets de coco.

2.7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.7.2 Un restaurante que acaba de abrir quiere poner anuncios en la radio y la televisión locales durante una semana para darse a conocer y aumentar así el número de clientes. Tiene un presupuesto máximo de 18.000 euros. Cada anuncio en la radio cuesta 1.000 euros y el contrato de juicio que como mínimo hay que hacer 3. Cada anuncio en la televisión cuesta 3.000 euros y, por disponibilidad de programación, se pueden hacer como máximo 4. Se estima que cada anuncio en la radio supone un incremento de 10 clientes para el restaurante y que cada anuncio en la televisión supone un incremento de 60 clientes.

a) Determinar la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

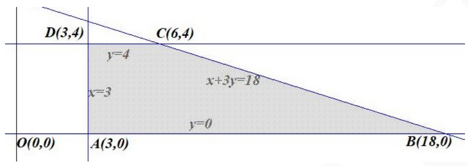
b) Calcula cuantos anuncios deberá poner a la radio y cuantos en la televisión para que el número de clientes nuevos sea máxima. ¿Cuantos clientes nuevos ingresaron?

Solución:
Sean x : nº de anuncios en radio e y : nº de anuncios en tv.

	clientes nuevos	coste
radio	10	1000
tv	60	3000

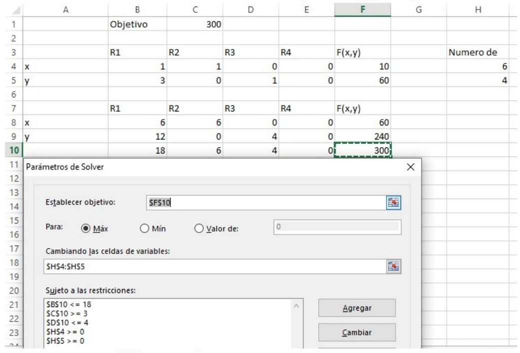
a) La región factible es:

$$\begin{cases} 1000x + 3000y \leq 18000 \\ x \geq 3 \\ y \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 3y \leq 18 \\ x \geq 3 \\ y \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(3,0)$, $B(18,0)$, $C(6,4)$ y $D(3,4)$.

Solución por solver:



b) La función objetivo: $f(x, y) = 10x + 60y$

$$\begin{cases} f(3,0) = 30 \\ f(18,0) = 180 \\ f(6,4) = 300 \ \text{Máximo} \\ f(3,4) = 270 \end{cases}$$

El número máximo de clientes es 300 y se consigue con 6 anuncios en la radio y 4 en televisión.

2.8. Comunidad valenciana

2.8.1. Modelo de 2020

Problema 2.8.1 Un inversor dispone de 9000 euros y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2,7 % y la del producto B del 6,3 %.

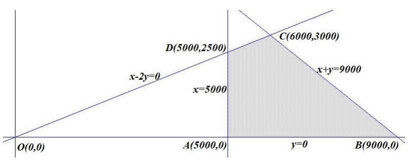
a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima?

b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima?

Solución:
Llamamos x : inversión en A e y : inversión en B.

La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \leq 9000 \\ x \geq 5000 \\ x \geq 2y \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 9000 \\ x \geq 5000 \\ x - 2y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

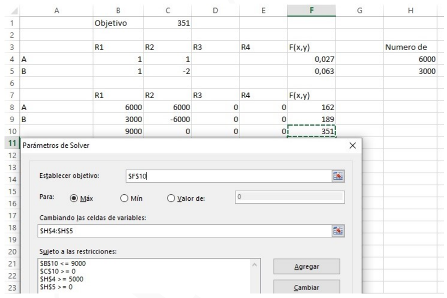


Los vértices son: $A(5000,0)$, $B(9000,0)$, $C(6000,3000)$ y $D(5000,2500)$.

$f(x, y) = 0,027x + 0,063y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(5000,0) = 135 \\ f(9000,0) = 243 \\ f(6000,3000) = 351 \ \text{Máximo} \\ f(5000,2500) = 292,5 \end{cases}$$



Se deben invertir 6000 € en A y 3000 € en B con un beneficio máximo de 351 €.

2.8.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.8.2 En una explotación ganadera se crían 100 animales. Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal y como mínimo 3 kg de piensos de origen vegetal. Hay dos marcas A y B que venden sacos con mezclas de dichos piensos. La marca A vende sacos con 7 kg de piensos animales y 3 kg de piensos vegetales. La marca B vende sacos con 6 kg de piensos animales y 4 kg de piensos vegetales. Si los sacos de la marca A cuestan 12 euros y los de la marca B cuestan 11 euros,

a) ¿cuál es la combinación de compra de sacos de cada marca que se ha de realizar semanalmente para minimizar el coste?

b) ¿cuál sería dicho coste mínimo?

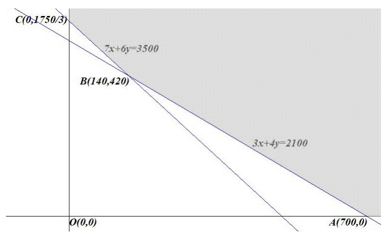
Solución:
Sean x : cantidad de la marca A e y : cantidad de la marca B.

	animal	vegetal	coste
A	7	3	12
B	6	4	11
	≥ 3500	≥ 2100	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 7x + 6y \geq 3500 \\ 3x + 4y \geq 2100 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices son: $A(700,0)$, $B(140,420)$ y $C\left(0, \dfrac{1750}{3}\right)$.

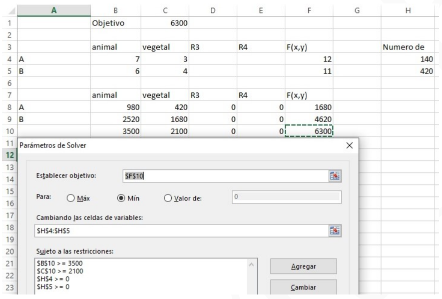


$f(x,y) = 12x + 11y$

$$\begin{cases} f(700,0) = 8400 \\ f(140,420) = 6300 \ \text{Mínimo} \\ f\left(0, \dfrac{1750}{3}\right) = 6416,67 \end{cases}$$

Se deben utilizar 140 sacos de marca A y 420 de marca B con un coste mínimo de 6300 €.

Solución por solver :



b) El coste mínimo es de 6300€, como se ha visto.

2.8.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

No hubo problemas de este tipo en el examen de la PAU.

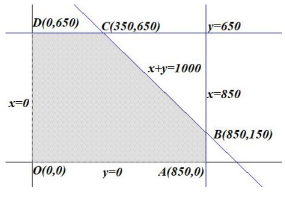
2.9. Extremadura

2.9.1. Modelo de 2020

Problema 2.9.1 Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje el caballero, ¿Cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximos los beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justifica las respuestas.

Solución:
Sea x el número de trajes de señora e y el número de trajes de caballero.
Función objetivo: $f(x,y) = 150x + 200y$

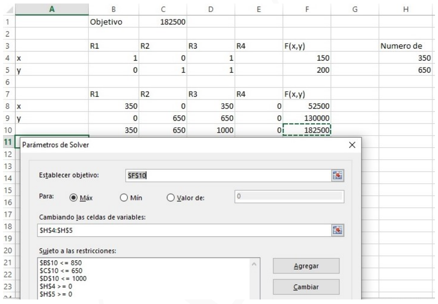
$$\text{Región factible:} \begin{cases} x \le 850 \\ y \le 650 \\ x + y \le 1000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow$$



Los vértices del recinto son: $O(0,0)$, $A(850,0)$, $B(850,150)$, $C(350,650)$ y $D(0,650)$.

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(850,0) = 127500 \\ f(850,150) = 157500 \\ f(350,650) = 182500 \text{ Máximo} \\ f(0,650) = 130000 \end{cases}$$

Solución por solver :



Para obtener el máximo beneficio debe confeccionar 350 trajes de señora y 650 de caballero. El beneficio sería de 182500 euros.

2.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.9.2 Un taller de confección fabrica abrigos y cazadoras. Para ello dispone semanalmente de 80 m^2 de tela de forro y 120 m^2 de tela de paño. Un abrigo requiere 1 m^2 de tela de forro y 3 m^2 de tela de paño y una cazadora requiere 2 m^2 de cada una de las telas. Si en cada abrigo gana 80€ y en cada cazadora 70€, calcular, justificando las respuestas:

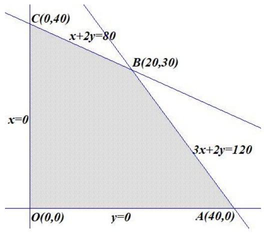
a) El número de abrigos y de cazadoras que debe confeccionar semanalmente para hacer máximos los beneficios.

b) El valor de dichos beneficios máximos.

Solución:
Sea x el número de abrigos e y el número de cazadoras.

	tela de forro	tela de paño	ganancias
abrigo	1	3	80
cazadora	2	2	70
	≤ 80	≤ 120	

a) Región factible:



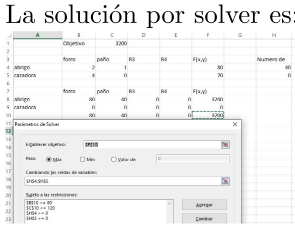
$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices del recinto son: $O(0,0)$, $A(40,0)$, $B(20,30)$ y $C(0,40)$.

Función objetivo: $f(x,y) = 80x + 70y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(40,0) = 3200 \\ f(20,30) = 3700 \text{ Máximo} \\ f(0,40) = 2800 \end{cases}$$

La solución por solver es:



b) Para obtener el máximo beneficio debe fabricar 20 abrigos y 30 cazadoras. El beneficio sería de 3700€.

2.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.9.3 Un taller tapiza butacas y sillones. Para tapizar una butaca se necesitan 2 m^2 de tela con un beneficio de 40€, mientras que para tapizar un sillón se necesitan 4 m^2 de tela con un beneficio de 100€. El taller dispone diariamente de un máximo de 100 m^2 de tela y no puede tapizar más de 40 butacas ni más de 20 sillones.
Calcular, justificando la respuesta:

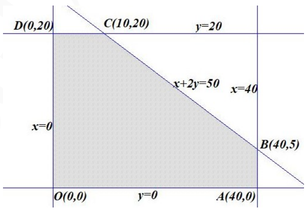
a) El número de butacas y de sillones que deben tapizar diariamente para obtener unos beneficios máximos.

b) El valor de dichos beneficios máximos.

Solución:
Sea x el número de butacas e y el número de sillones.

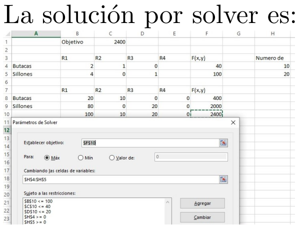
a) Región factible:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+4y\le 100 \\ x\le 40 \\ y\le 20 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y\le 50 \\ x\le 40 \\ y\le 20 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{array}\right.$$



Los vértices del recinto son: $O(0,0)$, $A(40,0)$, $B(40,5)$, $C(10,20)$ y $D(0,20)$.

La solución por solver es:



Función objetivo: $f(x,y)=40x+100y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0)=0 \\ f(40,0)=1600 \\ f(40,5)=2100 \\ f(10,20)=2400 \text{ Máximo} \\ f(0,20)=2000 \end{array}\right.$$

b) Para obtener el máximo beneficio debe tapizar 10 butacas y 20 sillones. El beneficio sería de 2400€.

2.10. Galicia

2.10.1. Modelo de 2020

Problema 2.10.1 El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.

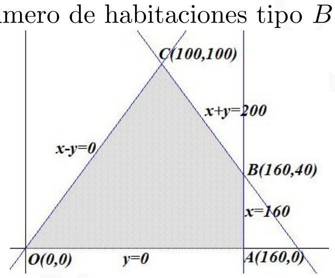
a) Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

Solución:
Llamamos x : número de habitaciones tipo A e y : número de habitaciones tipo B.

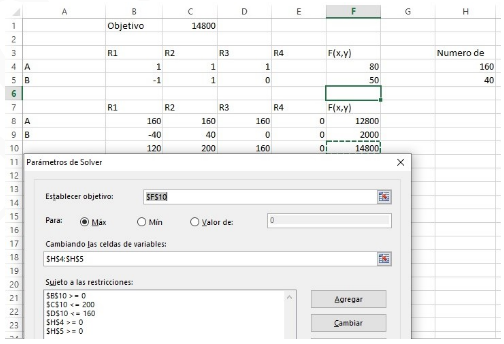
a) La región factible es:



$$\left\{\begin{array}{l} x \geq y \\ x \leq 160 \\ x + y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 200 \\ x \leq 160 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$

b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(160,0)$, $B(160,40)$ y $C(100,100)$.

Solución por solver :



c) La función objetivo es: $f(x,y) = 80x + 50y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(160,0) = 12800 \\ f(160,40) = 14800 \;\; \text{Máximo} \\ f(100,100) = 13000 \end{array}\right.$$

El coste máximo es de 14800 € y se llega contratando 160 habitaciones tipo A y 40 tipo B.

2.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.10.2 Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \leq x + 2, \quad x + y \leq 6, \quad x \leq 5, \quad y \geq 0$$

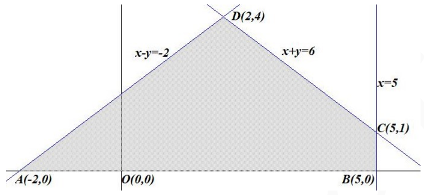
a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x,y) = x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo.

c) Determine esos valores máximo y mínimo.

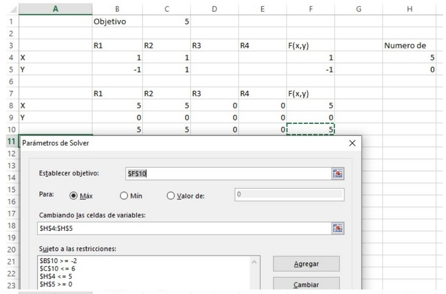
Solución:

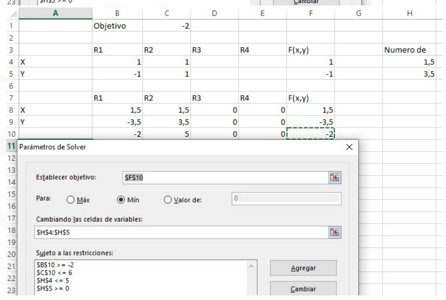
a) La región factible es:



$$\left\{\begin{array}{l} y \leq x+2 \\ x+y \leq 6 \\ x \leq 5 \\ y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y \geq -2 \\ x+y \leq 6 \\ x \leq 5 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$

Solución por solver :





b) Los vértices son: $A(-2,0)$, $B(5,0)$, $C(5,1)$ y $D(2,4)$.

c) La función objetivo es:
$f(x,y) = x - y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(-2,0) = -2 \text{ Mínimo} \\ f(5,0) = 5 \text{ Máximo} \\ f(5,1) = 4 \\ f(2,4) = -2 \text{ Mínimo} \end{array}\right.$$

El máximo es 5 y se llega en el punto $B(5,0)$. El mínimo es -2 y se llega en cualquier punto del segmento que une los puntos $A(-2,0)$ y $D(2,4)$.

d) El máximo es 5 y el mínimo -2.

2.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.10.3 Un distribuidor de software informático, tiene entre sus clientes a empresas y a particulares. Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Además, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuales, mientras que cada particular 229 euros.

a) Plantee el problema para maximizar los ingresos.

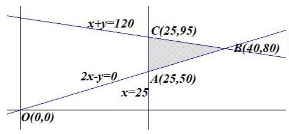
b) Represente gráficamente el conjunto de soluciones.

c) ¿Cuál de esas soluciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

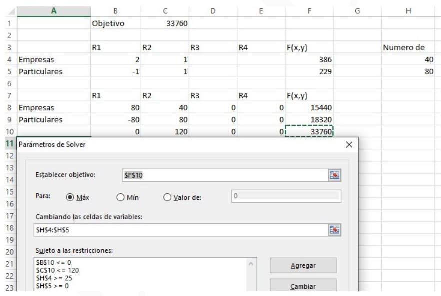
Solución:
Sean x empresas e y particulares.

a) La función objetivo: $f(x,y) = 386x + 229y$
La región factible:

$$\left\{\begin{array}{l} y \geq 2x \\ x + y \leq 120 \\ x \geq 25 \\ y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - y \leq 0 \\ x + y \leq 120 \\ x \geq 25 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$



Solución por solver :



b) Los vértices son: $A(25,50)$, $B(40,80)$ y $C(25,95)$.

c) La función objetivo es:
$f(x,y) = 386x + 229y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(25,50) = 21100 \\ f(40,80) = 33760 \ \text{Máximo} \\ f(25,95) = 31405 \end{array}\right.$$

El máximo ingreso es 33760€ y se alcanza con una cartera de 40 empresas y 80 particulares.

2.11. Islas Baleares

2.11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.11.1 Un ayuntamiento concede licencias para la construcción de una urbanización de, como máximo, 120 viviendas, de dos tipos, A y B. Para ello la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo A de 100000 euros y el de tipo B de 300000 euros. El beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A es de 20000 euros y por la venta de uno de tipo B es de 40000 euros.

a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

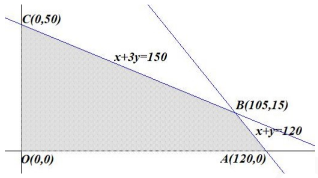
b) Dibujar la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcular el número de viviendas de cada tipo que deben construirse para obtener un beneficio máximo. Determinar también este beneficio máximo.

Solución:
Sean x número de viviendas tipo A e y número de viviendas tipo B.

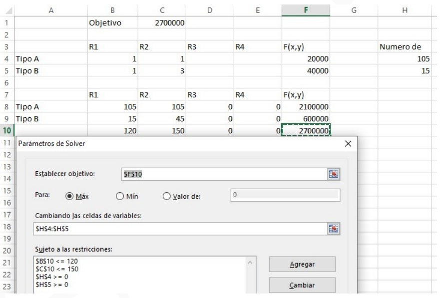
a) La región factible es:

$$\begin{cases} x+y \le 120 \\ 100000x + 300000y \le 15000000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow$$



$$\begin{cases} x+y \le 120 \\ x+3y \le 150 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Solución por solver :



b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(120,0)$, $B(105,15)$ y $C(0,50)$.

c) La función objetivo es:
$f(x,y) = 20000x + 40000y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(120,0) = 2400000 \\ f(105,15) = 2700000 \ \text{Máximo} \\ f(0,50) = 2000000 \end{cases}$$

d) El máximo beneficio es de 2700000€ y se llega con la construcción de 105 viviendas tipo A y 15 del tipo B.

2.11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.11.2 Dado El barco de Denia a Ibiza puerta automóviles y camiones en la bodega. Cada camión ocupa cuatro plazas de automóvil. La superficie total de la bodega permite situar hasta 200 automóviles. Cada automóvil pesa 1000 kg, y cada camión, 9000 kg. El peso total permitido para la carga es de 300000 kg. La compañía cobra 50 euros por cada automóvil y 300 euros por cada camión.

a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibujar la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

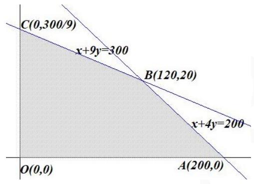
c) Calcular el número de coches y camiones que se han de cargar con el fin de obtener un beneficio máximo. Determinar también este beneficio máximo.

Solución:
Sean x número de automóviles e y número de camiones.

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x+4y\le 200 \\ 1000x+9000y\le 300000 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x+4y\le 200 \\ x+9y\le 300 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$



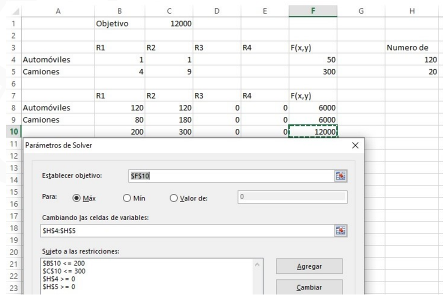
b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(200,0)$, $B(120,20)$ y $C\left(0,\dfrac{300}{9}\right)$.

c) La función objetivo es:

Solución por solver :

$$f(x,y)=50x+300y$$

$$\begin{cases} f(0,0)=0 \\ f(200,0)=10000 \\ f(120,20)=12000 \;\; \text{Máximo} \\ f\left(0,\dfrac{300}{9}\right)=10000 \end{cases}$$



d) El máximo beneficio es de 12000€ y se transportan 120 automóviles y 20 camiones.

2.12. Islas Canarias

2.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.12.1 Una empresa dedicada al comercio del textil desea liquidar 400 camisas y 300 pantalones. Para ello lanza dos ofertas: la oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón por 30€, y la oferta B consiste en un lote de dos camisas y un pantalón, que se vende a 40€. Hay que ofrecer al menos 40 lotes de la oferta A y al menos 20 de la oferta B.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

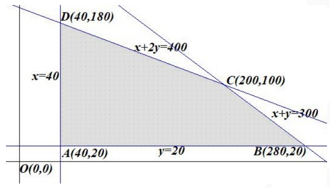
c) Para maximizar las ganancias, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo? ¿Cuál es la ganancia máxima?

Solución:
Sean x número de lotes A e y número de lotes B.

	camisas	pantalones	ganancias
A	1	1	30
B	2	1	40
	≤ 400	≤ 300	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 400 \\ x + y \leq 300 \\ x \geq 40 \\ y \geq 20 \end{cases}$$



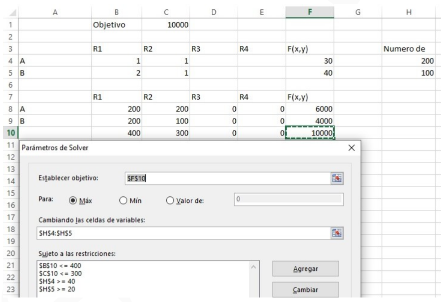
b) Los vértices son: $A(40,20)$, $B(280,20)$, $C(200,100)$ y $D(40,180)$.

c) La función objetivo es:

Solución por solver :

$$f(x,y) = 30x + 40y$$

$$\begin{cases} f(40,20) = 2000 \\ f(280,20) = 9200 \\ f(200,100) = 10000 \;\; \text{Máximo} \\ f(40,180) = 8400 \end{cases}$$



d) El máximo beneficio es de 10000€ y se alcanza con la venta de 200 lotes A y 100 lotes B.

2.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.12.2 Se quieren plantar plataneras y naranjeros. Cada platanera cuesta 5 euros y cada naranjero 2 euros. Para facilitar la recogida, el número de plataneras no debe superar el doble del de naranjeros ni ser inferior a su mitad. Además, se puede dedicar un máximo de 900 euros a poner esta plantación. Se espera que cada platanera produzca un beneficio de 15 euros y cada naranjero 8 euros.

a) Plantear el correspondiente problema de Programación Lineal

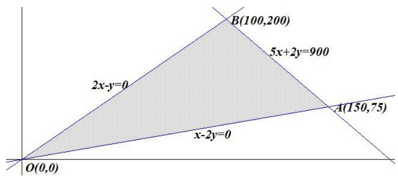
b) Representar la región factible e indicar sus vértices

c) Determinar la cantidad de plantas de cada tipo que se deben plantar para maximizar el beneficio global.

Solución:
Sean x número de plataneras e y número de naranjeros.

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 5x + 2y \leq 900 \\ x \leq 2y \\ x \geq \dfrac{y}{2} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x + 2y \leq 900 \\ x - 2y \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(150,75)$ y $B(100,200)$.

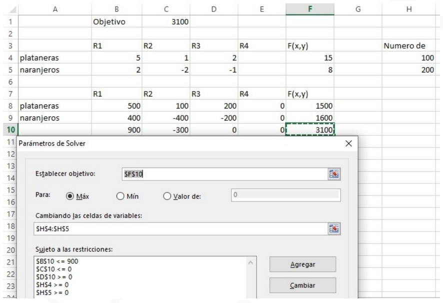
c) La función objetivo es:

Solución por solver :

$$f(x,y) = 15x + 8y$$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(150,75) = 2850 \\ f(100,200) = 3100 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El máximo beneficio es de 3100€ y se alcanza plantando 100 plataneras y 200 naranjeros.



2.13. La Rioja

2.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.13.1 En el proceso de fabricación de cierta pintura se mezcla una cantidad x de polvo sintético con una cantidad y de polvo de un mineral. Se imponen las restricciones
$x + 2y \le 6$ (para no rebasar un nivel de toxicidad en el proceso),
$5x + 4y \le 20$ (para mantener la gama de color adecuada),
$y \le x$ (para que la viscosidad no sea excesiva).

a) Dibuja en el plano la región factible de cantidades x e y que cumplen las restricciones.

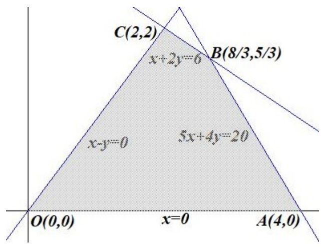
b) ¿Cuál es la máxima cantidad de polvo de mineral que podemos usar?

c) ¿Cuál es la cantidad máxima posible de polvo $(x+y)$ que permiten las restricciones, y cuánto incluye de cada tipo?

Solución:

a) La región factible es:

$$\begin{cases} x + 2y \le 6 \\ 5x + 4y \le 20 \\ y \le x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \le 6 \\ 5x + 4y \le 20 \\ x - y \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



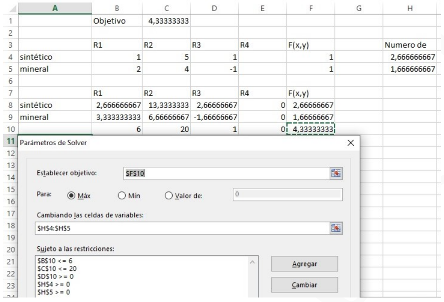
b) Los vértices son: $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$ y $C(2,2)$.

c) La función objetivo es:
$f(x, y) = x + y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(4,0) = 4 \\ f\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{13}{3} \text{ Máximo} \\ f(2,2) = 4 \end{cases}$$

La cantidad máxima es de $\dfrac{13}{3} \simeq 4,333$ y se alcanza con $\dfrac{8}{3} \simeq 2,667$ unidades de polvo sintético y $\dfrac{5}{3} \simeq 1,667$ unidades de polvo mineral.

Solución por solver :



2.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.13.2 Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen

$$\begin{cases} 0 \le y, \;\; 0 \le x \le 2, \\ x + y \le 3, \;\; \text{y} \\ x + 3y \le 6 \end{cases}$$

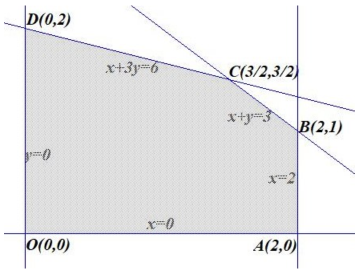
Averigua el valor máximo que alcanzan en dicha región las siguientes funciones, y en qué puntos lo alcanza cada una:

$$f(x, y) = 7x + 5y, \quad g(x, y) = x + 5y$$

Solución:

- ☛ La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \le 3 \\ x + 3y \le 6 \\ x \le 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



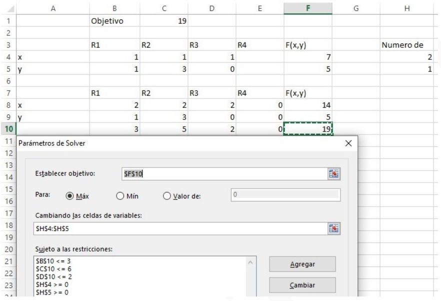
- ☛ Los vértices son: $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,1)$, $C\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ y $D(0,2)$.

- ☛ La función objetivo es:

Solución por solver :

En $f(x,y) = 7x + 5y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(2,0) = 14 \\ f(2,1) = 19 \text{ Máximo} \\ f\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) = 19 \\ f(0,2) = 10 \end{cases}$$

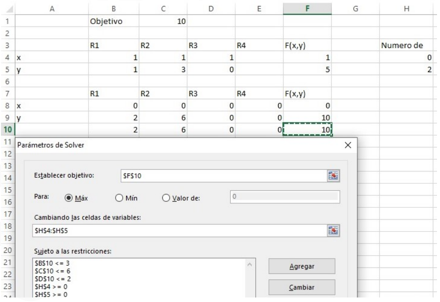


El máximo es de 19 y se alcanza en el punto $B(2,1)$.

Solución por solver :

En $g(x,y) = x + 5y$

$$\begin{cases} g(0,0) = 0 \\ g(2,0) = 2 \\ g(2,1) = 7 \\ g\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) = 9 \\ g(0,2) = 10 \text{ Máximo} \end{cases}$$



El máximo es de 10 y se alcanza en el punto $D(0,2)$.

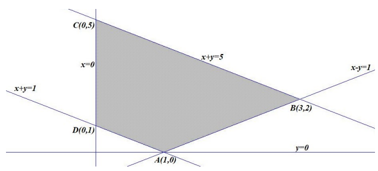
2.14. Madrid

2.14.1. Modelo de 2020

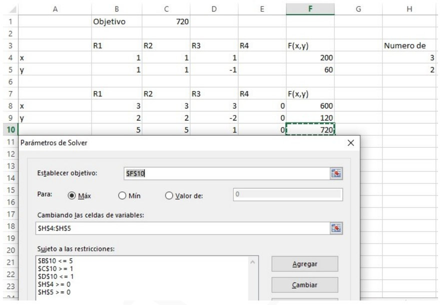
Problema 2.14.1 Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:
Sea x : nº de Ha de trigo e y : nº de Ha de cebada.
La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + y \geq 1 \\ x - y \leq 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Solución por solver :



Los vértices a estudiar serán: $A(1,0)$, $B(3,2)$, C(0,5) y $D(0,1)$
La función objetivo es $f(x,y) = 200x + 60y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(1,0) = 200 \\ f(3,2) = 720 \\ f(0,5) = 300 \\ f(0,1) = 60 \end{cases} \Longrightarrow$$

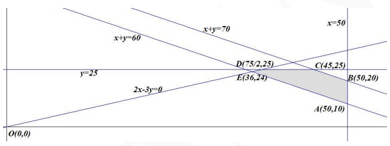
El máximo beneficio será de 720 euros que se obtiene plantando 3 Ha de trigo y 2 Ha de cebada.

2.14.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.14.2 Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

Solución:
Sea x : nº de kg de almendras e y : nº de kg de avellanas. La región factible es:

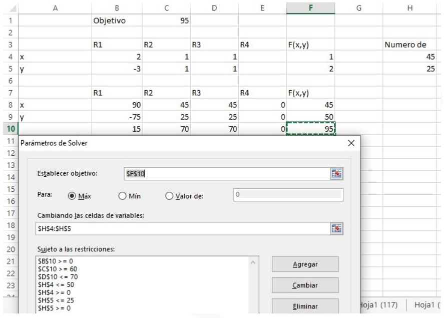
$$\begin{cases} x \geq 1,5y \\ x + y \geq 60 \\ x + y \leq 70 \\ x \leq 50 \\ y \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - 3y \geq 0 \\ x + y \geq 60 \\ x + y \leq 70 \\ x \leq 50 \\ y \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



- Los vértices a estudiar serán: $A(50,10)$, $B(50,20)$, $C(45,25)$, $D(75/2,25)$ y $E(36,24)$

- La función objetivo: $f(x,y) = x + 2y$ en S:

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(50,10) = 70 \\ f(50,20) = 90 \\ f(45,25) = 95 \ \text{Máximo} \\ f(75/2,25) = 175/2 \\ f(36,24) = 84 \end{cases}$$

El máximo beneficio será de 95 € y se alcanza con 45 kg de almendras y 25 kg de avellanas.

2.14.3. Convocatoria junio de 2020 (coincidente)

Problema 2.14.3 Se pide

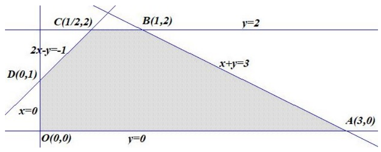
a) Represente la región S del plano delimitada por las inecuaciones

$$-2x + y \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad x + y \leq 3 \quad x \geq 0$$

y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = x + y$ sobre la región S.

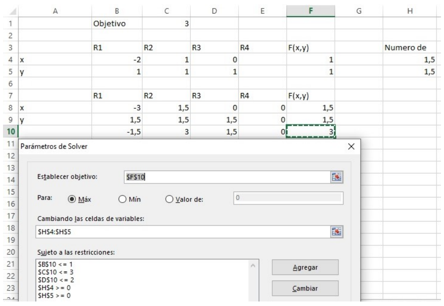
Solución:



a) Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(1,2)$, $C(1/2,2)$ y $D(0,1)$

Solución por solver :

b) $f(x,y) = x + y$ en S: $\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(3,0) = 3 \\ f(1,2) = 3 \\ f(1/2,2) = 5/2 \\ f(0,1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow$



El valor máximo será de 3 y se alcanza en cualquier punto del segmento que une los puntos $A(3,0)$ y $B(1,2)$ y el valor mínimo será de 0 y se alcanza en el punto $O(0,0)$.

2.14.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.14.4 Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros . Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

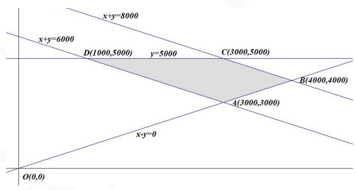
a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

Solución:
Sean x metros del modelo A2020 e y metros del modelo B2020.

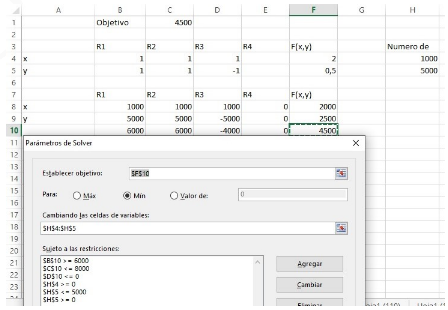
a) Región factible:

$$\begin{cases} x+y \geq 6000 \\ y \leq 5000 \\ x+y \leq 8000 \\ y \geq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$$



$$\begin{cases} 6000 \leq x+y \leq 8000 \\ x-y \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 5000 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Solución por solver :



Los vértices a estudiar serán: $A(3000,3000)$, $B(4000,4000)$, $C(3000,5000)$ y $D(1000,5000)$

b) La función objetivo es $f(x,y) = 2x + 0,5y$ en S:

$$\begin{cases} f(3000,3000) = 7500 \\ f(4000,4000) = 10000 \\ f(3000,5000) = 8500 \\ f(1000,5000) = 4500 \end{cases} \Longrightarrow$$

El valor mínimo será de 4500€ y se alcanza fabricando 1000 metros del modelo A2020 y 5000 metros del modelo B2020.

2.15. Murcia

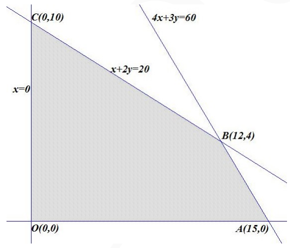
2.15.1. Modelo de 2020

Problema 2.15.1 En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 € y 12 €, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulce deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta.

Solución:
Llamamos x : nº de dulces de A e y : nº de dulces de B.

	Azucar	Huevos	Venta
A	$0,5$	8	15
B	1	6	12
	≤ 10	≤ 120	

La región factible es:

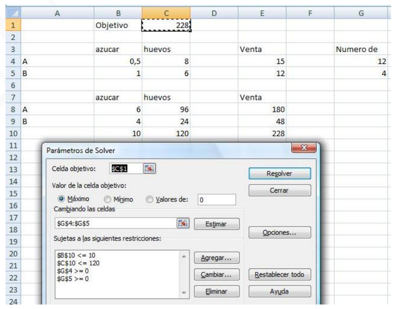


$$\left\{\begin{array}{l} 0,5x+y\leq 10\\ 8x+6y\leq 120\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y\leq 20\\ 4x+3y\leq 60\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right.$$

Los vértices son: $A(15,0)$, $B(12,4)$ y $C(0,10)$.

$f(x,y)=15x+12y$

Solución por solver :



$$\left\{\begin{array}{l} f(15,0)=225\\ f(12,4)=228 \ \text{Máximo}\\ f(0,10)=120\end{array}\right.$$

Se deben fabricar 12 dulces A y 4 dulces B con un precio máximo de 228 €.

2.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.15.2 En un terreno en la huerta de Beniel se quieren plantar dos tipos distintos de naranjos: A y B. No se puede cultivar más de 8 hectáreas con naranjos de tipo A ni más de 10 hectáreas con naranjos de tipo B. Cada hectárea de naranjos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3. Se dispone anualmente de 45 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4575 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de naranjos de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 kilos anuales de naranjas:

a) Calcular las hectáreas de cada tipo de naranjo que se deben plantar para maximizar la producción de naranjas. Razone la respuesta.

b) Obtener la producción máxima.

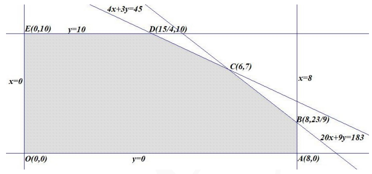
Solución:
Sea x : nº de hectáreas de A e y : nº de hectáreas de B.

a)

	Agua	Inversión	Producción
A	4	500	500
B	3	225	300
	≤ 45	≤ 4575	

La región factible es:

$$\begin{cases} 4x+3y\le 45\\ 500x+225y\le 4575\\ x\le 8\\ y\le 10\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x+3y\le 45\\ 20x+9y\le 183\\ x\le 8\\ y\le 10\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$$

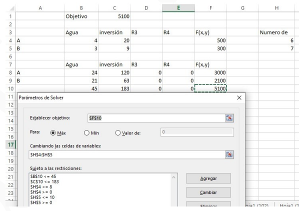


Los vértices son: $O(0,0)$, $A(8,0)$, $B(8,23/9)$, $C(6,7)$, $D(15/4,10)$ y $E(0,10)$.

$f(x,y)=500x+300y$

$$\begin{cases} f(0,0)=0\\ f(8,0)=4000\\ f(8,23/9)=14300/3\\ f(6,7)=5100 \ \text{Máximo}\\ f(15/4,10)=4875\\ f(0,10)=3000\end{cases}$$

Solución por solver :



b) Se deben plantar 6 hectáreas con naranjos A y 7 hectáreas con naranjos B con un rendimiento de 5100 €.

2.15.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.15.3 Sea el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+y\le 12\\ y\ge \dfrac{x}{2}-2\\ x-2y\ge -3\\ 2x+3y\ge 1\end{cases}$$

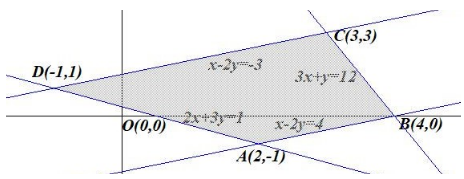
a) Representar gráficamente la región del plano S definido por el sistema de inecuaciones anterior y determine los vértices de dicha región.

b) Calcular los puntos de la región S dónde la función $f(x,y)=3x-2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos.

Solución:

a) La región factible es:

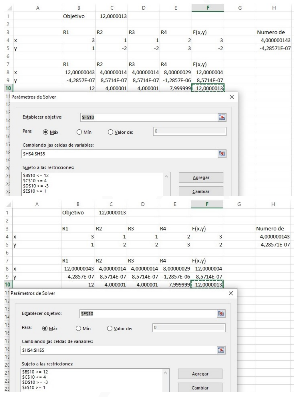
$$\begin{cases} 3x+y\le 12\\ y\ge \dfrac{x}{2}-2\\ x-2y\ge -3\\ 2x+3y\ge 1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+y\le 12\\ x-2y\le 4\\ x-2y\ge -3\\ 2x+3y\ge 1\end{cases}$$



Los vértices son: $A(2,-1)$, $B(4,0)$, $C(3,3)$ y $D(-1,1)$.

$f(x,y)=3x-2y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(2,-1) = 8 \\ f(4,0) = 12 \text{ Máximo} \\ f(3,3) = 3 \\ f(-1,1) = -5 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

b) El máximo es 12 en el punto $B(4,0)$.
El mínimo es -5 en el punto $D(-1,1)$.

2.16. Navarra

2.16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.16.1 Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de cursos de formación ($F1$ y $F2$). El curso $F1$ es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1 %, mientras que el curso $F2$, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2 %. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso $F1$ y no más de 35 horas al curso $F2$. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso $F1$ una cantidad igual o superior de horas que al curso $F2$. ¿Cuántas horas se debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

a) Plantee el problema.

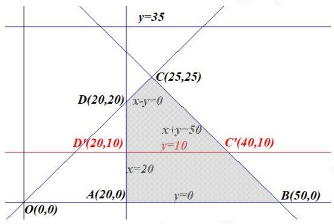
b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados, el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación $F2$.

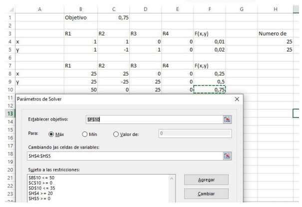
Solución:
Sea x : nº de horas de F_1 e y : nº de horas de F_2.

a) La región factible es

$$\begin{cases} x+y \le 50 \\ y \le 35 \\ x \ge y \\ x \ge 20 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y \le 50 \\ x-y \ge 0 \\ y \le 35 \\ x \ge 20 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Solución por solver :



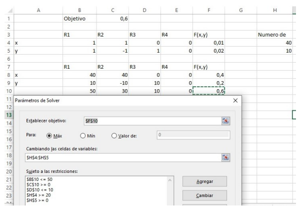
Los vértices son: $A(20,0)$, $B(50,0)$, $C(25,25)$ y $D(20,20)$.

$f(x,y) = 0,01x + 0,02y$

$$\begin{cases} f(20,0) = 0,2 \\ f(50,0) = 0,5 \\ f(25,25) = 0,75 \ \text{Máximo} \\ f(20,20) = 0,6 \end{cases}$$

La máxima productividad sería $0,75 \Longrightarrow 75\,\%$ con 25 horas para cada uno de los cursos.

Solución por solver :



b) Si $y \le 10$:

$$\begin{cases} x+y \le 50 \\ x-y \ge 0 \\ y \le 10 \\ x \ge 20 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A(20,0) \\ B(50,0) \\ C'(40,10) \\ D'(20,10) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(20,0) = 0,2 \\ f(50,0) = 0,5 \\ f(40,10) = 0,6 \\ f(20,10) = 0,4 \end{cases}$$

La máxima productividad sería $0,6 \Longrightarrow 60\,\%$ con 40 horas para el curso $F1$ y 10 horas para el $F2$.

2.16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.16.2 Se están considerando dos alimentos (A y B) que contienen tres nutrientes. Cada kg de A contiene 0,1 kg de grasas, 0,6 kg de hidratos de carbono y 0,3 kg de proteínas. Cada kg de B tiene 0,2 kg de grasas, 0,3 kg de hidratos de carbono y 0,5 kg de proteínas. El precio de un kg del alimento A es de 10 euros. El alimento B cuesta el triple que A. Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono, al menos 15 kg de proteínas y no más de 10 kg de grasas. Se desea además no comprar más de 75 kg de A. Determine cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para minimizar el coste total de la compra.

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si se desea maximizar la cantidad de una vitamina, sabiendo que cada kg de A tiene 1.5 unidades y cada kg de B tiene 2 unidades de dicha vitamina.

Solución:

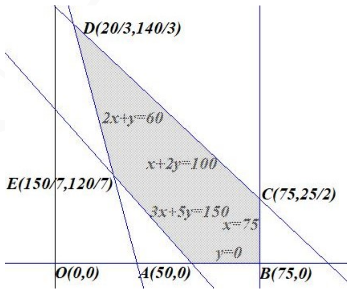
Sea x nº de kg de A e y nº de kg de B.

a)

	grasas	hidratoscarbono	proteinas	Precio
A	$0,1$	$0,6$	$0,3$	10
B	$0,2$	$0,3$	$0,5$	30
	≤ 10	≥ 18	≥ 15	

b) La región factible es

$$\begin{cases} 0,1x + 0,2y \leq 10 \\ 0,6x + 0,3y \geq 18 \\ 0,3x + 0,5y \geq 15 \\ x \leq 75 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 100 \\ 2x + y \geq 60 \\ 3x + 5y \geq 150 \\ x \leq 75 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

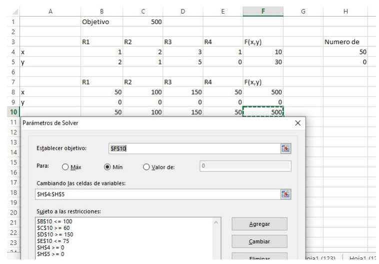


Los vértices son: $A(50,0)$, $B(75,0)$, $C\left(75, \dfrac{25}{2}\right)$, $D\left(\dfrac{20}{3}, \dfrac{140}{3}\right)$ y $E\left(\dfrac{150}{7}, \dfrac{120}{7}\right)$.

$f(x,y) = 10x + 30y$

$$\begin{cases} f(50,0) = 500 \ \text{Mínimo} \\ f(75,0) = 750 \\ f\left(75, \dfrac{25}{2}\right) = 1125 \\ f\left(\dfrac{20}{3}, \dfrac{140}{3}\right) = \dfrac{4400}{3} \simeq 1466,667 \\ f\left(\dfrac{150}{7}, \dfrac{120}{7}\right) = \dfrac{5100}{7} \simeq 728,571 \end{cases}$$

Solución por solver :

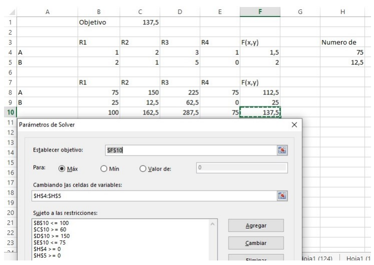


El coste mínimo sería 500€ con 50 kg del producto A y 0 kg del B.

c) $f(x,y) = 1,5x + 2y$

$$\begin{cases} f(50,0) = 75 \\ f(75,0) = \dfrac{225}{2} = 112,5 \\ f\left(75, \dfrac{25}{2}\right) = \dfrac{275}{2} = 137,5 \ \text{Máximo} \\ f\left(\dfrac{20}{3}, \dfrac{140}{3}\right) = \dfrac{310}{3} \simeq 103,33 \\ f\left(\dfrac{150}{7}, \dfrac{120}{7}\right) = \dfrac{465}{7} \simeq 66,429 \end{cases}$$

Solución por solver :



El máximo de vitaminas sería comprando 75 kg del producto A y $\dfrac{25}{2}$ kg del B.

2.17. País Vasco

2.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.17.1 Una empresa produce dos tipos de camisas con perlas blancas, grises y rosas. Para hacer una camisa del tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 rosas, mientras que para una camisa del tipo B se necesitan 10 perlas blancas, 20 grises y 60 rosas.
La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1400 grises, y decide utilizar al menos 1800 perlas rosas.
Se sabe que el beneficio que se obtiene por cada camisa del tipo A es de 60 euros, y por cada camisa del tipo B de 50 euros.

a) Calcula cuántas unidades de cada tipo de camisa debe producir para obtener el máximo beneficio, así como el valor de dicho beneficio.

