



Problemas de Matemáticas II Ciencias y Tecnología

Por materias
(PAU 2020-2021)

Prof: **Isaac Musat Hervás**
última actualización:

7 de octubre de 2021

“www.musat.net”

Índice general

1. Álgebra	11
1.1. Resúmenes teóricos	11
1.2. Andalucía	15
1.2.1. Modelo de 2021	15
1.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	16
1.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	17
1.3. Aragón	18
1.3.1. Modelo de 2020	18
1.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	20
1.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	22
1.4. Asturias	24
1.4.1. Modelo de 2020	24
1.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	25
1.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	27
1.5. Cantabria	28
1.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	28
1.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	29
1.6. Castilla La Mancha	31
1.6.1. Modelo de 2020	31
1.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	32
1.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	33
1.7. Castilla León	34
1.7.1. Modelo de 2021	34
1.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	35
1.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	36
1.8. Cataluña	38
1.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	38
1.8.2. Convocatoria Extraordinaria septiembre de 2021	39
1.9. Comunidad Valenciana	41
1.9.1. Modelo de 2021	41
1.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	42
1.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	44
1.10. Extremadura	45
1.10.1. Modelo de 2021	45
1.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	46
1.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	47
1.11. Galicia	48

1.11.1. Modelo de 2021	48
1.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	49
1.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	50
1.12. Islas Baleares	51
1.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	51
1.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	53
1.13. Islas Canarias	54
1.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	54
1.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	55
1.14. La Rioja	56
1.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	56
1.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	58
1.15. Madrid	61
1.15.1. Modelo de 2021	61
1.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	62
1.15.3. Convocatoria Ordinaria junio (coincidente) de 2021	64
1.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	65
1.16. Murcia	67
1.16.1. Modelo de 2021	67
1.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	68
1.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	69
1.17. Navarra	71
1.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	71
1.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	72
1.18. País Vasco	74
1.18.1. Modelo de 2020	74
1.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	75
1.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	76
2. Geometría	79
2.1. Resúmenes teóricos	79
2.2. Andalucía	83
2.2.1. Modelo de 2021	83
2.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	83
2.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	84
2.3. Aragón	85
2.3.1. Modelo de 2020	85
2.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	86
2.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	87
2.4. Asturias	88
2.4.1. Modelo de 2020	88
2.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	89
2.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	90
2.5. Cantabria	92
2.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	92
2.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	93
2.6. Castilla La Mancha	94
2.6.1. Modelo de 2020	94
2.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020	95
2.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020	97

2.7. Castilla León	97
2.7.1. Modelo de 2021	97
2.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	98
2.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	99
2.8. Cataluña	100
2.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	100
2.8.2. Convocatoria Extraordinaria septiembre de 2021	100
2.9. Comunidad valenciana	101
2.9.1. Modelo de 2021	101
2.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	102
2.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	104
2.10. Extremadura	105
2.10.1. Modelo de 2021	105
2.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	106
2.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	107
2.11. Galicia	108
2.11.1. Modelo de 2021	108
2.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	109
2.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	110
2.12. Islas Baleares	111
2.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	111
2.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	112
2.13. Islas Canarias	114
2.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	114
2.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	115
2.14. La Rioja	116
2.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	116
2.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	117
2.15. Madrid	118
2.15.1. Modelo de 2021	118
2.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	120
2.15.3. Convocatoria Ordinaria junio de 2021 (coincidente)	122
2.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	123
2.16. Murcia	125
2.16.1. Modelo de 2021	125
2.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	126
2.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	127
2.17. Navarra	128
2.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	128
2.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	130
2.18. País Vasco	131
2.18.1. Modelo de 2020	131
2.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	132
2.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	133

3. Análisis	135
3.1. Resúmenes teóricos	135
3.2. Andalucía	140
3.2.1. Modelo de 2021	140
3.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	142
3.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	144
3.3. Aragón	146
3.3.1. Modelo de 2020	146
3.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	148
3.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	150
3.4. Asturias	153
3.4.1. Modelo de 2020	153
3.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	154
3.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	155
3.5. Cantabria	157
3.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	157
3.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	158
3.6. Castilla La Mancha	160
3.6.1. Modelo de 2020	160
3.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	162
3.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	164
3.7. Castilla León	166
3.7.1. Modelo de 2021	166
3.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	169
3.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	171
3.8. Cataluña	173
3.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	173
3.8.2. Convocatoria Extraordinaria septiembre de 2021	175
3.9. Comunidad valenciana	178
3.9.1. Modelo de 2021	178