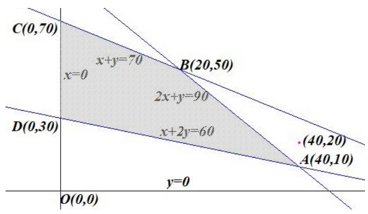
b) Es posible que la empresa fabrique 40 camisas del tipo A y 20 camisas del tipo B? Razona la respuesta.

Solución:
Sea x : nº de camisas de tipo A e y : nº de camisas de tipo B.

	blancas	grises	rosas	beneficio
A	20	20	30	60
B	10	20	60	50
	≤ 900	≤ 1400	≥ 1800	

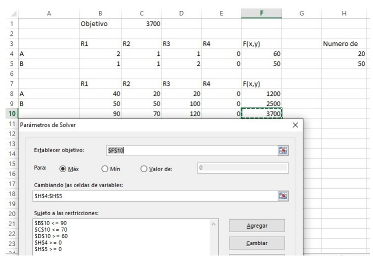
a) La región factible es

$$\begin{cases} 20x+10y \leq 900 \\ 20x+20y \leq 1400 \\ 30x+60y \geq 1800 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+y \leq 90 \\ x+y \leq 70 \\ x+2y \geq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(40,10)$, $B(20,50)$, $C(0,70)$ y $D(0,30)$.

Solución por solver :



$f(x,y) = 60x + 50y$

$$\begin{cases} f(40,10) = 2900 \\ f(20,50) = 3700 \text{ Máximo} \\ f(0,70) = 3500 \\ f(0,30) = 1500 \end{cases}$$

El máximo beneficio sería de 3700€ con 20 camisas del tipo A y 50 del tipo B.

b) El punto $(40,20)$ está fuera de la región factible y, por tanto, no cumple todas las restricciones. No puede ser una solución del problema.

2.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.17.2 Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x,x) = 5x + 4y$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

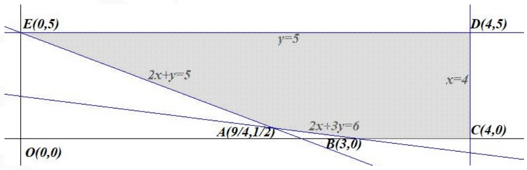
a) Representa el recinto mencionado.

b) Obtén los puntos en que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de ésta en dichos puntos.

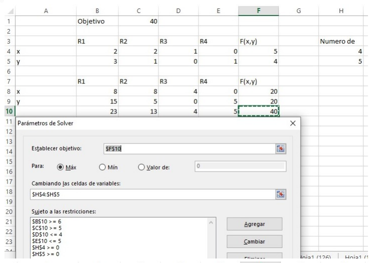
Solución:

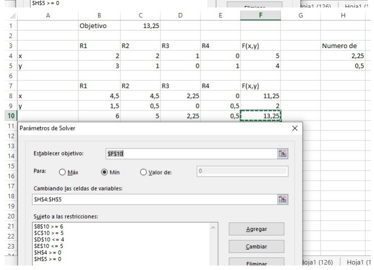
a) La región factible es

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \\ x \leq 4 \\ y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Solución por solver :





Los vértices son: $A\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $B(3,0)$, $C(4,0)$, $D(4,5)$ y $E(0,5)$.

$f(x,y) = 5x + 4y$

$$\begin{cases} f\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{53}{4} = 13,25 \ \text{Mínimo} \\ f(3,0) = 15 \\ f(4,0) = 20 \\ f(4,5) = 40 \ \text{Máximo} \\ f(0,5) = 20 \end{cases}$$

El máximo sería 40 en el punto $D(4,5)$.
El mínimo sería 13,25 en el punto $A\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Capítulo 3

Análisis

3.1. Resúmenes teóricos

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones(pasos a seguir)

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ o $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim\limits_{x \longrightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists\, y = p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $n = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ $\nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0$ $\searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$

7 Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0 \cup$ Convexa : $f''(x) < 0 \cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x+T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f'\,dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln\lvert f\rvert$
Exponencial	$\int e^x\,dx = e^x$	$\int e^f \cdot f'\,dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f'\,dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x\,dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f\,dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x\,dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f\,dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f\,dx = \tan f$
	$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1+\tan^2 f)\,dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f}\,dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f\,dx = -\cot f$
	$\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1+\cot^2 f)\,dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f}\,dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\,dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2}\,dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano $-$ Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$ ax^2+bx+c irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)
- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad
Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.
Teorema de Weierstrass
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.
Teorema de Darboux
Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.
Teorema de Bolzano
Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ $(a < b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abcisas, es decir, $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.
Teorema de Rolle
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Teorema del Valor Medio de Lagrange
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt \;\text{ donde }\; c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.
Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)
Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a,b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable
Sea g una función con derivada g' continua en $[a,b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\dfrac{A}{B}\right) \cdot \infty$
- Si $n < m \Longrightarrow L = 0$
- Si $n = m \Longrightarrow L = \dfrac{A}{B}$

Si $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x)-1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \; o \; \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x\ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \dfrac{\pi}{2} - x$

3.2. Andalucía

3.2.1. Modelo de 2020

Problema 3.2.1 Sea la función definida de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & \text{si} \quad x < 2 \\ \\ 2x^2 - 10x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Halle el dominio de f.

b) Estudie la derivabilidad de f en $x = 2$.

c) Calcule la integral indefinida de la función $f(x) = 2x^2 - 10x$.

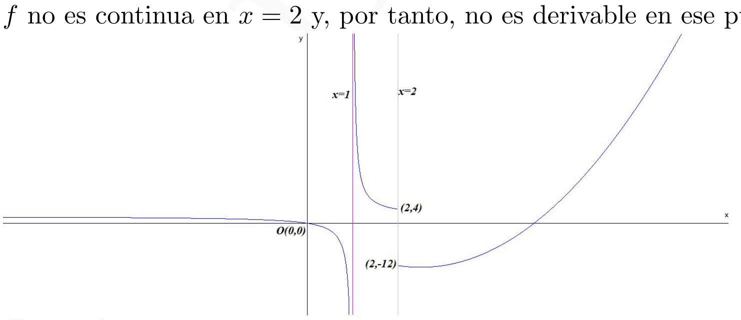
Solución:

a) En la rama $x < 2$ la función vale $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ y el denominador se anula en $x = 1$ que se encuentra dentro de la rama y, por tanto, ese punto no estará en el dominio de la función.
En la rama $x \geq 2$ la función vale $f(x) = 2x^2 + 10x$, se trata de un polinomio y, por tanto, su dominio es la rama completa.
En conclusión $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

b) Para estudiar la derivabilidad de f en $x = 2$ primero hay que comprobar si es continua en ese punto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{2x}{x-1} = 4 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} (2x^2 - 10x) = -12 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) \Longrightarrow$$

f no es continua en $x = 2$ y, por tanto, no es derivable en ese punto.



c) $\displaystyle\int (2x^2 - 10x)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 5x^2 + C$

Problema 3.2.2 Sea $C(x)$ la función de costes de una empresa, expresada en miles de euros, donde x mide, en toneladas, la cantidad producida. De esta función se sabe que $C'(x) = 7x^2 - 8x + 1$

a) Determine la cantidad a producir por la empresa para minimizar el coste.

b) Sabiendo que si no hay producción el coste asciende a 30000 euros, obtenga $C(x)$. ¿Cuál es el mínimo coste de producción para la empresa?

c) Si la cantidad a producir está entre 0 y 1,2 toneladas, ¿cuál sería la producción que supondría un mayor coste a la empresa?

Solución:

a) $C'(x) = 7x^2 - 8x + 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{7}$ y $x = 1$

	$(0, 1/7)$	$(1/7, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 1/7) \cup (1, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(1/7, 1)$, tiene un mínimo local en $x = 1$ y un máximo local en $x = 1/7$.
Luego el coste mínimo sería con la producción de una tonelada. Este valor habría que compararlo con $C(0)$.

b) Ahora tenemos $C(0) = 30$ euros.

$$C(x) = \int (7x^2 - 8x + 1)\,dx = \frac{7x^3}{3} - 4x^2 + x + K$$

Imponiendo $C(0) = K = 30 \Longrightarrow C(x) = \dfrac{7x^3}{3} - 4x^2 + x + 30.$

Tenemos $C(1) = \dfrac{88}{3} < C(0) \Longrightarrow$ en $x = 1$ hay un mínimo absoluto de 29333 euros.

c) En $x = \dfrac{1}{7}$ hay un máximo local con un coste de 30068 euros. en la fase inicial era de 30000 euros y cuando $x = 1,2$ es de $C(1,2) = 29,472$, es decir, de 29472 euros. Luego el máximo se produce en el máximo local en $x = \dfrac{1}{7}$.

3.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.2.3 Se considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

a) Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

b) Represente gráficamente la función.

c) Calcule $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

d) Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

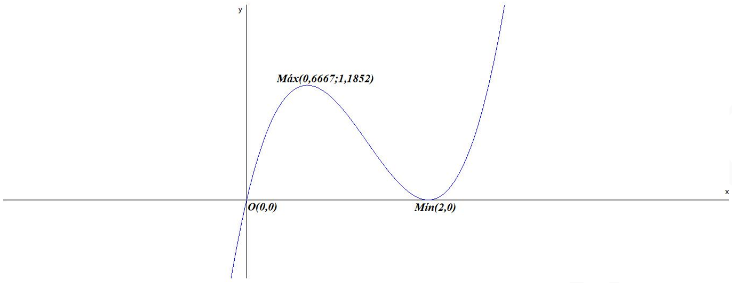
Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ y $x = 2$

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

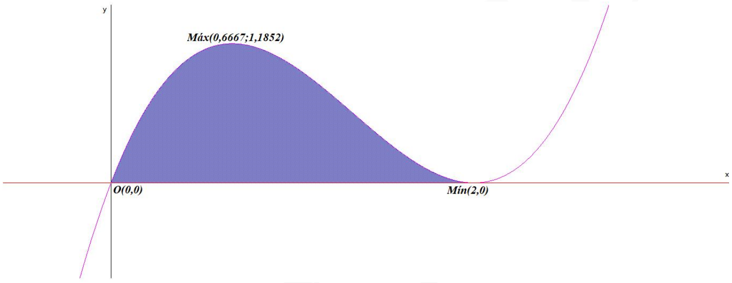
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 2/3) \cup (2, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(2/3, 2)$, tiene un máximo relativo en $x = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{32}{27}\right) = (0,6667; 1,1852)$ y un mínimo relativo en $x = 2 \Longrightarrow (2, 0)$.

b) Los puntos de corte con el eje de abscisas son $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$, con estos datos:



c) $F(x) = \displaystyle\int (x^3 - 4x^2 + 4x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$

d) $S = \displaystyle\int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x)\,dx = F(2) - F(0) = \frac{4}{3}\,u^2$



Problema 3.2.4 Se pide:

a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right); \quad g(x) = x^3 e^{2x^2}$$

b) Represente gráficamente la parábola $h(x) = x^2 + x + 1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

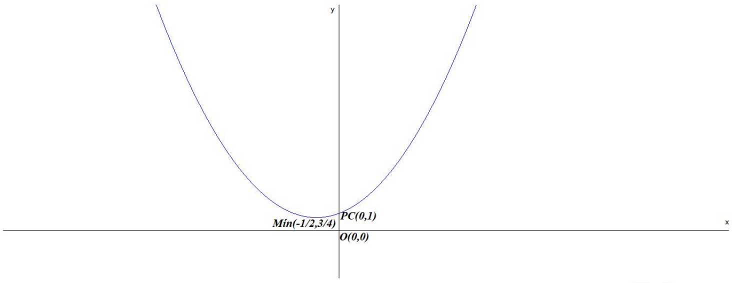
c) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x) = x^2 + x + 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = 0$.

Solución:

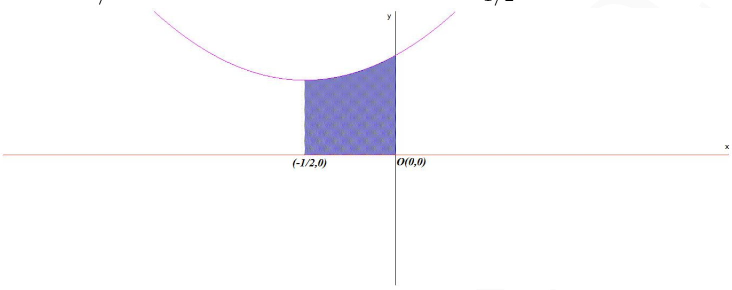
a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+1) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x^2-1}$

$g(x) = x^3 e^{2x^2} \Longrightarrow g'(x) = 3x^2 e^{2x^2} + 4x^4 e^{2x^2} = x^2 e^{2x^2}(3 + 4x^2)$

b) Punto de corte con el eje de ordenadas $x = 0 \Longrightarrow h(0) = 1 \Longrightarrow (0, 1)$. Con el eje de abscisas $h(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Longrightarrow$ no tiene solución y, por tanto, no hay puntos de corte con el eje de abscisas.
$h'(x) = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.
$h''(x) = 2 \Longrightarrow h''\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ es un mínimo.



c) $S = \displaystyle\int_{-1/2}^{0} (x^2 + x + 1)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{+} x\right]_{-1/2}^{0} = \frac{5}{12}\ u^2$



3.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.2.5 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

b) Estudie la monotonía de la función f y calcule el mínimo.

c) Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$.

Solución:

a) En la rama $x < 0$ la función vale $f(x) = 2^{x+1}$ es una exponencial y es continua y derivable en toda la rama.
En la rama $x \geq 0$ la función vale $f(x) = x^2 - 2x$ es un polinomio y es continua y derivable en toda la rama.
En $x = 0$ la función vale cero y tenemos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

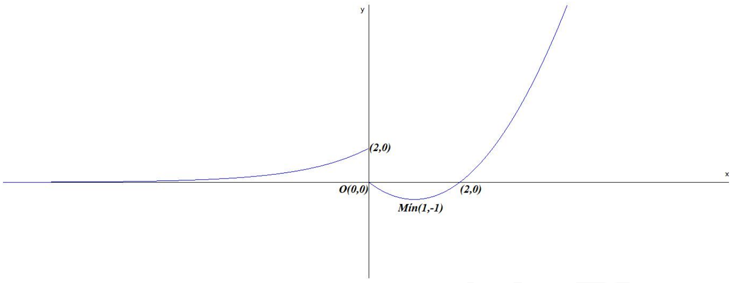
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} 2^{x+1} = 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

f no es continua en $x = 0$ y, por tanto, no es derivable en ese punto.
En conclusión: la función f es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) En la rama $x < 0$ tenemos $f'(x) = 2^{x+1} \ln 2 > 0 \Longrightarrow f$ es siempre creciente y no tiene extremos relativos en esta rama.
En la rama $x \geq 0$ tenemos $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(1, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 1)$, tiene un mínimo relativo en $x = 1 \Longrightarrow (1, -1)$.



c)

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} 2^{x+1}\,dx + \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx = \left.\frac{2^{x+1}}{\ln 2}\right]_{-2}^{0} + \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \frac{3}{2\ln 2} - \frac{4}{3} \simeq 0,83071$$

Problema 3.2.6 El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t - 0,3 & \text{si} \quad 0,2 \leq t \leq 1,8 \\ 0,1t - 0,12 & \text{si} \quad 1,8 < t \leq 5 \\ -0,5t^2 + 8,3t - 28,62 & \text{si} \quad 5 < t \geq 10 \end{cases}$$

donde t es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020.

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

b) ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es ese número?

Solución:

a) Las tres ramas son polinómicas y son continuas y derivables. Habrá que analizar su comportamiento en $t = 1,8$ y $t = 5$.
Continuidad en $t = 1,8$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t \longrightarrow 1,8^-} f(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 1,8^-} (-t^2 + 2t - 0,3) = 0,06 \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 1,8^+} f(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 1,8^+} (0,1t - 0,12) = 0,06 \\ f(1,8) = 0,06 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ continua}$$

Continuidad en $t = 5$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\longrightarrow 5^-} f(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 5^-} (0,1t - 0,12) = 0,38 \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 5^+} f(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 5^+} (-0,5t^2 + 8,3t - 28,62) = 0,38 \\ f(5) = 0,38 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua}$$

Luego la función es continua en el intervalo $[0,2;10]$.
La derivada es:

$$f(t) = \left\{\begin{array}{ccc} -2t + 2 & \text{si} & 0,2 < t < 1,8 \\ 0,1 & \text{si} & 1,8 < t < 5 \\ -t + 8,3 & \text{si} & 5 < t < 10 \end{array}\right.$$

Derivable $t = 1,8$: $f'(1,8^-) = -1,6 \neq f'(1,8^+) = 0,1 \Longrightarrow f$ no es derivable en $t = 1,8$.
Derivable $t = 5$: $f'(5^-) = 0,1 \neq f'(5^+) = 3,3 \Longrightarrow f$ no es derivable en $t = 5$.
Luego la función es derivable en el intervalo $(0,2;1,8) \cup (1,8;5) \cup (5,10)$.

b) Hacemos $f'(t) = 0$
En la rama $(0,2;1,8) \Longrightarrow f'(t) = -2t + 2 = 0 \Longrightarrow t = 1$. Como $f''(t) = -2 \Longrightarrow f''(1) = -2 < 0 \Longrightarrow t = 1$ es un máximo relativo $(1, f(1)) = (1;0,7)$
En la rama $(1,8;5) \Longrightarrow f'(t) = 0,1 \neq 0 \Longrightarrow$. No hay extremos.
En la rama $(5;10) \Longrightarrow f'(t) = -t + 8,3 = 0 \Longrightarrow t = 8,3$. Como $f''(t) = -1 \Longrightarrow f''(8,3) = -1 < 0 \Longrightarrow t = 8,3$ es un máximo relativo $(8,3; f(8,3)) = (8,3;5,825)$
Además tenemos que comprobar los valores en los bordes de los intervalos y tendremos:

$$f(0,2) = 0,06, \quad f(1) = 0,7, \quad f(1,8) = 0,06, \quad f(5) = 0,38, \quad f(8,3) = 5,825, \quad f(10) = 4,38$$

El máximo se encuentra a los 8,3 meses con 5825 personas infectadas.

3.3. Aragón

3.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.3.1 Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t) = \frac{2t - 6}{t + 4}$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a) ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?

b) En qué momento $t \in [3, 10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.

c) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150.000€?

d) En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

Solución:

a) Como t es positivo tenemos que el denominador $t+4>0$. por otra parte $2t-6=0 \Longrightarrow t=3$, luego la función beneficio es negativa de 0 a 3 años. En el intervalo $[0,3)$.

b) $B'(t)=\dfrac{14}{(t+4)^2}>0 \Longrightarrow$ no hay extremos relativos y la función es siempre creciente, luego el máximo beneficio en el intervalo $[3,10]$ se produce cuando $t=10 \Longrightarrow B(10)=1 \Longrightarrow$ 100000€

c) $B(t)=\dfrac{2t-6}{t+4}=1,5 \Longrightarrow 2t-6=1,5t+6 \Longrightarrow t=24$ años.

d) $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} B(t)=\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\dfrac{2t-6}{t+4}=2 \Longrightarrow$ los beneficios tienden a estabilizarse en 200000€.

Problema 3.3.2 Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{1-x} & \text{si} \quad x\le 0 \\ bx^2+2x+c & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

donde a, b, c son parámetros reales. Se pide:

a) Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x=0$, la función tenga un extremo relativo en $x=1$ y $f'(-1)=-1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.

b) Calcula, para los valores $a=1$, $b=-2$, $c=3$; $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$

c) Calcula, para los valores $a=1$, $b=-2$, $c=3$; $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) ☛ Continua en $x=0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\dfrac{a}{1-x}=a \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(bx^2+2x+c)=c \\ f(0)=a \end{cases} \Longrightarrow a=c$$

☛ En $x=1$ es $f(x)=bx^2+2x+c \Longrightarrow f'(x)=2bx+2$, si $x=1$ es un extremo relativo $f'(1)=0 \Longrightarrow 2b+2=0 \Longrightarrow b=-1$

☛ En $x=-1$ es $f(x)=\dfrac{a}{1-x} \Longrightarrow f'(x)=\dfrac{a}{(x-1)^2}$, si $f'(-1)=-1 \Longrightarrow \dfrac{a}{4}=-1 \Longrightarrow$ $a=-4$

☛ Luego $a=-4$, $b=-1$ y $c=-4$.

Para comprobar de qué tipo de extremo hay en $x=1$ recurrimos a la segunda derivada en esa rama $f''(x)=2b=-2 \Longrightarrow f''(1)=-2<0 \Longrightarrow x=1$ es un máximo.

b) Si $a=1$, $b=-2$, $c=3 \Longrightarrow f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si} \quad x\le 0 \\ -2x^2+2x+3 & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$

☛ $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{1}{1-x}=0$

☛ $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} (-2x^2+2x+3) = -\infty$

c) Si $a=1$, $b=-2$, $c=3 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ -2x^2+2x+3 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (-2x^2+2x+3)\,dx = \left.\frac{-2x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_1^2 = \frac{4}{3}$$

3.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.3.3 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-2x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3-6x^2+9x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

a) Estudia si $f(x)$ es continua en $x=0$, ¿$f(x)$ es continua en la recta real?

b) Halla los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $x \in [1,4]$.

c) Analiza la concavidad ($\cap$) - convexidad ($\cup$) de $f(x)$ cuando $x > 0$.

d) Calcula $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) ☛ Continua en $x=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} (-x^2-2x) = 0 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} (x^3-6x^2+9x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

☛ Como las ramas son polinomios f es continua en las dos ramas. Luego f es continua en $\mathbb{R}$.

b) Cuando $x \in [1,4]$ la función es $f(x) = x^3-6x^2+9x$

☛ Estudiamos los extremos relativos:
$f'(x) = 3x^2-12x+9 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3$

	$(1,3)$	$(3,4)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

En $x=1$ hay un máximo relativo y en $x=3$ un mínimo relativo.

☛ $f(1) = 4$, $f(3) = 0$ y $f(4) =$. Luego en $x=3$ el mínimo es absoluto. Cuando $x=1$ o $x=4$ el máximo es absoluto.

c) Cuando $x > 0$ la función es $f(x) = x^3-6x^2+9x$

☛ $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\cap$	convexa $\cup$

☛ La función es concava en el intervalo $(0,2)$ y convexa en el $(2,\infty)$ con un punto de inflexión en $x = 2$.

d) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 9x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{13}{4}$

Problema 3.3.4 Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 16}{x+3}$$

a) Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$
Asíntotas:

☛ Verticales en $x = -3$:

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{2x^2 - 16}{x+3} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{2x^2 - 16}{x+3} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 16}{x+3} = -\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 16}{x+3} = +\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^2 - 16}{x^2 + 3x} = 2$$

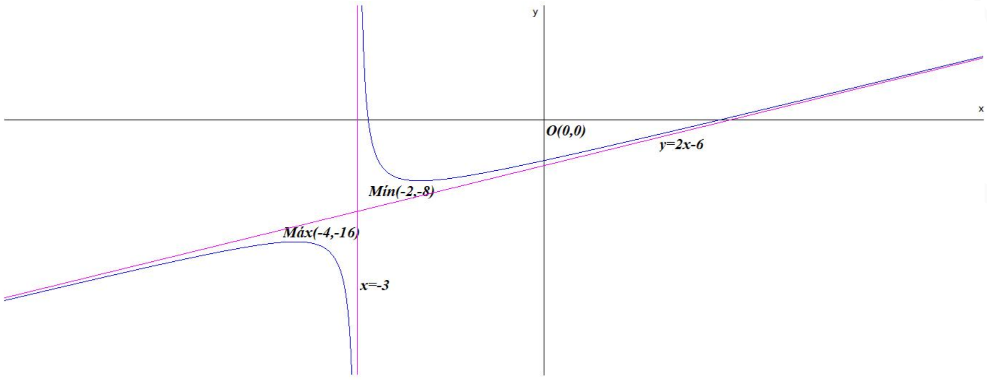
$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 16}{x+3} - 2x\right) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{-16 - 6x}{x+3} = -6$$

$$y = 2x - 6$$

b) $f(x) = \dfrac{2(x^2 + 6x + 8)}{(x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = -4$.

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-4) \cup (-2,\infty)$ y decreciente en $(-4,-3) \cup (-3,-2)$.
La función tiene un máximo relativo en el punto $(-4,-16)$ y un mínimo relativo en el $(-2,-8)$



3.4. Asturias

3.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.4.1 Dada la función $f(x) = \dfrac{ax}{3x^2+1}$, se pide:

a) Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = \dfrac{4}{3}\ln 4$, donde F denota una primitiva de f.

b) Suponiendo el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int \frac{ax}{3x^2+1}\,dx = \frac{a}{6}\ln|3x^2+1| + C$

$$\left\{\begin{array}{l} F(0) = 0 \Longrightarrow C = 0 \\ F(1) = \dfrac{4}{3}\ln 4 \Longrightarrow \dfrac{a}{6}\ln 4 + C = \dfrac{4}{3}\ln 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{a}{6}\ln 4 = \frac{4}{3}\ln 4 \Longrightarrow \frac{a}{6} = \frac{4}{3} \Longrightarrow a = 8$$

b) $f(x) = \dfrac{8x}{3x^2+1}$

- Tenemos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $(0,0)$ único punto de corte con los ejes, $f(-x) = -f(x)$ por lo que es impar y la función es negativa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y positiva en el $(0, \infty)$
- Asíntotas:
  - Verticales: no hay
  - Horizontales: $y = 0$

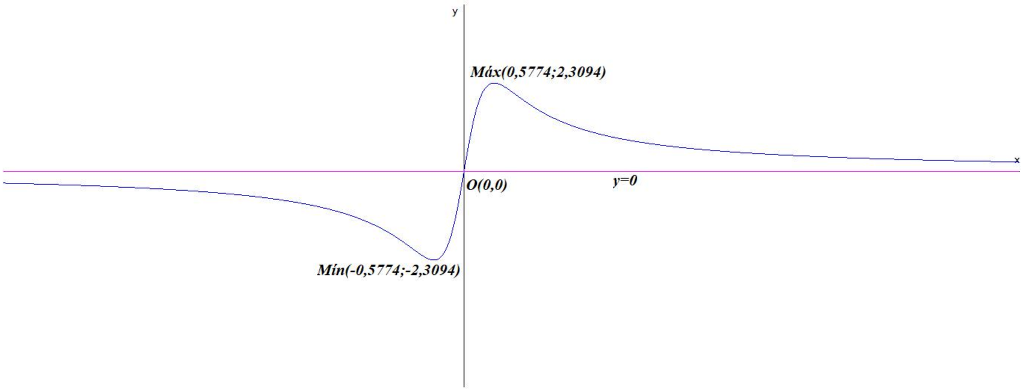
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{3x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x}{3x^2+1} = 0$$

  - Oblicuas: no hay por haber horizontales.

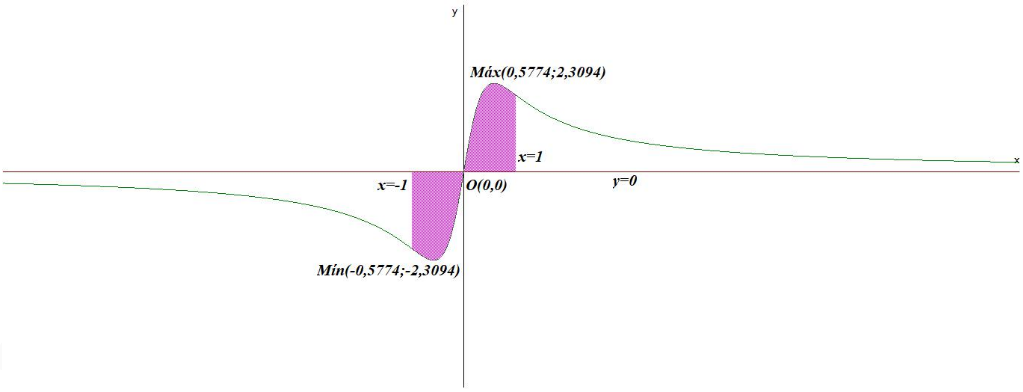
☛ Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{8(3x^2-1)}{(3x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

	$\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y decreciente en $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)=(-0,5774;-2,3094)$ y un máximo relativo en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)=(0,5774;2,3094)$



☛ $S = 2\displaystyle\int_0^1 f(x) = 2(F(1)-F(0)) = 2\left(\dfrac{8}{3}\ln 2 - 0\right) = \dfrac{16}{3}\ln 2 \simeq 3,6968\ u^2$



Problema 3.4.2 Se ha investigado el tiempo en minutos (f) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento en días (x) de los deportistas, obteniéndose que:

$$f(x) = 2 + \frac{300}{x+30}, \quad x \geq 0$$

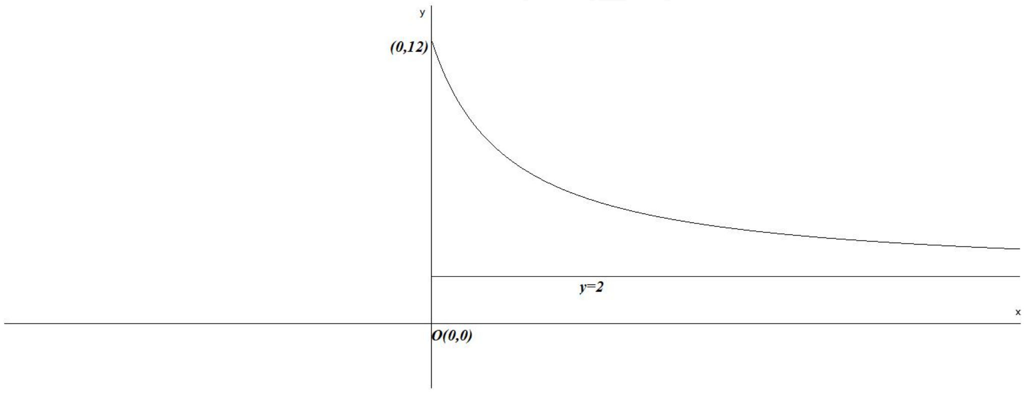
a) Estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿Aumenta en algún momento el tiempo que se tarda en realizar la prueba?

b) Por mucho que entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 2 minutos? ¿Cuánto tiempo hay que entrenar para realizar la prueba en menos de 4 minutos?

Solución:

a) $f(x) = 2 + \dfrac{300}{x+30}$

- ☛ Tenemos $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$, con punto de corte $(0, 12)$ y es siempre positiva.
- ☛ Asíntotas:
  - Verticales: no hay
  - Horizontales: $y = 2$
  $$\lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{300}{x+30}\right) = 2$$
  - Oblicuas: no hay por haber horizontales.
- ☛ Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{300}{(x+30)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay extremos relativos. Como $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ decreciente en el intervalo $(0, \infty)$



b) En $y = 2$ hay una asíntota horizontal y la curva siempre está por encima de ella, luego no será capaz de llegar a los dos minutos.
Para llegar a los 4 minutos necesita entrenar:

$$2 + \frac{300}{x+30} = 4 \Longrightarrow x = 120 \text{ días}$$

3.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.4.3 Se ha investigado la energía que produce una placa solar (f) en función del tiempo transcurrido, en horas, desde que amanece (x), obteniéndose que:

$$f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{a}{x^2} & \text{si} \quad 8 < x \le 12 \end{cases}$$

a) Determina el valor de a para que la energía producida varíe de forma continua al variar el tiempo transcurrido desde que amanece.

b) Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánta energía produce en ese momento?

Solución:

a) La función f es continua en cualquiera de las dos ramas. Para que sea continua en $x = 8$ tenemos:
$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-} (10x - x^2) = 16$ y $\lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^+} \frac{a}{x^2} = \frac{a}{64}$.
Para que f sea continua en $x = 8 \Longrightarrow 16 = \frac{a}{64} \Longrightarrow a = 1024$.

b) Si $a = 1024 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{1024}{x^2} & \text{si} \quad 8 < x \le 12 \end{cases}$

- Tenemos $\mathrm{Dom}(f) = [0, 12]$, $10x - x^2 = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ cuando $x = 10$ está fuera de la rama. La otra rama no tiene puntos de corte. Además la función es siempre positiva.

- Asíntotas:

  - Verticales: no hay
  - Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1024}{x^2} = 0$$

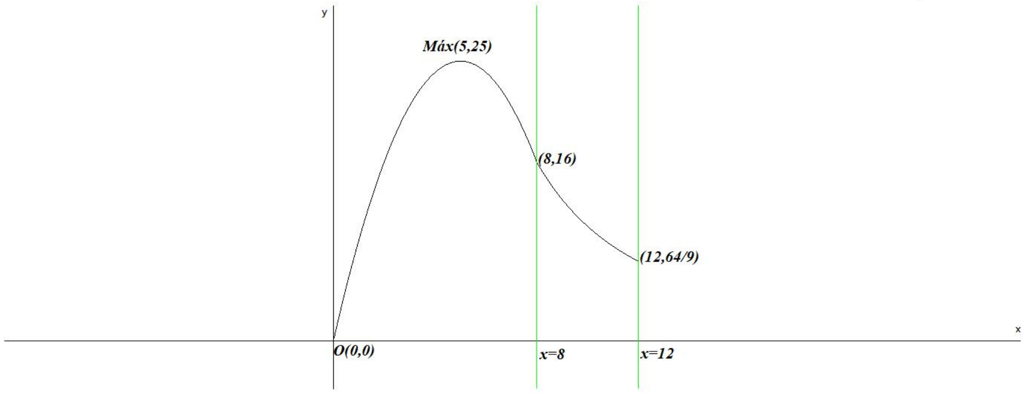
  en el caso de salirse del dominio de definición.

  - Oblicuas: no hay por haber horizontales.

- Monotonía: $f'(x) = \begin{cases} 10 - 2x & \text{si} \quad 0 \le x \le 8 \\ -\dfrac{2048}{x^3} & \text{si} \quad 8 < x \le 12 \end{cases}$
Cuando $0 \le x \le 8 \Longrightarrow 10 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 5$.

	$(0, 5)$	$(5, 8)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 5)$ y decreciente en $(5, 8)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(5, 25)$
Cuando $8 < x \le 12 \Longrightarrow -\frac{2048}{x^3} \neq 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en el intervalo $(8, 12)$ y no tiene extremos relativos.
Por otro lado: $f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$, $f(8) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $f(12) = \frac{64}{9} \Longrightarrow \left(12, \frac{64}{9}\right)$



El momento en el que se produce la máxima energía desde el amanecer es en la hora 5 con 25 unidades de energía.

Problema 3.4.4 Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 10$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3,2$ y $x = -2$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (x^3 + 3x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + C$

$F(2) = 4 + 8 + C = 10 \Longrightarrow C = -2 \Longrightarrow F(x) = \dfrac{x^4}{4} + x^3 - 2$

b)

- ☛ Tenemos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, puntos de corte $(0,0)$ y $(-3,0)$, $f(-x) \neq \pm f(x)$ por lo que no tiene simetría y la función es negativa en el intervalo $(-\infty,-3)$, es positiva en el $(-3,0)$ y positiva en el $(0,\infty)$
- ☛ Asíntotas: No tiene, es un polinomio.
- ☛ Monotonía: $f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$

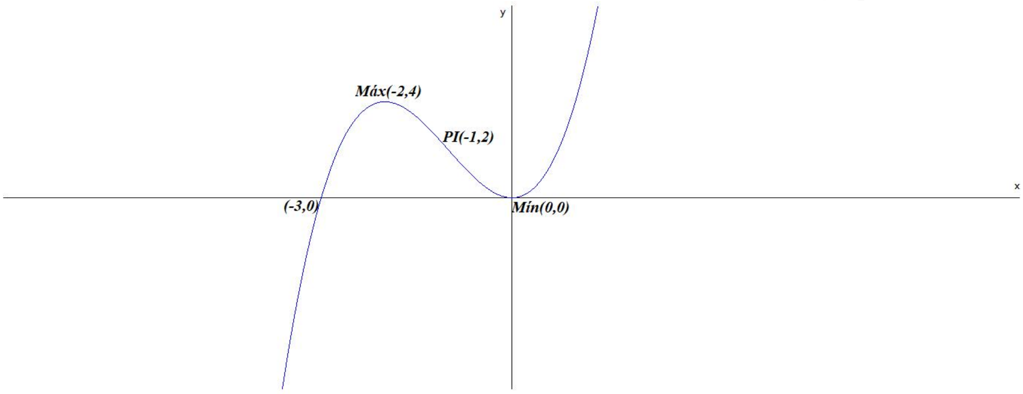
	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-2,0)$ y creciente en $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(0,0)$ y un máximo relativo en $(-2,4)$

- ☛ Curvatura: $f''(x) = 6x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(-\infty,-1)$ y cóncava $\smile$ en el $(-1,\infty)$, por lo que tiene un punto de inflexión en el punto $(-1,2)$

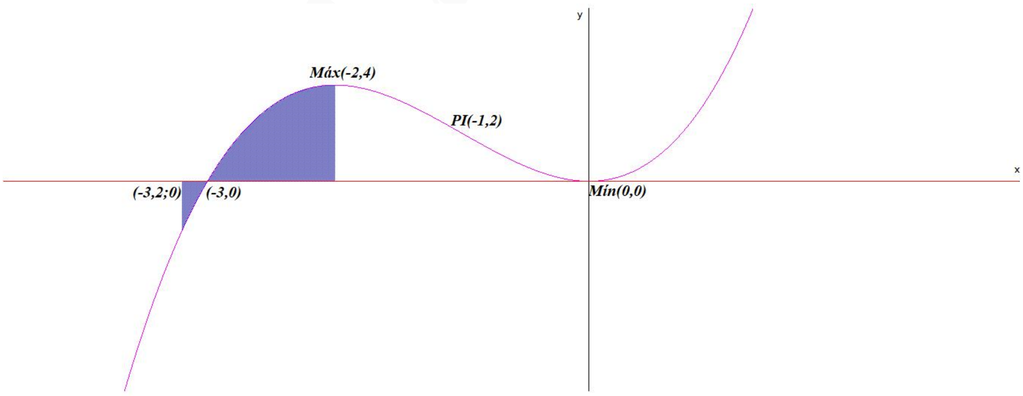


☛ En el intervalo $[-3,2;-2]$ la función corta en $x=-3$ y tenemos dos recintos de integración $S_1:[-3,2;-3]$ y $S_2:[-3,-2]$.
$F(x)=\int(x^3+3x^2)\,dx=\dfrac{x^4}{4}+x^3+C$

$$S_1=\int_{-3,2}^{-3}f(x)\,dx=F(-3)-F(-3,2)=-\frac{491}{2500}=-0,1964$$

$$S_2=\int_{-3}^{-2}f(x)\,dx=F(-2)-F(-3)=\frac{11}{4}=2,75$$

$$S=|S_1|+|S_2|=\frac{491}{2500}+\frac{11}{4}=\frac{3683}{1250}=2,9464\ u^2$$



3.5. Cantabria

3.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.5.1 Dada la función $f(x)=\dfrac{3x-15}{4x^2+4x-120}$

a) ¿En qué puntos es discontinua?

b) ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad? Justifica la respuesta.

c) Calcular los dos límites laterales en $x = -6$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Solución:

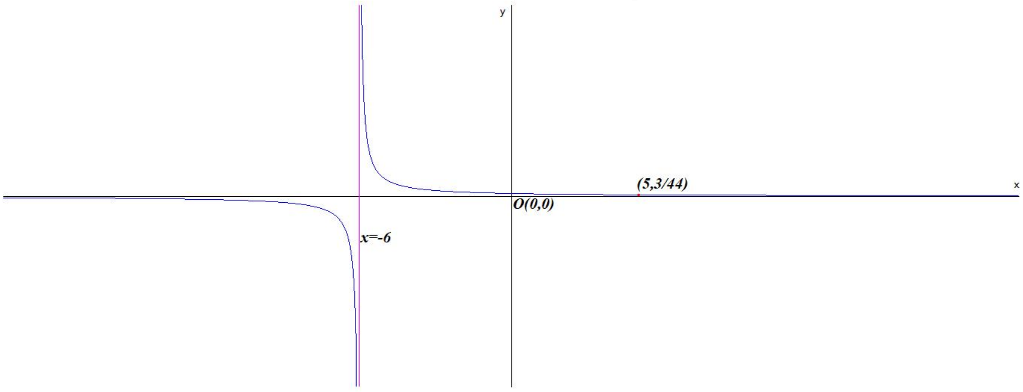
a) La función es discontinua en los puntos en los que se anula el denominador $4x^2 + 4x - 120 = 0 \Longrightarrow x = -6$ y $x = 5$. El $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-6, 5\}$.

b) $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \left[\dfrac{-33}{0}\right] = \pm\infty$, en este punto no hay discontinuidad evitable.
$\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3}{8x+4} = \dfrac{3}{44}$, en este punto hay una discontinuidad evitable.
La extensión por continuidad de esta función sería:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-15}{4x^2+4x-120} & \text{si} \quad x \neq \{5, -6\} \\[2ex] \dfrac{3}{44} & \text{si} \quad x = 5 \end{cases}$$

función continua en $x = 5$ pero no en $x = -6$.

c) En $x = -6$ la función tiene una asíntota vertical:
$\lim\limits_{x\to -6^-} \dfrac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \left[\dfrac{-33}{0^+}\right] = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -6^+} \dfrac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \left[\dfrac{-33}{0^-}\right] = +\infty$



Problema 3.5.2 Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x+4)^2}$, obtener:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Las asíntotas.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

d) Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

e) Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Solución:

a) ☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-4\}$

☛ Corte con el eje de abscisas: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{3x^2}{(x+4)^2} = 0 \Longrightarrow (0,0)$

☛ Corte con el eje de ordenadas: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$

b) Asíntotas:

☛ Verticales: $x = -4$

$$\lim_{x\to -4^-} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = \left[\frac{48}{0^+}\right] = +\infty \text{ y } \lim_{x\to -4^+} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = \left[\frac{48}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = 3$$

☛ Oblicuas: no hay por haber horizontales.

c) Monotonía: $f'(x) = \dfrac{24x}{(x+4)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$

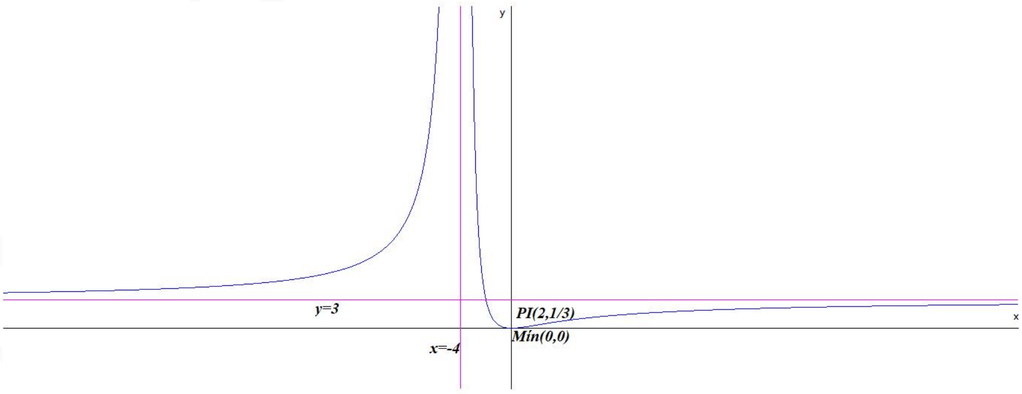
	$(-\infty,-4)$	$(-4,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-4) \cup (0,+\infty)$ y decreciente en $(-4,0)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(0,0)$

d) Curvatura: $f'(x) = -\dfrac{48(x-2)}{(x+4)^4} = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,2)$	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava $\smile$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

La función es cóncava $\smile$ en el intervalo $(-\infty,-4) \cup (-4,2)$ y convexa $\frown$ en el $(2,+\infty)$ con un punto de inflexión en $\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$



3.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.5.3 Una agencia de viajes organiza una excursión para los empleados de una empresa. Eso le supone unos gastos fijos por viajero de 475 euros además de los 850 euros del alquiler del autocar. Con un grupo de 20 personas, cobra a cada viajero 525 euros, pero presenta la siguiente oferta a la empresa: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará el precio del viaje en 1,25 euros. ¿Con cuántos viajeros consigue unos beneficios máximos? ¿Cuánto paga cada viajero?
Solución:
Sea x el número de viajeros que hay por encima de los 20.
Gasto: $G(x) = 475(20 + x) + 850$
Ingresos: $I(x) = (525 - 1,25x)(20 + x)$
Beneficio: Ingresos-Gastos$\equiv B(x) = I(x) - G(x) \Longrightarrow$
$B(x) = (525 - 1,25x)(20 + x) - 475(20 + x) - 850 = -\dfrac{5x^2}{4} + 25x - 1850$
$B'(x) = \dfrac{50 - 5x}{2} = 0 \Longrightarrow x = 10$
$B''(x) = -\dfrac{5}{2} < 0 \Longrightarrow x = 10$ es un máximo relativo.
Deberá coger 10 viajeros más y obtendría un beneficio $B(10) = 275$€.
Cada viajero pagaría $525 - 10 \cdot 1,25 = 512,5$€

Problema 3.5.4 Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, obtener:

a) Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) Determinar sus intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

d) Dibujar la gráfica de $f(x)$ e indicar la región delimitada por dicha curva y la recta $y = x$.

e) Calcular el área de la región anterior.

Solución:

a)
- ☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- ☛ Corte con el eje de abscisas: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 3x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(\pm\sqrt{3}, 0)$
- ☛ Corte con el eje de ordenadas: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

b) Monotonía: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

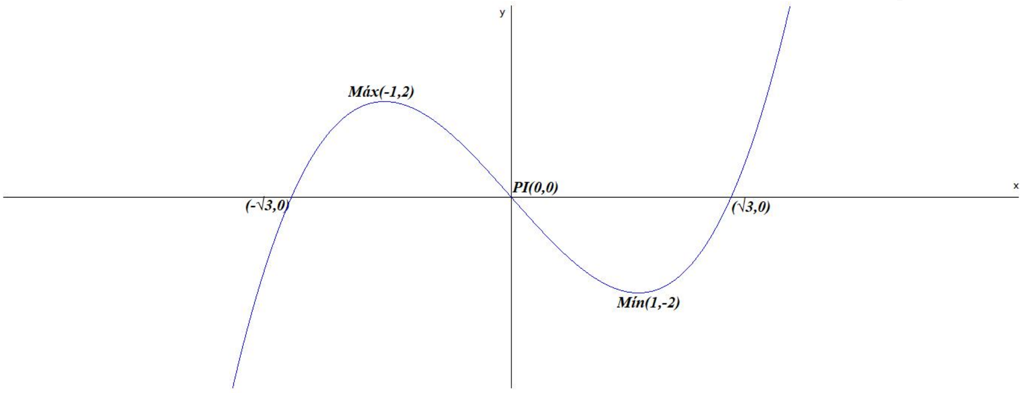
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 1)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -2)$ y un máximo relativo en $(-1, 2)$

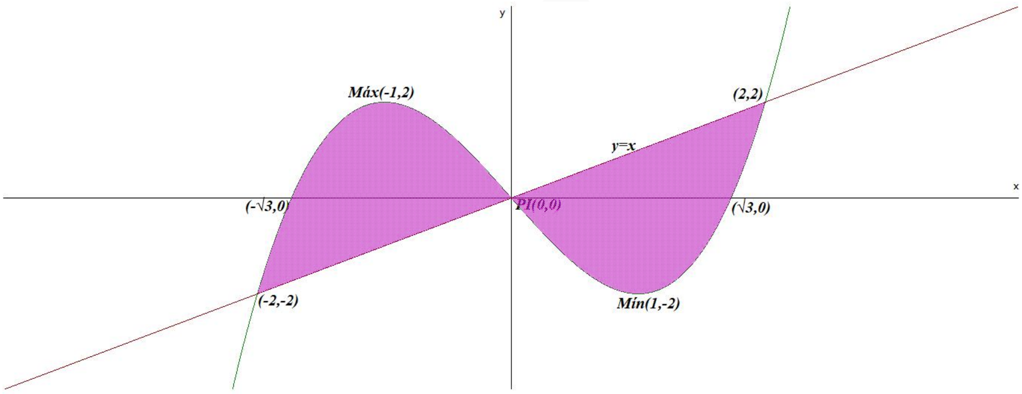
c) Curvatura: $f'(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es cóncava $\smile$ en el intervalo $(0, \infty)$ y convexa $\frown$ en el $(-\infty, 0)$ con un punto de inflexión en $(0, 0)$



d) Calculamos los puntos de corte de las dos gráficas:
$x^3 - 3x = x \Longrightarrow x = \pm 2$:



e) La función es impar $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x) \Longrightarrow$ simétrica respecto al origen de coordenadas y el área en $[-2, 0]$ es igual al área en $[0, 2]$
$S_1 = \int_0^2 (x^3 - 4x)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = -4$

$$S = 2|S_1| = 8\ u^2$$

3.6. Castilla La Mancha

3.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.6.1 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x + 3 + t & \text{si} \quad x \le 1 \\ (x-3)^2 + t & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$?

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$.

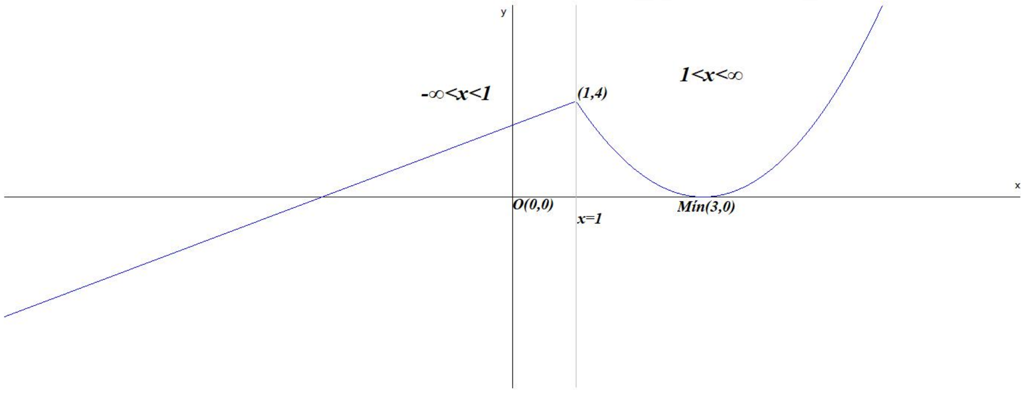
c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+3+t) = 4+t$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} ((x-3)^2+t) = 4+t \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Longrightarrow f$ es continua para cualquier valor de t

b) Si $t = 0 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ (x-3)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2(x-3) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$
La rama $x \le 1$ no tiene extremos.
La rama $x > 1 \Longrightarrow f'(x) = 2(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 3$ recurriendo a la segunda derivada $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(3) = 2 > 0 \Longrightarrow (3, 0)$ es un mínimo relativo.

c) En el intervalo $(1, 3)$ la derivada de la función es negativa y la función es decreciente.
En el intervalo $(3, +\infty)$ la derivada de la función es positiva y la función es creciente.



Problema 3.6.2 La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tiene un punto de inflexión en $(-1, 6)$ y en el punto de abscisa $x = -2$ la pendiente de la recta tangente es -4: Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.
Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\begin{cases} f(-1) = 6 \Longrightarrow -a + b - c = 6 \\ f''(-1) = 0 \Longrightarrow -6a + 2b = 0 \\ f'(-2) = -4 \Longrightarrow 12a - 4b + c = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$$

Problema 3.6.3 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x-t)^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ -2 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

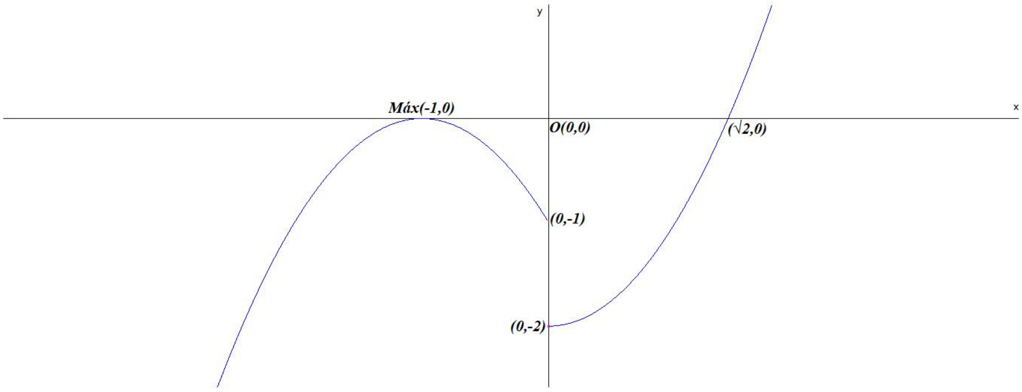
a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 0$.

b) Para $t = -1$, representa gráficamente la función $f(x)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-(x-t)^2) = -t^2$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2-2) = -2 \Longrightarrow -t^2 = -2 \Longrightarrow$ $t = \pm\sqrt{2}$. Para estos dos valores se cumple:
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -2 \Longrightarrow f$ es continua para $t = \pm\sqrt{2}$

b) Si $t = -1 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ -2 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2-2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -2(x+1) & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$
La rama $x > 0$ no tiene extremos.
La rama $x < 0 \Longrightarrow f'(x) = -2(x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1$ recurriendo a la segunda derivada $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(-1) = -2 < 0 \Longrightarrow (-1, 0)$ es un máximo relativo.
En el intervalo $(-\infty, -1)$ la derivada de la función es positiva y la función es creciente.
En el intervalo $(-1, 0)$ la derivada de la función es negativa y la función es decreciente.



Problema 3.6.4 Se localiza un compuesto nocivo en un río obteniéndose que su proporción durante cinco días consecutivos de análisis de muestras sigue la función: $N(x) = \dfrac{1}{100}(-4x^4 + 128x^2 + 54)$ con x = días y $(1 \le x \le 5)$.

a) ¿Cuál es la proporción el tercer día?

b) Determina que día se obtiene el máximo y que día se obtiene el mínimo.

c) ¿A qué valor ascienden ambos?

Solución:

a) $N(3) = \dfrac{1}{100}(-4 \cdot 3^4 + 128 \cdot 3^2 + 54) = 8,82 \Longrightarrow 8,82\,\%$

b) $N'(x) = -\dfrac{4}{25}(x(x^2-16)) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 4$. Las soluciones $x = 0$ y $x = -4$ no están en el dominio de la función.
Recurriendo a la segunda derivada:
$N''(x) = -\dfrac{4}{25}(3x^2 - 16) \Longrightarrow N''(4) = -\dfrac{118}{25} < 0 \Longrightarrow x = 4$ es un máximo relativo. $N(4) = \dfrac{539}{50}$
Por otra parte $N(1) = \dfrac{89}{50}$ y $N(5) = \dfrac{377}{50}$
El máximo está el cuarto día y el mínimo el primer día.

c) El valor el primer día es $N(1) = \dfrac{89}{50} = 1,78 \Longrightarrow 1,78\,\%$ y es el mínimo. El valor el cuarto día es $N(4) = \dfrac{539}{50} = 10,78 \Longrightarrow 10,78\,\%$ y es el máximo.

3.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.6.5 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x+3+t & \text{si} \quad x<1 \\ 3 & \text{si} \quad x=1 \\ (x-3)^2+t & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$?

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$.

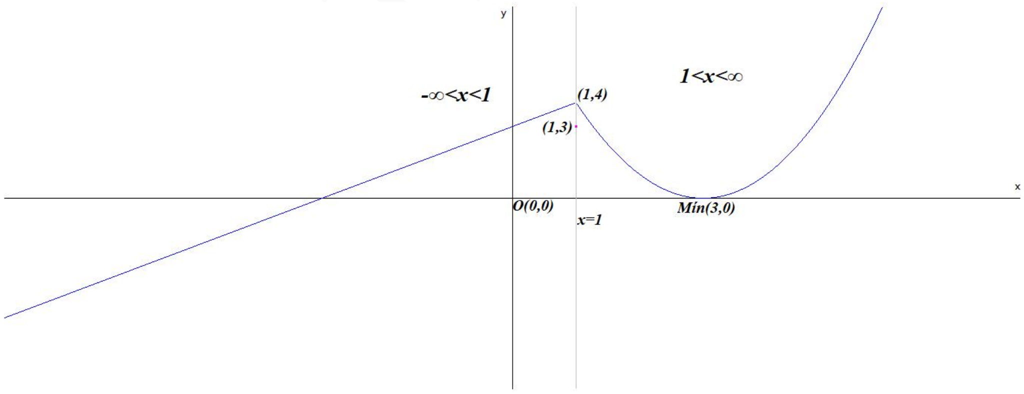
c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+3+t) = 4+t$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} ((x-3)^2+t) = 4+t$ y $f(1) = 3 \Longrightarrow 4+t = 3 \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Longrightarrow f$ es continua para $t = -1$

b) Si $t = 0 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x<1 \\ 3 & \text{si} \quad x=1 \\ (x-3)^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x<1 \\ 0 & \text{si} \quad x=1 \\ 2(x-3) & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$
La rama $x \le 1$ no tiene extremos.
La rama $x > 1 \Longrightarrow f'(x) = 2(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 3$ recurriendo a la segunda derivada $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(3) = 2 > 0 \Longrightarrow (3,0)$ es un mínimo relativo.

c) En el intervalo $(1,3)$ la derivada de la función es negativa y la función es decreciente.
En el intervalo $(3,+\infty)$ la derivada de la función es positiva y la función es creciente.



Problema 3.6.6 La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $(0,-3)$ y la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ es 6. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.
Solución:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = -3 \Longrightarrow c = -3 \\ f'(0) = 0 \Longrightarrow b = 0 \\ f'(-1) = 6 \Longrightarrow -2a + b = 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{array}\right.$$

$$f(x) = -3x^2 - 3$$

Problema 3.6.7 Se considera la función $f(x) = \left\{\begin{array}{lll} (x+2)^2 & \text{si} & x < 0 \\ t & \text{si} & x = 0 \\ (x-2)^2 & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 0$.

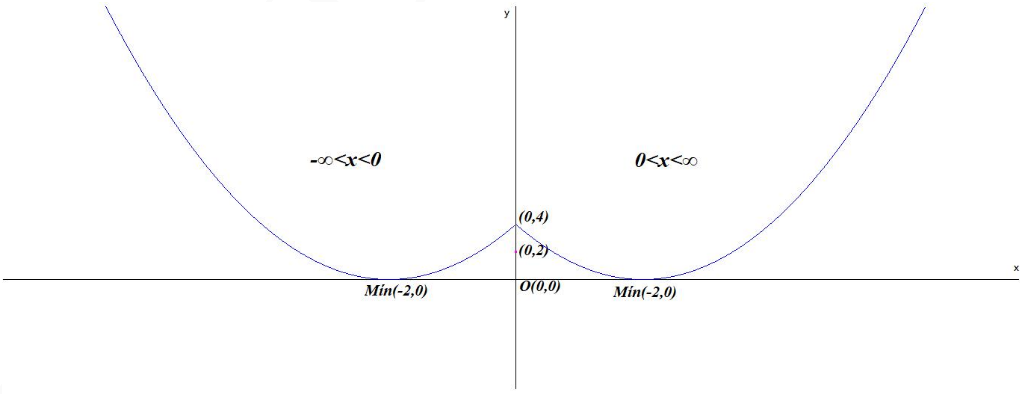
b) Para $t = 2$, representa gráficamente la función $f(x)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+2)^2 = 4$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x-2)^2 = 4$ y $f(0) = t \Longrightarrow t = 4$. Para este valor se cumple:
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 4 \Longrightarrow f$ es continua para $t = 4$

b) Si $t = 2 \Longrightarrow f(x) = \left\{\begin{array}{lll} (x+2)^2 & \text{si} & x < 0 \\ 2 & \text{si} & x = 0 \\ (x-2)^2 & \text{si} & x > 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2(x+2) & \text{si} & x < 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \\ 2(x-2) & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$

La rama $x < 0 \Longrightarrow f'(x) = 2(x+2) = 0 \Longrightarrow x = -2$ recurriendo a la segunda derivada $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(-2) = 2 > 0 \Longrightarrow (-2, 0)$ es un mínimo relativo.
En el intervalo $(-\infty, -2)$ la derivada de la función es negativa y la función es decreciente.
En el intervalo $(-2, 0)$ la derivada de la función es positiva y la función es creciente.
La rama $x > 0 \Longrightarrow f'(x) = 2(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 2$ recurriendo a la segunda derivada $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(2) = 2 > 0 \Longrightarrow (2, 0)$ es un mínimo relativo.
En el intervalo $(0, 2)$ la derivada de la función es negativa y la función es decreciente.
En el intervalo $(2, \infty)$ la derivada de la función es positiva y la función es creciente.



Problema 3.6.8 En un local se venden pizzas en porciones. Las ventas durante cuatro semanas consecutivas siguen la función: $P(t) = -40t^2 + 240t + 540$ con $t =$ semanas y $(1 \le t \le 4)$.

a) ¿Cuántas porciones han vendido durante los dos primeras semanas?

b) ¿Durante qué semana se vendieron más porciones y cuántas fueron?

c) ¿Qué semana vendieron menos? ¿Cuántas porciones?

Solución:

a) $P(1) + P(2) = 740 + 860 = 1600$ porciones

b) $P'(t) = -80t + 240 = 0 \Longrightarrow x = 3$.
Recurriendo a la segunda derivada:
$P''(t) = -80 \Longrightarrow P''(3) = -80 < 0 \Longrightarrow x = 3$ es un máximo relativo. $P(3) = 900$ porciones.
Por otra parte $P(1) = 740$ y $P(4) = 860$
El máximo está en la tercera semana con 900 porciones.

c) El mínimo es en la primera semana con 740 porciones.

3.7. Castilla León

3.7.1. Modelo de 2020

Problema 3.7.1 Una cadena local de TV ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la ven entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$$

donde t indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana.

a) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia la cadena entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche? ¿Qué porcentaje de ciudadanos ven la cadena de TV a esas horas de máxima y mínima audiencia?

b) Dibujar la gráfica de la función $S(t)$ para t comprendido entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche.

Solución:
Dibujamos la función y analizamos sobre la gráfica:

✍ Dominio: $[6, 12]$

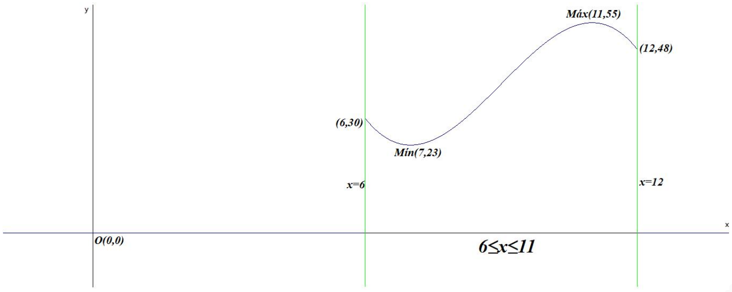
✍ Puntos de corte: No son necesarios, pero si los cortes de la función con las rectas $t = 6 \Longrightarrow (6, 30)$ y con $t = 12 \Longrightarrow (12, 48)$

✍ Monotonía: $f'(t) = -231 + 54t - 3t^2 = 0 \Longrightarrow x = 7$ y $x = 11$

	$(6,7)$	$(7,11)$	$(11,12)$
$f'(t)$	$-$	$+$	$-$
$f(t)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(6, 7) \cup (11, 12)$ y creciente en el $(7, 11)$. Presenta un mínimo local en el punto $(7, 23)$ y en $(11, 55)$ un máximo local.

✍ Representación gráfica:



a) La hora de máxima audiencia es a las 11 con un porcentaje del 55 %.
La hora de mínima audiencia es a las 7 con un porcentaje del 23 %.

b) gráfica dibujada anteriormente.

Problema 3.7.2 Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{2x+71}{4x+7} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de $f(x)$.

b) Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$, dibujando el recinto correspondiente.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas, hay que estudiar la continuidad en $x = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} (3x-1) = 5 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \dfrac{2x+71}{4x+7} = 5 \\ f(2) = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 5$$

Luego f es continua en $\overline{R}$.

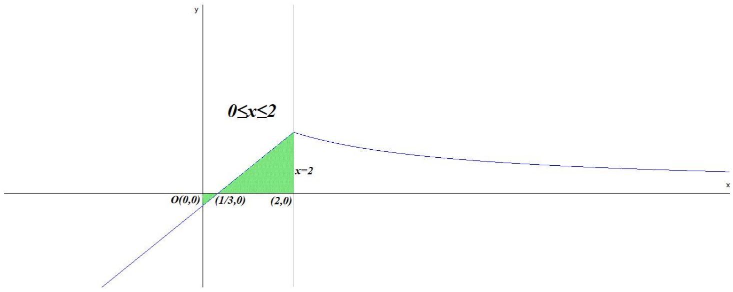
b) En el recinto $[0, 2]$ la función es $f(x) = 3x - 1$ y corta al eje de abcisas en $x = \dfrac{1}{3}$. Tendremos dos recintos S_1 de 0 a $\dfrac{1}{3}$ y S_2 de $\dfrac{1}{3}$ a 2.

$$F(x) = \int (3x-1)\,dx = \frac{3x^2}{2} - x$$

$$S_1 = \int_0^{1/3} (3x-1)\,dx = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = -\frac{1}{6} - 0 = -\frac{1}{6}$$

$$S_2 = \int_{1/3}^{2} (3x-1)\,dx = F(2) - F\left(\frac{1}{3}\right) = 4 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{6} + \frac{25}{6} = \frac{13}{3} \simeq 4,33\ u^2$$



Problema 3.7.3 Calcular el área limitada por la función $y = x^2$ y el eje OX entre los puntos $x = -1$ y $x = 2$.
Solución:
$x^2 \geq 0 \Longrightarrow$ la función está por encima del eje OX con tangencia en el punto $(0,0)$, luego:

$$S = \int_{-1}^{2} x^2 \, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 3 \ u^2$$

3.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.7.4 El número de zancadas por minuto que realiza un corredor en su entrenamiento diario de 60 minutos viene dado por la función:

$$f(x) = \begin{cases} 70 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 40 \\ \dfrac{1}{10}x^2 - 11x + 350 & \text{si} \quad 40 < x \leq 60 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo de entrenamiento transcurrido, medido en minutos.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcular el momento en el que alcanza el número de zancadas mínimo. ¿Cuál es el número de zancadas mínimo?

b) Representar gráficamente la función $f(x)$, justificando brevemente la representación gráfica obtenida

Solución:

a) Estudiamos la continuidad en $x = 40$ para cualquier otro valor la función es continua.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 40^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 40^-} 70 = 70 \\ \lim\limits_{x\to 40^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 40^+} \left(\dfrac{1}{10}x^2 - 11x + 350\right) = 70 \\ f(40) = 70 \end{cases}$$

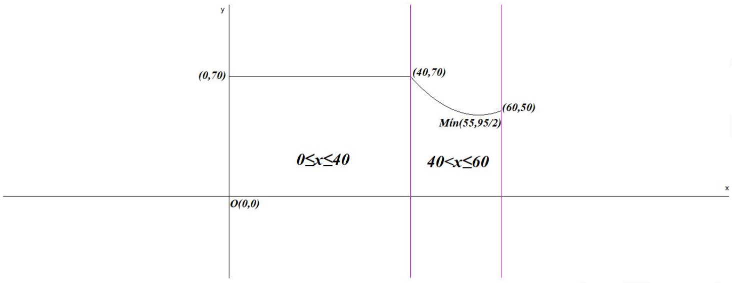
Luego la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 40 \\ \dfrac{1}{5}x - 11 & \text{si} \quad 40 < x \leq 60 \end{cases}$$

En la rama $0 \leq x \leq 40$ no hay extremos y es constante.
En la rama $40 < x \leq 60 \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{5}x - 11 = 0 \Longrightarrow x = 55$. Recurrimos a la segunda

derivada $f''(x)=\dfrac{1}{5}\Longrightarrow f''(55)=\dfrac{1}{5}>0\Longrightarrow \left(55,\dfrac{95}{2}\right)$ es un mínimo relativo.
En el intervalo $(40,55)\Longrightarrow f'(x)<0$ la función es decreciente.
En el intervalo $(55,60)\Longrightarrow f'(x)>0$ la función es creciente.
Tenemos $f(0)=70$, $f(40)=70$, $f(55)=\dfrac{95}{2}$ y $f(60)=50$
Luego el número de zancadas mínimo es 55.

b) Con los datos anteriores:



Problema 3.7.5 El beneficio neto anual B (en miles de euros) que las ventas de un producto generan a una empresa en función del gasto anual en publicidad x (en miles de euros) viene dado por la función $B(x)=-20x^2+1200x+a$, donde $x\in[0,\infty)$.

a) Hallar el valor de a sabiendo que un gasto en publicidad de 10000 euros proporciona un beneficio neto de 10 millones de euros.

b) Para $a=2000$, calcular el área delimitada por $B(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0,1]$.

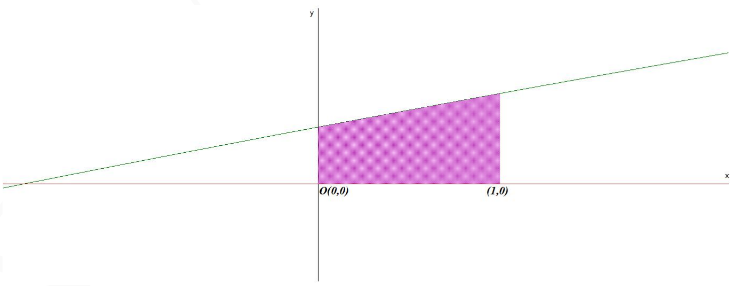
Solución:

a) $B(10)=10000\Longrightarrow a+10000=10000\Longrightarrow a=0$

b) Si $a=2000\Longrightarrow B(x)=-20x^2+1200x+2000$. Calculamos los puntos de corte con $OX\Longrightarrow$ $-20x^2+1200x+2000=0\Longrightarrow x=30\pm\sqrt{10}$. Como estos puntos no pertenecen al intervalo $[0,1]$ son irrelevantes.

$$S_1=\int_0^1(-20x^2+1200x+2000)\,dx=-\frac{20x^3}{3}+600x^2+2000x\Big]_0^1=\frac{7780}{3}$$

$$S=|S_1|=\frac{7780}{3}\simeq 2593,33\ u^2$$



Problema 3.7.6 Cuál es el dominio de definición de la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4}$?

Solución :

$x^2-4=0\Longrightarrow x=\pm2\Longrightarrow \mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{\pm2\}$.

3.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.7.7 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de b para que $f(x)$ sea continua.

b) Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $(0, 1)$.

Solución:

a) La función es continua en ambas ramas, hay estudiar la continuidad en $x = 1$

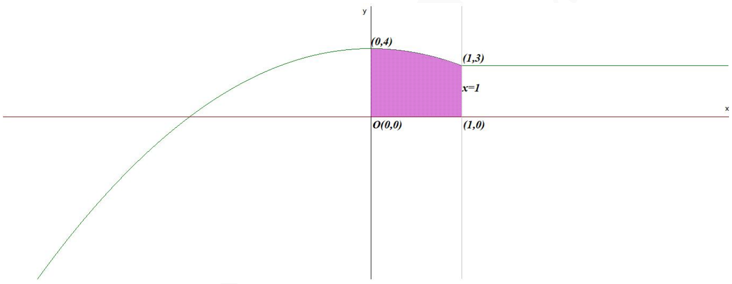
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (4 - x^2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{b}{x} = b \\ f(1) = 3 \end{cases} \Longrightarrow b = 3$$

Luego la función es continua en $\mathbb{R}$ cuando $b = 3$.

b) $4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$ el resultado positivo no está en la rama y el negativo no está en el intervalo $(0, 1)$.

$S_1 = \displaystyle\int_0^1 (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{11}{3}$

$$S = |S_1| = \frac{11}{3} \simeq 3,667\ u^2$$



Problema 3.7.8 Los estatutos de una asociación ecologista establecen que la asociación debe disolverse cuando supere los 100 socios. Se sabe, además, que el número de sus socios varía con los años transcurridos desde su fundación, "x", de acuerdo con la función $N(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 64$.

a) ¿Cuántos han sido los socios fundadores? Transcurridos 7 años, ¿cuántos socios habrá? ¿Se disolverá la sociedad en ese momento?

b) Estudiar el comportamiento (crecimiento, decrecimiento) del número de socios en el intervalo $[0, 7]$. ¿Cuál será el número mínimo de socios y cuando se alcanzará?

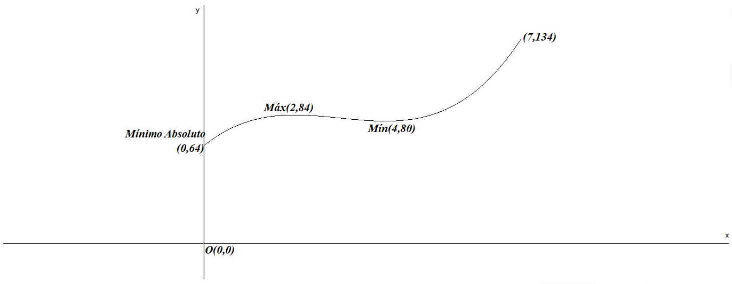
Solución:

a) Número de socios fundadores: $N(0) = 64$.
Número de socios a los 7 años: $N(7) = 134$. La asociación se disuelve por superar los 100 socios, cifra que se alcanza, pero no se supera el año 6 $N(6) = 100$.

b) $N'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 4$.

	$(0,2)$	$(2,4)$	$(4,7)$
$N'(x)$	$+$	$-$	$+$
$N(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,2) \cup (4,7)$ y decreciente $(2,4)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(2,84)$ y un mínimo relativo en el punto $(4,80)$.
El número mínimo de socios ocurre en la apertura de la asociación en el punto $(0,64)$



Problema 3.7.9 Dada la función $f(x) = ax - 33 + \dfrac{5}{x}$, determinar a para que se verifique $f'(1) = 2$
Solución :
$f'(x) = a - \dfrac{5}{x^2} \Longrightarrow f'(1) = a - 5 = 2 \Longrightarrow a = 7$

3.8. Cataluña

3.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.8.1 Una fábrica estima que el beneficio mensual, en miles de euros, por cada tonelada de confeti vendida es dado por la función $f(x) = \dfrac{-0,2x^2 + 5x - 20}{x}$, donde x representa el número de toneladas de confeti vendidas.

a) Determine en qué intervalo de valores se debe encontrar la variable x para que la fábrica no tenga pérdidas.

b) Calcular la cantidad de toneladas de confeti que proporciona el beneficio máximo y diga cuál es este beneficio.

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{-0,2x^2 + 5x - 20}{x} = 0 \Longrightarrow x = 5$ y $x = 20$

	$(0,5)$	$(5,20)$	$(20,\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

La función entra en pérdidas cuando vende menos de 5 toneladas o más de 20.
La función no tiene pérdidas cuando vende entre 5 y 20 toneladas.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2 - 100}{5x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 10$, la solución negativa no es relevante.

	$(0, 10)$	$(10, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

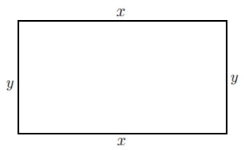
La función es creciente en el intervalo $(0, 10)$ y decreciente en el intervalo $(10, \infty)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(10, 1)$.
Como la función es continua en el intervalo $(0, \infty)$, concluimos que este máximo es absoluto.
Luego el máximo se consigue con la venta de 10 toneladas de confeti y es igual a 1000 euros.

Problema 3.8.2 Un granjero quiere construir un corral rectangular para sus conejos. Sabemos que sólo dispone de 40 m lineales de valla metálica.

a) Llamamos x la anchura del corral e y su longitud. Escribe la función que permite calcular el área del corral teniendo en cuenta sólo la anchura x.

b) Calcula en qué punto alcanza su máximo la función que ha encontrado en el apartado anterior. Deducir cuál debe ser la anchura x y cuál la longitud y porque el corral tenga el área máxima. ¿cuál será esta área máxima?

Solución:



a) Tenemos $2x + 2y = 40 \Longrightarrow y = 20 - x$
$S(x, y) = xy \Longrightarrow S(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$

b) $S'(x) = 20 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 10$. Recurrimos a la segunda derivada:
$S''(x) = -2 \Longrightarrow S''(10) = -2 \Longrightarrow x = 10$ es un máximo relativo.
El rectángulo tendrá 10 m de ancho por 20-10=10 m de largo (es un cuadrado) y encierra un área máxima de 100 m^2.

Problema 3.8.3 Considere la función real de variable real $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2$

a) Determinar el valor del parámetro real a fin de que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ cuando $a = 12$. Indica también los puntos en los que hay extremos relativos y clasificadlos.

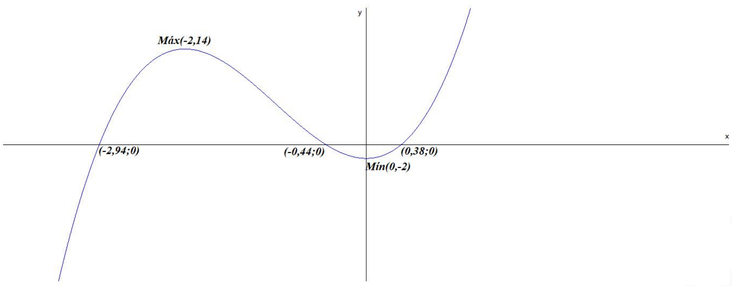
Solución

a) $f'(x) = 12x^2 + 2ax$ y $f'(-1) = 0 \Longrightarrow 12 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 6$

b) Si $a = 12 \Longrightarrow f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 2 \Longrightarrow f'(x) = 12x^2 + 24x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-2,0)$ y creciente en el $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$. Presenta un mínimo relativo en el punto $(0,-2)$ y en $(-2,14)$ un máximo relativo.



3.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.8.4 La función $C(t)=3-\dfrac{1}{t^2-4t+5}$, En el que t son los años transcurridos y $C(t)$ la cantidad de clientes, expresada en miles, modeliza la evolución de una empresa que ha entrado en crisis.

a) Calcula cuántos clientes tenía la empresa en el momento inicial y cuántos tenía al cabo de un año.

b) Encuentra el instante en que la empresa deja de perder clientes y calcular cuántos clientes tiene en ese instante.?

c) Calcule cuánto tiempo tendrá que pasar para que la empresa logre tener de nuevo el mismo número de clientes que en el momento de iniciar el estudio.

Solución:

a) $C(0)=3-\dfrac{1}{5}=\dfrac{14}{5}=2,8\Longrightarrow$ 2800 clientes.
$C(1)=3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}=2,5\Longrightarrow$ 2500 clientes.

b) $C'(t)=\dfrac{2(t-2)}{(t^2-4t+5)^2}=0\Longrightarrow t=2$

	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$C'(t)$	$-$	$+$
$C(t)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(2,\infty)$ y decreciente en el intervalo $(0,2)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(2,2)$.
Se pierden clientes hasta el segundo año llegando a 2000 clientes, a partir de este momento el número de clientes va creciendo indefinidamente.

c) $f(t)=3-\dfrac{1}{t^2-4t+5}=\dfrac{14}{5}\Longrightarrow x^2-4x=0\Longrightarrow x=0$ y $x=4$. El cuarto año se vuelven a tener el mismo número de clientes del momento inicial con 2800 clientes.

Problema 3.8.5 Una empresa pone a la venta un producto que distribuye en cajas. El beneficio B obtenido por la empresa, expresado en miles de euros, es dado por la expresión $B(x) = -x^2 + 16x - 55$, en el que $x > 0$ es el precio de venta de cada caja, expresado en euros.

a) ¿Qué beneficio ha obtenido si el precio de venta de cada caja es de 6 euros? Entre qué valores hay que fijar el precio de venta de una caja para obtener beneficios?

b) ¿A qué precio debe vender cada caja para que el beneficio sea lo más grande posible? ¿Cuál es este beneficio máximo?

Solución:

a) $B(6) = 5 \Longrightarrow 5000$€
$B(x) = -x^2 + 16x - 55 = 0 \Longrightarrow x = 5$ y $x = 11$

	$(0,5)$	$(5,11)$	$(11,\infty)$
$B(x)$	$-$	$+$	$-$

La empresa entra en pérdidas cuando el precio de la caja es menor de 5€ o mayor de 11€. Por el contrario, la empresa tiene beneficio si el precio de la caja se fija entre 5€ y 11€.

b) $B(x) = -2x + 16 = 0 \Longrightarrow x = 8$

	$(0,8)$	$(8,\infty)$
$B'(x)$	$+$	$-$
$B(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Los beneficios son crecientes según se aumenta el precio de la caja hasta fijarla en 8€ (donde la función tiene un máximo relativo) con un beneficio de $B(8) = 9 \Longrightarrow 9000$€

Problema 3.8.6 Considere la función $f(x) = px^3 - 4x^2 + 7px - 18$.

a) Calcula cuál debe ser el valor del parámetro p para que las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ para el valor de $p = 2$.

Solución

a) $f'(x) = 3px^2 - 8x + 7p$ y $f'(1) = f'(3) \Longrightarrow 10p - 8 = 34p - 24 \Longrightarrow p = \dfrac{2}{3}$

b) Si $p = 2 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 14x - 18 \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 - 8x + 14$ La ecuación de punto pendiente de la recta es $y - b = m(x - a)$ donde $a = 3$, $b = f(a) = f(3) = 42$ y $m = f'(3) = 44 \Longrightarrow y - 42 = 44(x - 3) \Longrightarrow y = 44x - 90$

3.9. Comunidad valenciana

3.9.1. Modelo de 2020

Problema 3.9.1 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

a) Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
El denominador se anula en $x = 2 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{2-x} = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2}{2-x} = \left[\dfrac{4}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{2-x} = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2-x} = -\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = -1$$

$$n = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x\right) = -2$$

$$y = -x - 2$$

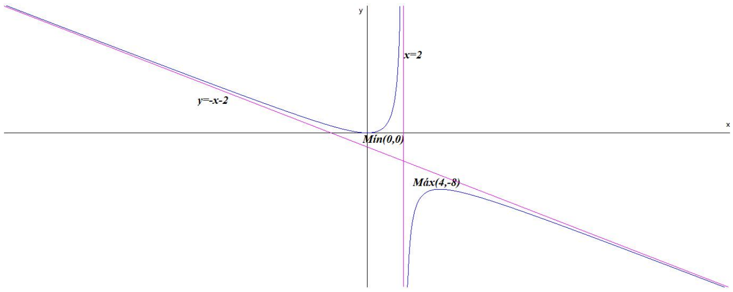
c) $f'(x) = -\dfrac{x(x-4)}{(2-x)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función decrece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y crece en el intervalo $(0, 2) \cup (2, 4)$.

d) La función tiene un mínimo local en el punto $(0, 0)$ y un máximo local en el punto $(4, -8)$.

e) Gráfica:



Problema 3.9.2 En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas.

b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este?

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta?

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta.

Solución:

a) $f(t) = 0 \Longrightarrow t^3 - 8t^2 + 15t = 0 \Longrightarrow t = 0$, $t = 3$ y $t = 5$. En estos puntos los beneficios son cero. Analizamos el signo de la función:

	$(0,3)$	$(3,5)$	$(5,6)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	beneficio	pérdidas	beneficio

La función tiene beneficios de 0 a 3 años y de 5 a 6 años. La función tiene pérdidas de 3 a 5 años.

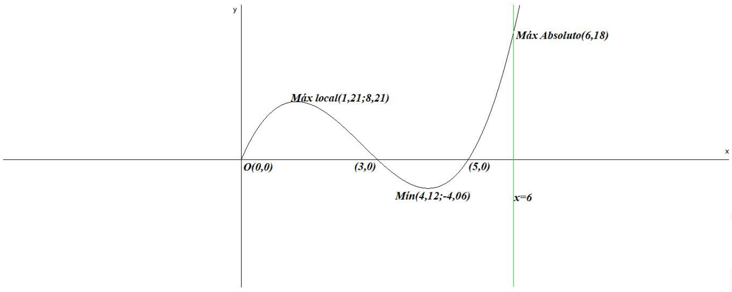
b) $f'(t) = 3t^2 - 16t + 15 = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{8 \pm \sqrt{19}}{3} \Longrightarrow t = 4,12$ y $t = 1,21$.

	$(0;1,21)$	$(1,21;4,12)$	$(4,12;6)$
$f'(t)$	$+$	$-$	$+$
$f(t)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(0;1,21) \cup (4,12;6)$ y decrece en el intervalo $(1,21;4,12)$. La función tiene un máximo local en el punto $(1,21;8,21)$, pero no sería absoluto, bastaría tomar $t = 6 \Longrightarrow f(6) = 18$ para comprobar que la función tiene valores por encima del máximo local. El máximo sería $(6,18)$, es decir, se produce en el año 6 con un beneficio de 180000 €.

c) La función tiene un mínimo local en el punto $(4,12;-4,06)$ y en este caso es absoluto. A los $4,12$ años se producirían las máximas pérdidas por valor de $4{,}060672587 \cdot 10000 = 40606,72587$ €

d) A partir del año 6 la función crece indefinidamente, luego la empresa genera cada año más beneficios que el anterior.



3.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.9.3 Dada la función $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

a) El denominador se anula en $x = \pm 2 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow \left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$
Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow (-1, 0)$ y $(1, 0)$

b) Asíntotas:

☛ Verticales:

- $x = -2$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty \end{array}\right.$$

- $x = 2$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

- Horizontales: $y = -1$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales

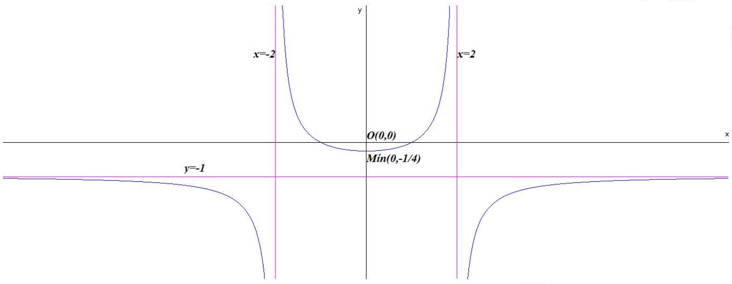
c) $f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0.$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y crece en el intervalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$.

d) La función tiene un mínimo local en el punto $\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$ y no tiene máximos locales.

e) Gráfica:



Problema 3.9.4 Desde el inicio de 1980, la capacidad (cantidad de gas que puede extraerse) de una explotación gasística, expresada en miles de metros cúbicos, viene dada por la función

$$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2,$$

donde la variable x representa el tiempo en años transcurridos desde el inicio de 1980.

a) Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1980.

b) Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos).

c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100},$$

calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento.

Solución:

a) $f(0) = 36600 \Longrightarrow 36.600.000$ m^3.

b) $f'(x) = 1500 - 30x = 0 \Longrightarrow x = 50$. Recurrimos a la segunda derivada $f''(x) = -30 \Longrightarrow \Longrightarrow$ $f''(50) = -30 < 0 \Longrightarrow x = 50$ es un máximo relativo.
El máximo se da cuando transcurren 50 años y es de $f(50) = 74100$, es decir, $74.100.000$ m^3.

c) Estudiamos el signo de $g(x)$. Para ello calculamos los puntos de corte con OX:

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100} = \frac{36300 - 3x^2}{12100} = 0 \Longrightarrow x = \pm 110$$

La solución negativa es irrelevante:

$(0, 110)$	$(110, \infty)$
$+$	$-$

La explotación dejará de ser rentable pasados 110 años. En esos momentos la capacidad de explotación será: $f(110) = 20100$ es decir, 20.100.000 m^3.

3.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.9.5 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores.

Solución:

a) El denominador $x^2 - 2x - 8 = 0$ se anula en $x = -2$ y $x = 4 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$

Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow \left(0, \dfrac{9}{2}\right)$
Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 36 = 0 \Longrightarrow (-6, 0)$ y $(6, 0)$

b) Asíntotas:

- ☛ Verticales:
  - $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \left[\dfrac{-32}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \left[\dfrac{-32}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

  - $x = 2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \left[\dfrac{-20}{0^-}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \left[\dfrac{-20}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- ☛ Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales

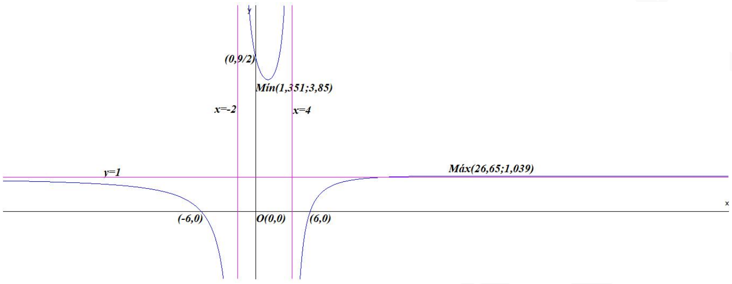
c) $f'(x) = -\dfrac{2(x^2-28x+36)}{(x^2-2x-8)^2} = 0 \Longrightarrow x = 14 \pm 4\sqrt{10}.$

	$\left(-\infty, 14-4\sqrt{10}\right)$	$\left(14-4\sqrt{10}, 14+4\sqrt{10}\right)$	$\left(14+4\sqrt{10}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función decrece en el intervalo $(-\infty,-2)\cup\left(-2,14-4\sqrt{10}\right)\cup\left(14+4\sqrt{10},\infty\right)$ y crece en el intervalo $\left(14-4\sqrt{10},4\right)\cup\left(4,14+4\sqrt{10}\right)$.

d) La función tiene un mínimo relativo en el punto $(1,351;3,85)$ y un máximo relativo en el punto $(26,65;1,039)$

e) Gráfica:



Problema 3.9.6 Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de un producto vienen dados por las siguientes funciones:

$$\text{Ingresos}: I(x) = 4x^2 + 800x, \qquad \text{Gastos}: G(x) = 6x^2 + 460x + 672$$

a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable?

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso?

c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta.

Solución:

a) La función beneficio es $B(x) = I(x) - G(x) = 4x^2 + 800x - (6x^2 + 460x + 672) = -2(x^2 - 170x + 336)$. Estudiamos el signo de la función: $x^2 - 170x + 336 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 168$.

	$(0,2)$	$(2,168)$	$(168,\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	pérdidas	beneficio	pérdidas

Como mínimo debe fabricar 2 unidades.

b) $B'(x) = 4(85 - x) = 0 \Longrightarrow x = 85$ Recurrimos a la segunda derivada $B''(x) = -4 \Longrightarrow B''(85) = -4 < 0 \Longrightarrow x = 85$ es un máximo relativo.
Para obtener el máximo beneficio hay que fabricar 85 unidades con un beneficio de $B(85) = 13778$€.

c) Sabemos que a partir de 85 unidades los beneficios decrecen con cada unidad fabricada, luego el máximo beneficio se produce en $x = 100 \Longrightarrow B(100) = 13328$€.

3.10. Extremadura

3.10.1. Modelo de 2020

Problema 3.10.1 El precio de cada acción de una determinada empresa, x, oscila entre 1 y 5 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa (en miles de euros) depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} A + Bx & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ \\ 2 - Bx + Ax^2 & \text{si} \quad 2 < x \le 5 \end{cases}$$

Se sabe que, para un precio de la acción de 1 euro, la facturación es 4 (miles de euros) y que la función es continua. Determina, justificando la respuesta, las constantes A y B.

Solución:
Para un precio de la acción de 1 euro tenemos $F(1) = A + B = 4$
Por otro lado la función es continua en $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} F(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} (A + Bx) = A + 2B \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} F(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} (2 - Bx + Ax^2) = 2 - 2B + 4A \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$A + 2B = 2 - 2B + 4A \Longrightarrow 3A - 4B = -2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 4 \\ 3A - 4B = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 2 \\ B = 2 \end{array} \right.$$

Problema 3.10.2 Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m^3/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \le t \le 6)$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento del caudal a lo largo de esas 6 horas.

b) Determina las horas de máximo y mínimo caudal, Calcula los caudales máximo y mínimo. Justifica las respuestas.

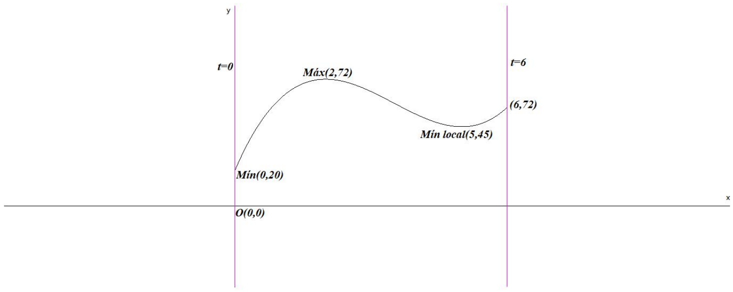
Solución:

a) $C'(t) = 6t^2 - 42t + 60 = 0 \Longrightarrow t = 2$ y $t = 5$.

	$(0,2)$	$(2,5)$	$(5,6)$
$C'(t)$	$+$	$-$	$+$
$C(t)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(0,2) \cup (5,6)$ y decrece en el intervalo $(2,5)$.
La función tiene un máximo local en el punto $(2,72)$ y un mínimo local en el punto $(5,45)$.

b) En el instante $t = 0 \Longrightarrow C(0) = 20 \Longrightarrow$ el mínimo se encuentra en el instante inicial con 20 m^3/s.
En el instante $t = 6 \Longrightarrow C(6) = 56 \Longrightarrow$ el máximo se encuentra en el instante $t = 2$ con 72 m^3/s.



Problema 3.10.3 Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4}$

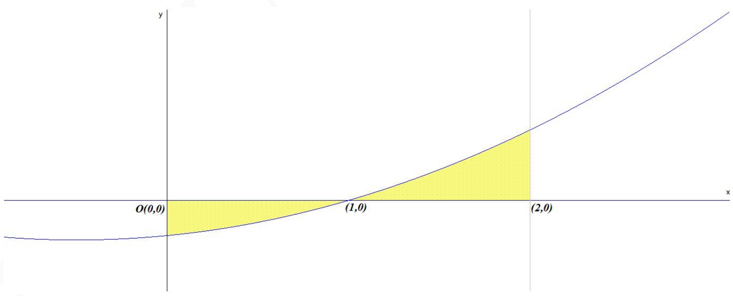
Solución:

a) $x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 1$. El punto $x = 1$ se encuentra dentro del intervalo $[0, 2]$ de integración, luego tendremos dos recintos de integración S_1 en $[0, 1]$ y S_2 en $[1, 2]$.

$$S_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2 + x - 2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1 = -\frac{7}{6}$$

$$S_2 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2 + x - 2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \frac{11}{6}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \left|-\frac{7}{6}\right| + \left|\frac{11}{6}\right| = \frac{18}{6} = 3\ u^2$$



b) $x^2 - 3x - 4 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 4 \Longrightarrow \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$.
Asíntotas:

☛ Verticales: En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

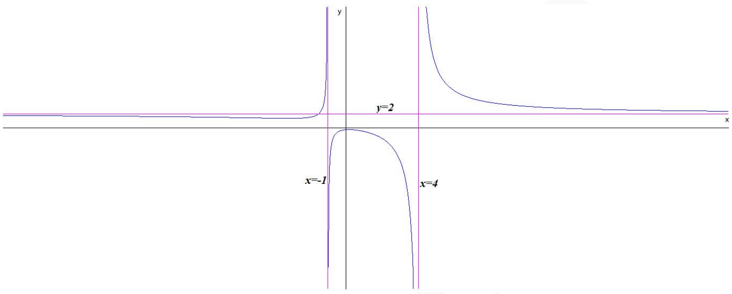
En $x = 4$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 4^-} \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \left[\dfrac{33}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \left[\dfrac{33}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

☛ Horizontales: $y = 2$.

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = 2$$

☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.



3.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.10.4 Un determinado vino tiene un tiempo de crianza en bodega de entre 1 y 4 años. La graduación del vino, $G(x)$, en términos del tiempo de crianza, x, viene dada por la función

$$G(x) = x^3 - Ax^2 + 6Bx + 2 \quad 1 \le x \le 4$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la máxima graduación se consigue exactamente a los 2 años, edad en que el vino alcanza los 22 grados.

Solución:

$G(x) = x^3 - Ax^2 + 6Bx + 2 \Longrightarrow C'(x) = 3x^2 - 2Ax + 6B$

$$\begin{cases} C(2) = 22 \Longrightarrow 8 - 4A + 12B + 2 = 22 \Longrightarrow -A + 3B = 3 \\ C'(2) = 0 \Longrightarrow 12 - 4A + 6B = 0 \Longrightarrow -2A + 3B = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 9 \\ B = 4 \end{cases}$$

Comprobamos si hay un máximo con estos valores en $x = 2$. Recurrimos a la segunda derivada $C''(x) = 6x - 2A = 6x - 18 \Longrightarrow C''(2) = 12 - 18 = -6 < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo relativo.

Problema 3.10.5 El diámetro de cierta variedad de manzana oscila entre los 2 y los 5 cm. El precio (en céntimos de euro), $P(x)$, que se le paga al agricultor por un kilogramo de estas manzanas viene determinado por su diámetro, x, de acuerdo con la siguiente función:

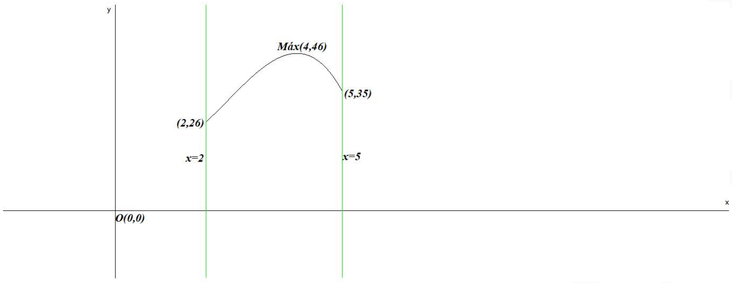
$$P(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 30 \quad 2 \le x \le 5$$

Determinar para qué diámetros se alcanzan los precios máximo y mínimo de las manzanas. ¿Cuáles son estos precios máximo y mínimo? Razonar las respuestas.
Solución:

$P(x) = -2x^3+15x^2-24x+30 \Longrightarrow P'(x) = -6x^2+30x-24 = 0 \Longrightarrow x = 1$(fuera del dominio) y $x = 4$.

	$(2,4)$	$(4,5)$
$P'(x)$	$+$	$-$
$P(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función crece en el intervalo $(2,4)$ y decrece en el intervalo $(4,5)$.
La función tiene un máximo relativo en $(4,46)$.
Tenemos: $P(2) = 26$ y $P(5) = 35$. Luego el precio máximo de 46 céntimos de euro se obtiene con manzanas de 4 cm de diámetro. El precio mínimo de 26 céntimos de euro se obtiene con manzanas de 2 cm de diámetro.
Gráfica:



Problema 3.10.6 Se pide:

a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = x^2+4x-5$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+4x-5}$

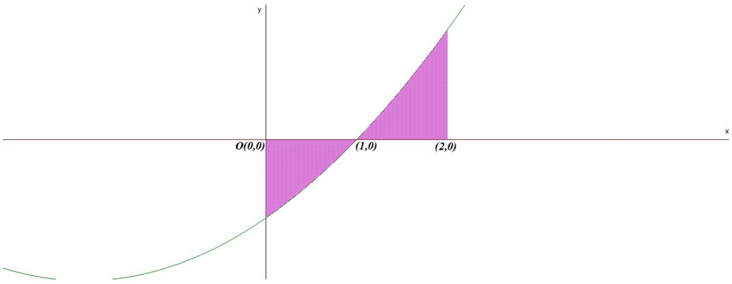
Solución:

a) $x^2+4x-5 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -5$. El punto $x = 1$ se encuentra dentro del intervalo $[0,2]$ de integración, luego tendremos dos recintos de integración S_1 en $[0,1]$ y S_2 en $[1,2]$.

$$S_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2+4x-5)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}+2x^2-5x\right]_0^1 = -\frac{8}{3}$$

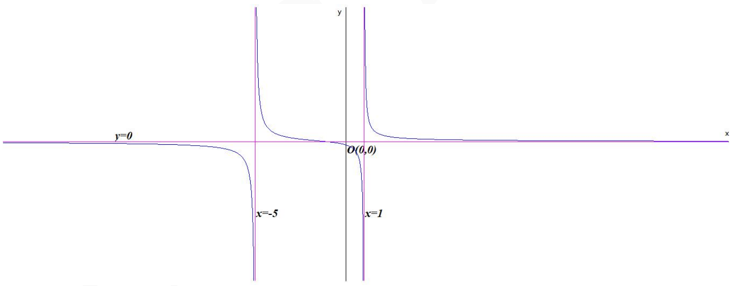
$$S_2 = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2+4x-5)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}+2x^2-5x\right]_1^2 = \frac{10}{3}$$

$$S = |S_1|+|S_2| = \left|-\frac{8}{3}\right| + \left|\frac{10}{3}\right| = 6\ u^2$$



b) $x^2 + 4x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -5 \Longrightarrow \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1, -5\}$.
Asíntotas:

- ☛ Verticales:
  En $x = 1$:
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{x+1}{x^2+4x-5} = \left[\dfrac{2}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x+1}{x^2+4x-5} = \left[\dfrac{2}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$
  En $x = -5$:
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -5^-} \dfrac{x+1}{x^2+4x-5} = \left[\dfrac{-4}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -5^+} \dfrac{x+1}{x^2+4x-5} = \left[\dfrac{-4}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$
- ☛ Horizontales: $y = 0$.
  $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+4x-5} = 0$$
- ☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.



3.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.10.7 El crecimiento (en cm) de una variedad de trigo, $C(x)$, en función de la cantidad de fertilizante (en gramos por metro cuadrado) utilizada, x, viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \quad 0 \le x \le 4$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que el crecimiento alcanza su mínimo con una dosis de 3 gramos por metro cuadrado y que para esta dosis las plantas de trigo crecen 8 cm.

Solución:
$C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \Longrightarrow C'(x) = 6x^2 - 2Ax + B$

$$\left\{ \begin{array}{l} C(3) = 8 \Longrightarrow 54 - 9A + 3B + 35 = 8 \Longrightarrow 3A - B = 27 \\ C'(3) = 0 \Longrightarrow 54 - 6A + B = 0 \Longrightarrow 6A - B = 54 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 9 \\ B = 0 \end{array} \right.$$

Comprobamos si hay un mínimo con estos valores en $x = 3$. Recurrimos a la segunda derivada $C''(x) = 12x - 2A = 12x - 18 \Longrightarrow C''(3) = 36 - 18 = 18 > 0 \Longrightarrow x = 3$ es un mínimo relativo.

Problema 3.10.8 Las ventas de un producto (en miles de euros), $V(t)$, en los 6 primeros años desde que se lanzó al mercado, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \quad 0 \le t \le 6$$

Se pide determinar, razonando las respuestas:

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años.

b) Representar gráficamente la función $V(t)$.

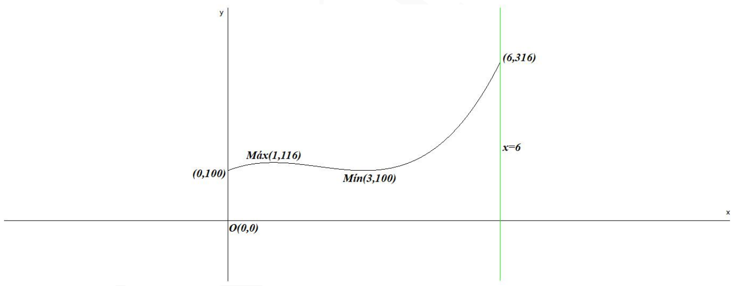
Solución:

a) $V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \Longrightarrow V'(t) = 12t^2 - 48t + 36 = 0 \Longrightarrow t = 1$ y $t = 3$.

	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,6)$
$V'(t)$	$+$	$-$	$+$
$V(t)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(1,3)$ y crece en el intervalo $(0,1) \cup (3,6)$.
La función tiene un mínimo relativo en el punto $(3,100)$ y un máximo relativo en $(1,116)$

b) Gráfica:



Problema 3.10.9 Se pide:

a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 7x + 6$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 5$.

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: $g(x) = \dfrac{4x^2 + 1}{2(x^2 - 7x + 6)}$

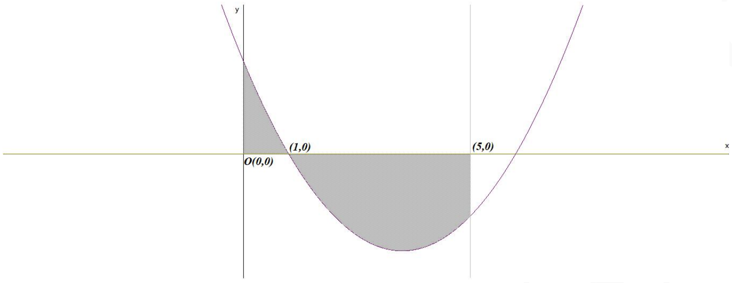
Solución:

a) $x^2 - 7x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 6$. El punto $x = 1$ se encuentra dentro del intervalo $[0, 5]$ de integración, luego tendremos dos recintos de integración S_1 en $[0, 1]$ y S_2 en $[1, 5]$.

$$S_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2 - 7x + 6)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right]_0^1 = \frac{17}{6}$$

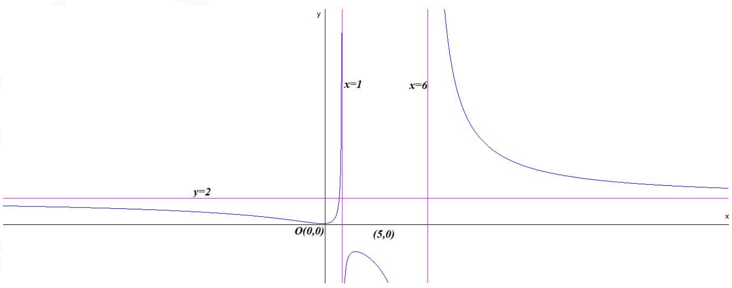
$$S_2 = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 (x^2 - 7x + 6)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right]_1^5 = -\frac{56}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \left|-\frac{17}{6}\right| + \left|\frac{56}{3}\right| = \frac{43}{2} = 21,5\ u^2$$



b) $x^2 - 7x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 6 \Longrightarrow \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1, 6\}$.
Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 1$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)} = \left[\dfrac{5}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)} = \left[\dfrac{5}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$
  En $x = 6$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 6^-} \dfrac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)} = \left[\dfrac{145}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 6^+} \dfrac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)} = \left[\dfrac{145}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$
- Horizontales: $y = 2$.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)} = 2$$
- Oblícuas: No hay por haber horizontales.



3.11. Galicia

3.11.1. Modelo de 2020

Problema 3.11.1 Los gastos financieros de una organización, en cientos de miles de euros, siguen la función: $G(t) = \begin{cases} 4 - \dfrac{t}{3} & \text{si} \quad 0 \le t \le 3 \\ \dfrac{5t-3}{t+1} & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}$ siendo t el tiempo en años transcurridos.

a) ¿En qué momento los gastos son iguales a 400000 euros? Razona la respuesta.

b) ¿Cuándo crece $G(t)$? ¿Cuándo decrece $G(t)$? ¿Cuándo los gastos alcanzan su valor mínimo y cuánto valen?

c) ¿Qué ocurre con los gastos cuando el número de años crece indefinidamente?

Solución:

a) $G(t) = 4 \Longrightarrow \begin{cases} 4 - \dfrac{t}{3} = 4 & \text{si} \quad 0 \le t \le 3 \\ \dfrac{5t-3}{t+1} = 4 & \text{si} \quad t > 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 & \text{si} \quad 0 \le t \le 3 \\ t = 7 & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}$, los gastos son iguales a 400000€ cuando la organización empieza a dar sevicios financieros y cuando han transcurrido 7 años.

b) $G'(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3} & \text{si} \quad 0 \le t \le 3 \\ \dfrac{8}{(t+1)^2} & \text{si} \quad t > 3 \end{cases} \Longrightarrow$

	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$G'(t)$	$-$	$+$
$G(t)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

Los gastos financieros decrecen desde el incio del servicio hasta el tercer año, a partir de este año los gastos crecen.
Los gastos mínimos se producen el tercer año y son de $G(3) = 3$, es decir, 300000€

c) Cuando el número de años crece indefinidamente:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{5t-3}{t+1} = 5 \Longrightarrow$$

Los gastos tienden a estabilizarse en valores muy cercanos a 500000€

Problema 3.11.2 Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad. El coste de producción diario de "x" paraguas viene dado por la función $C(x) = x^2 - 10x$, estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día ($0 \le x \le 70$)

a) Obtenga las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos "x".

b) Determine el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razone la respuesta.

Solución:

a) La función beneficio sería $f(x) = 60x - C(x) = -x^2 + 70x$ con $x \in [0, 70]$.

b) $f'(x) = -2x + 70 = 0 \Longrightarrow x = 35$

	$(0,35)$	$(35,70)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

Los beneficios crecen hasta la producción de 35 paraguas y decrecen a medida que producen más de 35. Luego los beneficios máximos se obtienen con una producción de 35 paraguas y son de $f(35) = 1225€$.
Los coste que se han producido son: $C(35) = 835€$.
Los ingresos totales han sido: $60x = 60 \cdot 35 = 2100€$.

3.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.11.3 La cantidad de CO_2 (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función:

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \dfrac{t}{3} & \text{si} \quad 0 \le t < 6 \\ \dfrac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & \text{si} \quad 6 \le t \le 12 \end{cases}$$

siendo t el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.

a) Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO_2 emitida a la atmósfera.

b) ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO_2 emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?

c) Represente la gráfica de la función $C(t)$ teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

Solución:

a) El dominio de la función es el intervalo $[0, 12]$, formado por dos funciones continuas.
Habría que estudiar la continuidad en $t = 6$:

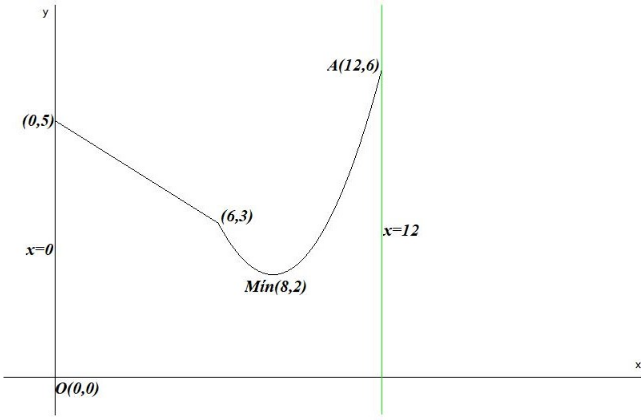
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 6^-} C(t) = \lim\limits_{t\to 6^-} \left(5 - \dfrac{t}{3}\right) = 3 \\ \lim\limits_{t\to 6^+} C(t) = \lim\limits_{t\to 6^-} \left(\dfrac{1}{4}t^2 - 4t + 18\right) = 3 \\ C(6) = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow C(t) \text{ continua en } t = 6 \text{ y en todo su dominio.}$$

$$C'(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \le t < 6 \\ \dfrac{1}{2}t - 4 & \text{si} \quad 6 \le t \le 12 \end{cases}$$

- En la rama $0 \le t < 6 \Longrightarrow C'(t) < 0 \Longrightarrow\Longrightarrow C(t)$ es decreciente.
- En la rama $6 \le t \le 12 \Longrightarrow C'(t)\dfrac{1}{2}t - 4 = 0 \Longrightarrow t = 8$.
  En el intervalo $(6, 8) \Longrightarrow C'(t) < 0 \Longrightarrow C(t)$ es decreciente. En el intervalo $(8, 12) \Longrightarrow C'(t) > 0 \Longrightarrow C(t)$ es creciente.

b) En el punto $(8, 2)$ hay un mínimo relativo. $C(0) = 5$ y $C(12) = 6$.
Luego la mínima emisión de CO_2 en el mes 8 con 2000000 de toneladas y la emisión máxima es en el mes 12 con 6000000 de toneladas.

c) La gráfica sería:



Problema 3.11.4 Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función $B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ si $(0 \le t \le 10)$, (t en años).

a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio?

b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios.

c) ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?

d) Calcule $\displaystyle\int_1^2 B(t)\,dt$.

Solución:

a) $B(10) = 7 \Longrightarrow$ 7000€

b) $B'(t) = 3t^2 - 36t + 81 = 0 \Longrightarrow t = 3$ y $t = 9$.

	$(0,3)$	$(3,9)$	$(9,10)$
$B'(t)$	$+$	$-$	$+$
$B(t)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

Los beneficios decrecen en el intervalo $(3,9)$ años y crecen en el intervalo $(0,3)\cup(9,10)$ años. Hay un máximo relativo en el punto $(3,105)$ y un mínimo relativo en el $(9,-3)$

c) Tenemos: $B(0) = -3$, $B(10) = 7$, $B(3) = 105$ y $B(9) = -3$.
El máximo es el año 3 con 107000€ y el mínimo es con pérdidas el año 0 y el año 9 con -3000€.

d) $\displaystyle\int_1^2 (t^3 - 18t^2 + 81t - 3)\,dt = \frac{t^4}{4} - 6t^3 + \frac{81t^2}{2} - 3t\Big]_1^2 = \frac{321}{4}$

3.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.11.5 Después de t horas de funcionamiento el rendimiento de una máquina (en una escala de 0 a 100) viene dado por la función $r(t) = \dfrac{kt}{t^2+4}$ con $t > 0$.

a) Calcule k sabiendo que el rendimiento a las 4 horas es de 76.

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento del rendimiento durante las 7 primeras horas de funcionamiento.

c) ¿En qué momento se consigue el rendimiento máximo?, ¿Cuál es su valor?

Solución:

a) $r(4) = \dfrac{4k}{20} = 76 \Longrightarrow k = 380$

b) $r(t) = \dfrac{380t}{t^2+4} \Longrightarrow r'(t) = -\dfrac{380(t^2-4)}{(t^2+4)^2} = 0 \Longrightarrow t = \pm 2$. La solución negativa no es relevante.

	$(0,2)$	$(3,7)$
$r'(t)$	$+$	$-$
$r(t)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,2)$ horas y decreciente en el intervalo $(2,7)$ horas, con un máximo relativo en la hora 2 con un rendimiento de $r(2) = 95$

c) Tenemos $r(0) = 0$, $r(2) = 95$ y $r(7) = \dfrac{2660}{53}$. Luego el máximo obtenido anteriormente es absoluto.
$t = 2$ y $r(2) = 95$.

Problema 3.11.6 Una empresa puede vender x unidades al mes de un determinado producto al precio de $518 - x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.

a) Determine las funciones $I(x)$ y $B(x)$ que expresan los ingresos y beneficios obtenidos por la producción y venta de x unidades, respectivamente. ¿Qué beneficio se obtiene si se producen y se venden 10 unidades?

b) Calcule el número de unidades que hay que producir para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderían dichos beneficios? ¿Cuál sería el precio de venta de una unidad en ese caso?

Solución:

a) $I(x) = x(518 - x^2)$, $B(x) = I(x) - 225 - 275x = x(518 - x^2) - 225 - 275x = -x^3 + 243x - 225$
$B(10) = 1205$€

b) $B'(x) = -3x^2 + 243 = 0 \Longrightarrow x = \pm 9$, la solución negativa no es relevante. Recurrimos a la segunda derivada para analizar este extremo. $B''(x) = -6x \Longrightarrow B''(9) = -54 < 0 \Longrightarrow x = 9$ es un máximo relativo. con unos beneficios de $B(9) = 1233$€
El precio de venta de cada unidad es $(518 - 9^2) = 437$€

3.12. Islas Baleares

3.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.12.1 Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcular a y b sabiendo que $f(x)$ tiene un punto crítico en el punto $x = 1$ y su gráfica pasa por el punto $(3, 0)$.

b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para $a = 3$ y $b = 3$.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + x \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$

$$\left\{\begin{array}{l} f(3) = 0 \Longrightarrow 27a + 9b + 3 = 0 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + 1 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/9 \\ b = -2/3 \end{array}\right.$$

b) $f(x) = 3x^3+3x^2+x \Longrightarrow f'(x) = 9x^2+6x+1 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$. En el intervalo $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right) \Longrightarrow$ $f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ es creciente.

Luego la función es siempre creciente y en $x = -\dfrac{1}{3}$ no hay extremo relativo.

Problema 3.12.2 El beneficio $B(x)$, en euros, que obtiene una empresa para la venta de x unidades de un determinado producto se representa por la función: $B(x) = -x^2 + 300x - 16100$ con $x \geq 0$.

a) Calcular el beneficio de vender 110 unidades.

b) Representa gráficamente la función.

c) ¿Cuántas unidades debe vender para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo?

d) ¿Cuántas unidades debe vender para tener un beneficio igual a 3900 euros? Y para tener un beneficio superior a 3900 euros?

Solución:

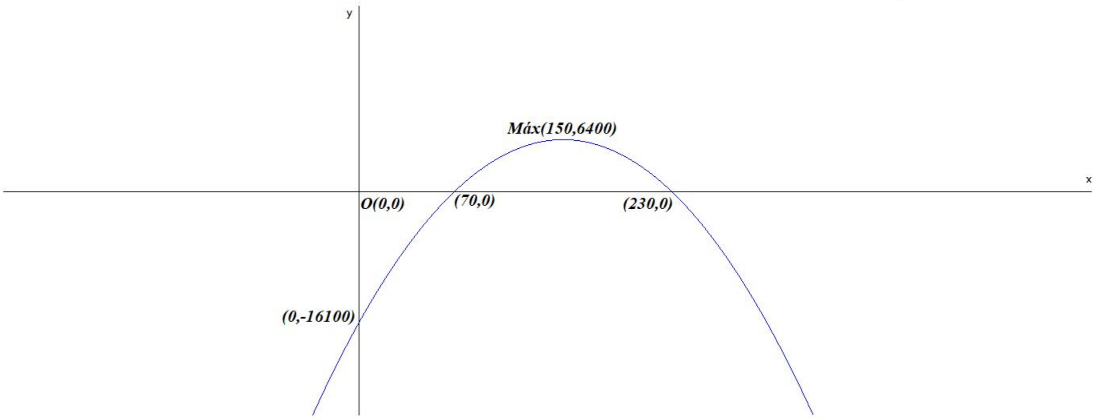
a) $B(110) = 4800 \Longrightarrow 4800€$

b) Puntos de corte con $x = 0 \Longrightarrow (0, -16100)$ y con $f(x) = 0 \Longrightarrow (70, 0)$ y $(230, 0)$

$B'(x) = -2x + 300 = 0 \Longrightarrow x = 150$.

	$(0, 150)$	$(150, \infty)$
$B'(x)$	$+$	$-$
$B(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

Los beneficios decrecen en el intervalo $(150, \infty)$ y crecen en el intervalo $(0, 150)$. Hay un máximo relativo en el punto $(150, 6400)$.



c) Debe de vender 150 unidades para obtener el beneficio máximo de 6400€

d) $B(x) = 3900 \Longrightarrow -x^2 + 300x - 16100 = 3900 \Longrightarrow x = 100$ y x=200. Para que el beneficio sea superior a 3900 tiene que vender entre 100 y 200 unidades.

Problema 3.12.3 Consideremos la función a trozos siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{ax} + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcular los valores de a qué f sea continua y derivable.

b) Para $a = 4$ calcular el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$.

Solución:

a) La función es continua y derivable en las dos ramas, falta analizar en $x = 0$.

☛ Estudiamos la continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \left(x^2 - 3x + 2\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left(e^{ax} + 1\right) = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

Luego la función es continua para cualquier valor de a.

☛ Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ ae^{ax} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(0^-) = -3 \\ f'(0^+) = a \end{cases} \Longrightarrow$$

Luego la función sea derivable en $x = 0 \Longrightarrow a = -3$.

La función es continua y derivable cuando $a = -3$

b) Para $a = 4$ en el intervalo $[1, 2]$ la función es $f(x) = e^{4x} + 1$. Esta función es siempre positiva y, por tanto, no tiene puntos de corte con el eje OX.
$S = \int_1^2 \left(e^{4x} + 1\right)\, dx = \left.\frac{1}{4}e^{4x} + x\right]_1^2 = \frac{e^8 - e^4 + 4}{4} \simeq 732{,}59\ u^2$

3.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.12.4 Consideremos la función a trozos siguiente

$$f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si} & x \le -2 \\ x^2 - 5 & \text{si} & -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si} & x \ge 1 \end{cases}$$

a) Calcular los valores de a qué f sea continua.

b) ¿Es $f(x)$ derivable para $a = 1$?

c) Para $a = 0$ determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) Las tres ramas son continuas, hay que estudiar en $x = -2$ y en $x = 1$:

- ☛ En $x = -2$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} (-4x + a) = 8 + a \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} \left(x^2 - 5\right) = -1 \\ f(-2) = 8 + a \end{cases} \Longrightarrow$$
Luego la función es continua en $x = -2$ si $8 + a = -1 \Longrightarrow a = -9$.
- ☛ En $x = 1$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \left(x^2 - 5\right) = -4 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (-7x + 3) = -4 \\ f(1) = -4 \end{cases} \Longrightarrow$$
Luego la función es continua en $x = 1$.

b) Para que sea derivable la función tiene que ser continua.
Las tres ramas son polinómicas por lo que son derivables.

$$f(x) = \begin{cases} -4x - 9 & \text{si} & x \le -2 \\ x^2 - 5 & \text{si} & -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si} & x \ge 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si} & x \le -2 \\ 2x & \text{si} & -2 < x < 1 \\ -7 & \text{si} & x \ge 1 \end{cases}$$

- ☛ Derivabilidad en $x = -2$: Como $a = 1$ la función no es continua y, por tanto, no es derivable.
- ☛ En $x = 1$:
$$\begin{cases} f'(1^-) = 2 \\ f'(1^+) = -7 \end{cases} \Longrightarrow$$
Luego la función no es derivable en $x = 1$.

c) Si $a=0 \Longrightarrow f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} -4 & \text{si} & x\le -2\\ 2x & \text{si} & -2<x<1\\ -7 & \text{si} & x\ge 1\end{array}\right.$

- ☛ En el intervalo $(-\infty,-2]$ es $f'(x)<0 \Longrightarrow f(x)$ es decreciente y $f(-2)=8$.
- ☛ En el intervalo $(-2,0)$ es $f'(x)<0 \Longrightarrow f(x)$ es decreciente y $f(-2)=-1$ (El salto es descendente).
- ☛ En el intervalo $(0,1)$ es $f'(x)>0 \Longrightarrow f(x)$ es creciente.
- ☛ En el intervalo $(1,\infty)$ es $f'(x)<0 \Longrightarrow f(x)$ es decreciente.
- ☛ En resumen f crece en $(0,1)$ y decrece en $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

Problema 3.12.5 El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función

$$P(t)=\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}$$

donde $t\ge 0$ mide el número de años transcurridos.

a) ¿Cuál es la población inicial ($t=0$) y la población después de 5 años?

b) ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?

c) Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población?

Solución:

a) $P(0)=2 \Longrightarrow 2000000$ individuos.
$P(5)=\dfrac{8}{9}\simeq 0,8888888888 \Longrightarrow 888888$ individuos.

b) $P(1)=1$ y $P(2)=\dfrac{8}{9}\simeq 0,888888$.

$$P'(t)=\frac{t-3}{(t+1)^3}=0 \Longrightarrow t=3$$

En el intervalo $(0,3) \Longrightarrow P'(t)<0 \Longrightarrow P(t)$ es decreciente.
En el intervalo $(3,\infty) \Longrightarrow P'(t)>0 \Longrightarrow P(t)$ es creciente.
Hay un mínimo relativo en $t=3 \Longrightarrow \left(3,\dfrac{7}{8}\right)$
Luego en el año 0 la población de individuos decrece, siendo menor de un millón en el segundo año.

c) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{t^2}=1$

La población tiende a estabilizarse en 1000000 de individuos.

Problema 3.12.6 Consideremos la función $f(x)=\dfrac{3}{x}+8$

a) Calcular los puntos de la gráfica en los que la recta tangente es paralela a la recta $3x+4y+5=0$.

b) Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a los puntos encontrados en el apartado anterior.

c) Calcular el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 2$, $x = 4$ e $y = 0$.

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2} \Longrightarrow m = f'(a) = -\dfrac{3}{a^2} = -\dfrac{3}{4} \Longrightarrow a = \pm 2$

$a = 2 \Longrightarrow f(2) = \dfrac{3}{2} + 8 = \dfrac{19}{2} \Longrightarrow A\left(2, \dfrac{19}{2}\right)$

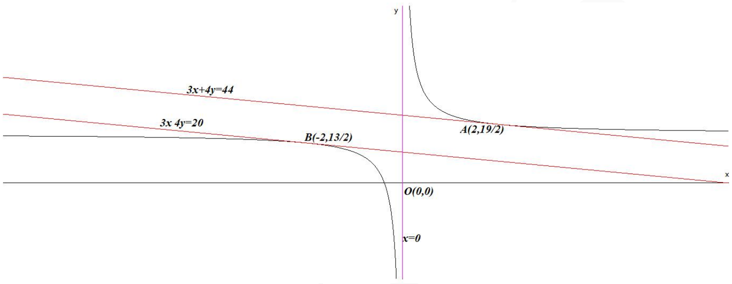
$a = -2 \Longrightarrow f(-2) = \dfrac{3}{-2} + 8 = \dfrac{13}{2} \Longrightarrow B\left(-2, \dfrac{13}{2}\right)$

b) Recta tangente en $A\left(2, \dfrac{19}{2}\right) \Longrightarrow y - \dfrac{19}{2} = -\dfrac{3}{4}(x-2) \Longrightarrow$

$$3x + 4y = 44$$

Recta tangente en $B\left(-2, \dfrac{13}{2}\right) \Longrightarrow y - \dfrac{13}{2} = -\dfrac{3}{4}(x+2) \Longrightarrow$

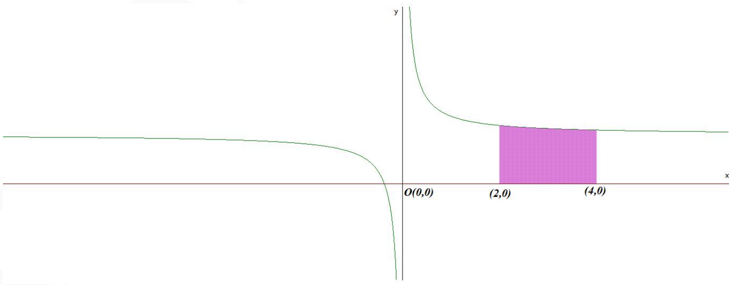
$$3x + 4y = 20$$



c) La función no corta al eje de abscisas en el intervalo $[2, 4]$

$$S_1 = \int_2^4 \left(\frac{3}{x} + 8\right)\,dx = 3\ln|x| + 8x]_2^4 = 16 + 3\ln 2 \simeq 18,079$$

$$S = |S_1| = 16 + 3\ln 2 \simeq 18,079,\ u^2$$



3.13. Islas Canarias

3.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.13.1 El ayuntamiento de un pueblo ha construido una pista de hielo provisional cuya gráfica está limitada por las rectas $r_1 : x = 0$, $r_2 : x = 50$, $r_3 : y = 45$ y la parábola $f : y = -\dfrac{1}{125}x^2 + \dfrac{2}{5}x$. Si se mide en metros,

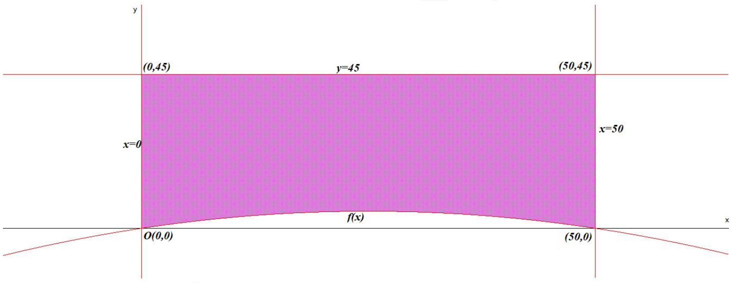
a) Dibujar la gráfica. Calcular el volumen de agua en (m^3) que se necesita para llenar la pista sabiendo que la profundidad del agua es de 7 cm (0,07 metros).

b) El consumo eléctrico mensual para mantener congelada la pista es de 28 Kwh/m^2. El precio del Kwh es de 0,13€/Kwh. Calcular el coste de mantener la pista congelada durante un mes.

c) Aparte del coste del consumo eléctrico, la gestión de la pista (mantenimiento, alquiler del terreno, salario de los empleados, etc.) tiene un coste fijo mensual de 5000€; hay además un coste variable debido a averías, fugas de agua, días de calor... Si se espera que acudan a patinar 600 personas al mes, calcular cuál debe ser el precio de la entrada para cubrir todos los costes mensuales, suponiendo que los costes variables alcanzan un 25 % de los costes fijos de gestión.

Solución:

a) $f(x) = -\dfrac{1}{125}x^2 + \dfrac{2}{5}x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 50$. Los puntos de corte de f con los ejes cartesianos son $(0,0)$ y $(50,0)$.
$f'(x) = -\dfrac{2}{125}x + \dfrac{2}{5} = 0 \Longrightarrow x = 25$. Recurrimos a la segunda derivada: $f''(x) = -\dfrac{2}{125} \Longrightarrow$ $f''(25) = -\dfrac{2}{125} < 0 \Longrightarrow (25,5)$ es un máximo.



El área del recinto es:

$$S = \int_0^{50} \left(45 + \frac{1}{125}x^2 - \frac{2}{5}x\right) dx = 45x + \frac{x^3}{375} - \frac{x^2}{5}\Big]_0^{50} = \frac{6250}{3}\ \text{m}^2$$

El Volumen$= S \cdot 0,07 = \dfrac{6250}{3} \cdot 0,07 = 145,8333\ \text{m}^3$

b) $\dfrac{6250}{3} \cdot 28 \cdot 0,13 = 7583,3333$€

c) $5000 \cdot 1,25 = 6250$€ de gasto de costes fijos y variables. Sumamos a estos gastos el consumo eléctrico y hay un gasto total de $6250 + 7583,3333 = 13833,3333$. Luego para asumir este gasto el precio de la entrada es $\dfrac{13833,3333}{600} = 23,0556$€

Problema 3.13.2 La tasa de paro (expresada en porcentaje sobre la población en edad de trabajar) registrada en cierta región europea durante los últimos 72 trimestres se ha comportado de acuerdo a la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{125}(4x^2 - 80x + 1025) & \text{si} \quad 0 \le x < 35 \\ \\ \dfrac{1}{625}(13x^2 - 1560x + 54300) & \text{si} \quad 35 \le x \le 72 \end{cases}$$

donde x representa el trimestre.

a) Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, explicar si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuándo es decreciente.

b) ¿En qué trimestre alcanzó la tasa de paro su mínimo? ¿Cuándo alcanzó el máximo? ¿Cuáles fueron los valores de las tasas de paro mínima y máxima?

c) ¿En qué trimestre se superó por primera vez el 10 % de paro?

Solución:

a) ☛ Las dos ramas son continuas, hay que estudiar en $x = 35$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 35^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 35^-} \left(\dfrac{1}{125}(4x^2 - 80x + 1025) \right) = 25 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 35^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 35^+} \left(\dfrac{1}{625}(13x^2 - 1560x + 54300) \right) = 25 \\ f(35) = 25 \end{cases} \Longrightarrow$$

Luego la función es continua en $x = 35$.

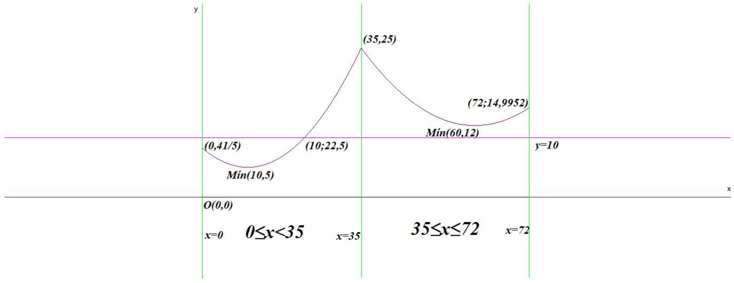
☛ Tenemos $f(0) = \dfrac{41}{5}$, $f(72) = 14,9952$

☛ Monotonía:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{125}(8x - 80) & \text{si} \quad 0 \le x < 35 \\ \\ \dfrac{1}{625}(26x - 1560) & \text{si} \quad 35 \le x \le 72 \end{cases}$$

- Si $0 \le x < 35 \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{125}(8x - 80) = 0 \Longrightarrow x = 10$:
  $\forall x \in (0, 10) \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en $(0, 10)$
  $\forall x \in (10, 35) \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ es creciente en $(0, 10)$
  Hay un mínimo en el punto $(10, 5)$

- Si $35 \le x \le 72 \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{625}(26x - 1560) = 0 \Longrightarrow x = 60$:
  $\forall x \in (35, 60) \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en $(35, 60)$
  $\forall x \in (60, 72) \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ es creciente en $(60, 72)$
  Hay un mínimo en el punto $(60, 12)$
- En resumen: $f(x)$ es decreciente en $(0, 10) \cup (35, 60)$, creciente en $(0, 10) \cup (60, 72)$ y con mínimos relativos en $(10, 5)$ y $(60, 12)$ y un máximo en $(35, 25)$.



b) A la vista del gráfico la tasa de paro mínimo está en el trimestre 10 con una tasa de paro 5 %. La tasa de paro máxima se da en el trimestre 35 con una tasa de paro 25 %.

c) Si $0 \le x < 35 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{125}(4x^2 - 80x + 1025) = 10 \Longrightarrow x = \dfrac{45}{2} = 22,5$ y $x = -\dfrac{45}{2}$ no está en la rama. A partir de $x = 22,5$ la tasa supera el 10 %, como x tiene que ser un número natural $\Longrightarrow x = 23$. Como se observa en la representación gráfica la segunda rama está por encima de este valor.

3.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.13.3 Durante los últimos 10 años, los costos en comunicaciones de una empresa, en decenas de miles de euros, vienen dados por la función:

$$C(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-1)^2}{3} + 4 & \text{si} \quad t \in [0,4] \\[2ex] \dfrac{18-t}{2} & \text{si} \quad t \in (4,10] \end{cases}$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Es continua $C(t)$?

b) ¿Cuándo $C(t)$ es derivable? ¿Cuándo creció y cuándo decreció $C(t)$?

c) ¿Cuándo alcanzó $C(t)$ el máximo y el mínimo absolutos? ¿Cuáles fueron los valores máximos y mínimos absolutos?

Solución:

a) Las dos ramas son continuas, hay que estudiar en $t = 4$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{t \longrightarrow 4^-} C(t) = \lim_{t \longrightarrow 4^-} \left(\frac{(t-1)^2}{3} + 4 \right) = 7 \\ \displaystyle\lim_{t \longrightarrow 4^+} C(t) = \lim_{t \longrightarrow 4^+} \left(\frac{18-t}{2} \right) = 7 \\ f(4) = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

b) Las dos ramas son derivables, hay que estudiar en $t = 4$:

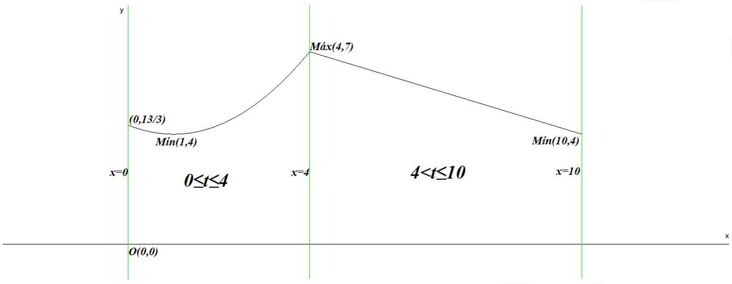
$$C'(t) = \begin{cases} \dfrac{2(t-1)}{3} & \text{si} \quad t \in [0,4] \\[2ex] \dfrac{-1}{2} & \text{si} \quad t \in (4,10] \end{cases} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C'(4^-) = 2 \\ C'(4^+) = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Luego la función no es derivable en $t = 4$.
Monotonía:

- ☛ Si $t \in [0, 4] \Longrightarrow C'(t) = \dfrac{2(t-1)}{3} = 0 \Longrightarrow t = 1$:
  $\forall t \in (0, 1) \Longrightarrow C'(t) < 0 \Longrightarrow C$ es decreciente en $(0, 1)$
  $\forall t \in (1, 4) \Longrightarrow C'(t) > 0 \Longrightarrow C$ es creciente en $(1, 4)$
  Hay un mínimo en el punto $(1, 4)$

- ☛ Si $t \in (4, 10] \Longrightarrow C'(t) = \dfrac{-1}{2} < 0 \Longrightarrow \forall t \in (4, 10) \Longrightarrow C'(t) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en $(4, 10)$

- ☛ En resumen: $C(t)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (4, 10)$, creciente en $(1, 4)$, con un mínimo relativo en $(1, 4)$ y un máximo relativo en $(4, 7)$



c) Tenemos $C(0) = \dfrac{13}{3}$, $C(1) = 4$, $C(4) = 7$ y $C(10) = 4$. Luego hay un máximo absoluto en $(4, 7)$ y dos mínimos absolutos en $(1, 4)$ y $(10, 4)$.
El máximo se produce el año 4 con 70000€ y el mínimo se produce en los años 1 y 10 con 40000€.

Problema 3.13.4 La superficie de lona necesaria para fabricar un toldo está delimitada por las funciones:

$$y = (x-2)^2, \quad y = 2x + 4$$

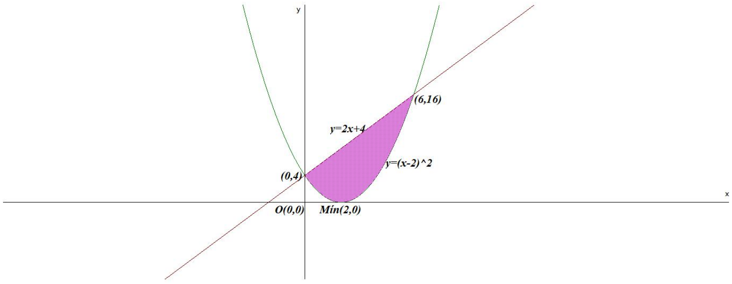
a) Hacer un dibujo de dicha superficie.

b) Si se mide en metros, calcular el área de la superficie.

c) Si el precio del metro cuadrado de lona es igual a 4€, ¿cuánto es necesario gastar para hacer tres toldos iguales?

Solución:

a) Calculamos los puntos de corte de ambas gráficas $(x-2)^2 = 2x + 4 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 6$. Haciendo una tabla de valores:



b)

$$S_1 = \int_0^6 ((x-2)^2 - 2x - 4)\,dx = \int_0^6 (x^2 - 6x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_0^6 = -36$$

$$S = |-36| = 36 \text{ m}^2$$

c) Para hacer los tres toldos: $3 \cdot 36 \cdot 4 = 432$€

3.14. La Rioja

3.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.14.1 Nos preguntamos por las propiedades de una función de la forma:

$$f(x) = \frac{x(x+b)}{x^2-1}$$

a) ¿Para qué valores de b su gráfica tiene una sola asíntota vertical?

b) Estudia la existencia de extremos relativos de $f(x)$ si $b = -2$

Solución:

a) Las posibles asíntotas verticales son $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

- ☛ Si $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x(x+b)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x+b)}{(x-1)(x+1)} \overset{b=1}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} = \pm\infty \Longrightarrow$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x(x+b)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x+b)}{(x-1)(x+1)} \overset{b=-1}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$ no es una asíntota vertical.

- ☛ Si $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x(x+b)}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{x(x+b)}{(x-1)(x+1)} \overset{b=1}{=} \lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}\Longrightarrow$$ no es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x(x+b)}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+b)}{(x-1)(x+1)}\stackrel{b=-1}{=}\lim_{x\to -1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{x+1}=\pm\infty\Longrightarrow$$ es una asíntota vertical.

☛ En conclusión, si $b=1$ sólo hay una asíntota vertical y lo mismo ocurre si $b=-1$.

b) Si $b=-2\Longrightarrow f(x)=\dfrac{x(x-2)}{x^2-1}\Longrightarrow f'(x)=\dfrac{2(x^2-x+1)}{(x^2-1)^2}\neq 0\Longrightarrow$ la función no tiene extremos.

Problema 3.14.2 Queremos definir una función por trozos, de forma que quede definida en el intervalo $[-2,2]$ según

$$f(x)=\begin{cases} 3-2x & \text{si} \quad x\in[-2,a)\\ x+4 & \text{si} \quad x\in[a,b)\\ 5/x & \text{si} \quad x\in[b,2]\end{cases}$$

Calcula los valores de a y b necesarios para que f sea continua, y representa la función gráficamente.

Solución:

Las tres ramas son continuas, hay que estudiar en $x=a$ y en $x=b$

☛ En $x=a$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow a^-}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow a^-}(3-2x)=3-2a\\ \lim\limits_{x\longrightarrow a^+}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow a^+}(x+4)=a+4\\ f(a)=a+4\end{array}\right.\Longrightarrow$$

$$3-2a=a+4\Longrightarrow a=-\frac{1}{3}$$

☛ En $x=b$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow b^-}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow b^-}(x+4)=b+4\\ \lim\limits_{x\longrightarrow b^+}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow b^+}\left(\dfrac{5}{x}\right)=\dfrac{5}{b}\\ f(b)=\dfrac{5}{b}\end{array}\right.\Longrightarrow$$

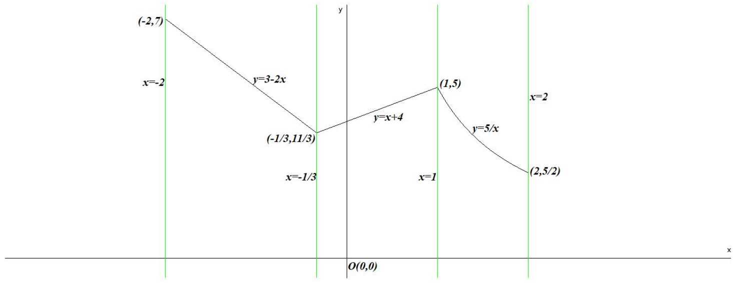
$$b+4=\frac{5}{b}\Longrightarrow b^2+4b-5=0\Longrightarrow b=-5\ \ b=1$$

☛ Como $-5\notin[-2,2]$ esta solución no es válida. En conclusión $a=-\dfrac{1}{3}$ y $b=1$.

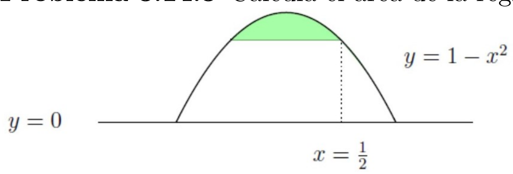
☛ Con $a=-\dfrac{1}{3}$ y $b=1$:

$$f(x)=\begin{cases} 3-2x & \text{si} \quad x\in\left[-2,-\dfrac{1}{3}\right)\\ x+4 & \text{si} \quad x\in\left[-\dfrac{1}{3},1\right)\\ \dfrac{5}{x} & \text{si} \quad x\in[1,2]\end{cases}$$

Haciendo una tabla de valores:



Problema 3.14.3 Calcula el área de la región sombreada en la siguiente figura:



Solución:

Si $x = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4} \Longrightarrow g(x) = \dfrac{3}{4}$

Como $f(x) = 1 - x^2$ es una función PAR los puntos de corte entre f y g son $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$, luego

$$S = \int_{-1/2}^{1/2} \left(1 - x^2 - \frac{3}{4}\right) dx = 2\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - x^2\right) dx = 2\left(\frac{x}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^{1/2} = \frac{1}{6}\ u^2$$

3.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.14.4 Representa gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1}$$

de forma que se aprecien claramente su dominio, sus asíntotas verticales y horizontales, sus cortes con los ejes, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

- ☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$
- ☛ Corte con los ejes coordenados:
  - Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
  - Con OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(2, 0)$
- ☛ Asíntotas:
  - Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty;$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-2x}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-2x}{(x+1)^2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-2x}{x^2+2x+1} = 1$$

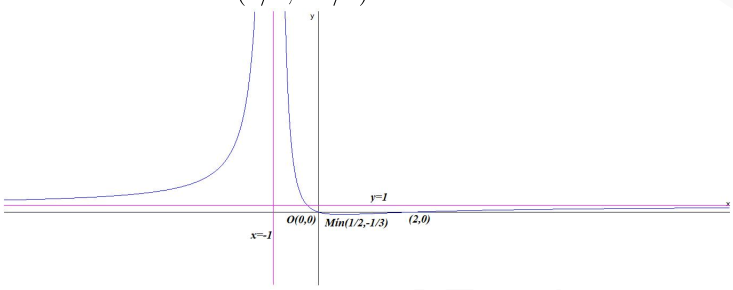
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

☛ Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2(2x-1)}{(x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1/2)$	$(1/2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1/2,\infty)$ y decrece en el intervalo $(-1,1/2)$. Tiene un mínimo local en $(1/2,-1/3)$



Problema 3.14.5 Consideremos la función f dada por $f(x) = x^3 - 3x$

a) Halla sus extremos relativos.

b) ¿Cuánto vale $f'(1)$? ¿Cuál es la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(1, f(1))$?

c) ¿En qué otro punto $(t, f(t))$ corta dicha recta a la gráfica de f?

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$. Por la segunda derivada $f''(x) = 6x$ tenemos:

   ☛ $f''(1) = 6 > 0 \Longrightarrow x = 1$ es un mínimo relativo, $(1,-2)$

   ☛ $f''(-1) = -6 < 0 \Longrightarrow x = -1$ es un máximo relativo, $(-1,2)$

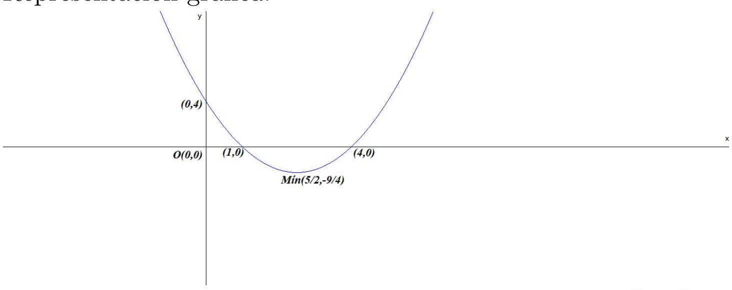
b) $f'(1) = 0 \Longrightarrow m = f'(1) = 0 \Longrightarrow y = -2$ es la recta tangente a f en $(1,-2)$.

c) $x^3 - 3x = -2 \Longrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -2 \Longrightarrow t = -2 \Longrightarrow (-2,-2)$

Problema 3.14.6 Haz un dibujo de la gráfica de la función $f(x) = (x-1)(x-4)$, señalando si existen sus máximos y mínimos.
Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica y la recta $y = 10$.
Solución:

$$f(x) = (x-1)(x-4) = x^2 - 5x + 4$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, con puntos de corte en $(0,4)$, $(1,0)$ y $(4,0)$
No tiene asíntotas.
$f'(x) = 2x-5 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{5}{2}$. Por la segunda derivada $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(5/2) = 2 > 0 \Longrightarrow x = \dfrac{5}{2}$ es un mínimo $\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$
Representación gráfica:

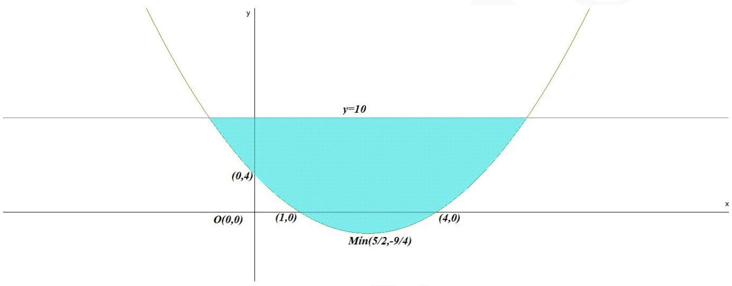


Buscamos los puntos de corte de f con $y = 10$:

$$x^2 - 5x + 4 = 10 \Longrightarrow x^2 - 5x - 6 \Longrightarrow x = -1, \ \ x = 6$$

$$S_1 = \int_{-1}^{6} (10 - x^2 + 5x - 4)\, dx = \int_{-1}^{6} (-x^2 + 5x + 6)\, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\Big]_{-1}^{6} = \frac{343}{6}$$

$$S = |S_1| = \frac{343}{6} \simeq 57,1667\ u^2$$



3.15. Madrid

3.15.1. Modelo de 2020

Problema 3.15.1 Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a) Obtenga los coeficientes reales a, b y c, de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.

b) Para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$, calcule la integral $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\, dx$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b, \quad y = 6x + 8$$

a) $\left\{\begin{array}{l} f'(-3) = 0 \Longrightarrow -6a + b = 0 \\ m = f'(0) = 6 \Longrightarrow b = 6 \\ f(0) = 6 \cdot 0 + 8 = 8 \Longrightarrow c = 8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 6 \\ c = 8 \end{array}\right. \Longrightarrow$

$$f(x) = x^2 + 6x + 8$$

b) Si $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1 \Longrightarrow f(x) = 2x^2 + x + 1$:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\, dx = \int_1^e \frac{2x^2 + x + 1}{x}\, dx = \int_1^e \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$\left. x^2 + x + \ln x\right]_1^e = e^2 + e - 1 \simeq 9,107$$

Problema 3.15.2 Dada la función $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos.

Solución:

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2} = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
Asíntotas:

- Verticales:
En $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{array}\right.$$

- Horizontales: No hay.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \infty \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} = -\infty$$

- Oblícuas: $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1$$

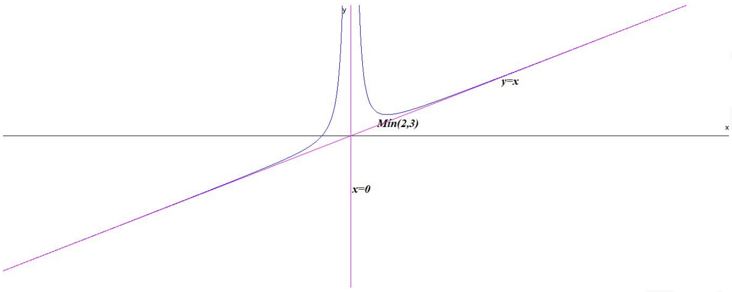
$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x\right) =$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3 + 4 - x^3}{x^2} = 0 \Longrightarrow y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^3-8}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 2)$, tiene un mínimo relativo en el punto $(2, 3)$.



Problema 3.15.3 Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - \dfrac{1}{9} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.

b) Para $a = 0$ determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a) Estudiamos la continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \left(x^2 + ax - \dfrac{1}{9} \right) = -\dfrac{1}{9} \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x+1}{x^2-9} = -\dfrac{1}{9} \\ \\ f(0) = -\dfrac{1}{9} \end{cases} \Longrightarrow$$

La función es continua en $x = 0$ pero no lo es en $x = 3 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.
Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$, que es el único punto del dominio en el que hay duda.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \\ -\dfrac{x^2+2x+9}{(x^2-9)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Tenemos que $f'(0^-) = a$ y $f'(0^+) = -\frac{1}{9} \Longrightarrow a = -\frac{1}{9}$. Para este valor la función sería derivable en todo el dominio de la función $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{9} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Asíntotas:
En la rama $x \le 0$ no hay asíntotas, se trata de un polinomio.
En la rama $x > 0$

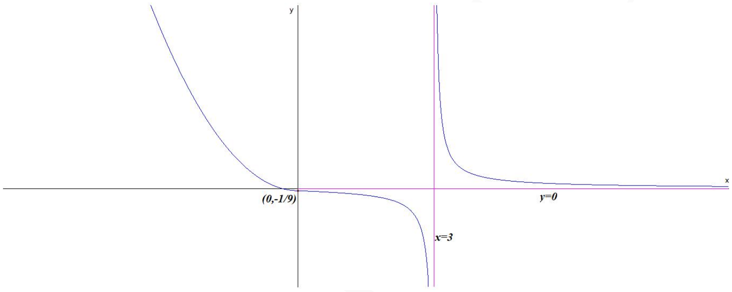
- Verticales:
En $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \dfrac{x+1}{x^2-9} = \left[\dfrac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{x+1}{x^2-9} = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-9} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.



3.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.15.4 Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-1}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.
Asíntotas:

- ☛ Verticales:

- En $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{5}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{5}{0^+}\right] = +\infty \end{array}\right.$$

- En $x = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

☛ Horizontales: No hay $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \infty$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

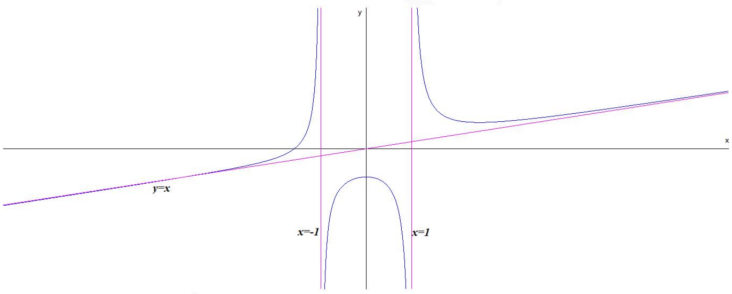
$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3+4}{x^3-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2-1} - x\right) = 0$$

Luego

$$y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x(x^3-3x-8)}{(x^2-1)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = 0$ y $b = f(0) = -4$. Luego $y + 4 = 0(x-0) \Longrightarrow$ $y = -4$



Problema 3.15.5 Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcl} x^2 - ax & \text{si} & x \le 1 \\ \\ \ln x & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

denotando por ln la función logaritmo neperiano.

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas en los intervalos en los que están definidas. Hay que estudiar continuidad en $x = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(x^2 - ax) = 1 - a \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}(\ln x) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$$

b) Para $a = 1$:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^2 - x & \text{si} & x \le 1 \\ \\ \ln x & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

Tenemos $x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1 \Longrightarrow$ la función no corta al eje de abscisas en el intervalo $[-1, 0]$. Luego:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^2 - x)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{5}{6}$$

$$S = |S_1| = \frac{5}{6}\ u^2$$

Problema 3.15.6 Se considera la función real de variable real, definida $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)\, dx$$

Solución:

a) $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 1$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-3, 1)$ y creciente en $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$.
Tiene un Máximo local en $(-3, 6e^{-3})$ y un Mínimo local en $(1, -2e)$

b)

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)\, dx = \int_1^2 e^{-x}(x^2 - 3)e^x\, dx = \int_1^2 (x^2 - 3)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = -\frac{2}{3}$$

3.15.3. Convocatoria Ordinaria junio de 2020-coincidente

Problema 3.15.7 Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(1 - x)^2}$$

a) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Asíntotas verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = -\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \infty$$

- Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x(1-x)^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3}{(1-x)^2} - x\right) = 2$$

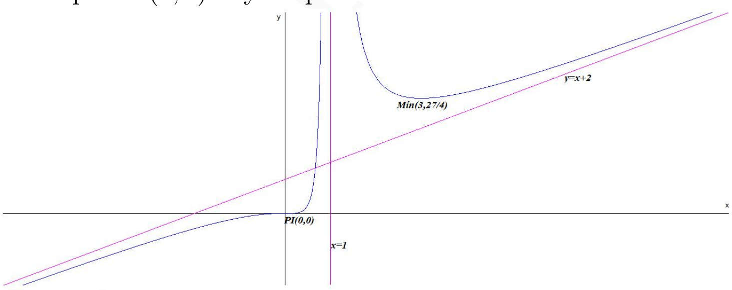
$$y = x + 2$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(1, 3)$, tiene un mínimo en el punto $\left(3, \dfrac{27}{4}\right)$.

En el punto $(0, 0)$ hay un punto de inflexión.



Problema 3.15.8 Sea $f(x) = x^2 + ax$ donde a es un parámetro real.

a) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$ y $F(2) = 9$.

b) Para $a = -2$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (x^2 + ax)\,dx = +C$

$F(0) = 0 + 0 + C = 3 \Longrightarrow C = 3$

$F(2) = \dfrac{8}{3} + 2a + C = 9 \Longrightarrow 2a = 9 - C - \dfrac{8}{3} = 9 - 3 - \dfrac{8}{3} \Longrightarrow a = \dfrac{5}{3}$

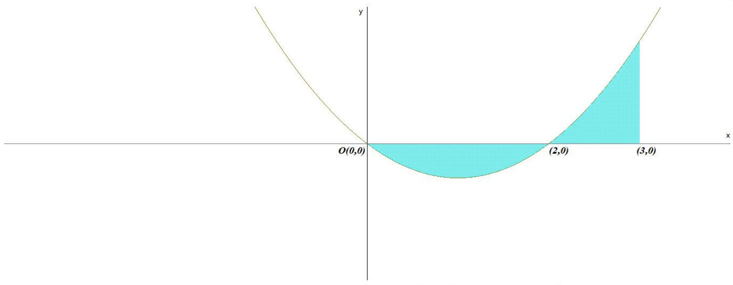
$f(x) = x^2 + \dfrac{5}{3}x$ y $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{6} + 3$

b) Para $a = -2 \Longrightarrow f(x) = x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$. La gráfica de la función corta al eje de abscisas en el intervalo $[0, 3]$ en $x = 2$.

$$S_1 = \int_0^2 (x^2 + 2x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 + 2x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} + x^2\right]_2^3 = \frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\ u^2$$



Problema 3.15.9 Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x$$

donde a y b son parámetros reales.

a) Calcule a, b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1, 2)$ sea paralela a la recta $y = -4x$.

b) Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$.

Solución:

a) $f(1) = a + b + 2 = 2 \Longrightarrow a + b = 0$

$$f'(x) = 2ax - \frac{b}{x^2} + 2 \Longrightarrow m = f'(1) = 2a - b + 2 = -4 \Longrightarrow 2a - b = -6$$

$$\left\{\begin{array}{l} a + b = 0 \\ 2a - b = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 2 \end{array}\right.$$

b) $f(1) = a + b + 2 = 2 \Longrightarrow a + b = 0$

$$f''(x) = 2a + \frac{2b}{x^2} \Longrightarrow f''(1) = 2(a + b) = 0 \Longrightarrow a + b = 0$$

Luego no hay solución única, los parámetros tienen que cumplir $a = -b$.

3.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.15.10 Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \dfrac{3a}{x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?

b) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) ☛ **Continuidad en** $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} (x^2 - x - 1) = 5 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} \dfrac{3a}{x} = a \\ f(3) = 5 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ continua si } a = 5$$

Cuando $a = 5$ las dos ramas son continuas y también lo es en $x = 3 \Longrightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$.

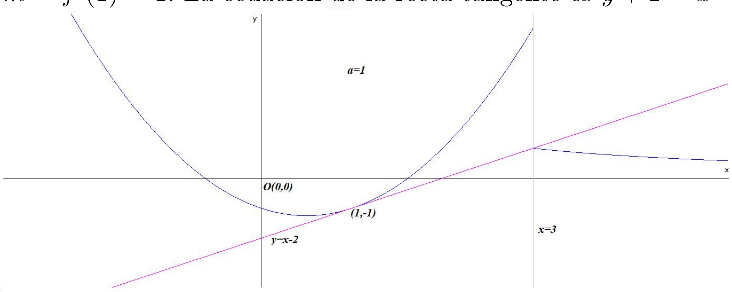
☛ **Derivabilidad en** $x = 3$ para $a = 5$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x < 3 \\ -\dfrac{15}{x^2} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(3^-) = 5 \\ f'(3^+) = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f \text{ no es derivable en } x = 3$$

Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$ para $a = 5$.

b) Para $a = 1$ en $x = 1$ la función es $f(x) = x^2 - x - 1 \Longrightarrow b = f(1) = -1$ y $f'(x) = 2x - 1 \Longrightarrow m = f'(1) = 1$. La ecuación de la recta tangente es $y + 1 = x - 1 \Longrightarrow y = x - 2$



Problema 3.15.11 Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x - 1)^2}$$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
Asíntotas:

- Asíntotas verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

- Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = -\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \infty$$

- Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x(x^2 - 2x + 1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x} = 1$$

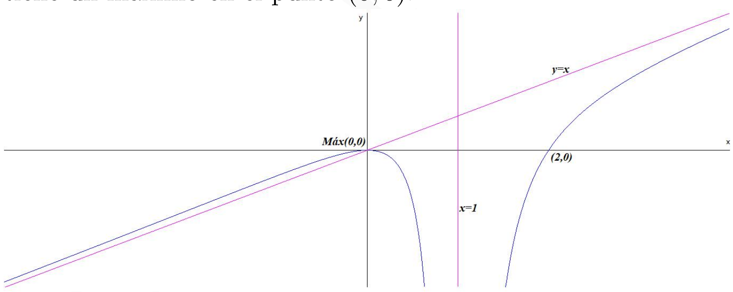
$$n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1} - x\right) =$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{-x}{x^2 - 2x + 1}\right) = 0 \Longrightarrow y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0.$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 1)$, tiene un máximo en el punto $(0, 0)$.



Problema 3.15.12 Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ es:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

donde a y b son parámetros reales.

a) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.

b) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

Solución:

a) $f(x) = \int (3x^2+8x)\,dx = x^3+4x^2+C$, como $f(1) = 11 \Longrightarrow f(1) = 1+4+C = 11 \Longrightarrow C = 6$.
Luego $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6$

b) $f'(x) = 3x^2 + 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -\dfrac{8}{3}$

$$f''(x) = 6x + 8 \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 8 > 0 \Longrightarrow x = 0 \ \text{mínimo} \\ f''\left(-\dfrac{8}{3}\right) = -8 < 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{8}{3} \ \text{máximo} \end{cases}$$

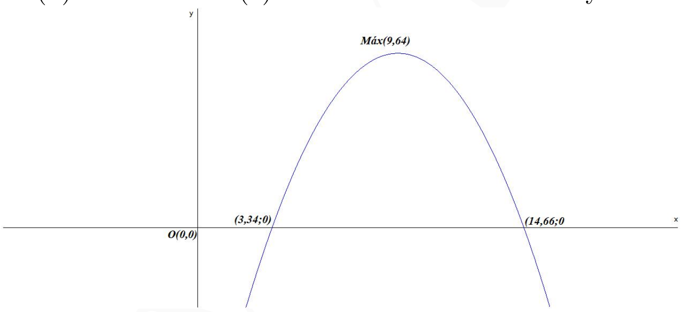
Hay un mínimo relativo en $(0, 6)$ y un máximo relativo en $\left(-\dfrac{8}{3}, \dfrac{418}{27}\right)$.

3.16. Murcia

3.16.1. Modelo de 2020

Problema 3.16.1 Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido.

Solución:
La función beneficio será: $B(x) = 40x - C(x) = -2x^2 + 36x - 98$
$B'(x) = -4x + 36 = 0 \Longrightarrow x = 9$ unidades
$B''(x) = -4 \Longrightarrow B''(9) = -4 < 0 \Longrightarrow$ en $x = 9$ hay un máximo local con un beneficio de 64 euros.



Problema 3.16.2 Se pide:

a) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale -3.

b) Si en la función anterior $a = 1$ y $b = -12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$

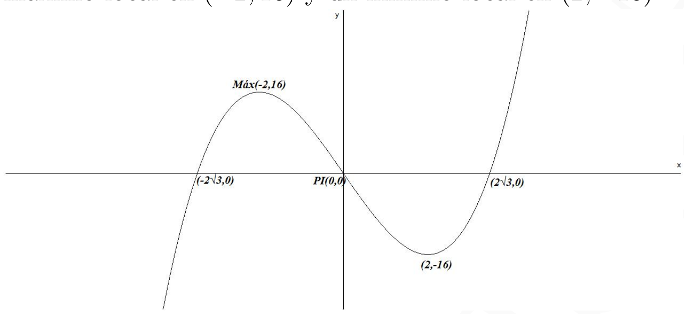
$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1 \Longrightarrow a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \Longrightarrow 3a + b = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array} \right.$$

$$f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f(x) = x^3 - 12x \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-2, 2)$. Tiene un máximo local en $(-2, 16)$ y un mínimo local en $(2, -16)$



Problema 3.16.3 Dada la función $f(x) = \left\{ \begin{array}{rcr} x + a & \text{si} & x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si} & 1 \le x \le 3 \\ x + b & \text{si} & x \ge 3 \end{array} \right.$

a) Determinar a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Hallar $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (x + a) = 1 + a \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (x^2 - 2) = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow 1 + a = -1 \Longrightarrow a = -2$$

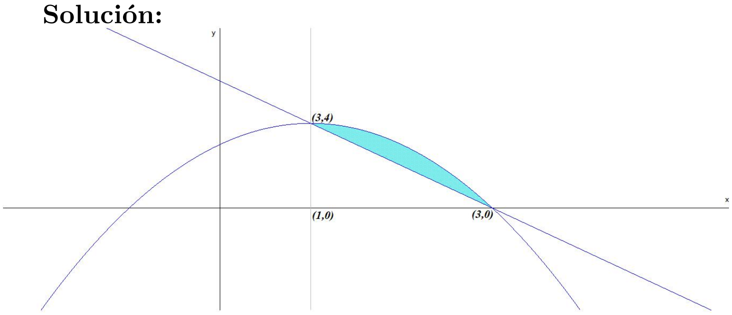
Continuidad en $x = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} (x^2 - 2) = 7 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} (x + b) = 3 + b \end{array} \right. \Longrightarrow 7 = 3 + b \Longrightarrow b = 4$$

b) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2 - 2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x\right]_1^3 = \frac{14}{3}$

Problema 3.16.4 Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las recta $y = 6 - 2x$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$. Calcular su área.

Solución:



$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 6 - 2x = -x^2 + 2x + 3 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ y } x = 3$$

$$S_1 = \int_1^3 (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 = -\frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{4}{3}\ u^2$$

3.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.16.5 El coste de producción de x unidades de un determinado producto viene dado por la función, $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ y su precio de venta es: $p = 50 - \frac{x}{4}$ euros. Hallar:

a) El número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.

b) El precio al que deben venderse las unidades obtenidas en el apartado a).

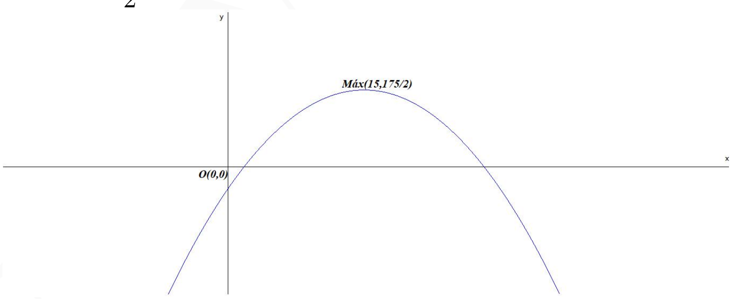
c) El beneficio máximo.

Solución:

La función beneficio será: $B(x) = px - C(x) = 50x - \frac{x^2}{4} - \left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\frac{x^2 - 30x + 50}{2}$

$B'(x) = -x + 15 = 0 \Longrightarrow x = 15$ unidades

$B''(x) = -1 \Longrightarrow B''(15) = -1 < 0 \Longrightarrow$ en $x = 15$ hay un máximo local con un beneficio de $B(15) = \frac{175}{2} = 87,5$ euros.



a) El número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo es de 15.

b) El precio al que deben venderse las unidades obtenidas en el apartado a) es $p = 50 - \dfrac{15}{4} = \dfrac{185}{4} = 46,25$ euros.

c) El beneficio máximo es de $87,5$ euros

Problema 3.16.6 Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, calcular los valores de a y b para que

a) La función pase por el origen de coordenadas y tenga en el punto $(1, -1)$ un mínimo local.

b) Para los valores obtenidos en el apartado anterior, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \\ f(1) = -1 \Longrightarrow a + b + c = -1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -3/2 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

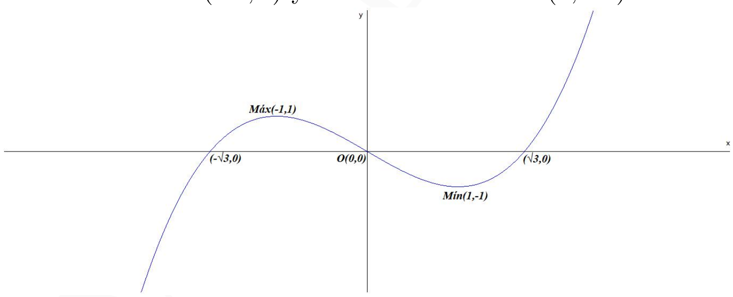
Comprobamos si hay un mínimo en $x = 1$:
$f''(x) = 6ax = 3x \Longrightarrow f''(1) = 3 > 0 \Longrightarrow x = 1$ es un mínimo local.

b)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-1, 1)$. Tiene un máximo local en $(-1, 1)$ y un mínimo local en $(1, -1)$



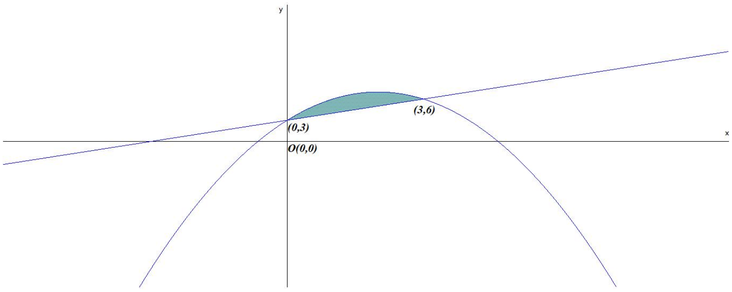
Problema 3.16.7 Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ y la recta $g(x) = 3 + x$. Calcular su área.

Solución:

$$-x^2 + 4x + 3 = 3 + x \Longrightarrow -x^2 + 3x = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow, \quad x = 3$$

$$S_1 = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 3 - 3 - x)\, dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_0^3 = \frac{9}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{9}{2}\ u^2$$



Problema 3.16.8 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$.

b) Calcular $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$.

c) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\, dx$.

Solución:

a) $b = f(0) = 0$, $f'(x) = -\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = 2$. Luego la ecuación punto pendiente de la recta tangente es:

$$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 0 = 2(x - 0) \Longrightarrow y = 2x$$

b) $$\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array}\right] = \int \frac{2x}{t}\,\frac{dt}{2x} = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C = \ln|x^2+1| + C$$

c) $$\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \ln|x^2+1|\big]_1^2 = \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{5}{2}.$$

3.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.16.9 En un concierto celebrado en Murcia se ha estimado el número de miles de jóvenes que han asistido a él en función de la hora de llegada, t, mediante la función $f(t) = \dfrac{10}{(t-6)^2+1}$ Hallar la hora en el que había el mayor número de personas en el concierto. ¿Cuál fue esa cantidad máxima? Razone la respuesta.

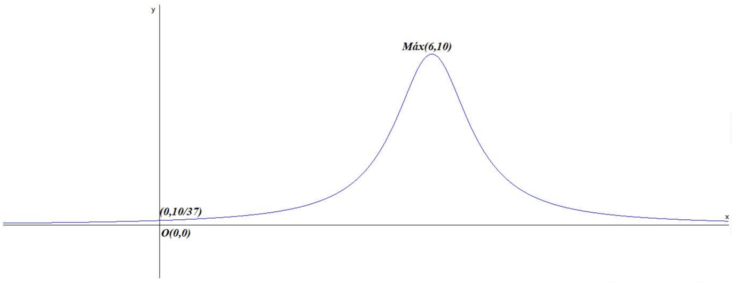
Solución:

Observamos que el denominador no se anula nunca, por lo que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y no hay asíntotas verticales, si hay una asíntota horizontal en $y = 0$, ya que $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$. Tiene un punto de corte con OY en $\left(0, \dfrac{10}{37}\right)$

$$f(t) = \frac{10}{(t-6)^2+1} \Longrightarrow f'(t) = -\frac{20(t-6)}{(t^2-12t+37)^2} = 0 \Longrightarrow t = 6$$

	$(-\infty, 6)$	$(6, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, 6)$ y decrece en el intervalo $(6, \infty)$. Tiene un máximo local en $(6, 10)$
En la hora 6 es el máximo de afluencia con 10000 jóvenes.



Problema 3.16.10 Dada la función $f(x) = ax^2 + 3x + \dfrac{b}{x}$:

a) Calcule los valores a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto (1,2) y determine si ese extremo es un máximo o un mínimo.

b) Si en la función anterior $a = 2$ y $b = 0$, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) $f(x) = ax^2 + 3x + \dfrac{b}{x} \Longrightarrow f'(x) = 2ax + 3 - \dfrac{b}{x^2}$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \Longrightarrow a + 3 + b = 2 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + 3 - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -4/3 \\ b = 1/3 \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{4x^2}{3} + 3x + \frac{1}{3x}$$

Para determinar si el punto (1,2) es un máximo o un mínimo recurrimos a la segunda derivada: $f'(x) = -\dfrac{8x}{3} + 3 - \dfrac{1}{3x^2} \Longrightarrow f''(x) = -\dfrac{8}{3} - \dfrac{2}{3x^3} \Longrightarrow f''(1) = -2 < 0 \Longrightarrow (1, 2)$ es un máximo relativo.

b) $f(x) = 2x^2 + 3x \Longrightarrow f'(x) = 4x + 3 \Longrightarrow m = f'(1) = 7$ y $b = f(a) = f(1) = 5 \overset{y-b=m(x-1)}{\Longrightarrow}$ $y - 5 = 7(x-1) \Longrightarrow y = 7x - 2$ ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

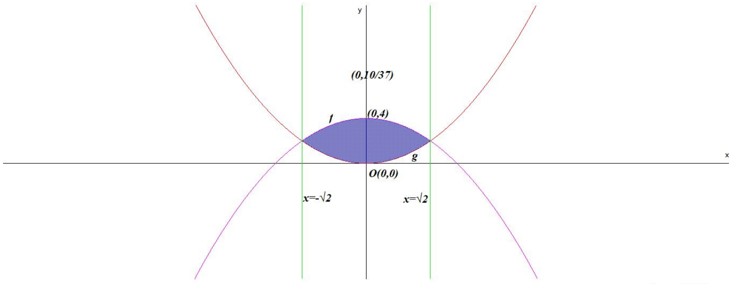
Problema 3.16.11 Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = -x^2 + 4$ y $g(x) = x^2$. Calcular su área.

Solución:

$$-x^2 + 4 = x^2 \Longrightarrow -2x^2 + 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$S_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-2x^2 + 4)\, dx = -\frac{2x^3}{3} + 4x\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{16\sqrt{2}}{3} \simeq 7,5425 \ \ u^2$$



Problema 3.16.12 Dada la función $f(x) = xe^{x^2}$

a) Hallar la pendiente de esta función en el punto $x = 0$.

b) Calcular $\displaystyle\int xe^{x^2}\, dx$.

c) Calcular $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\, dx$.

Solución:

a) $f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2} \Longrightarrow m = f'(0) = 1$.

b) $$\int xe^{x^2}\, dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{bmatrix} = \int xe^t \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int e^t\, dt = e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

c) $$\int_0^1 xe^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big]_0^1 = \frac{e-1}{2} \simeq 0,8591.$$

3.17. Navarra

3.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.17.1 Sean las funciones, $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2x - 2}$ y $g(x) = 2x^2 + ax + 1$.

a) Estudie la continuidad de la función $f(x)$ y, en su caso, indique el tipo de discontinuidad.

b) Calcule el valor del parámetro a para que $g(x)$ tenga un mínimo en $x = 1/2$.

c) Calcule $g'(1)$ aplicando la definición de derivada, para el valor del parámetro $a = -1$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$. La función es continua en todo el dominio de la función, analizamos la continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+4x+3}{2x-2} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+4x+3}{2x-2} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty$$

En $x = 1$ la función es discontinua no evitable, hay un salto de $-\infty$ a $+\infty$.

b) Si $x = \dfrac{1}{2}$ es un extremo relativo: $g(x) = 2x^2 + ax + 1 \Longrightarrow g'(x) = 4x + a \Longrightarrow g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 + a = 0 \Longrightarrow a = -2$

Para comprobar que en $x = \dfrac{1}{2}$ hay un mínimo recurrimos a la segunda derivada: $g''(x) = 4 \Longrightarrow g''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4 > 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ es un mínimo.

c) Si $a = -1 \Longrightarrow g(x) = 2x^2 - x + 1$

Tenemos $g(1) = 2$ y $g(1+h) = 2(1+h)^2 - (1+h) + 1 = 2(1+h^2+2h) - h = 2h^2 + 3h + 2$

$g'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^2+3h+2-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(2h+3)}{h} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{h\to 0}(2h+3) = 3$

Problema 3.17.2 Se pide:

a) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{2x^2+5}{x+1}$.

b) Calcule la primitiva de la función $f(x) = (2x+1)^3$, sabiendo que $F(0) = 9/8$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2+5}{x+1} = \left[\frac{7}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2+5}{x+1} = \left[\frac{7}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+5}{x+1} = -\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+5}{x+1} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{x^2+x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+5}{x+1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+5}{x+1} = -2$$

$$y = 2x - 2$$

b) $F(x) = \displaystyle\int (2x+1)^3\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 2x+1 \\ dt = 2dx \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{array}\right] = \dfrac{1}{2}\int t^3\,dt = \dfrac{t^4}{8} + C = \dfrac{(2x+1)^4}{8} + C$

$F(0) = \dfrac{1}{8} + C = \dfrac{9}{8} \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow F(x) = \dfrac{(2x+1)^4}{8} + 1$

3.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.17.3 Sean las funciones, $f(x) = -x^2 - 9x + 10$ y $g(x) = 2x^2 - x^3$.

a) Determine, para la función $g(x)$, los puntos de corte con los ejes, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) Determine el mínimo de la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Solución:

a) $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

- ☛ Puntos de corte:
  Con OX hacemos $g(x) = 0 \Longrightarrow 2x^2 - x^3 = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(2, 0)$.
  Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.

- ☛ $g'(x) = 4x - 3x^2 \Longrightarrow g''(x) = 4 - 6x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

La función es cóncava $\smile$ en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right)$, y es convexa $\frown$ en el intervalo $\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{16}{27}\right)$

b) $h(x) = f(x) - g(x) = -x^2 - 9x + 10 - (2x^2 - x^3) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$
$h'(x) = 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$. Para analizar estos puntos recurrimos a la segunda derivada: $h''(x) = 6(x - 1)$
Si $x = -1 \Longrightarrow h(-1) = -12 < 0 \Longrightarrow x = -1$ es un máximo relativo.
Si $x = 3 \Longrightarrow h(3) = 12 > 0 \Longrightarrow x = 3$ es un mínimo relativo.
El mínimo de la función es el punto $(3, -17)$

Problema 3.17.4 Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de la función $f(x)$.

b) Represente gráficamente la función $f(x)$.

c) Calcule el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[3, 4]$.

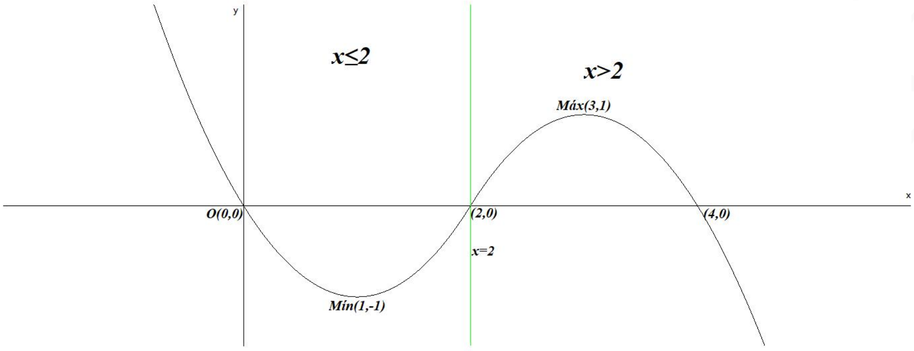
Solución:

a) Las dos ramas son continuas, hay que estudiar la continuidad en $x = 2$:
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - 2x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-x^2 + 6x - 8) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Longrightarrow f$ es continua en $x = 2 \Longrightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$

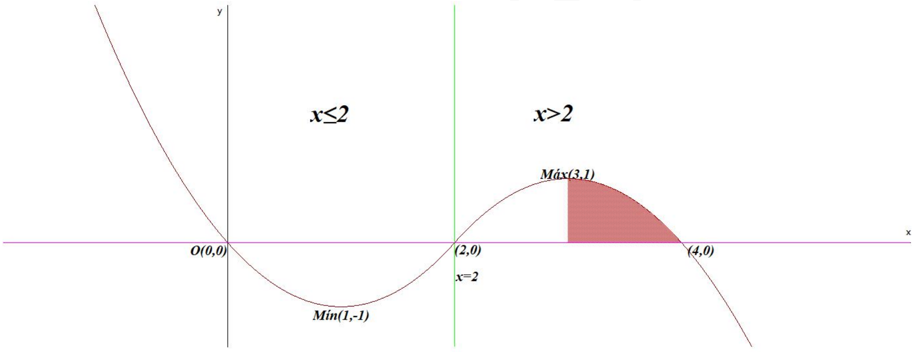
b) Representación gráfica:

☛ $x \leq 2 \Longrightarrow f(x) = x^2 - 2x$ Tiene puntos de corte en $(0,0)$ y $(2,0)$.
$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ Por la segunda derivada $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow (1,-1)$ es un mínimo.

☛ $x > 2 \Longrightarrow f(x) = -x^2 + 6x - 8$ Tiene puntos de corte en $(2,0)$ y $(4,0)$.
$f'(x) = -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$ Por la segunda derivada $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(3) = -2 < 0 \Longrightarrow (3,1)$ es un máximo.



c) Observamos que la gráfica de la función no corta al eje de abscisas en el intervalo $[3,4]$ y la función es positiva en este intervalo. $S = \int_3^4 (-x^2 + 6x - 8)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x\Big]_3^4 = \frac{2}{3} \simeq 0,6667\ u^2$



3.18. País Vasco

3.18.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.18.1 Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax + \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

a) Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.

b) En el caso $a = \frac{1}{2}$ determina la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 2$.

c) En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función; para ello, calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión cuando $x < 1$.

d) Calcula: $\displaystyle\int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx$

Solución:

a) Las dos ramas son continuas en su dominio, para que sea continua en $x = 1$ se tiene que cumplir

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^3 + 3x^2) = 4 \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(ax + \frac{2}{x}\right) = a + 2 \\ f(1) = a + 2 \end{array}\right. \Longrightarrow a + 2 = 4 \Longrightarrow a = 2$$

b) En $x = 2$ es $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2}$
La ecuación punto pendiente de la recta $y - b = m(x - a)$ donde $a = 2$, $b = f(a) = f(2) = 2$ y $m = f'(a) = f'(2) = 0 \Longrightarrow y - 2 = 0 \Longrightarrow y = 2$

c) Si $a = 2$ la función es continua en $\mathbb{R}$ y $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^3 + 3x^2 & \text{si} & x < 1 \\ 2x + \dfrac{2}{x} & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$

☛ Si $x < 1$ y $f(1) = 4 \Longrightarrow$ la rama termina en el punto $(1, 4)$. Tiene puntos de corte con OX $x^3 + 3x^2 = 0 \Longrightarrow (-3, 0)$ y $(0, 0)$
$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$ Analizamos estos puntos con la segunda derivada $f''(x) = 6x + 6$

- $f''(0) = 6 > 0 \Longrightarrow x = 0$ es un mínimo relativo $(0, 0)$
- $f''(-2) = -6 < 0 \Longrightarrow x = -2$ es un máximo relativo $(-2, 4)$

$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$

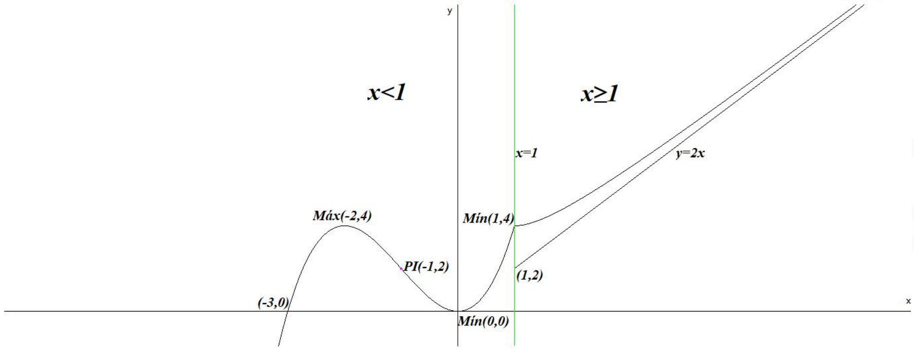
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, -1)$ $\frown$ y cóncava en el intervalo $(-1, -2)$ $\smile$. Tiene un punto de inflexión en $(-1, 2)$.

☛ Si $x \geq 1 \Longrightarrow f(x) = 2x + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x^2 + 2}{x}$ y $f(1) = 4 \Longrightarrow$ la rama empieza en el punto $(1, 4)$. No tiene puntos de corte con OX
No tiene una asíntotas verticales ni horizontales pero si una oblicua: $y = mx + n$
$m = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 2}{x^2} = 2$
$n = \displaystyle\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 + 2}{x} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$
Luego la asíntota oblicua es $y = 2x$

$f'(x) = \dfrac{2(x^2 - 1)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, la solución negativa no es válida.
Analizamos este punto con la segunda derivada $f''(x) = \dfrac{4}{x^3}$
$f''(1) = 4 > 0 \Longrightarrow x = 1$ es un mínimo relativo $(1, 4)$ $f''(x) \neq 0 \Longrightarrow$ No hay puntos de inflexión y como $f''(x) > 0$ en toda la rama la función es cóncava $\smile$ en ella.

☛ Con los datos calculados dibujamos la gráfica:



d) $\displaystyle\int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + 2\ln|x| + \frac{4}{x} + C$

Problema 3.18.2 Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 11$

a) Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(2, 5)$.

b) En el caso $a = \dfrac{3}{8}$ y $b = -\dfrac{9}{2}$, estudia los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función.

c) En el caso $a = \dfrac{3}{8}$ y $b = -\dfrac{9}{2}$, representa y calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx + 11 \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$

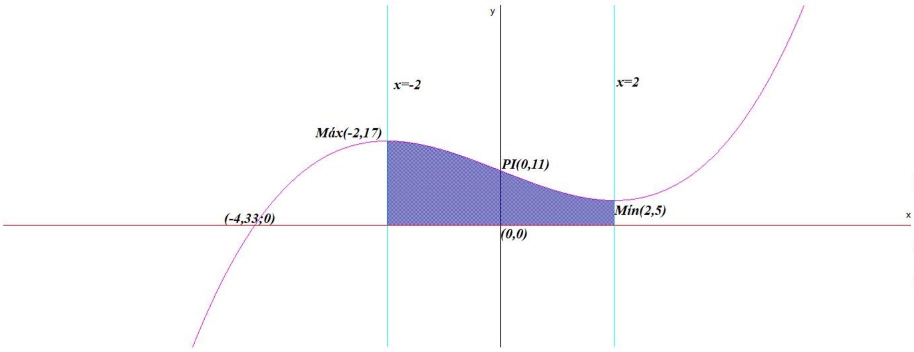
$$\left\{\begin{array}{l} f(2) = 5 \Longrightarrow 8a + 2b + 11 = 5 \Longrightarrow 8a + 2b = -6 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3/8 \\ b = -9/2 \end{array}\right.$$

b) $f(x) = \dfrac{3}{8}x^3 - \dfrac{9}{2}x + 11 \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{9}{8}x^2 - \dfrac{9}{2} \Longrightarrow f''(x) = \dfrac{9}{4}x$
$f'(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{9}{8}x^2 - \dfrac{9}{2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

- $f''(-2) = -\dfrac{9}{2} < 0 \Longrightarrow (-2, 17)$ es un máximo relativo.
- $f''(2) = \dfrac{9}{2} > 0 \Longrightarrow (2, 5)$ es un mínimo relativo.

$f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ Para ver que es un punto de inflexión utilizamos la tercera derivada $f'''(x) = \dfrac{9}{4} \Longrightarrow f'''(0) = \dfrac{9}{4} \neq 0 \Longrightarrow (0, 11)$ es un punto de inflexión.

c) Con los datos anteriores dibujamos la gráfica:



$$S = \int_{-2}^{2} \left(\frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11 \right) dx = \frac{3x^4}{32} - \frac{9x^2}{4} + 11x \Big]_{-2}^{2} = 44\ u^2$$

3.18.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.18.3 Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ -x+2 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

a) Analiza la continuidad de la función en el intervalo $[-2, 4]$.

b) Realiza la representación gráfica de la función.

c) Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX

Solución:

a) Continuidad:

- Las tres ramas son continuas en su dominio
- En $x = 0$

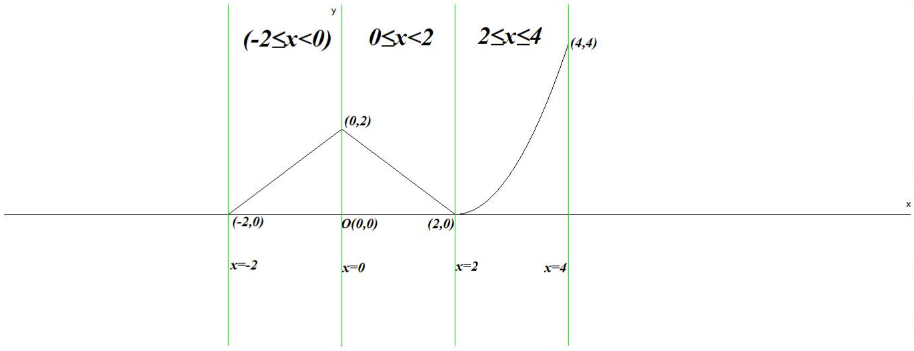
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x+2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

- En $x = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-x+2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 4x + 4) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 2$$

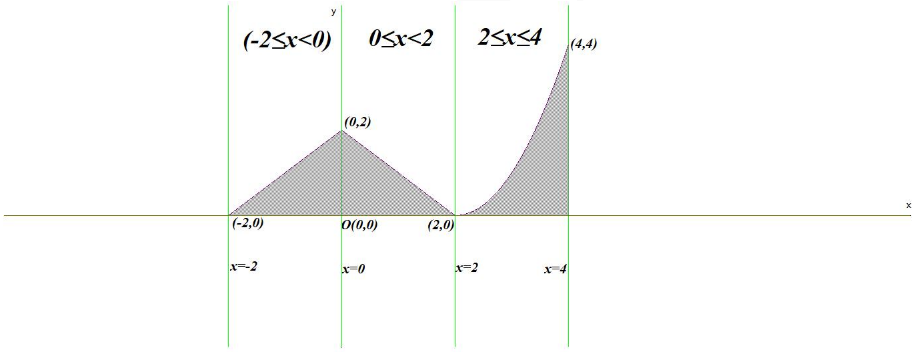
- En resumen la función es continua en $[-2, 4]$

b) Representación gráfica:



c) A la vista de la gráfica observamos dos áreas:

- El área S_1 es un triángulo de base 4 u y altura 2 $u \Longrightarrow S_1 = \dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4\ u^2$
- El área S_2 es el que está bajo la curva $f(x) = x^2 - 4x + 4$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$
  $S_2 = \displaystyle\int_2^4 (x^2 - 4x + 4)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_2^4 = \frac{8}{3}\ u^2$
- El área sería $S = |S_1| + |S_2| = 4 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{20}{3} = 6,6667\ u^2$



Problema 3.18.4 El coste de producción de una empresa, $f(x)$, medido en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, x, medida en toneladas:

$$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$$

La capacidad de producción máxima es de 2 toneladas.

a) Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de coste de producción de la empresa.

b) Determina la cantidad que la empresa debe producir para minimizar el coste de producción. ¿Cuál sería dicho coste mínimo?

c) ¿Con qué cantidad alcanza la empresa su máximo coste de producción? Determinar dicho coste máximo.

Solución:

a) Como la producción máxima es de $x = 2$ el $\mathrm{Dom}(f) = [0, 2]$.
$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3 \Longrightarrow f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3$ fuera del dominio de la función.

	$(0,1)$	$(1,2)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0, 1)$ y creciente en el $(1, 2)$. Presenta un mínimo local en el punto $(1, 26)$.

b) Tenemos $f(0) = 30$, $f(1) = 26$ y $f(2) = 28$ luego el mínimo calculado es absoluto. El coste es mínimo cuando se produce una tonelada y es de 26000€.

c) Por los apartados anteriores concluimos que el mayor coste se produce cuando no hay producción ($x = 0$).

Capítulo 4

Probabilidad

4.1. Resúmenes teóricos

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Longrightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Longrightarrow f_r(A) = \dfrac{f(A)}{N}$

Ley de los grandes números: $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacío** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

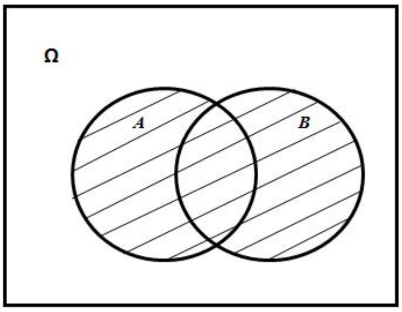
En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

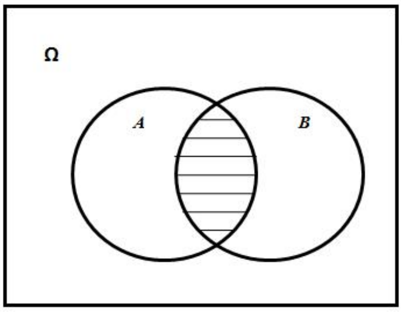
Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

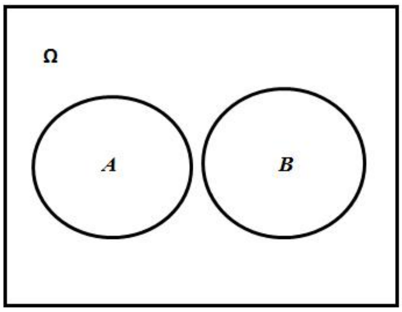
Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B: $A \cup B$



Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B: $A \cap B$

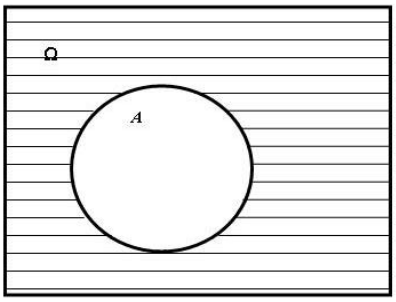


Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

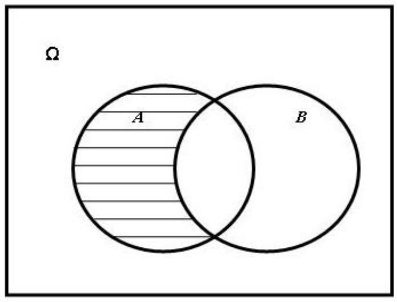
Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, ..., 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



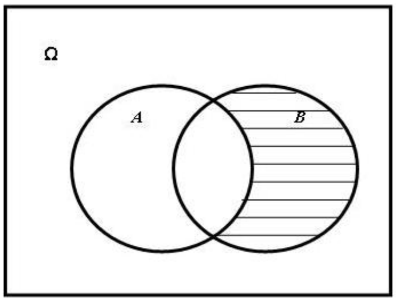
$\overline{A}$ es el suceso contrario o complementario de A:

$$\overline{A} = \Omega - A \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

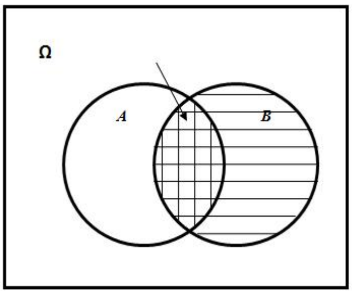


Organización por árboles:

Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

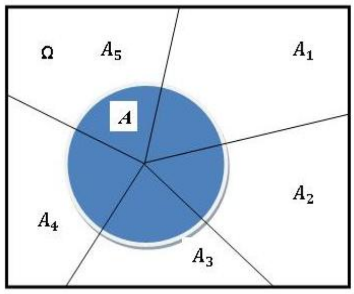
$$P(B|S) = \frac{20}{475},\ \ P(N|M) = \frac{200}{210},\ \ P(B) = \frac{45}{1000},\ \ P(M) = \frac{210}{1000}$$



Probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+P(A_3)P(A|A_3)+P(A_4)P(A|A_4)+P(A_5)P(A|A_5)$$

Problemas

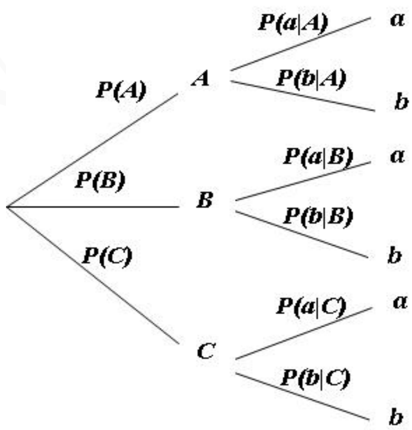
4.2. Andalucía

4.2.1. Modelo de 2020

Problema 4.2.1 Se pide:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,8$ determine $P(A|B)$.

b) Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0,3$, $P(D) = 0,8$ y que C y D son independientes, determine $P(C \cup D)$.



Solución:

a) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) = 0,5+0,4-0,8 = 0,1$
$P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25$

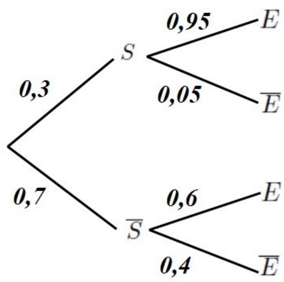
b) C y D son independientes $\Longrightarrow P(C\cap D) = P(C)\cdot P(D) = 0,3\cdot 0,8 = 0,24$
$P(C\cup D) = P(C)+P(D)-P(C\cap D) = 0,3+0,8-0,24 = 0,86$

Problema 4.2.2 Se sabe que el 30 % de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95 % tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60 % tiene empleo.

a) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar, tenga empleo.

b) Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.

Solución:
S: estudios superiores, $\overline{S}$: no estudios superiores, E: tiene empleo y $\overline{E}$: no tiene empleo.



a) $P(E) = P(E|S)P(S)+P(E|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,95\cdot 0,3+0,6\cdot 0,7 = 0,705$

b) $P(S|E) = \dfrac{P(E|S)P(S)}{P(E)} = \dfrac{0,95\cdot 0,3}{0,705} = 0,404$

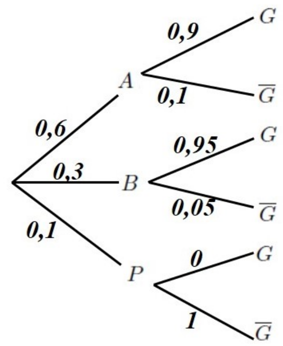
4.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.2.3 Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas, A y B, contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 5000 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 3000 reciben la vacuna A, 1500 la B y el resto el placebo. Se comprueba que el 90 % de los vacunados con la A y el 95 % de los vacunados con la B, generan anticuerpos, no generando anticuerpos los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?

b) Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

Solución:
Sean A se le administra la vacuna A, B se le administra la vacuna B, P se le administra placebo, G genera anticuerpos y $\overline{G}$ no genera anticuerpos.
$P(A) = \dfrac{3000}{5000} = \dfrac{3}{5} = 0,6$, $P(B) = \dfrac{1500}{5000} = \dfrac{3}{10} = 0,3$ y $P(P) = 0,1$



a) $P(G) = P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|P)P(P) =$
$0,9 \cdot 0,6 + 0,95 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0 = 0,825$

b) $P(P|\overline{G}) = \dfrac{P(\overline{G}|P)P(P)}{P(\overline{G})} = \dfrac{1 \cdot 0,1}{1 - 0,825} = 0,57143$

Problema 4.2.4 De las compras realizadas en el último período de rebajas del pasado año, el 55 % se dedicaron a productos electrónicos, el 72 % se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64 % fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar.

a) Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.

b) Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.

c) Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

Solución:
E: productos electrónicos, $\overline{E}$: no productos electrónicos, I: Internet y $\overline{I}$: no internet.
$P(E) = 0,55$, $P(\overline{E}) = 0,45$, $P(I) = 0,72$, $P(\overline{I}) = 0,28$ y $P(E|I) = 0,64$

a) $P(E|I) = \dfrac{P(E \cap I)}{P(I)} \Longrightarrow P(E \cap I) = P(E|I)P(I) = 0,64 \cdot 0,72 = 0,4608$

b) $P(I \cup E) = P(I) + P(E) - P(E \cap I) = 0,72 + 0,55 - 0,4608 = 0,8092$

c) $P(\overline{I}|\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{I} \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{P(\overline{I \cup E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{1 - P(I \cup E)}{P(\overline{E})} = \dfrac{1 - 0,8092}{0,45} = 0,424$

4.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.2.5 En una población, se sabe que el l5 % de las personas padece una determinada enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos, mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4 % de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población.

a) Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.

b) Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.

c) Calcule la probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

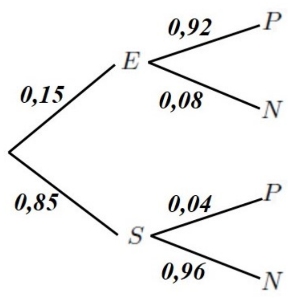
Solución:
Sean E persona enferma, S persona sana, P el test da positivo, y N el test da negativo.

a) $P(P) = P(P|E)P(E)+P(P|S)P(S) = 0,92\cdot 0,15+0,04\cdot 0,85 = 0,172$

$P(E|P) = \dfrac{P(P|E)P(E)}{P(P)} = \dfrac{0,92\cdot 0,15}{0,172} = 0,8023$

b) $P(E\cap N) = P(N|E)P(E) = 0,08\cdot 0,15 = 0,012$

c) $P(E|N) = \dfrac{P(E\cap N)}{P(N)} = \dfrac{0,012}{1-0,172} = 0,0145$



Problema 4.2.6 En una comunidad de vecinos, el 90 % de sus miembros tiene vehículo propio, el 40 % hace uso del transporte público y un 3 % ni tiene vehículo propio ni usa el transporte público"Se elige al azar un miembro de esa comunidad.

a) Calcule la probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público.

b) Calcule la probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio.

c) Calcule la probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio.

Solución:
V: tiene vehículo propio, $\overline{V}$: no tiene vehículo propio, T: usa transporte público y $\overline{T}$: no usa transporte público.
$P(V) = 0,9$, $P(\overline{V}) = 0,1$, $P(T) = 0,4$, $P(\overline{T}) = 0,6$ y $P(\overline{V}\cap\overline{T}) = 0,03$

a) $P(\overline{V}\cap\overline{T}) = P(\overline{V\cup T}) = 1 - P(V\cup T) = 0,03 \Longrightarrow P(V\cup T) = 0,97$

b) $P(V\cup T) = P(V) + P(T) - P(V\cap T) \Longrightarrow 0,97 = 0,9+0,4-P(V\cap T) \Longrightarrow P(V\cap T) = 1,3-0,97 = 0,33$
$P(T\cap\overline{V}) = P(T) - P(T\cap V) = 0,4-0,33 = 0,07$

c) $P(T|\overline{V}) = \dfrac{P(T\cap\overline{V})}{P(\overline{V})} = \dfrac{0,07}{0,1} = 0,7$

4.3. Aragón

4.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.3.1 Al terminar el bachillerato los 100 alumnos de un Centro, de las modalidades de Ciencias y Artes, planean viajar por Italia, Francia o Portugal. Entre los 55 alumnos de Ciencias se sabe que 10 quieren ir a Italia, 25 a Francia y 20 a Portugal. En el grupo de Artes hay 30 que quieren ir a Italia y 15 a Portugal. Elegido un alumno al azar, calcula:

a) La probabilidad de que quiera ir a Portugal.

b) Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes.

c) Probabilidad de que un alumno quiera ir a Francia y sea de Ciencias.

d) Probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia.

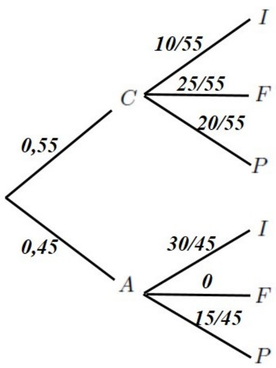
Solución:
Sean C alumno de ciencias, A alumno de arte, I planea Italia, F planea Francia y P planea Portugal.
$P(C) = \dfrac{55}{100} = 0,55$ y $P(A) = \dfrac{45}{100} = 0,45$.
$P(I|C) = \dfrac{10}{55}$, $P(F|C) = \dfrac{25}{55}$, $P(P|C) = \dfrac{20}{55}$, $P(I|A) = \dfrac{30}{45}$, $P(F|A) = \dfrac{0}{45} = 0$ y $P(P|A) = \dfrac{15}{45}$.

a) $P(P) = P(P|C)P(C) + P(P|A)P(A) =$
$0,55 \cdot \dfrac{20}{55} + 0,45 \cdot \dfrac{15}{45} = \dfrac{7}{20} = 0,35$

b) $P(I) = P(I|C)P(C) + P(I|A)P(A) =$
$0,55 \cdot \dfrac{10}{55} + 0,45 \cdot \dfrac{30}{45} = \dfrac{2}{5} = 0,4$
$P(A|I) = \dfrac{P(I|A)P(A)}{P(I)} = \dfrac{0,45 \cdot \frac{30}{45}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{3}{4} = 0,75$

c) $P(F \cap C) = P(F|C)P(C) = \dfrac{25}{55} \cdot 0,55 = \dfrac{1}{4} = 0,25$

d) $P(F|C) = \dfrac{25}{55} = \dfrac{5}{11} = 0,4545$



4.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.3.2 Los profesores Alvarado, Benítez y Cadiñanos, han corregido el 25 %, 30 % y 45 %, respectivamente, de los exámenes de una oposición. Los porcentajes de cometer algún fallo en la corrección son 1 %, 2 % y 3 %, respectivamente. Si se selecciona un examen al azar: calcula:

a) Calcula la probabilidad de que esté mal corregido.

b) El examen tiene un error de corrección, calcula la probabilidad de haber sido corregido por Benítez.

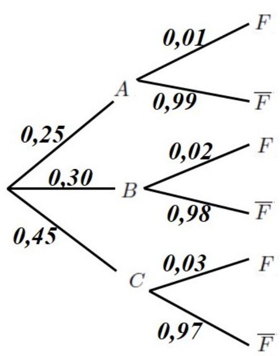
c) El examen tiene un error de corrección ¿qué corrector tiene mayor probabilidad de haber corregido mal el examen?

Solución:
Sean A corregido por Alvarado, B corregido por Benítez, C corregido por Cadiñanos, F algùn fallo y $\overline{F}$ sin fallo.

a) $P(F) = P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C) =$
$0,25 \cdot 0,01 + 0,30 \cdot 0,02 + 0,45 \cdot 0,03 = 0,022$

b) $P(B|F) = \dfrac{P(F|B)P(B)}{P(F)} = \dfrac{0,30 \cdot 0,02}{0,022} = 0,2727$

c) $P(A|F) = \dfrac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \dfrac{0,25 \cdot 0,01}{0,022} = 0,1136$
$P(C|F) = \dfrac{P(F|C)P(C)}{P(F)} = \dfrac{0,45 \cdot 0,03}{0,022} = 0,6136$
$P(B|F) = 0,2727$ calculado en el apartado anterior. Luego es más fácil que cometa algún error el profesor Cadiñanos.



4.4. Asturias

4.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.4.1 Cierto estudio de mercado revela que el 45 % de los entrevistados consume el producto A y el 60 % de los entrevistados consume el producto B. Además, se obtiene que el porcentaje de entrevistados que consume ambos productos es del 20 %. Si seleccionamos al azar un individuo de los entrevistados,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que consuma el producto A, pero no consuma el producto B?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que consuma alguno de los dos productos?

Solución:
$P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,6$ y $P(A \cap B) = 0,2$.

a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,45 - 0,2 = 0,25$

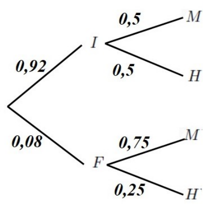
b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,45 + 0,6 - 0,2 = 0,85$

Problema 4.4.2 Los estudiantes de un instituto pueden optar por cursar inglés o francés. En un determinado curso hay 500 estudiantes, de los que 460 estudian inglés y el resto francés. La mitad de los estudiantes que estudian inglés son mujeres. De los que estudian francés, el 75 % son mujeres.

a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) Elegida una estudiante al azar entre las mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés?

Solución:
Sean I: estudia inglés, F: estudia francés, M: mujer y H: hombre.
$P(I) = \dfrac{460}{500} = 0,92$, $P(F) = 0,08$, $P(M|I) = 0,5$ y $P(M|F) = 0,75$.



a) $P(M) = P(M|I)P(I) + P(M|F)P(F) = 0,92 \cdot 0,5 + 0,08 \cdot 0,75 = 0,52$

b) $P(F|M) = \dfrac{P(M|F)P(F)}{P(M)} = \dfrac{0,08 \cdot 0,75}{0,52} = 0,1154$

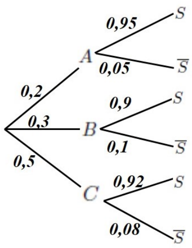
4.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.4.3 Los cursos de monitor de esquí en determinada estación se reparten en tres turnos, A, B y C. Los alumnos del turno A representan el 20 % del alumnado, los del turno B representan el 30 % del alumnado y los del turno C representan el 50 % restante. Además se sabe que el porcentaje de alumnos que aprueban el curso es del 95 % en el turno A, 90 % en el B y 92 % en el C. Si se elige un alumno al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso y no sea del turno B?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso o sea del turno B?

Solución:
Sean: A alumno del turno A, B alumno del turno B, C alumno del turno C, S supera en el curso y $\overline{S}$ no supera el curso.



a) $P(S\cap\overline{B}) = P(S\cap(A\cup C)) = P((S\cap A)\cup(S\cap C)) = P(S\cap A)+(S\cap C)) = P(S\cap A)+(S\cap C)) = P(S|A)P(A)+P(S|C)P(C) = 0,95\cdot 0,2+0,92\cdot 0,5 = 0,65$

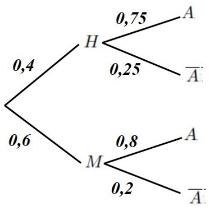
b) $P(S\cup B) = P(S) + P(B) - P(S\cap B) = P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C) + P(B) - P(S|B)P(B) = P(S|A)P(A) + P(S|C)P(C) + P(B) = 0,65 + 0,3 = 0,95$

Problema 4.4.4 En el primer curso de un grado, el 60 % de los estudiantes son mujeres y el 40 % restante son hombres. Además se sabe que el 80 % de las mujeres y el 75 % de los hombres aprobaron el examen de matemáticas. Si se elige un estudiante de ese curso al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya suspendido matemáticas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado matemáticas?

Solución:
Sean H: hombre, M: mujer, A: aprueba y $\overline{A}$: no aprueba.



a) $P(H\cap\overline{A}) = P(\overline{A}|H)P(H) = 0,25\cdot 0,4 = 0,1$

b) $P(A) = P(A|H)P(H) + P(A|M)P(M) = 0,75\cdot 0,4 + 0,8\cdot 0,6 = 0,78$

4.5. Cantabria

4.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.5.1 Se realiza una encuesta a un grupo de 2000 personas de diferentes edades para conocer sus hábitos de compra por Internet en el último mes. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	$18-40$ años	$41-60$ años	mayores de 60 años	Total
Ha realizado alguna compra por Internet	468	325	250	1043
No ha comprado ningún producto por Internet	257	207	493	957
Total	725	532	743	2000

Elegida una de las personas del grupo al azar,

a) Calcular la probabilidad de que sea mayor de 60 años y haya realizado alguna compra por Internet en el último mes.

b) Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 41 y 60 años.

c) Si sabemos que ha realizado alguna compra por Internet en el último mes, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 40 años?

Solución:
Sean A de 18-40 años, B de 41-60 años, C mayor de 60 años, I compra en Internet e $\overline{I}$ no compra por Internet.

	$18-40 \ \equiv A$	$41-60 \ \equiv B$	$>60 \ \equiv C$	Total
I	468	325	250	1043
$\overline{I}$	257	207	493	957
Total	725	532	743	2000

a) $P(C \cap I) = \dfrac{250}{2000} = \dfrac{1}{8} = 0,125$

b) $P(B) = \dfrac{532}{2000} = \dfrac{133}{500} = 0,266$

c) $P(A|I) = \dfrac{P(A \cap I)}{P(I)} = \dfrac{468}{1043} = 0,4487$

4.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

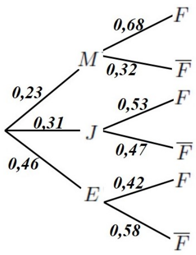
Problema 4.5.2 El 23 % de los habitantes de una localidad son menores de 25 años. El 31 % tienen una edad comprendida entre los 26 y 60 años. El 46 % restante es mayor de 60 años. El ayuntamiento ha recibido la petición de instalación de un parque eólico en unos terrenos municipales. Entre la población más joven, el 68 % es partidario de la instalación; entre los habitantes entre 26 y 60 años, lo es el 53 %; y entre los mayores de 60 años, el 42 %.
Elegida una de las personas del grupo al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea favorable a la instalación del parque eólico?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea favorable y mayor de 60 años?

c) Si no es favorable, ¿cuál es la probabilidad de que sea menor de 25 años?

Solución:
Sean M menores de 25 años, J entre 26-60 años, E mayor de 60 años, F favorable a la instalación y $\overline{F}$ no favorable a la instalación.



a) $P(F) = P(F|M)P(M) + P(F|J)P(J) + P(F|E)P(E) =$
$0,68 \cdot 0,23 + 0,53 \cdot 0,31 + 0,42 \cdot 0,46 = 0,5139$

b) $P(E \cap \overline{F}) = P(\overline{F}|E)P(E) = 0,58 \cdot 0,46 = 0,2668$

c) $P(M|\overline{F}) = \dfrac{P(\overline{F}|M)P(M)}{P(\overline{F})} = \dfrac{0,32 \cdot 0,23}{1 - 0,5139} = 0,1514$

4.6. Castilla La Mancha

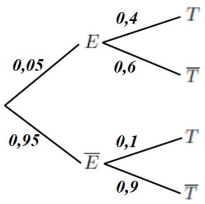
4.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.6.1 En un municipio el 5 % de las personas está en un ERE. De las personas que están en un ERE, el 40 % pertenece al sector turístico. Del resto de las personas del municipio, se sabe que el 10 % de ellos pertenece al sector turístico.

a) Calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar del municipio trabaje en el sector turístico.

b) Sabiendo que una persona pertenece al sector turístico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en un ERE?

Solución:
Sean E la persona está en un ERE, $\overline{E}$ la persona no está en un ERE, T pertenece al sector turístico y $\overline{T}$ no pertenece al sector turístico.



a) $P(T) = P(T|E)P(E) + P(T|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,4 \cdot 0,05 + 0,1 \cdot 0,95 = 0,115$

b) $P(E|T) = \dfrac{P(T|E)P(E)}{P(T)} = \dfrac{0,4 \cdot 0,05}{0,115} = 0,1739$

Problema 4.6.2 En una clase de un ciclo formativo de formación profesional hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas)

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Toledo?

Solución:
Sean A la persona es de Albacete, C la persona es de Cuenca y T la persona es de Toledo.

a) $P(A) = \dfrac{14}{27}$, $P(C) = \dfrac{5}{27}$ y $P(T) = \dfrac{8}{27}$
$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{13}{27}$ Como a un mismo alumno le pueden tocar las dos entradas será con reemplazamiento $P(\overline{A} \cap \overline{A}) = \dfrac{13}{27} \cdot \dfrac{13}{27} = \dfrac{169}{729} = 0,2318$

b) Ahora es sin reemplazamiento $P(5 \text{ de } T) = \dfrac{8}{27} \cdot \dfrac{7}{26} \cdot \dfrac{6}{25} \cdot \dfrac{5}{24} \cdot \dfrac{4}{23} = \dfrac{28}{40395} = 0,0006937$

4.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.6.3 De 100 alumnos que han terminado una titulación 6 no han encontrado trabajo el primer año.

a) Calcula la proporción de alumnos que han encontrado trabajo el primer año.

b) Calcula la probabilidad de que si elegimos tres alumnos sin repetición, ninguno haya encontrado trabajo el primer año.

c) Si elegimos tres alumnos al azar sin repetición y el primero no ha encontrado trabajo el primer año, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo y el tercero tampoco hayan encontrado trabajo el primer año?

Solución:
Sean A el alumno no ha encontrado trabajo el primer año y $\overline{A}$ el alumno si ha encontrado trabajo el primer año.

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{6}{100} = 0,94 \Longrightarrow 94\,\%$

b) $P(A1 \cap A2 \cap A3) = \dfrac{6}{100} \cdot \dfrac{5}{99} \cdot \dfrac{4}{98} = \dfrac{1}{8085} = 0,0001237$

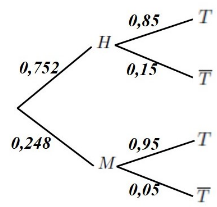
c) $P(A2 \cap A3|A1) = \dfrac{P(A1 \cap A2 \cap A3)}{P(A1)} = \dfrac{10}{4851} = 0,00206$

Problema 4.6.4 Según los datos de 2020, en la universidad española hay un porcentaje de 24,8 % de mujeres estudiando Grados de Informática, el resto son hombres. Además, una mujer tiene una probabilidad de 0,95 de terminar informática, mientras que para los hombres es del 0,85.

a) Elegido un estudiante al azar de informática, ¿cuál es la probabilidad de que consiga terminar la titulación?

b) Sabiendo que un estudiante elegido al azar ha terminado informática, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:
Sean M la persona es mujer, H la persona es un hombre, T termina informática y $\overline{T}$ no termina informática.



a) $P(T) = P(T|H)P(H) + P(T|M)P(M) = 0,85 \cdot 0,752 + 0,95 \cdot 0,248 = 0,8748$

b) $P(M|T) = \dfrac{P(T|M)P(M)}{P(I)} = \dfrac{0,95 \cdot 0,248}{0,8748} = 0,2693$

4.7. Castilla León

4.7.1. Modelo de 2020

No se proponen ninguno.

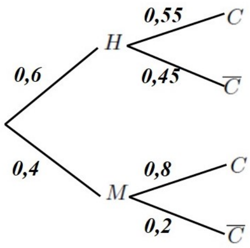
4.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.7.1 Una empresa destinada a la comercialización de cápsulas de café realiza un estudio de mercado entre un grupo de personas donde el 60 % son hombres y el 40 % restante son mujeres. La empresa comprueba que el 55 % de los hombres prefieren cápsulas de café capuchino, porcentaje que se eleva al 80 % en el caso de las mujeres.

a) Calcular la probabilidad de elegir una persona de ese grupo que resulte ser hombre y que prefiera cápsulas de café capuchino.

b) ¿Con qué probabilidad una persona elegida al azar de ese grupo prefiere cápsulas de café capuchino?

Solución:
Sean H hombre, M mujer, C toma café capuchino y $\overline{C}$ no toma café capuchino.



a) $P(H\cap C) = P(C|H)P(H) = 0,55\cdot 0,6 = 0,33$

b) $P(C) = P(C|H)P(H) + P(C|M)P(M) =$
$0,55\cdot 0,6 + 0,8\cdot 0,4 = 0,65$

Problema 4.7.2 Sabiendo que la probabilidad de que un hombre llegue a los 70 años es 0,78 y la probabilidad de que una mujer llegue a los 70 años es 0,83, calcular razonadamente la probabilidad de que ambos lleguen a los 70 años.
Solución:
Hay que suponer que ambos sucesos son independientes:
$P(H\cap M) = P(H)\cdot P(M) = 0,78\cdot 0,83 = 0,6474$

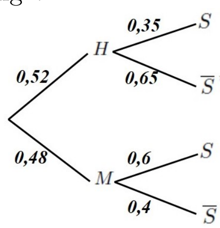
4.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.7.3 En un gimnasio, el 52 % de los socios son hombres y el resto son mujeres. Entre los socios, el 35 % de los hombres practica "spinning" así como el 60 % de las mujeres. Si elegimos un socio al azar,

a) Calcular la probabilidad de que practique "spinning".

b) Si el socio elegido no practica "spinning", obtener la probabilidad de que sea una mujer.

Solución:
Sean H hombre, M mujer, S practica "spinning" y $\overline{S}$ no practica "spinning".



a) $P(S) = P(S|H)P(H) + P(S|M)P(M) =$
$0,35\cdot 0,52 + 0,6\cdot 0,48 = 0,47$

b) $P(M|\overline{S}) = \dfrac{P(\overline{S}|M)P(M)}{P(\overline{S})} = \dfrac{0,4\cdot 0,48}{1-0,47} = 0,3623$

4.8. Cataluña

4.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Sin problemas de este tipo.

4.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Sin problemas de este tipo.

4.9. Comunidad valenciana

4.9.1. Modelo de 2020

Problema 4.9.1 En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30 % si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

Solución:
Sean S tienen Smart TV, C han contratado algún servicio de televisión de pago.

$$P(S) = \frac{2}{3},\ \ P(C|S) = \frac{3}{8},\ \ P(C) = 0,3$$

$$x\ \ 1-x\ \ S\ \ \overline{S}\ \ C\ \ \overline{C}$$

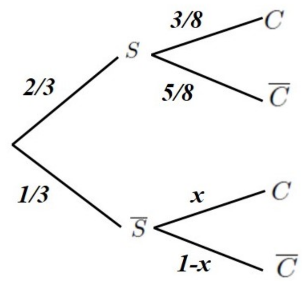
$$P(C) = P(C|S)P(S) + P(C|\overline{S})P(\overline{S}) \Longrightarrow 0,3 = \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3} + x\cdot\frac{1}{3} \Longrightarrow$$

$$x = P(C|\overline{S}) = \frac{3}{20}$$

a) $P(\overline{S}\cup C) = P(C|\overline{S})P(\overline{S}) = \dfrac{3}{20}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{20} = 0,05$

b) $P(S|C) = \dfrac{P(C|S)P(S)}{P(C)} = \dfrac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}}{0,3} = \dfrac{5}{6} = 0,833$

c) $P(\overline{S}|\overline{C}) = \dfrac{P(\overline{C}|\overline{S})P(\overline{S})}{P(\overline{C})} = \dfrac{\frac{17}{20}\cdot\frac{1}{3}}{1-0,3} = \dfrac{17}{42} = 0,4048$



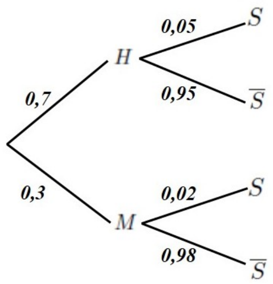
Problema 4.9.2 Sabemos que el 5 %de los hombres y el 2 % de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5000 euros. Se sabe también que el 30 % de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5000 euros.

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros?

Solución:
Sean H hombre, M mujer y S salario mensual mayor que 5000 euros.



a)
$$P(S) = P(S|H)P(H) + P(S|M)P(M) =$$
$$0,7 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,02 = 0,041$$

b)
$$P(M|S) = \frac{P(S|M)P(M)}{P(S)} = \frac{0,3 \cdot 0,02}{0,041} = 0,1463$$

c) $P(H \cap S) = P(S|H)P(H) = 0,05 \cdot 0,7 = 0,035 \Longrightarrow 3,5\,\%$

4.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.9.3 Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = 0,4$, $P(B|A) = 0,25$ y $P(B^c) = 0,75$

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

b) Calcula $P(A \cup B)$

c) Calcula $P(A|B^c)$

d) Calcula $P(A^c \cup B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$

(A^c y B^c representan, respectivamente, el suceso complementario de A y el suceso complementario de B).

Solución:

a) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0,25 \cdot 0,4 = 0,1$
$P(A)P(B) = 0,4(1 - 0,75) = 0,1$
Luego $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,25 - 0,1 = 0,55$

c) $P(A|B^c) = \dfrac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B^c)} = \dfrac{0,4 - 0,1}{0,75} = 0,4$

d) $P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$
$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,55 = 0,45$

Problema 4.9.4 Una empresa fabrica protectores de pantalla para teléfonos móviles. La empresa produce tres tipos de protectores: de 4 pulgadas, de 4,7 pulgadas y de 5 pulgadas. Consideramos la población de los habitantes de una ciudad que poseen un único teléfono móvil y cuya medida es una de estas tres. Un estudio de mercado indica que el 30 % de los teléfonos móviles tienen una pantalla de 4 pulgadas. Este mismo estudio también indica que el 30 % de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Este también es el caso del 25 % de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4,7 pulgadas y del 40 % de los que poseen un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

a) Si el 34 % de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4,7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas.

b) Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

c) Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4,7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

Solución:
Sean $T4$ teléfono de 4 pulgadas, $T47$ teléfono de 4,7 pulgadas, $T5$ teléfono de 5 pulgadas, P tiene protector de pantalla y $\overline{P}$ no tiene protector de pantalla.

a) $P(P|T4) = 0,3 = \dfrac{P(P \cap T4)}{P(T4)} \Longrightarrow P(P \cap T4) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$

$P(P|T47) = 0,25 = \dfrac{P(P \cap T47)}{P(T47)} \Longrightarrow P(P \cap T47) = 0,25 \cdot x = 0,25x$

$P(P|T5) = 0,4 = \dfrac{P(P \cap T5)}{P(T5)} \Longrightarrow P(P \cap T5) = 0,25 \cdot (1 - 0,3 - x) = 0,25(0,7 - x)$

	$T4$	$T47$	$T5$	Total
P	$0,09$	$0,25x$	$0,4(0,7-x)$	$0,34$
$\overline{P}$	$0,21$	$0,75x$	$0,6(0,7-x)$	$0,66$
Total	$0,3$	x	$0,7-x$	1

$0,09 + 0,25x + 0,4(0,7 - x) = 0,34 \Longrightarrow x = 0,2 \Longrightarrow P(T47) = 0,2 \Longrightarrow 20\,\%$
$P(T5) = 0,7 - 0,2 = 0,5 \Longrightarrow 50\,\%$.

b)

	$T4$	$T47$	$T5$	Total
P	$0,09$	$0,05$	$0,2$	$0,34$
$\overline{P}$	$0,21$	$0,15$	$0,3$	$0,66$
Total	$0,3$	$0,2$	$0,5$	1

$P(T5|P) = \dfrac{P(P \cap T5)}{P(P)} = \dfrac{0,2}{0,34} = 0,5882$

c) $P(T5|(P \cap \overline{T47}) = \dfrac{P(T5 \cap P \cap \overline{T47})}{P(P \cap \overline{T47})} = \dfrac{P(P(T5 \cap P))}{P(P) - P(P \cap T47)} = \dfrac{0,2}{0,34 - 0,05} = \dfrac{0,2}{0,29} =$
$0,6897$

4.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.9.5 En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio.

b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio.

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio?

Solución:
Sean b bola blanca, a bola amarilla, n bola negra y $\bar{b}$ no bola blanca.

- $P(bb) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{45}$
- $P(aa) = \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{15}$
- $P(b\bar{b}) = P(ba) + P(bn) + P(ab) + P(nb) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{3}{9} + \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{5}{9} + \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{16}{45}$

a) $P(bb \cup aa) = P(bb) + P(aa) = \dfrac{1}{45} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{4}{45}$

b) $P(b\bar{b}) = \dfrac{16}{45}$ Calculada anteriormente.

c) $P(b\bar{b}|bb \cup aa \cup b\bar{b}) = \dfrac{P(b\bar{b} \cap (bb \cup aa \cup b\bar{b})}{P(bb \cup aa \cup b\bar{b})} == \dfrac{P(b\bar{b})}{P(bb \cup aa \cup b\bar{b})} = \dfrac{16/45}{1/45 + 1/15 + 16/45} = \dfrac{4}{5}$

Problema 4.9.6 Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5 % de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99 % de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95 %. Se pide:

a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test.

b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test.

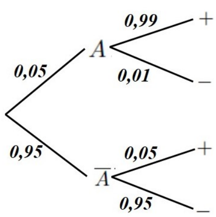
c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto.

d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1 % de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test en este caso?

Solución:
Sean A afectado, $\overline{A}$ no afectado, $+$ test positivo y $-$ test negativo.

a) Tenemos

$$P(A|+) = \frac{P(+|A)P(A)}{P(+)} =$$
$$\frac{P(+|A)P(A)}{P(+|A)P(A) + P(+|\overline{A})P(\overline{A})} =$$
$$\frac{0,99 \cdot 0,05}{0,99 \cdot 0,05 + 0,05 \cdot 0,95} = \frac{0,0495}{0,097} = 0,5103$$

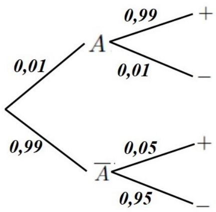


b) $P(\overline{A}|-) = \dfrac{P(-|\overline{A})P(\overline{A})}{P(-)} = \dfrac{0,95 \cdot 0,95}{1 - 0,097} = 0,9994$

c) $P(\text{correcto}) = P(+|A)P(A) + P(-|\overline{A})P(\overline{A}) = 0,99 \cdot 0,05 + 0,95 \cdot 0,95 = 0,952$

d) Tenemos

$$P(A|+) = \frac{P(+|A)P(A)}{P(+)} = \frac{P(+|A)P(A)}{P(+|A)P(A) + P(+|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{0,99 \cdot 0,01}{0,99 \cdot 0,01 + 0,05 \cdot 0,99} = 0,1667$$



4.10. Extremadura

4.10.1. Modelo de 2020

Problema 4.10.1 En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga, si se sabe que es un pino.

b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga.

Solución:
O : infectado por la oruga, $\overline{O}$: no infectado por la oruga, A : abeto, C : ciprés y Pi : pino.
$P(A) = \frac{50}{200} = 0,25$, $P(C) = \frac{30}{200} = 0,15$ y $P(Pi) = \frac{120}{200} = 0,6$
$P(O|A) = \frac{25}{50} = 0,5$, $P(O|C) = \frac{9}{30} = 0,3$ y $P(O|Pi) = \frac{48}{120} = 0,4$.

a) $P(O|Pi) = \frac{48}{120} = 0,4$

b) $P(O) = \frac{25+9+48}{200} = 0,41$

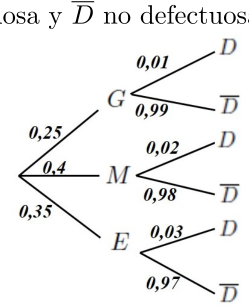
4.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.10.2 En una fábrica de vidrios el 25 % de las botellas que se producen son grandes, el 40 % medianas y el resto pequeñas. En un control de calidad, se detecta que el 1 % de las botellas grandes, el 2 % de las medianas y el 3 % de las pequeñas son defectuosas. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea a la vez mediana y defectuosa.

b) Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea defectuosa.

Solución:
Sean G botella grande, M botella mediana, E botella pequeña, D defectuosa y $\overline{D}$ no defectuosa.



a) $P(M \cap D) = P(D|M)P(M) = 0,02 \cdot 0,4 = 0,008$

b) $P(D) =$
$P(D|G)P(G) + P(D|M)P(M) + P(D|E)P(E) =$
$0,01 \cdot 0,25 + 0,02 \cdot 0,4 + 0,03 \cdot 0,35 = 0,021$

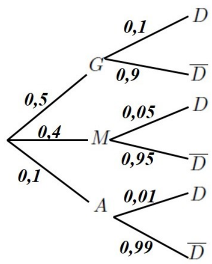
4.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.10.3 Una empresa constructora utiliza tres tipos de piedra en un bloque de edificios: granito (50 %), mármol (40 %) y artificial (10 %). El 10 % del granito, el 5 % del mármol y el 1 % de la artificial presenta grietas por lo que no puede ser instalado. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que, al encargar una piedra, ésta presente grietas.

b) Calcular la probabilidad de que una piedra, que sabemos que presenta grietas, sea de mármol.

Solución:
Sean G granito, M mármol, A artificial, D tiene grietas y $\overline{D}$ no tiene grietas.



a) $P(D) =$
$P(D|G)P(G) + P(D|M)P(M) + P(D|A)P(A) =$
$0,1 \cdot 0,5 + 0,05 \cdot 0,4 + 0,01 \cdot 0,1 = 0,071$

b) $P(M|D) = \dfrac{P(D|M)P(M)}{P(D)} = \dfrac{0,05 \cdot 0,4}{0,071} = 0,2817$

4.11. Galicia

4.11.1. Modelo de 2020

Problema 4.11.1 Una empresa de transporte decide renovar su flota de vehículos. Para ello encarga 240 vehículos al distribuidor A, 600 al distribuidor B y 360 al distribuidor C. Se sabe que el 10 % de los vehículos suministrados por el distribuidor A tienen algún defecto, siendo estas proporciones del 20 % y 15 % para los distribuidores B y C respectivamente. Para aceptar o rechazar el pedido la empresa revisa un vehículo elegido al azar del total de vehículos, rechazando todo el pedido si el vehículo tiene algún defecto.

a) Determine el porcentaje de pedidos rechazados.

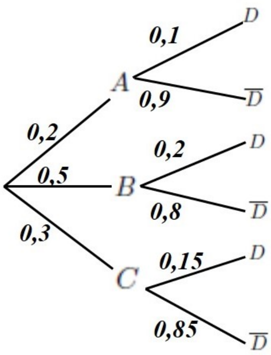
b) Si el vehículo revisado resulta ser NO defectuoso, calcule la probabilidad de que provenga del distribuidor A.

Solución:

Sea A proceden del distribuidor A, B proceden del distribuidor B, C proceden del distribuidor C y D algún defecto.
Tenemos: $P(A) = \dfrac{240}{1200} = \dfrac{1}{5} = 0,2$, $P(B) = \dfrac{600}{1200} = \dfrac{1}{2} = 0,5$, $P(C) = \dfrac{360}{1200} = \dfrac{3}{10} = 0,3$, $P(D|A) = 0,1$, $P(D|B) = 0,2$ y $P(D|C) = 0,15$.

a) $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) =$
$0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,5 + 0,15 \cdot 0,3 = 0,165 \Longrightarrow 16,5\,\%$

b) $P(A|\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D}|A)P(A)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,90 \cdot 0,2}{1 - 0,165} = 0,2156$



4.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.11.2 En una población el 45 % son hombres. El 27 % de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38,5 % es mujer y no lectora de esa prensa.

a) De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva?

b) ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva?

c) De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres?

d) ¿Son incompatibles los sucesos ser hombre y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

Solución:

Sea H hombre, M mujer, L lector de prensa deportiva y $\overline{L}$ no lector de prensa deportiva.
$P(H) = 0,45$, $P(H \cap L) = 0,27$ y $P(M \cap \overline{L}) = 0,385$

	L	$\overline{L}$	total
H	$0,27$		$0,45$
M		$0,385$	
total			1

$\Longrightarrow$

	L	$\overline{L}$	total
H	$0,27$	$0,18$	$0,45$
M	$0,165$	$0,385$	$0,55$
total	$0,435$	$0,565$	1

a) $P(L|M) = \dfrac{P(M \cap L)}{P(M)} = \dfrac{0,165}{0,55} = 0,3 \Longrightarrow 30\,\%$

b) $P(M \cup L) = P(M) + P(L) - P(M \cap L) = 0,55 + 0,435 - 0,165 = 0,82 \Longrightarrow 82\,\%$

c) $P(H|L) = \dfrac{P(H \cap L)}{P(L)} = \dfrac{0,27}{0,435} = 0,6207 \Longrightarrow 62,07\,\%$

d) $P(H \cap \overline{L}) = 0,18 \Longrightarrow$ no son incompatibles. La intersección de estos sucesos no es vacía.

4.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.11.3 El 40 % de las personas que visitan el Pórtico de la Gloria de la Catedral de Santiago son españolas. Se sabe además que 4 de cada 5 españoles están satisfechos con la visita, mientras que, entre los no españoles, no están satisfechos con la visita el 10 %.

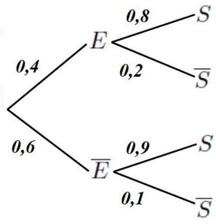
a) Calcule el porcentaje de personas satisfechas con la visita.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté satisfecha con la visita y no sea española?

c) ¿Son independientes los sucesos "no ser español" y "estar satisfecho con la visita"? Razone la respuesta.

Solución:

Sea E español, $\overline{E}$ no español, S satisfecho y $\overline{S}$ no satisfecha.



a) $P(S) = P(S|E)P(E) \cdot P(S|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,8 \cdot 0,4 + 0,9 \cdot 0,6 = 0,86 \Longrightarrow 86\,\%$

b) $P(S \cap \overline{E}) = P(S|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,9 + 0,6 = 0,54$

c) $P(S)P(\overline{E}) = 0,86 \cdot 0,6 = 0,516 \Longrightarrow P(S \cap \overline{E}) \neq P(S)P(\overline{E}) \Longrightarrow S$ y $\overline{E}$ no son independientes.

4.12. Islas Baleares

4.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.12.1 De dos sucesos de un mismo espacio muestral se sabe que

$$P(A \cap B) = 0,1 \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6 \quad P(A|B) = 0,5$$

$\overline{A}$ y $\overline{B}$ representan los sucesos complementarios de A y B respectivamente.

a) Calcular $P(B)$.

b) Calcular $P(A \cup B)$

c) ¿Son independientes los sucesos A y B? Justifique la respuesta.

Solución:

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \dfrac{0,1}{0,5} = 0,2$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \Longrightarrow P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$

c) Calculamos $P(A)$:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(B) = 0,4 + 0,1 - 0,2 = 0,3$
$P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$ y $P(A \cap B) = 0,1 \Longrightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

4.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.12.2 En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10000 en la periferia. se sabe que el 95 % de los residentes en el centro y que el 20 % de los que viven en la periferia opina que el ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados en el centro urbano. Se elige al azar un residente de la población.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados en el centro de la ciudad?

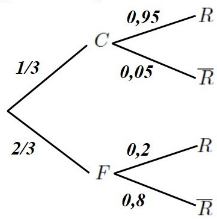
b) ¿Cuál es la Probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

c) Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?

Solución:

Sean C reside en el centro, F reside en la periferia, R deben de restringir y $\overline{R}$ no deben de restringir.

$P(F) = \dfrac{10000}{15000} = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow P(C) = \dfrac{1}{3}$



a) $P(R) = P(R|C)P(C) + P(R|F)P(F) =$
$0,95 \cdot \dfrac{1}{3} + 0,2 \cdot \dfrac{2}{3} = 0,45$

b) $P(C \cap R) = P(R|C)P(C) = 0,95 \cdot \dfrac{1}{3} = 0,317$

c) $P(C|R) = \dfrac{P(R|C)P(C)}{P(R)} = \dfrac{0,317}{0,45} = 0,7037$

4.13. Islas Canarias

4.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.13.1 Una tienda vende quesos de las marcas A (el 35 %), B (el 38 %) y C (el resto). Respectivamente, el 2 %, el 3 % y el 2,5 % tienen exceso de sal. debería restringir el acceso de vehículos privados en el centro urbano. Se elige al azar un residente de la población.

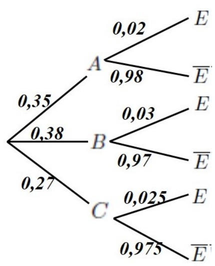
a) Determinar el árbol de probabilidades.

b) Calcular la probabilidad de que un queso elegido al azar no tenga exceso de sal.

c) Si un queso elegido al azar tiene exceso de sal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca C?

Solución:

Sean E exceso de sal y $\overline{E}$ sin exceso de sal.



a) El árbol de probabilidad a la derecha.

b) $P(\overline{E}) =$
$P(\overline{E}|A)P(A) + P(\overline{E}|B)P(B) + P(\overline{E}|C)P(C) =$
$0,98 \cdot 0,35 + 0,97 \cdot 0,38 + 0,975 \cdot 0,27 = 0,9749$

c) $P(C|E) = \dfrac{P(E|C)P(C)}{P(E)} = \dfrac{0,025 \cdot 0,27}{1 - 0,97485} = 0,2684$

4.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

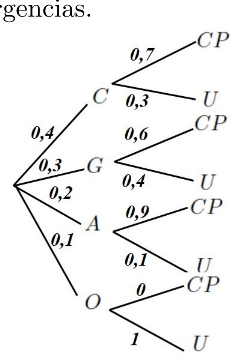
Problema 4.13.2 En una clínica veterinaria el 40 % de los animales que acuden a consulta son perros, el 30 % gatos, el 20 % aves y el resto otros animales. El 70 % de los perros acude con cita previa y el resto acude como urgencia; entre los gatos, el 60 % viene con cita previa y el resto como urgencia; solo un 10 % de las aves viene como urgencia; el resto de animales viene siempre como urgencia.

a) Construir el árbol de probabilidades para este problema.

b) De todos los animales que vienen con cita previa, ¿Qué porcentaje son perros?

c) ¿Qué porcentaje de las consultas realizadas en la clínica son urgencias?

Solución:
Sean C perros, G gatos, A aves, O otros animales, CP cita previa y U urgencias.



a) El árbol de probabilidad a la derecha.

b) $P(CP) = P(CP|C)P(C) + P(CP|G)P(G) + P(CP|A)P(A) + P(CP|O)P(O) =$
$0,7 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 = 0,64$
$P(C|CP) = \dfrac{P(CP|C)P(C)}{P(CP)} = \dfrac{0,7 \cdot 0,4}{0,64} = 0,4375 \Longrightarrow 43,75\,\%$

c) $P(U) = 1 - P(CP) = 1 - 0,64 = 0,36 \Longrightarrow 36\,\%$

4.14. La Rioja

4.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.14.1 Jorge y Laura juegan con dados. Los dados son equilibrados y, como es habitual, las caras están numeradas del 1 al 6. Jorge echa un dado, y a continuación Laura echa otro. Laura gana si la diferencia entre los dos resultados obtenidos es (en valor absoluto) mayor que 1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de Laura?

b) Si han jugado y ha ganado Laura, ¿cuál es la probabilidad de que Jorge haya sacado un 6?

Solución:

a) Sean G gana Laura y $\overline{G}$ no gana Laura.
Casos favorables a Jorge: $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$, $(6,6)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(5,6)$ y $(6,5)$. En total 16 casos favorables.
Casos posibles $6 \cdot 6 = 36$

$$P(\overline{G}) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \Longrightarrow P(G) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} = 0,5556$$

b) En las coordenadas anteriores sea la primera coordenada el número sacado por Jorge y la segunda el número sacado por Laura. Si ha ganado Laura hay 20 casos posibles y si Jorge ha sacado un seis tenemos $(6,1)$, $(6,2)$, $(6,3)$ y $(6,4)$, es decir, 4 casos favorables:

$$P(\text{saca } 6|G) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Problema 4.14.2 Una bodega de Rioja elabora vinos blancos, de crianza y reservas de gran calidad. Su producción consiste en un 35 % de vino blanco, un 40 % de vino de crianza y un 25 % de reservas. Aunque tiene mucho cuidado en la selección de los corchos, la probabilidad de que alguna botella se estropee por razón de un corcho inadecuado es del 5 % para el vino blanco, 4 % para el crianza y 2 % para el reserva.

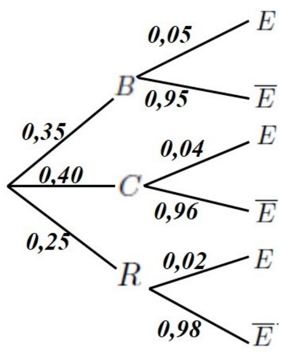
a) Se elige una botella de la bodega al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el vino esté estropeado?

b) Hemos elegido una botella de vino tinto al azar (crianza o reserva), ¿cuál es la probabilidad de que el vino NO esté estropeado?

Solución:
Sean B botellas de vino blanco, C botellas de vino crianza, R botellas de vino reserva, E se estropea y $\overline{E}$ no se estropea.

a) $P(E) = P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) + P(E|R)P(R) = 0,05 \cdot 0,35 + 0,04 \cdot 0,4 + 0,02 \cdot 0,25 = 0,0385$

b) $P(\overline{E}|C \cup R) = \dfrac{P(\overline{E} \cap (C \cup R))}{P(C \cup R)} = \dfrac{P((\overline{E} \cap C) \cup (\overline{E} \cap R))}{P(C \cup R)} = \dfrac{P((\overline{E} \cap C) \cup (\overline{E} \cap R))}{P(C \cup R)} = \dfrac{P(\overline{E} \cap C) + P(\overline{E} \cap R)}{P(C) + P(R)} = \dfrac{P(\overline{E}|C)P(C) + P(\overline{E}|R)P(R)}{P(C) + P(R)} = \dfrac{0,96 \cdot 0,4 + 0,98 \cdot 0,25}{0,4 + 0,25} = 0,9677$



4.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

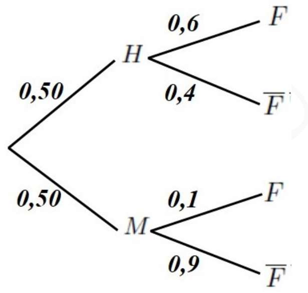
Problema 4.14.3 Hace un siglo, en cierto país el porcentaje de hombres y mujeres entre la población adulta era en ambos casos del 50 %. El porcentaje de fumadores entre los hombres era del 60 %, mientras que únicamente fumaba la décima parte de las mujeres.

a) ¿Cuál era el porcentaje de personas fumadoras entre la población adulta de ese país?

b) Entre las personas fumadoras, ¿cuál era el porcentaje de mujeres?

c) El abuelo Joaquín decía que una persona era "como Dios manda" si o bien era hombre y fumaba o bien era mujer y no fumaba. ¿Qué porcentaje de personas adultas era como Dios manda, según el abuelo Joaquín?

Solución:
Sean H hombre, M mujer, F fumador y $\overline{F}$ no fumador.



a) $P(F) = P(F|H)P(H) + P(F|M)P(M) =$
$0,6 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,35 \Longrightarrow 35\,\%$

b) $P(M|F) = \dfrac{P(F|M)P(M)}{P(F)} =$
$\dfrac{0,1 \cdot 0,5}{0,35} = 0,1429 \Longrightarrow 14,29\,\%$

c) $P((H \cap F) \cup (M \cap \overline{F})) =$
$P(F|H)P(H) + P(\overline{F}|M)P(M) =$
$0,6 \cdot 0,5 + 0,9 \cdot 0,5 = 0,75 \Longrightarrow 75\,\%$

4.15. Madrid

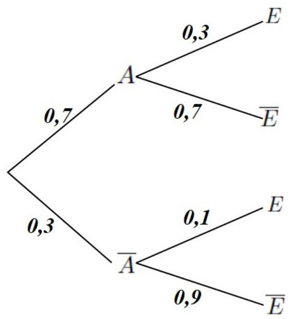
4.15.1. Modelo de 2020

Problema 4.15.1 En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad, solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.

b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

Solución:
A : proximidad, $\overline{A}$: no proximidad, E : ecológica y $\overline{E}$: no ecológica.



a) $P(\overline{E}) = P(\overline{E}|A)P(A) + P(\overline{E}|\overline{A})P(\overline{A}) = 0,7 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,3 = 0,76$

b) $P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = P(A) + (1 - P(\overline{E})) - P(E|A)P(A) = 0,7 + 1 - 0,76 - 0,3 \cdot 0,7 = 0,73$

Problema 4.15.2 Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(C) = 0,4$, $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,8$. Calcule:

a) $P(C|D)$.

b) $P(\overline{C \cap D}|C)$.

Solución:

a) $P(C|D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(C) + P(D) - P(C \cup D)}{P(D)} = \dfrac{0,4 + 0,6 - 0,8}{0,6} = \dfrac{1}{3} = 0,333$

b) $P(\overline{C \cap D}|C) = \dfrac{P(\overline{C \cap D} \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(C) - P(C \cap D)}{P(C)} = \dfrac{0,4 - 0,2}{0,4} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

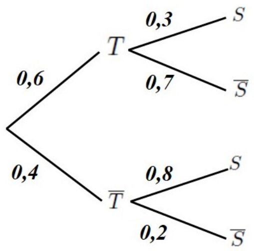
4.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.15.3 El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.

b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

Solución:
T : teletrabaja, $\overline{T}$: no teletrabaja, S : trastorno de sueño y $\overline{S}$: sin trastorno de sueño.



a) $P(T\cap\overline{S}) = 0,6\cdot 0,7 = 0,42$

b) $P(\overline{T}|\overline{S}) = \dfrac{P(\overline{S}|\overline{T})P(\overline{T})}{P(\overline{S})} = \dfrac{0,2\cdot 0,4}{0,6\cdot 0,7+0,4\cdot 0,2} = \dfrac{4}{25} = 0,16$

Problema 4.15.4 Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,5 \quad P(\overline{B}|A) = 0,4 \quad P(A\cup B) = 0,9$$

a) Calcule $P(B|\overline{A})$.

b) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

Solución:

a) $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)} = 0,4 \Longrightarrow P(\overline{B}\cap A) = 0,5\cdot 0,4 = 0,2$
$P(\overline{B}\cap A) = P(A) - P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B) = 0,5-0,2 = 0,3$
$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Longrightarrow 0,9 = 0,5+P(B)-0,3 \Longrightarrow P(B) = 0,7$
$P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)} = \dfrac{0,7-0,3}{1-0,5} = 0,8$

b) $P(A)\cdot P(B) = 0,5\cdot 0,7 = 0,35 \neq P(A\cap B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

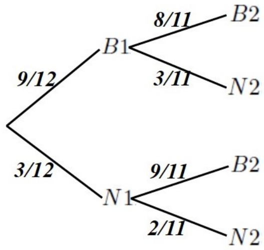
4.15.3. Convocatoria junio de 2020 (coincidente)

Problema 4.15.5 Una urna contiene 9 bolas blancas y 3 negras. Se seleccionan al azar consecutivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Calcule la probabilidad de que

a) La segunda bola seleccionada sea negra.

b) Ambas bolas seleccionadas sean negras, dado que la segunda bola seleccionada es negra.

Solución:
Sean $B1$: la primera es blanca, $N1$: la primera es negra, $B2$: la segunda es blanca y $N2$: la segunda es negra.



a) $P(N2) = P(N2|B1)P(B1) + P(N2|N1)P(N1) =$
$\dfrac{3}{11}\cdot\dfrac{9}{12}+\dfrac{2}{11}\cdot\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}=0,25$

b) $P(N1|N2) = \dfrac{P(N2|N1)P(N1)}{P(N2)} = \dfrac{\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{12}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{11} = 0,182$

Problema 4.15.6 Sean A y B dos sucesos con $P(A) = \dfrac{2}{5}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$, $P(A|\overline{B}) = \dfrac{4}{5}$.

a) Calcule $P(A \cap \overline{B})$.

b) ¿Son A y B incompatibles? Justifique la respuesta.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} \Longrightarrow P(A\cap\overline{B}) = P(A|\overline{B})P(\overline{B}) = \dfrac{4}{5}(\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{5}$

b) $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B) = P(A) - P(A\cap\overline{B}) = \dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{5} = 0$, luego los sucesos son incompatibles.

4.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.15.7 Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,5$, $P(\overline{B}) = 0,8$, $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = 0,9$.

a) Estudie si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcule $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Solución:

a) $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 0,9 \Longrightarrow P(A\cap B) = 0,1$
$P(A)\cdot P(B) = 0,5\cdot 0,2 = 0,1 \Longrightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

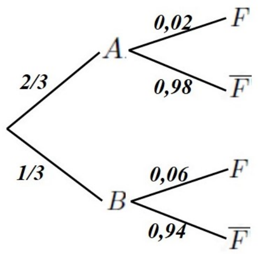
b) $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B)) = 1-(0,5+0,2-0,1) = 0,4$
$P(\overline{A}|\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,4}{0,8} = 0,5$

Problema 4.15.8 Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0,02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0,06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) No sufra fracaso escolar.

b) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

Solución:
Sean A: alumno matriculado residente en el municipio A, B: alumno matriculado residente en el municipio B, F: alumno con fracaso escolar y $\overline{F}$: alumno sin fracaso escolar.



a) $P(\overline{F}) = P(\overline{F}|A)P(A) + P(\overline{F}|B)P(B) = 0,98 \cdot \dfrac{2}{3} + 0,94 \cdot \dfrac{1}{3} = 0,9667$

b) $P(A|F) = \dfrac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \dfrac{0,02 \cdot \frac{2}{3}}{1 - 0,9667} = 0,4004$

4.16. Murcia

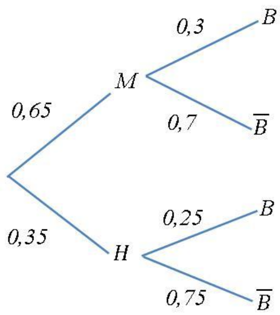
4.16.1. Modelo de 2020

Problema 4.16.1 En el coro universitario el 65 % de sus componentes son mujeres. El 30 % de las mujeres y el 25 % de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:

a) ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe?

b) Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:
Sean H hombre, M mujer y B bilingue.



a)

$$P(B) = P(B|M)P(M) + P(B|H)P(H) =$$

$$0,3 \cdot 0,65 + 0,25 \cdot 0,35 = 0,2825$$

b)

$$P(M|B) = \frac{P(B|M)P(M)}{P(B)} = \frac{0,3 \cdot 0,65}{0,2825} = 0,69$$

Problema 4.16.2 Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$ y $P(A|B) = 0,5$. Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

Solución:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,2 - 0,1 = 0,4$$

4.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.16.3 En un viaje de estudios el 52 % de los jóvenes son hombres. De ellos el 35 % son rubios así como el 40 % de las mujeres. Si elegimos a un estudiante al azar:

a) Calcule la probabilidad de que sea rubio.

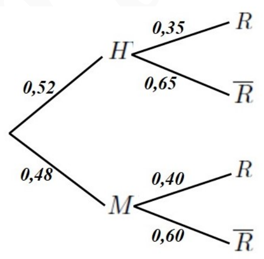
b) Sabiendo que NO es rubio, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:
Sean H hombre, M mujer, R rubio y $\overline{R}$ no rubio.

a)

$$P(R) = P(R|M)P(M) + P(R|H)P(H) =$$

$$0,4 \cdot 0,48 + 0,35 \cdot 0,52 = 0,374$$



b)

$$P(M|\overline{R}) = \frac{P(\overline{R}|M)P(M)}{P(\overline{R})} = \frac{0,6 \cdot 0,48}{1 - 0,374} = 0,46$$

Problema 4.16.4 Alex y Fran son dos amigos que practican asiduamente en las pistas el baloncesto. La probabilidad de que Alex enceste un tiro libre es del 65 % y de que lo haga Fran es del 48 %. Dado que los dos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos al lanzar un tiro libre:

a) Ambos encesten un tiro libre.

b) Solo Alex encesta la pelota.

c) Al menos uno de ellos encesta la pelota.

Solución:
Sean los sucesos: A encesta Alex, $\overline{A}$ no encesta Alex, F encesta Fran y $\overline{F}$ no encesta Fran.

a) Como A y F son independientes $P(A \cap F) = P(A)P(F) = 0,65 \cdot 0,48 = 0,312$

b) $P(A \cap \overline{F}) = P(A) - P(A \cap F) = 0,65 - 0,312 = 0,338$

c) $P(\text{Al menos uno de ellos encesta}) = 1 - P(\text{ninguno de ellos encesta}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{F}) = 1 - 0,35 \cdot 0,52 = 0,818$

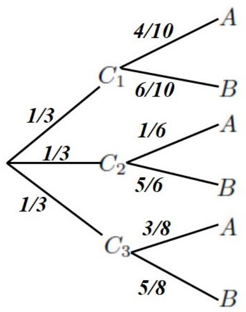
4.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.16.5 Se dispone de tres cajas con bolas de distintos colores. La primera contiene 10 bolas: 4 azules y 6 blancas. En la segunda caja hay una única bola azul y 5 blancas. En la tercera caja tenemos 3 bolas azules y 5 blancas. Cogemos una bola al azar de cualquiera de las cajas:

a) Calcule la probabilidad de que la bola cogida sea azul.

b) Si la bola elegida es blanca, calcule la probabilidad de que estuviera en la primera caja.

Solución:
Sean C_1 caja primera, C_2 caja segunda, C_3 caja tercera, A bola azul y B bola blanca.



a) $P(A) = P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3) = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{113}{360} = 0,3139$

b) $P(C_1|B) = \dfrac{P(B|C_1)P(C_1)}{P(B)} = \dfrac{\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{113}{360}} = \dfrac{72}{247} = 0,2915$

Problema 4.16.6 Dados dos sucesos de un experimento aleatorio A y B tales que $P(\overline{A}) = 0,45$, $P(B) = 0,35$ y $P(A \cup B) = 0,7$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$.

b) $P(A \cap B)$.

c) $P(B|A)$.

d) $P(\overline{A}|\overline{B})$

Solución:

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Longrightarrow P(A) = 1 - 0,45 = 0,55$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0,7 = 0,55 + 0,35 - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,2$

c) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,2}{0,55} = 0,3636$

d) $P(\overline{A}|\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \dfrac{1 - 0,7}{1 - 0,35} = \dfrac{0,3}{0,65} = 0,4615$

4.17. Navarra

4.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.17.1 En una empresa de reservas de viajes y alojamientos por internet, el 75 % de las visitas buscan alojamiento, el 55 % de las visitas buscan vuelo y el 40 % de las visitas buscan alojamiento y vuelo. Se selecciona una visita al azar. Calcule:

a) La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento.

b) La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo.

c) La probabilidad de que no busque vuelo ni alojamiento.

Solución:
Sean V vuelo y A alojamiento.
$P(A) = 0,75$, $P(V) = 0,55$ y $P(A \cap V) = 0,4$

a) $P(A\cup V)=P(A)+P(V)-P(A\cap V)=0,75+0,55-0,4=0,9$

b) $P(A|\overline{V})=\dfrac{P(A\cap\overline{V})}{P(\overline{V})}=\dfrac{P(A)-P(A\cap V)}{1-P(V)}=\dfrac{0,75-0,4}{1-0,55}=0,7778$

c) $P(\overline{A}\cap\overline{V})=P(\overline{A\cup V})=1-P(A\cup V)=1-0,9=0,1$

4.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.17.2 En una pequeña localidad hay 25 candidatos para realizar una actividad de voluntariado, de los que el 60 % son estudiantes, el 32 % son jubilados y el resto trabajadores. Se seleccionan al azar tres candidatos distintos.
Calcule:

a) La probabilidad de que todos ellos sean jubilados.

b) La probabilidad de que sean dos estudiantes y un trabajador.

c) La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador.

Solución:
Sean E estudiante, J jubilado y T trabajador.
El número de estudiantes es $25\cdot 0,6=15$
El número de jubilados es $25\cdot 0,32=8$
El número de trabajadores es $25-23=2$
Luego $P(E)=\dfrac{15}{25}$, $P(J)=\dfrac{8}{25}$ y $P(T)=\dfrac{2}{25}$

a) $P(JJJ)=\dfrac{8}{25}\cdot\dfrac{7}{24}\cdot\dfrac{6}{23}=\dfrac{14}{575}=0,02435$

b) $P(\text{dos estudiantes y un trabajador})=P(EET)+P(ETE)+P(TEE)=$
$\dfrac{15}{25}\cdot\dfrac{14}{24}\cdot\dfrac{2}{23}+\dfrac{15}{25}\cdot\dfrac{2}{24}\cdot\dfrac{14}{23}+\dfrac{2}{25}\cdot\dfrac{15}{24}\cdot\dfrac{14}{23}=3\cdot\dfrac{15}{25}\cdot\dfrac{14}{24}\cdot\dfrac{2}{23}=\dfrac{21}{230}=0,0913$

c) $P(\text{alguno es trabajador})=1-P(\text{ninguno es trabajador})=1-\dfrac{23}{25}\cdot\dfrac{22}{24}\cdot\dfrac{21}{23}=\dfrac{23}{100}=0,23$

4.18. País Vasco

4.18.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.18.1 Dos cajas, A y B, contienen bolas de colores con la siguiente composición:

A: 5 blancas, 3 negras y 2 rojas $\quad$ B: 4 blancas y 6 negras

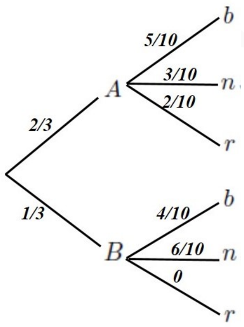
Por otro lado, tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra B. Tiramos el dado, y sacamos una bola al azar de la caja que indica el dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

c) La bola extraída ha resultado ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

Solución:
Sean A caja A, B caja B, b sale blanca, n sale negra y r sale roja.
$P(A) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ y $P(B) = \dfrac{1}{3}$



a) $P(b) = P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) = \dfrac{5}{10}\cdot\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{15} = 0,4667$

b) $P(r) = P(r|A)P(A) + P(r|B)P(B) = \dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{2}{3} + 0\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{15} = 0,1333$

c) $P(B|b) = \dfrac{P(b|B)P(B)}{P(b)} = \dfrac{\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{7}{15}} = \dfrac{2}{7} = 0,2857$

Problema 4.18.2 Sean A, B, C, D, E, y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) Sabemos que $P(A) = 0,5$; $P(A\cup B) = 0,7$ y $P(A\cap B) = 0,4$. Halla la probabilidad de que ocurra B.

b) Sabemos que $P(C) = 0,4$; $P(D) = 0,3$ y $P(C\cup D) = 0,5$. Halla la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.

c) Sabemos que $P(E) = 0,6$; $P(F) = 0,8$, y que los sucesos E y F son independientes. Calcula la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

Solución:

a) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Longrightarrow 0,7 = 0,5 + P(B) - 0,4 \Longrightarrow P(B) = 0,6$

b) $P(C\cup D) = P(C) + P(D) - P(C\cap D) \Longrightarrow 0,5 = 0,4 + 0,3 - P(C\cap D) \Longrightarrow P(C\cap D) = 0,2$
$P(C|\overline{D}) = \dfrac{P(C\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{P(C) - P(C\cap D)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,4-0,2}{1-0,3} = 0,2857$

c) E y F independientes $\Longrightarrow P(E\cap F) = P(E)P(F) = 0,6\cdot 0,8 = 0,48$
$P(\overline{E}\cap\overline{F}) = P(\overline{E\cup F}) = 1-P(E\cup F) = 1-(P(E)+P(F)-P(E\cap F)) = 1-(0,6+0,8-0,48) = 0,08$

4.18.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.18.3 En una biblioteca hay 60 novelas de acción y 20 de terror. Janire elige una novela al azar y se la lleva. A continuación, Eneko elegirá otra novela al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Janire y Eneko elijan novelas de acción?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción?

c) Si la novela que ha elegido Eneko es de acción, ¿cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror?

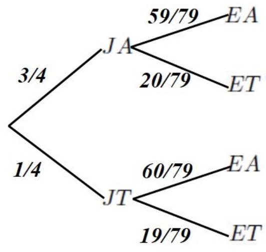
Solución:
Sean JA Janire elije una novela de acción, JT Janire elije una novela de terror, EA Eneko elije una novela de acción y ET Eneko elije una novela de terror.

$P(JA) = \dfrac{60}{80} = \dfrac{3}{4}$ y $P(JT) = \dfrac{1}{4}$

a) $P(JA \cap EA) = P(EA|JA)P(JA) = \dfrac{59}{79} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{177}{316} = 0,5601$

b) $P(EA) = P(EA|JA)P(JA) + P(EA|JT)P(JT) =$
$\dfrac{59}{79} \cdot \dfrac{3}{4} + \dfrac{60}{79} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$

c) $P(JT|EA) = \dfrac{P(EA|JT)P(JT)}{P(EA)} = \dfrac{\frac{60}{79} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{20}{79} = 0,2532$



Problema 4.18.4 Lucía tiene dos dioptrías en un ojo y una dioptría en el otro, y Nerea dos dioptrías en cada ojo. Cada chica tiene una bolsa con 10 lentillas de una dioptría y otras 10 lentillas de dos dioptrías. Cada una sacará al azar dos lentillas de su bolsa.

a) ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada chica de elegir las lentillas que necesita?

b) En la bolsa de Lucía hay dos lentillas defectuosas. Con el fin de separarlas del resto, sacará una tras otra hasta que las encuentre. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento?

Solución:
Sean D_1 saca una lentilla de 1 dioptría y D_2 saca una lentilla de 2 dioptrías.

a) $P(\text{Lucía saca su graduación}) = P(D_1D_2) + P(D_2D_1) = \dfrac{10}{20} \cdot \dfrac{10}{19} + \dfrac{10}{20} \cdot \dfrac{10}{19} = 2 \cdot \dfrac{10}{20} \cdot \dfrac{10}{19} = \dfrac{10}{19} = 0,5263$

$P(\text{Nerea saca su graduación}) = P(D_2D_2) = \dfrac{10}{20} \cdot \dfrac{9}{19} = \dfrac{9}{38} = 0,2368$

b) Hay 20 lentillas con dos defectuosas, sea D sacar defectuosa y $\overline{D}$ no sacar defectuosa.
$P(\text{saca 2 defectuosas en tercer intento}) = P(D\overline{D}D) + P(\overline{D}DD) = \dfrac{2}{20} \cdot \dfrac{18}{19} \cdot \dfrac{1}{18} + \dfrac{18}{20} \cdot \dfrac{2}{19} \cdot \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{95} = 0,0105$

Capítulo 5

Estadística

5.1. Resúmenes teóricos

Gráficos:

- Variable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i,\ \ p(x_i) = p_i,\ \ \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i,\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

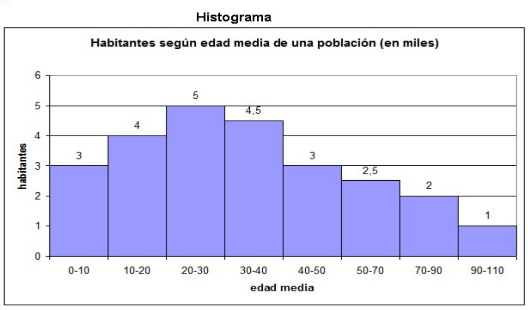
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i,\ \ f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i},\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial $\mathrm{B}(n,p)$:

$$P(X=a)=\begin{pmatrix} n \\ a \end{pmatrix} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q=1-p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si $\mathrm{B}(7,0,4)\Longrightarrow n=7$, $p=0,4$ y $q=0,6$:

$$P(X=2)=\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} 0,4^2 0,6^5=0,261$$

$$P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3),\ \text{ó}$$

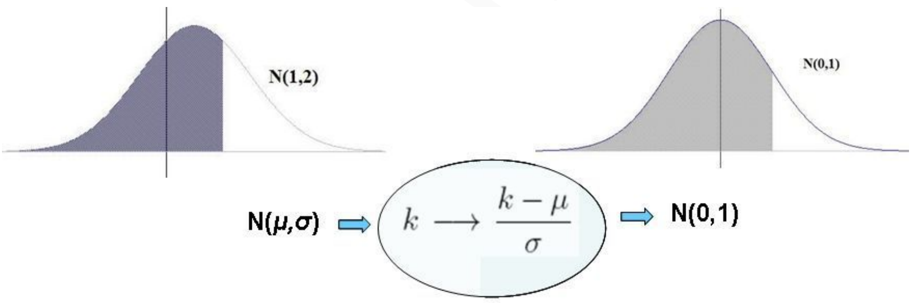
$$P(X\le 3)=1-P(X>3)=1-(P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7))$$

Su Media= $\mu=np$, su Varianza= $\sigma^2=npq$ y su Desviación Típica= $\sqrt{\text{Varianza}}$.
Distribución Normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$:

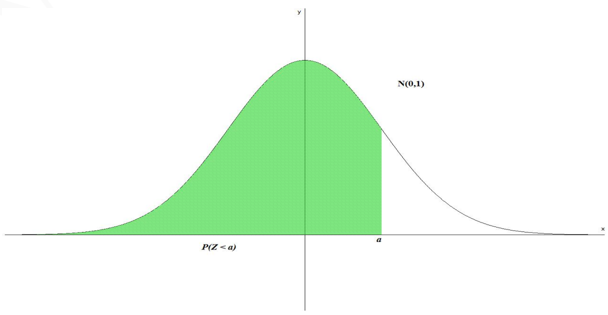
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Tipificación Paso de una normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ a otra $\mathrm{N}(0,1)$: $k\longrightarrow\dfrac{k-\mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a<X<b)$ y X es de una normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ entoces Z seguirá una normal $\mathrm{N}(0,1)$

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$



Cuando una distribución binmial $B(n,p)$ cumple $np>3$ y $nq>3$, se aproxima a una normal $N(np,\sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$
$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0,5 \le X \le a + 0,5)$
$P(X \le a) = P(X \le a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \le a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \ge a + 0,5)$
$P(X \ge a) = P(X \ge a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow$ $\alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu,\sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Intervalo de Confianza: $(\overline{X} - E, \overline{X} + E) = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.

Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$

Error: $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$
Intervalo de Confianza: $(\hat{p} - E, \hat{p} + E) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

5.2. Andalucía

5.2.1. Modelo de 2020

Problema 5.2.1 El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley Normal de media μ días y desviación típica 3 días.

a) Determine un intervalo de confianza para estimar μ, a un nivel del 97 %, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8,1 días.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error inferior a 1 día y un nivel de confianza del 92 %.

Solución:

a) $\overline{X} = 8,1$, $n = 100$ y $\sigma = 3$.
$NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\frac{3}{\sqrt{100}} = 0,651$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (8,1 - 0,651; 8,1 + 0,651) = (7,449; 8,751)$$

b) $E = 1$
$NC = 92\,\% = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,96 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,75$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,75\frac{3}{\sqrt{n}} = 1 \Longrightarrow n \ge (1,75 \cdot 3)^2 = 27,5625 \Longrightarrow$$

$$n = 28$$

Problema 5.2.2 Sea la población $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

a) Construya todas las muestras posibles de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple.

b) Calcule la varianza de las medias muestrales.

Solución:

a) Las muestras las pongo en una tabla

	1	2	3	4
1	$\{1,\ 1\}$	$\{1,\ 2\}$	$\{1,\ 3\}$	$\{1,\ 4\}$
2	$\{2,\ 1\}$	$\{2,\ 2\}$	$\{2,\ 3\}$	$\{2,\ 4\}$
3	$\{3,\ 1\}$	$\{3,\ 2\}$	$\{3,\ 3\}$	$\{3,\ 4\}$
4	$\{4,\ 1\}$	$\{4,\ 2\}$	$\{4,\ 3\}$	$\{4,\ 4\}$

b) Las medias muestrales son:

1	$1,5$	2	$2,5$
$1,5$	2	$2,5$	3
2	$2,5$	3	$3,5$
$2,5$	3	$3,5$	4

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = \dfrac{\sum \overline{x_i}}{n} = \dfrac{40}{16} = 2,5 \\ \sigma^2 = \dfrac{\sum(\overline{x_i} - \mu)^2}{n} = \dfrac{10}{16} = 0,625 \end{array} \right.$$

De otra manera:
Por el teorema del limite central la media de las medias muestrales coincide con μ, media de la población, su varianza es $\dfrac{\sigma^2}{n}$, siendo σ la desviación típica de la población y n el tamaño de las muestras, en nuestro caso 2.

$$\mu = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-2,5)^2 + (2-2,5)^2 + (3-2,5)^2 + (4-2,5)^2}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Luego la varianza de la población es $\dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{1,25}{2} = 0,625$

5.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.2.3 Se pide:

a) En una Escuela Politécnica hay matriculados en el último curso 60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica, 40 de Ingeniería Informáticas, 30 de Ingeniería Civil, 50 de Ingeniería Mecánica y 20 de Ingeniería Aeronáutica. Se quiere hacer una encuesta al 20 % de estos estudiantes, de manera proporcional al número de matriculados en cada titulación.

1. Qué tipo de muestreo se debe emplear?
2. ¿Cuántos alumnos debe haber en la muestra y cuántos de cada titulación?

b) Dada la población $\{a,\ 10,\ 12,\ 11,\ 18\}$, ¿cuánto debe valer a, sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es 13,2?

Solución:

a) 1. Hay que utilizar un muestreo aleatorio estratificado. El 20 % se tiene que obtener mediante un reparto proporcional.

2. Hay un total de $60 + 40 + 30 + 50 + 20 = 200$ el 20 % son $200 \cdot 0,2 = 40$ estudiantes en total.
El nº de estudiantes de ingeniería eléctrica será: $\dfrac{60}{170} \cdot 34 = 12$
El nº de estudiantes de ingeniería informática será: $\dfrac{40}{170} \cdot 34 = 8$
El nº de estudiantes de ingeniería civil será: $\dfrac{30}{170} \cdot 34 = 6$
El nº de estudiantes de ingeniería mecánica será: $\dfrac{50}{170} \cdot 34 = 10$
El nº de estudiantes de ingeniería Aeronáutica será: $\dfrac{20}{170} \cdot 34 = 4$

b) La media de la muestra tiene que ser igual a la media de la medias de tamaño 3:

$$\frac{a+10+12+11+18}{5} = 13,2 \Longrightarrow a = 15$$

Problema 5.2.4 Se desea estimar la proporción de individuos mayores de edad de una localidad que están en contra de la construcción de una central nuclear en su término municipal. Para ello, se pregunta a 100 individuos mayores de edad de esa localidad, elegidos de forma aleatoria, resultando que 45 de ellos rechazan la construcción de la central.

a) Calcule un intervalo de confianza al 92 % para estimar la proporción real de individuos de esa localidad que están en contra de la construcción de la central.

b) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar, para que al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %.

Solución:

$$n = 100 \;\; \hat{p} = \frac{45}{100} = 0,45, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,55$$

a) $NC = 92\,\% = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,96 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,755$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,755\sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{100}} = 0,0873$$

$$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,45-0,0873; 0,45+0,0873) = (0,3627; 0,5373) = (36,27\,\%, 53,73\,\%)$$

b) $E = 0,05$

$$0,05 = 1,755\sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,755}{0,05}\right)^2 (0,45 \cdot 0,55) = 304,92 \Longrightarrow$$

$$n = 305$$

5.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.2.5 Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

a) Calcule un intervalo de confianza al 99,5 %, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.

b) Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de 1a UE, con un error inferior al 5 %.

Solución:

$$n = 250 \ \ \hat{p} = \frac{115}{250} = 0,46, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,54$$

a) $NC = 99,5\,\% = 0,995 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,005 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,81$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,81\sqrt{\frac{0,46 \cdot 0,54}{250}} = 0,0886$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,46 - 0,0886; 0,46 + 0,0886) = (0,3714; 0,5486) = (37,14\,\%, 54,86\,\%)$$

b) $E = 0,05$

$$0,05 = 2,81\sqrt{\frac{0,46 \cdot 0,54}{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{2,81}{0,05}\right)^2 (0,46 \cdot 0,54) = 784,5565 \Longrightarrow$$

$$n = 785$$

Problema 5.2.6 Sea X una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

a) ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras de tamaño 12 de la variable aleatoria X?

b) Para estimar la media poblacional de la variable X, se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados:

$$11,8 \quad 10 \quad 9,8 \quad 12 \quad 9,7 \quad 10,8 \quad 9,6 \quad 11,3 \quad 10,4 \quad 12,2 \quad 9,1 \quad 10,5$$

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97 %, para estimar la media poblacional.

c) Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1,2.

Solución:

a) $X \equiv N(\mu, 4)$, $n = 12 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{4}{\sqrt{12}}\right) = N\left(\mu, \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$

b) $n = 12$, $\overline{X} = 10,6$ y $\sigma = 4$.
$NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\frac{4}{\sqrt{12}} = 2,506$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (10,6 - 2,506; 10,6 + 2,506) = (8,094; 13,106)$$

c) $E = 1,2$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\frac{4}{\sqrt{n}} = 1,2 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,17\cdot 4}{1,2}\right)^2 = 52,321 \Longrightarrow$$

$$n = 53$$

5.3. Aragón

5.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.3.1 Se quiere estimar el tiempo diario de conexión a redes sociales de los universitarios. Se sabe que dicho tiempo tiene una distribución normal con desviación típica de 33 minutos (0,55 horas). Se desea construir un intervalo de confianza para la media diaria de conexión a redes sociales. Se pide:

a) ¿A cuántos estudiantes debemos entrevistar para garantizar que el intervalo de confianza del 97 % tenga una amplitud menor o igual a 0,16 horas?

b) Se ha encuestado a 100 universitarios y se ha obtenido una media de 4 horas al día. Calcula el intervalo de confianza al 97 % para la media poblacional.

c) Un informe de cierto Ministerio afirma que la media del tiempo que los universitarios pasan conectados a las redes sociales es de 5 horas al día. Razona, a la vista del apartado b) si hay motivos para dudar de su afirmación.

Solución:

$$N(\mu; 0,55)$$

a) $NC = 97\,\% = 0,97 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = \frac{0,16}{2} = 0,08 = 2,17\frac{0,55}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,17\cdot 0,55}{0,08}\right)^2 = 222,5691015 \Longrightarrow$$

$$n = 223$$

b) $n = 100$, $\overline{X} = 4$ y $z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\frac{0,55}{\sqrt{100}} = 0,11935$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (4 - 0,11935; 4 + 0,11935) = (3,88065; 4,11935)$$

c) La media $5 \notin (3,88065; 4,11935) \Longrightarrow$ se rechaza esta afirmación con una confianza del 97 %.

5.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.3.2 Se desea estimar la proporción de estudiantes que viven en un colegio mayor a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de estudiantes.

a) Por estudios previos se sabe que el porcentaje de estudiantes alojados en un colegio mayor es del 20 %. ¿De qué tamaño debemos elegir la muestra para que el error de la estimación de la proporción sea menor de 0,1 con un nivel de confianza del 98 %?

b) Se toma una muestra de 50 estudiantes y se observa que 12 se alojan en un colegio mayor, calcula el intervalo de confianza al 98 % para la proporción de estudiantes alojados en un colegio mayor.

Solución:

a) $\hat{p} = 0,2 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,8$
$NC = 98\,\% = 0,98 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,02 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,01$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,335$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,1 = 2,335\sqrt{\frac{0,2\cdot 0,8}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,335}{0,1}\right)^2 (0,2\cdot 0,8) = 87,2356 \Longrightarrow$$

$$n = 88$$

b) $n = 50$, $\hat{p} = \dfrac{12}{50} = 0,24 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,76$ y $z_{\alpha/2} = 2,335$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,335\sqrt{\frac{0,24\cdot 0,76}{50}} = 0,1410$$

$$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,24-0,1410; 0,24+0,1410) = (0,0990; 0,3810) = (9,90\,\%; 38,10\,\%)$$

5.4. Asturias

5.4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.4.1 Antes de un referéndum, se desea realizar un estudio para estimar los resultados del mismo.

a) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que votarían **SÍ** a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,04 y un nivel de confianza del 99 %?

b) En una muestra aleatoria de 500 votantes se obtuvo que 100 de ellos tienen la intención de votar **SÍ**. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que votarían **SÍ** en el referéndum.

Solución:

a) $NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$$

$$\hat{p} = 0,5, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,5$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 (\hat{p}\hat{q}) = \left(\frac{2,58}{0,04}\right)^2 (0,5 \cdot 0,5) = 1040,0625 \Longrightarrow n = 1041$$

b) $n = 500$ $\hat{p} = \dfrac{100}{500} = 0,2, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,8$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,58\sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{500}} = 0,0462$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,2 - 0,0462; 0,2 + 0,0462) = (0,1538; 0,2462) = (15,38\,\%, 24,62\,\%)$$

Problema 5.4.2 El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0,4 años.

a) Si se toma una muestra aleatoria de 600 usuarios y se obtiene que el tiempo medio de renovación de sus teléfonos fue de 1,8 años, construye a partir de dicha muestra un intervalo de confianza para el tiempo medio de renovación, al 90 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio de renovación a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,03 años y un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

$$N(\mu; 0,4)$$

a) $n = 600$, $\overline{X} = 1,8$ y $NC = 90\,\% = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,64$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,64\frac{0,4}{\sqrt{600}} = 0,0268$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1,8 - 0,0268; 1,8 + 0,0268) = (1,7732; 1,8268)$$

b) $E = 0,03$

$$0,03 = 1,64\frac{0,4}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,64 \cdot 0,4}{0,03}\right)^2 = 478,151 \Longrightarrow n = 479$$

5.4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.4.3 Se quiere hacer un estudio para estimar el porcentaje de declaraciones de la renta que son fraudulentas.

a) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de declaraciones fraudulentas a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,026 y un nivel de confianza del 90 %?

b) En una muestra aleatoria de 1000 declaraciones se obtuvo que 110 de ellas eran fraudulentas. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de declaraciones fraudulentas.

Solución:

a) $NC = 90\,\% = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,64$$

$$\hat{p} = 0,5, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,5$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 (\hat{p}\hat{q}) = \left(\frac{1,64}{0,026}\right)^2 (0,5 \cdot 0,5) = 994,6745562 \Longrightarrow n = 995$$

b) $n = 1000$ $\hat{p} = \dfrac{110}{1000} = 0,11, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,89$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,64\sqrt{\frac{0,11 \cdot 0,89}{1000}} = 0,0162$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,11 - 0,0162; 0,11 + 0,0162) = (0,0938; 0,1262) = (9,38\,\%, 12,62\,\%)$$

Problema 5.4.4 Una fábrica de quesos quiere estudiar el tiempo que tarda el producto en estropearse si no se envasa. Para ello, considera una muestra de 324 quesos y observa que el tiempo medio hasta que se estropean es de 27 días. Se supone además que el tiempo hasta que se estropea el producto sigue una distribución normal con desviación típica 4 días.

a) Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio que tarda en estropearse este tipo de queso al 99 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 días y un nivel de confianza del 99 %?

Solución:

$$N(\mu; 4)$$

a) $n = 324$, $\overline{X} = 27$ y $NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,58\frac{4}{\sqrt{324}} = 0,5733$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (27 - 0,5733; 27 + 0,5733) = (26,4267; 27,5733)$$

b) $E = 0,5$

$$0,5 = 2,58\frac{4}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,58 \cdot 4}{0,5}\right)^2 = 426,0096 \Longrightarrow n = 427$$

5.5. Cantabria

5.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.5.1 El tiempo que los usuarios de una compañía de telefonía móvil deben esperar para que les atiendan en el Servicio de Atención al Cliente, sigue una distribución normal con desviación típica 2 minutos. Una muestra aleatoria de 450 personas da como resultado un tiempo medio de espera de 14 minutos.

a) Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $n = 450$, $\overline{X} = 14$ y $NC = 93\,\% = 0,93 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,07 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,035$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,965 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,815$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,815\frac{2}{\sqrt{450}} = 0,1711$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (14 - 0,1711; 14 + 0,1711) = (13,8289; 14,1711)$$

b) $NC = 90\,\% = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = \frac{0,1711}{3} = 0,057$$

$$0,057 = 1,645\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,645 \cdot 2}{0,057}\right)^2 = 3331,517389 \Longrightarrow n = 3332$$

5.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.5.2 El número de libros que los estudiantes de un instituto leen al año, sigue una distribución normal con típica 1. Una muestra aleatoria de 125 alumnos da como resultado una media de 4 libros.

a) Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la media.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

Solución:

$$N(\mu; 1)$$

a) $n = 125$, $\overline{X} = 4$ y $NC = 94\,\% = 0,94 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,06 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,03$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,97 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,88$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,88\frac{1}{\sqrt{125}} = 0,1682$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (4 - 0,1682; 4 + 0,1682) = (3,8318; 4,1682)$$

b) $NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = \frac{0,1682}{4} = 0,04205$$

$$0,04205 = 2,17\frac{1}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{2,17 \cdot 1}{0,04205}\right)^2 = 2663,099956 \Longrightarrow n = 2664$$

5.6. Castilla La Mancha

5.6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.6.1 El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 1,3$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas.

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94,64 %?

Solución:

$$N(\mu; 20)$$

a) $n = 36$, $\overline{X} = 120$ minutos y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{20}{\sqrt{36}} = 6,5333 \text{ minutos}$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (120 - 6,5333; 120 + 6,5333) = (113,4667; 126,5333)$$

b) $n = 100$ y $NC = 94,64\,\% = 0,9464 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0536 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0268$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9732 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,93$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,93\frac{20}{\sqrt{100}} = 3,86 \text{ minutos}$$

Problema 5.6.2 Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar de 10 latas de refresco de cola y ha resultado ser: 70, 75, 85, 100, 60, 80, 120, 95, 65 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos de una lata de refresco de cola se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para el contenido medio de azúcar en una lata de refresco de cola.

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza.

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 90 gramos con una probabilidad del 98,5 %? Razona tu respuesta.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $n = 10$, $\overline{X} = 84$ gramos y $NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\frac{10}{\sqrt{10}} = 6,8621 \text{ gramos}$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (84 - 6,8621; 84 + 6,8621) = (77,1379; 90,8621)$$

b) Si se aumenta el tamaño de la muestra el error se hace más pequeño y la amplitud del intervalo de confianza disminuye.

c) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos que $90 \in (77,1379; 90,8621)$ y se aceptaría $\mu = 90$ gramos. Si aumentamos el nivel de confianza a 98,5 % aumentamos la amplitud de este intervalo y seguiríamos aceptando $\mu = 90$ gramos.

5.6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.6.3 El consumo por persona y semana de azúcar en España sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 60$ gramos. Se hizo un estudio y se observó que la media de consumo por semana de 50 personas fue de 200 gramos. Se pide:

a) Calcula el intervalo de confianza del 95 % para el consumo medio por persona y semana de azúcar.

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza.

c) ¿Crees que la media poblacional μ de consumo por persona y semana de azúcar es 220 gramos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta.

Solución:

$$N(\mu; 60)$$

a) $n = 50$, $\overline{X} = 200$ gramos y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{60}{\sqrt{50}} = 16,6312 \text{ gramos}$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (200 - 16,6312; 200 + 16,6312) = (183,3688; 216,6312)$$

b) Si se aumenta el tamaño de la muestra el error se hace más pequeño y la amplitud del intervalo de confianza disminuye.

c) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos que $220 \notin (183,3688; 216,6312)$ y no se aceptaría $\mu = 220$ gramos. Si disminuimos el nivel de confianza a 90 % disminuimos la amplitud de este intervalo y seguiríamos sin aceptar $\mu = 220$ gramos.

Problema 5.6.4 Se desea investigar la altura en cm de un tipo de planta, se sabe que la altura sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 15$ cm. Se tomó una muestra aleatoria de 400 plantas de ese tipo y se comprobó que la altura media de dicha muestra era de 110 cm.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la altura de ese tipo de planta, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza.

c) ¿Se puede admitir que la media de altura μ de ese tipo de planta pueda ser de 109 cm con una confianza del 95 %? Razona tu respuesta.

Solución:

$$N(\mu; 15)$$

a) $n = 400$, $\overline{X} = 110$ cm y $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{15}{\sqrt{400}} = 1,47 \text{ cm}$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (110 - 1,47; 110 + 1,47) = (108,53; 111,47)$$

b) Si se aumenta el nivel de confianza de la muestra el error se hace más grande y la amplitud del intervalo de confianza aumenta.

c) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos que $109 \in (108,53; 111,47)$ y se aceptaría $\mu = 109$ cm.

5.7. Castilla León

5.7.1. Modelo de 2020

Problema 5.7.1 El tiempo que un autobús urbano tarda en realizar su ruta se ajusta a una distribución normal con media de 24 minutos y desviación típica de 8 minutos. Si cada día el autobús realiza 40 veces su ruta:

a) Calcular la probabilidad de que en un día el tiempo medio de las 40 rutas esté entre 22 y27 minutos.

b) Calcular la probabilidad de que el autobús emplee más de 1080 minutos en total cada día para realizar su ruta esas 40 veces.

Solución:

$$N(24, 8)$$

a) $\overline{X} \approx N\left(24, \dfrac{8}{\sqrt{40}}\right) = N(24; 1,2649)$

$$P(22 \leq \overline{X} \leq 27) = P\left(\frac{22-24}{1,2649} \leq Z \leq \frac{27-24}{1,2649}\right) = P(-1,58 \leq Z \leq 2,37)$$

$$= P(Z \leq 2,37) - P(Z \leq -1,58) = P(Z \leq 2,37) - (1 - P(Z \leq 1,58)) =$$

$$0,9911 - (1 - 0,9429) = 0,934$$

b) $\dfrac{1080}{40} = 27$:

$$P(\overline{X} \geq 27) = P\left(Z \geq \frac{27-24}{1,2649}\right) = P(Z \geq 2,37) = 1 - P(Z \leq 1,37) =$$

$$1 - 0,9911 = 0,0089$$

Problema 5.7.2 Una academia que prepara oposiciones está evaluando la calidad de sus resultados. Para ello toma una muestra de 50 opositores y comprueba que 20 han aprobado. Con esta información:

a) Determinar los parámetros media y desviación típica de la proporción muestral que estima la proporción de opositores aprobados. Calcular, utilizando la distribución normal asociada, la probabilidad de que la proporción muestral de aprobados esté entre el 35 % y el 45 %.

b) Calcular un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de opositores aprobados de la academia.

Solución:

$$\hat{p} = \frac{20}{50} = 0,4 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,6$$

a) Si $n = 50 > 30 \Longrightarrow p \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) \Longrightarrow N(0,4; 0,0693)$, media 0,4 y desviación típica 0,0693.
$P(0,35 \leq p \leq 0,45) = P\left(\dfrac{0,35-0,4}{0,0693} \leq Z \leq \dfrac{0,45-0,4}{0,0693}\right) = P(-0,72 \leq Z \leq 0,72) = P(Z \leq 0,72) - (1 - P(Z \leq 0,72)) = 2P(Z \leq 0,72) - 1 = 2 \cdot 0,7642 - 1 = 0,5284$

b) $NC = 0,9 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,645\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{50}} = 0,114$$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,4 - 0,114; 0,4 + 0,0425) = (0,2860; 0,514) = (28,60\,\%, 51,40\,\%)$

Problema 5.7.3 La ficha técnica del estudio social La vida en la Frontera con Portugal indica que se ha encuestado a 4450 individuos mayores de 14 años, residentes en Castilla y León que viven a menos de 25 km de la frontera con Portugal. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos de la población satisfechos con su zona de residencia es de $\pm 1{,}4\,\%$ fijada una confianza del $95\,\%$. Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.
Solución:

☛ **Población**: Individuos de 14 o más años residentes en Castilla y León que viven a menos de 25 km de la frontera con Portugal.

☛ **Diseño muestral**: Muestreo estratificado con reparto proporcional y aleatorio simple en cada estrato.

☛ **Tamaño muestral**: 4450 individuos.

☛ **Parámetro estimado**: La proporción de individuos satisfechos con su lugar de residencia, con un error de $\pm 1,4\,\%$ y una confianza del $95\,\%$

5.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.7.4 El tiempo que tarda un auditor en revisar un expediente se ajusta a una distribución normal con media 30 minutos y desviación típica de 10 minutos. Si al principio de una semana se le entregan 75 expedientes:

a) Calcular la probabilidad de que le dé tiempo a revisar los 75 expedientes si en esa semana el auditor trabaja 35 horas (2100 minutos).

b) Calcular la probabilidad de que el tiempo medio dedicado a revisar los 75 expedientes esté entre 28 y 33 minutos.

Solución:

$$N(30, 10)$$

a) $\overline{X} = \dfrac{2100}{75} = 28$ y $n = 75 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(30, \dfrac{10}{\sqrt{75}}\right) = N(30; 1,1547)$

$P(\overline{X} \le 28) = P\left(Z \le \dfrac{28-30}{1,1547}\right) = P(Z \le -1,73) = 1 - P(Z \le 1,73) = 1 - 0,9582 = 0,0418$

b) $P(28 \le \overline{X} \le 33) = P\left(\dfrac{28-30}{1,1547} \le Z \le \dfrac{33-30}{1,1547}\right) = P(Z \le 2,6) - P(Z \le -1,73) =$
$0,9953 - 0,0418 = 0,9535$

5.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.7.5 El peso de la población adulta con sobrepeso sigue una distribución normal de media 120 kg y desviación típica de 20 kg. Además, a los individuos con un peso superior a 150 kg se les considera "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A".

a) ¿Qué porcentaje de la población de adultos con sobrepeso son "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A"?

b) Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg.

Solución:

$$N(120, 20)$$

a) $P(X \geq 150) = P\left(Z \geq \dfrac{150-120}{20}\right) = P(Z \geq 1,5) =$
$1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668 \Longrightarrow 6,68\,\%$

b) $n = 20 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(120, \dfrac{20}{\sqrt{20}}\right) = N(120; 4,4721)$
$P(110 \leq \overline{X} \leq 125) = P\left(\dfrac{110-120}{4,4721} \leq Z \leq \dfrac{125-120}{4,4721}\right) =$
$P(-2,24 \leq Z \leq 1,12) = P(Z \leq 1,12) - P(Z \leq -2,24) =$
$P(Z \leq 1,12) - (1 - P(Z \leq 2,24)) = 0,8686 + 0,9875 - 1 = 0,8561$

Problema 5.7.6 La nota media de los alumnos de segundo de bachillerato de cierto instituto sigue una distribución normal de media 6,8 y desviación típica 1,1. Calcular la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de un 9.
Solución:

$$N(6,8; 1,1)$$

$$P(X \geq 9) = P\left(Z \geq \frac{9-6,8}{1,1}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

5.8. Cataluña

5.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Sin problemas de este tipo.

5.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Sin problemas de este tipo.

5.9. Comunidad valenciana

5.9.1. Modelo de 2020

Sin problemas de este tipo.

5.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Sin problemas de este tipo.

5.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Sin problemas de este tipo.

5.10. Extremadura

5.10.1. Modelo de 2020

Problema 5.10.1 Con el fin de estimar la proporción de empresas de una determinada ciudad que reciclan el papel usado, se selecciona una muestra de 400 de ellas, resultando que 336 reciclan el papel que utilizan. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular una estimación puntual de la proporción de empresas de esa ciudad que reciclan su papel usado.

b) Calcular un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de empresas que recicla.

Solución:

a) $\hat{p} = \dfrac{336}{400} = 0,84$

b) $n = 400$, $z_{\alpha/2} = 1,96$.
$NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$\hat{p} = \dfrac{336}{400} = 0,84 \Longrightarrow \hat{q} = 0,16.$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,84 \cdot 0,16}{400}} = 0,0359$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,84 - 0,0359; 0,84 + 0,0359) =$$
$$(0,8041; 0,8759) = (80,41\,\%; 87,59\,\%)$$

Problema 5.10.2 Se desea conocer la media de ingresos por publicidad de los diarios regionales, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media, ¿cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Solución:

$$N(\mu; 400)$$

$NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$L = 2E = 160 \Longrightarrow E = 80$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{400}{\sqrt{n}} = 80 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 400}{80}\right)^2 = 96,04$$

Luego $n = 97$.

5.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.10.3 Se desea conocer la proporción de clientes que adquirirán un nuevo modelo de teléfono móvil. Para ello se realiza una encuesta a 300 potenciales clientes de los cuales 60 están interesados en dicho producto. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la proporción de clientes interesados en el nuevo modelo de teléfono móvil. Razonar la respuesta.
Solución:

$$\hat{p} = \frac{60}{300} = 0,2$$

$n = 300$, $z_{\alpha/2} = 1,96$.
$NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$\hat{p} = 0,2 \Longrightarrow \hat{q} = 0,8$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{300}} = 0,0453$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,2 - 0,0453; 0,2 + 0,0453) =$$

$$(0,1547; 0,2453) = (15,47\,\%; 24,53\,\%)$$

Problema 5.10.4 Con objeto de adquirir los embalajes en una panadería, se realiza un estudio sobre la longitud de las barras de pan. Se sabe que dicha variable tiene distribución normal con desviación típica de 3 cm. ¿Cuántas barras de pan deben ser tomadas para el estudio si se desea obtener un intervalo de confianza para la longitud media de las barras, al nivel de confianza del 95 %, con una amplitud de 1 cm? Razonar la respuesta.
Solución:

$$N(\mu; 3)$$

$NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$L = 2E = 1 \Longrightarrow E = 0,5$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} = 0,5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 3}{0,5}\right)^2 = 138,2976$$

Luego $n = 139$.

5.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.10.5 En un estudio sobre la práctica del deporte en la universidad, se pregunta a 150 universitarios de los cuales 120 afirman practicar algún deporte. Calcular, razonando la respuesta, un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95 % para la proporción de universitarios que practican deporte. Razona la respuesta.
Solución:

$$\hat{p} = \frac{120}{150} = 0,8$$

$n = 150$, $z_{\alpha/2} = 1,96$.
$NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$\hat{p} = 0,8 \Longrightarrow \hat{q} = 0,2$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{150}} = 0,064$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,8 - 0,064; 0,8 + 0,064) =$$
$$(0,736; 0,864) = (73,6\,\%; 86,4\,\%)$$

Problema 5.10.6 La calificación que obtienen los candidatos que se presentan a una oposición sigue una distribución normal con desviación típica 1,2 puntos. Si se quiere realizar un estudio sobre la dificultad de las pruebas en dicha oposición, ¿cuántos candidatos deben seleccionarse para obtener un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la calificación media que tenga una longitud de 0,5 puntos? Razona la respuesta.
Solución:

$$N(\mu; 1,2)$$

$NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$L = 2E = 0,5 \Longrightarrow E = 0,25$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1,2}{\sqrt{n}} = 0,25 \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,96 \cdot 1,2}{0,25}\right)^2 = 88,51$$

Luego $n = 89$.

5.11. Galicia

5.11.1. Modelo de 2020

Problema 5.11.1 Una empresa editorial desea conocer el impacto que tendrá la publicación de una nueva obra de un reconocido novelista. Tras entrevistar a 100 personas aficionadas a la lectura, 80 de ellas reconocen que adquirirán esa nueva obra.

a) ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69,7 % y el 90,3 %?

b) Si se sabe que 8 de cada 10 personas aficionadas a la lectura adquirirán la obra y elegimos una muestra de $n = 144$ de esas personas, calcule la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75 %.

Solución:

$$\hat{p} = \frac{80}{100} = 0,8 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,2$$

a) La longitud del intervalo es $l = 2E = 0,903 - 0,697 = 0,206 \Longrightarrow E = 0,103$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,103 = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,8\cdot 0,2}{100}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = P(Z \le 2,575) = 0,995 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,01$
Luego $NC = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$.

b) Ahora $n = 144$, $\hat{p} = \dfrac{8}{10} = 0,8$ y $\hat{q} = 0,2 \Longrightarrow p \approx N\left(0,8; \sqrt{\dfrac{0,8\cdot 0,2}{144}}\right) = N(0,8; 0,0333)$

$$P(p \ge 0,75) = P\left(Z \ge \frac{0,75 - 0,8}{0,0333}\right) = P(Z \ge -1,5) = P(Z \le 1,5) = 0,9332$$

5.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.11.2 Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15 %.

a) ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 y un nivel de confianza del 95 %?
Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta.

b) Calcule un intervalo de confianza, al 92 %, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

Solución:

$$\hat{p} = 0,15 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,85$$

a) $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,08 = 1,96\sqrt{\frac{0,15\cdot 0,85}{n}} \Longrightarrow$$

$$n \ge \left(\frac{1,96}{0,08}\right)^2 (0,15\cdot 0,85) = 76,532$$

$$n = 77$$

b) $NC = 92\,\% = 0,92 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,96 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,75$$

$n = 196,\ \hat{p} = \dfrac{37}{196} = 0,189 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,811$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1,75\sqrt{\frac{0,189\cdot 0,811}{196}} = 0,0489$$

$$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,189-0,0489; 0,189+0,0489) =$$
$$(0,1398; 0,2377) = (13,98\,\%; 23,77\,\%)$$

5.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.11.3 El peso de las naranjas para zumo recolectadas por un productor es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de $\mu = 200$ gramos y una desviación típica de $\sigma = 50$ gramos.

a) Si tomamos una muestra aleatoria de $n = 25$ naranjas, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio está comprendido entre 175 y 215 gramos?

b) ¿De qué tamaño se ha tomado otra muestra aleatoria si la probabilidad de que el peso medio sea inferior a 210 gramos es del 97,72 %?

Solución:

$$N(200, 50)$$

a) $n = 25 \Longrightarrow \overline{X} \overset{N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(200; 10)$
$P(175 \le \overline{X} \le 215) = P\left(\dfrac{175-200}{10} \le Z \le \dfrac{215-200}{10}\right) =$
$P(-2,5 \le Z \le 1,5) = P(Z \le 1,5) - P(Z \le -2,5) =$
$P(Z \le 1,5) - (1 - P(Z \le 2,5)) = 0,9332 + 0,9938 - 1 = 0,927$

b) $\overline{X} \approx \left(200, \dfrac{50}{\sqrt{n}}\right)$

$P(\overline{X} \le 210) = 0,9772 \Longrightarrow P(\overline{X} \le 210) = P\left(Z \le \dfrac{210-200}{\frac{50}{\sqrt{n}}}\right) = 0,9772 \Longrightarrow \dfrac{210-200}{\frac{50}{\sqrt{n}}} =$
$2 \Longrightarrow n = 100$

5.12. Islas Baleares

5.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.12.1 El peso de las personas de un colegio mayor sigue una ley normal de media 70 kg y desviación típica 15 kg. Si escogemos al azar una persona del colegio, Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

a) Su peso sea superior a 80 kg.

b) Su peso sea inferior a 50 kg.

c) Peso entre 60 y 120 kg.

Solución:

$$N(70,15)$$

a) $P(X \geq 80) = P\left(Z \geq \dfrac{80-70}{15}\right) = P(Z \geq 0,67) = 1 - P(Z \leq 0,67) = 1 - 0,7486 = 0,2514$

b) $P(X \leq 50) = P\left(Z \leq \dfrac{50-70}{15}\right) = P(Z \leq -1,33) = 1 - P(Z \leq 1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918$

c) $P(60 \leq X \leq 120) = P\left(\dfrac{60-70}{15} \leq Z \leq \dfrac{120-70}{15}\right) = P(-0,67 \leq Z \leq 3,33) = P(Z \leq 3,33) - P(Z \leq -0,67) = P(Z \leq 3,33) - (1 - P(Z \leq 0,67)) = 0,9996 - (1 - 0,7486) = 0,7482$

5.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.12.2 En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la que procede esta muestra es de 2 años.

a) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para estimar la edad media de la población.

b) Calcular el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para que en estimar la edad media de esta población con un nivel de confianza del 92 %, el error como es sea inferior a 0,5 años.

Solución:

$$N(\mu,2)$$

a) $n = 256$, $\overline{X} = 17,4$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{2}{\sqrt{256}} = 0,245$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (17,4 - 0,245; 17,4 + 0,245) = (17,155; 17,645)$$

b) $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,755$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,5 = 1,755\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,755 \cdot 2}{0,5}\right)^2 = 49,2804$$

$$n = 50$$

5.13. Islas Canarias

5.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.13.1 Con base en los datos proporcionados por una muestra aleatoria de una población, se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político.

a) Si de una muestra de 750 personas, 300 dicen que lo votan, calcular, con un nivel de confianza del 97 %, un intervalo para la proporción de votantes de la población a ese partido.

b) Si, en otra muestra, la proporción de votantes ha sido 0,3 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0,05, con un nivel de confianza del 99 %, calcular el tamaño de dicha muestra.

Solución:

a) $\hat{p} = \dfrac{300}{750} = 0,4 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,6$
$NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,17\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{750}} = 0,0388$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,4 - 0,0388; 0,4 + 0,0388) = (0,3612; 0,4388) =$$
$$(36,12\,\%, 43,88\,\%)$$

b) $\hat{p} = 0,3 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,7$ y $E = 0,05$
$NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,05 = 2,575\sqrt{\frac{0,3\cdot 0,7}{n}} \Longrightarrow$$

$$n \ge \left(\frac{2,575}{0,05}\right)^2 (0,3\cdot 0,7) = 556,9725 \Longrightarrow n = 557$$

Problema 5.13.2 A partir de una muestra de 81 adultos, se estima que la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio está entre 3,608 y 4,392 horas (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de $\dfrac{9}{5}$ horas:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Usando la estimación puntual de la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio obtenida en el apartado *a*), ¿cuál es la probabilidad de que la media de horas semanales dedicadas por 16 adultos a hacer ejercicio sea mayor o igual que 4,1 horas?

Solución:

a) $IC = (3,608; 0,4,392) = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) \Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - E = 3,608 \\ \overline{X} + E = 4,392 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 4 \\ E = 0,392 \end{array} \right.$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,392 = Z_{\alpha/2}\frac{9/5}{\sqrt{81}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$P(Z < 1,96) = 0,9750 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow$$

$$NC = 1 - \alpha = 0,95 \Longrightarrow 95\,\%$$

c) $n = 16$, $\mu = 4$

$$P(\overline{X} \geq 4,1) = P\left(Z \geq \frac{4,1-4}{(9/5)/\sqrt{16}}\right) = P(Z \geq 0,22) =$$

$$1 - P(Z \leq 0,22) = 1 - 0,5871 = 0,4129$$

Problema 5.13.3 Se ha realizado una encuesta a los 20000 estudiantes de la universidad sobre su actitud ante el botellón. De ellos, 13200 son partidarios y el resto no. Conocida esta cifra, el vicerrectorado de cultura va a organizar 100 charlas informativas sobre este tema, a cada una de las cuales asistirán 30 estudiantes de la universidad elegidos al azar.

a) Calcular la proporción de estudiantes partidarios del botellón en la universidad. ¿Cuál es la distribución de probabilidad aproximada de la proporción de estudiantes partidarios del botellón en las charlas?

b) Ha comenzado una de estas charlas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los asistentes haya más de 21 alumnos favorables al botellón?

c) ¿En cuántas charlas cabe esperar que haya más de 15 y menos de 19 estudiantes partidarios del botellón?

Solución:

a)

$$p = \frac{13200}{20000} = 0,66 \Longrightarrow q = 1 - p = 0,34$$

Una distribución muestral de proporciones se ajusta a una normal $N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N(0,66; 0,0865)$

b) $P\left(p \geq \frac{21}{30}\right) = P\left(p \geq 0,7\right) = P\left(Z \geq \frac{0,7-0,66}{0,0865}\right) = P\left(Z \geq 0,46\right) = 1 - P\left(Z \geq l,46\right) =$
$1 - 0,6772 = 0,3228$

c) $P\left(\frac{15}{30} \leq p \leq \frac{19}{30}\right) = P\left(0,5 \leq p \leq 0,63\right) =$
$P\left(\frac{0,5-0,66}{0,0865} \leq Z \leq \frac{0,63-0,66}{0,0865}\right) = P(-1,85 \leq Z \leq -0,35) =$
$P(Z \leq -0,35) - P(Z \leq -1,85) = 1 - P(Z \leq 0,35) - 1 + P(Z \leq 1,85) =$
$P(Z \leq 1,85) - P(Z \leq 0,35) = 0,9678 - 0,6368 = 0,331$
Como se van a dar 100 charlas $100 \cdot 0,331 = 33,1$. Redondeando por exceso habrá 34 charlas en las que habría entre 15 y 19 estudiantes partidarios del botellón.

5.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.13.4 En la primera fase de un examen de oposición, se realiza un test que consta de 90 preguntas a contestar verdadero o falso. Se aprueba si se contestan correctamente al menos 50 preguntas. Un opositor, para responder, lanza una moneda y contesta verdadero si sale cara y falso si sale cruz. Hallar:

a) Probabilidad de aprobar el examen.

b) Probabilidad de acertar más de 51 y menos de 60 preguntas.

c) Probabilidad de acertar a lo sumo 40 preguntas.

Solución:

a) $p = 0,5$, $q = 0,5$ y $n = 90 \Longrightarrow B(90; 0,5)$
$n > 10$, $np = 45 > 5$ y $nq = 45 > 5 \Longrightarrow$
$B(90; 0,5) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(45; 4,7434)$
$P(X \geq 50) = P\left(Z \geq \dfrac{49,5 - 45}{4,7434}\right) = P(Z \geq 0,95) = 1 - P(Z \leq 0,95) = 1 - 0,8289 = 0,1711$

b) $P(51 < X < 60) = P\left(\dfrac{51,5 - 45}{4,7434} \leq Z \leq \dfrac{59,5 - 45}{4,7434}\right) =$
$P(1,37 \leq Z \leq 3,06) = P(Z \leq 3,06) - P(Z \leq 1,37) =$
$0,9989 - 0,9147 = 0,0842$

c) $P(X \leq 40) = P\left(Z \leq \dfrac{40,5 - 45}{4,7434}\right) = P(Z \leq -0,95) =$
$1 - P(Z \leq 0,95) = 1 - 0,8289 = 0,1711$

Problema 5.13.5 Una naviera que opera entre islas ha decidido evaluar el peso de los vehículos que transporta para ajustar los precios de los billetes. Para ello ha tomado una muestra aleatoria de 64 vehículos, obteniendo un peso medio de 1123 kg con una desviación típica de 190 kg.

a) Suponiendo que la variable peso es normal, calcular un intervalo de confianza al 97 % para el peso medio de todos los vehículos transportados por la naviera.

b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar el peso medio de los vehículos con un error inferior a 20 kg y una confianza del 99 %?

c) Sabiendo que el 10 % de los vehículos que viajan con la naviera son todoterrenos, ¿cuál es la probabilidad de que entre los 64 de la muestra haya más de 8 todoterrenos?

Solución:

a) $N(\mu; 190)$, $n = 64$, $\overline{X} = 1123$ y $NC = 0,97$
$NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\frac{190}{\sqrt{64}} = 51,5375$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1123 - 51,5375; 1123 + 51,5375) =$$
$$(1071,4625; 1174,5375)$$

b) $NC = 0,99 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 20 = 2,575\dfrac{190}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$

$$n \ge \left(\frac{2,575\cdot 190}{20}\right)^2 = 598,4139 \Longrightarrow n = 599$$

c) $B(64; 0,1)$ con $n > 10$, $np = 6,4 > 5$, $nq = 57,6 > 0 \Longrightarrow$

$$B(64;0,1) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(6,4;2,4)$$

$P(X > 8) = P\left(Z \ge \dfrac{8,5-6,4}{2,4}\right) = P(Z \ge 0,88) =$
$1 - P(Z \le 0,88) = 1 - 0,8106 = 0,1894$

Problema 5.13.6 Se realiza un sondeo preelectoral, encuestando a 2500 personas, de las que 1500 manifiestan su intención de votar.

a) Con un 95 % de confianza, ¿entre qué valores puede estimarse que se encontrará el nivel de abstención?

b) ¿Cuál será el correspondiente intervalo de confianza al 98 %?

c) Si se mantienen las proporciones del sondeo inicial, ¿de qué tamaño tendrá que ser la muestra para hacer dicha estimación con un error menor del 1,5 % y con una confianza del 99 %?

Solución:

a)

$$\hat{p} = \frac{1500}{2500} = 0,6 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,4$$

$NC = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,6\cdot 0,4}{2500}} = 0,0192$$

$$IC = (\hat{q} - E, \hat{q} - E) = (0,4 - 0,0192; 0,4 + 0,0192) = (0,3808; 0,4192) =$$
$$(38,08\,\%, 41,92\,\%)$$

b) $NC = 0,98 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,02 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,01$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,01 = 0,99 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,33$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,33\sqrt{\frac{0,6\cdot 0,4}{2500}} = 0,0228$$

$$IC = (\hat{q} - E, \hat{q} - E) = (0,4 - 0,0228; 0,4 + 0,0228) = (0,3772; 0,4228) =$$
$$(37,72\,\%, 42,28\,\%)$$

c) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,015 = 2,575\sqrt{\frac{0,6\cdot 0,4}{n}} \Longrightarrow$$

$$n \ge \left(\frac{2,575}{0,015}\right)^2 (0,6\cdot 0,4) = 7072,67 \Longrightarrow n = 7073$$

5.14. La Rioja

5.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.14.1 Una máquina produce bolas de billar, y sabemos que su peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 gr.

a) Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso promedio de 100 bolas superase los 168 gr?

b) El promedio en una muestra de 100 bolas es de 165 gr. Determina un intervalo con el 95 % de confianza para la media del peso de las bolas que produce la máquina

Solución:

a) $N(165;20)$, $n = 100 \Longrightarrow \overline{X} \overset{N\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(165;2)$
$P(\overline{X} \ge 168) = P\left(Z \ge \dfrac{168-165}{2}\right) = P(Z \ge 1,5) =$
$1 - P(Z \le 1,5) = 1 - 0,93319 = 0,06681$

b) $\overline{X} = 165$, $n = 100$ y $NC = 95\,\%$

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{20}{\sqrt{100}} = 3,92$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (165 - 3,92; 165 + 3,92) =$$
$$(161,08; 168,92)$$

5.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.14.2 Los ingresos mensuales por ventas de un establecimiento siguen una distribución normal, con una desviación típica de 900€. Con los datos de los últimos 9 meses han calculado, como intervalo de confianza para la media mensual de ingresos, el intervalo comprendido entre 4663 y 5839€.

a) ¿Cuál fue el promedio de los ingresos en esos nueve meses?

b) ¿Con qué nivel de confianza se ha obtenido el intervalo?

c) Si con el mismo nivel de confianza el intervalo hubiera sido el comprendido entre 4957 y 5545. ¿cuántos meses habrían formado la muestra?

Solución:

a) $N(\mu; 900)$, $n = 9$ e $IC = (4663, 5839) \Longrightarrow \overline{X} = \dfrac{4663 + 5839}{2} = 5251$

b) $5839 - 4663 = 2E \Longrightarrow E = 588$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 588 = Z_{\alpha/2}\frac{900}{\sqrt{9}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$P(Z \leq 1,96) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow$$

$NC = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow 95\,\%$

c) $5545 - 4957 = 2E \Longrightarrow E = 294$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 294 = 1,96\frac{900}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 900}{294}\right)^2 = 36 \Longrightarrow$$

$$n = 36$$

Problema 5.14.3 Un estudio de la OCDE de 2009 estableció que la estatura media de los adultos varones en España era de 174 cm, con una desviación típica de 8 cm. Asumiremos que la distribución era normal. ¿Cuál era la probabilidad de que un hombre adulto español midiera más de 190 cm? Responde utilizando la tabla de la distribución la normal estándar que se incluye al final.
Entre los hombres holandeses, que eran los más altos según aquel estudio, la probabilidad de medir más de 190 cm (suponiendo también una desviación típica de 8 cm y una distribución normal) era 0,15866. ¿Cuál era la estatura media de los hombres holandeses?

Solución:
$N(174; 8)$
$P(X \geq 190) = P\left(Z \geq \dfrac{190 - 174}{8}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,97725 = 0,02275$
En Holanda: $N(\mu; 8)$; $P(X \geq 190) = P\left(Z \geq \dfrac{190 - \mu}{8}\right) = 0,15866 \Longrightarrow 1 - P\left(Z \leq \dfrac{190 - \mu}{8}\right) = 0,15866 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{190 - \mu}{8}\right) = 1 - 0,15866 = 0,84134 \Longrightarrow \dfrac{190 - \mu}{8} = 1 \Longrightarrow \mu = 182$ cm

5.15. Madrid

5.15.1. Modelo de 2020

Problema 5.15.1 El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 30$ y $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{20}} = 4,383$$

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (30 - 4,383; 30 + 4,383) = (25,617; 34,383)$$

b) $\mu = 28$ y $n = 10$:

$$P\left(28 \le \overline{X} \le 30\right) = P\left(\frac{28 - 28}{10/\sqrt{10}} \le \overline{X} \le \frac{30 - 28}{10/\sqrt{10}}\right) =$$

$$P(0 \le Z \le 0,63) = P(Z \le 0,63) - P(Z \le 0) = 0,7357 - 0,5 = 0,2357$$

Problema 5.15.2 Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

Solución:

$$N(\mu; 300)$$

a) $E = 100$, $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{300}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,96 \cdot 300}{100}\right)^2 = 34,5744$$

Luego $n = 35$.

b) $\mu = 3000$ y $n = 50$

$$P\left(\overline{X} \ge 2700\right) = P\left(\overline{X} \ge \frac{2700 - 3000}{300/\sqrt{50}}\right) =$$

$$P(Z \ge -7,07) = 1 - P(Z \le -7,07) = 1 - (1 - P(Z \le 7,07)) = 1 - (1 - 1) = 1$$

5.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.15.3 Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.

b) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

Solución:

a) $p = \dfrac{320}{500} = \dfrac{16}{25} = 0,64$, $q = 1 - p = 0,36$ y $n = 500$.

$$NC = 0,96 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,04 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,02$$

$$P\left(Z \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,02 = 0,98 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,055\sqrt{\frac{0,64 \cdot 0,36}{500}} = 0,0441$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,64 - 0,0441; 0,64 + 0,0441) =$$

$$(0,5959; 0,6841) = (59,59\,\%; 68,41\,\%)$$

b)

$$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P\left(Z \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 1,96\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,05 \Longrightarrow n \ge \frac{1,96^2 \cdot 0,5^2}{0,05^2} = 384,16$$

$$\Longrightarrow n = 385$$

Problema 5.15.4 El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza $(117,3444; 124,6556)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 20)$$

a) $n = 36$:

$$P(\overline{X} \le 120) = P\left(Z \le \frac{125 - 120}{20/\sqrt{36}}\right) = P(Z \le 1,5) = 0,9332$$

b) $E = \dfrac{124,6556 - 117,3444}{2} = 3,6556$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{3,6556 \cdot \sqrt{81}}{20} = 1,645$$

$$P(Z \leq 1,645) = 0,95 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow NC = 0,9 = 90\,\%$$

5.15.3. Convocatoria Ordinaria junio de 2020-coincidente

Problema 5.15.5 Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

a) Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

Solución:

$$N(\mu; 4)$$

a) $n = 15$, $\overline{X} = 254$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{4}{\sqrt{15}} = 2,02428$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (254 - 2,02428; 254 + 2,02428) = (251,97572; 256,02428)$$

b) $\mu = 250$ y $n = 25$ $P(\overline{X} \geq 248) = P\left(Z \geq \dfrac{248 - 250}{4/\sqrt{25}}\right) = P(Z \geq -2,5) = 1 - P(Z \leq -2,5) = 1 - (1 - P(Z \leq 2,5)) = P(Z \leq 2,5) = 0,9938$

Problema 5.15.6 Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0,2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.

b) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

Solución:

a) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$ y $E = 0,08$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Longrightarrow 0,08 = 2,575\sqrt{\frac{0,2\cdot 0,8}{n}} \Longrightarrow$$

$$n \ge 0,2\cdot 0,8\left(\frac{2,575}{0,08}\right)^2 = 165,765625$$

Luego $n = 166$.

b) $p = \dfrac{25}{200} = 0,125$, $n = 200$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,125\cdot 0,875}{200}} = 0,04584$$

$$IC = (p - E; p + E) = (0,125 - 0,04584; 0,125 + 0,04584) \Longrightarrow$$
$$(0,07916; 0,17084)$$

5.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.15.7 El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 60$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{8}{\sqrt{20}} = 3,5062$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (60 - 3,5062; 60 + 3,5062) = (56,4938; 63,5062)$$

b) $\mu = 59$ y $n = 10$
$P(57 \le \overline{X} \le 61) = P\left(\dfrac{57-59}{8/\sqrt{10}} \le Z \le \dfrac{61-59}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0,79 \le Z \le 0,79) =$
$P(Z \le 0,79) - P(Z \le -0,79) = P(Z \le 0,79) - (1 - P(Z \le 0,79)) = 2P(Z \le 0,79) - 1 =$
$2\cdot 0,7852 - 1 = 0,5704$

Problema 5.15.8 El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que 30,5 minutos.

Solución:

$$N(\mu, 3)$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$
y $E = 1$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 3}{1}\right)^2 = 34,5744$$

Luego $n = 35$.

b) $\mu = 32$ y $n = 16$
$P(\overline{X} \leq 30,5) = P\left(Z \leq \dfrac{30,5 - 32}{3/\sqrt{16}}\right) = P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 - 1 = 0,0228$

5.16. Murcia

5.16.1. Modelo de 2020

No ha habido problemas de este tipo.

5.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

No ha habido problemas de este tipo.

5.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

No ha habido problemas de este tipo.

5.17. Navarra

5.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.17.1 El gasto (en euros) por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con varianza 64. Se selecciona una muestra de clientes, obteniéndose los siguientes gastos:

$$49,8,\ \ 34,4,\ \ 42,1,\ \ 55,7,\ \ 54,9,\ \ 53,\ \ 54,6,\ \ 53,3,\ \ 68,9\ \text{ y }\ 42,4.$$

a) Calcule un intervalo de confianza al 93 % para el gasto medio.

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo se reduzca a la mitad.
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Solución:

$$N(\mu;\sqrt{64}) = N(\mu;8)$$

a) $\overline{X} = \dfrac{49,8+34,4+42,1+55,7+54,9+53+54,6+53,3+68,9+42,4}{10} = 50,91$, $n=10$ y
$NC = 0,93$
$NC = 0,93 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,07 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,035$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0,035 = 0,965 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,81$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,81\frac{8}{\sqrt{10}} = 4,579$$

$$IC = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) = (50,91-4,579; 50,91+4,579) =$$

$$(46,331; 55,489)$$

b) Ahora $E = \dfrac{4,579}{2} = 2,2895 \Longrightarrow 2,2895 = 1,81\dfrac{8}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\dfrac{1,81\cdot 8}{2,2895}\right)^2 = 39,99961654 \Longrightarrow$
$n = 40$

5.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.17.2 Un estudio concluye que el tiempo que tarda un fumador en dejar de fumar se ajusta a una distribución normal. Con una muestra de 144 exfumadores, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio (en meses) en dejar de fumar: $[9,58875; 10,41125]$.

a) Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medio en dejar de fumar para la muestra de los 144 exfumadores.

b) Construya un intervalo de confianza al 94 % para el tiempo medio en dejar de fumar.
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Solución:
$N(\mu;\sigma)$ y $NC = 90\,\%$
$NC = 0,90 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

a) $n = 144$ Tenemos $2E = 10,41125 - 9,58875 = 0,8225 \Longrightarrow E = \dfrac{0,8225}{2} = 0,41125$ y
$\overline{X} = \dfrac{10,41125+9,58875}{2} = 10$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,41125 = 1,645\frac{\sigma}{\sqrt{144}} \Longrightarrow \sigma = \frac{0,41125\cdot 12}{1,645} = 3$$

$$Var(X) = \sigma^2 = 9$$

b) $NC = 94\,\%$
$NC = 0,94 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,06 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,03$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,03 = 0,97 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,88$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,88\frac{3}{\sqrt{144}} = 0,47$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (10 - 0,47; 10 + 0,47) =$$

$$(9,53; 10,47)$$

5.18. País Vasco

5.18.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.18.1 En un test de empatía el 40 % de la población examinada obtuvo un resultado inferior a 4 puntos. Sabemos que el resultado del test sigue una distribución normal de media 4,8 puntos.

a) Calcula la desviación típica de la distribución.

b) Si la desviación típica es 3,14 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 35 % de la población?

c) Si la desviación típica es 3,14 puntos, ¿qué porcentaje de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos?

Solución:

$$N(4,8; \sigma)$$

a) $P(X \le 4) = P\left(Z \le \dfrac{4 - 4,8}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \dfrac{-0,8}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \le \dfrac{0,8}{\sigma}\right) = 0,4 \Longrightarrow$
$P\left(Z \le \dfrac{0,8}{\sigma}\right) = 0,6 \Longrightarrow \dfrac{0,8}{\sigma} = 0,255 \Longrightarrow \sigma = \dfrac{0,8}{0,255} = 3,137$

b) $N(4,8; 3,14)$
$P(X \ge a) = 0,35 \Longrightarrow P(X \le a) = 0,65 \Longrightarrow P(X \le a) = P\left(Z \le \dfrac{a - 4,8}{3,14}\right) = 0,65 \Longrightarrow$
$\dfrac{a - 4,8}{3,14} = 0,385 \Longrightarrow a = 6,009$
El 35 % de la población obtienen un resultado superior a 6.

c) $P(|X - \mu| \le 2) = P(|X - 4,8| \le 2) = P(4,8 - 2 \le X \le 4,8 + 2) = P(2,8 \le X \le 6,8) =$
$P\left(\dfrac{2,8 - 4,8}{3,14} \le Z \le \dfrac{6,8 - 4,8}{3,14}\right) = P(-0,64 \le 0,64) = P(Z \le 0,64) - P(Z \le -0,64) =$
$P(Z \le 0,64) - (1 - P(Z \le 0,64)) = 2P(Z \le 0,64) - 1 = 2 \cdot 0,7389 - 1 = 0,4778 \Longrightarrow 47,78\,\%$

Problema 5.18.2 El gasto que realizan los jóvenes de una determinada ciudad durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 6 euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple, y se obtiene que el intervalo de confianza para la media es $(24,47;26,43)$ con un nivel de confianza del 95 %. Calcula el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se ha seleccionado otra muestra de tamaño 49 para estimar μ Calcula el error máximo admisible cometido para dicha estimación con un nivel de confianza del 97 %.

Solución:

$$N(\mu;6)$$

a) $NC = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$IC = (24,47;26,43) \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X} = \dfrac{24,47+26,43}{2} = 25{,}45 \\ 2E = 26,43 - 24,47 = 1,96 \Longrightarrow E = 0,98 \end{cases}$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,96\dfrac{6}{\sqrt{n}} = 0,98 \Longrightarrow n \ge \left(\dfrac{1,96\cdot 6}{0,98}\right)^2 = 144 \Longrightarrow n = 144$

b) $n = 49$ y $NC = 97\,\%$

$NC = 0,97 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\dfrac{6}{\sqrt{49}} = 1,86$

5.18.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.18.3 Según un estudio de la Dirección General de Tráfico el número de horas de prácticas necesarias para la obtención del carnet de conducir sigue una distribución normal $N(24,9)$.

a) Calcula la probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas.

b) ¿Cuántas horas ha necesitado Andrea para conseguir el carnet de conducir, si se sabe que el 89 % de los conductores y conductoras ha necesitado más horas que ella?

Solución:

$$N(24;9)$$

a) $P(X \le 20) = P\left(Z \le \dfrac{20-24}{9}\right) = P\left(Z \le -0,44\right) = 1 - P\left(Z \le 0,44\right) = 1 - 0,67 = 0,33$

b) $P(X \ge a) = 0,89 \Longrightarrow P(X \ge a) = P\left(Z \ge \dfrac{a-24}{9}\right) = 1 - P\left(Z \le \dfrac{a-24}{9}\right) = 0,89 \Longrightarrow P\left(Z \le \dfrac{a-24}{9}\right) = 0,11 \Longrightarrow P\left(Z \le -\dfrac{a-24}{9}\right) = 1 - 0,11 = 0,89 \Longrightarrow -\dfrac{a-24}{9} = 1,225 \Longrightarrow a = 12,975$

Problema 5.18.4 Para conocer el gasto medio anual que las familias de una determinada población realizan en servicios de hostelería, se ha tomado una muestra aleatoria de familias a partir de la cual se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media es $(820,830)$ con un nivel de confianza del 95 %.
Se sabe que el gasto anual tiene una distribución normal con desviación típica 80 euros.

a) Calcula la media obtenida a partir de la muestra.

b) Calcula el número de familias que han formado parte de la muestra.

Solución:

$$N(\mu; 80)$$

a) $IC = (820, 830) \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X} = \dfrac{820+830}{2} = 825 \\ 2E = 830 - 820 = 106 \Longrightarrow E = 5 \end{cases}$

b) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,96\dfrac{80}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \ge \left(\dfrac{1,96 \cdot 80}{5}\right)^2 = 983,4496 \Longrightarrow n = 984$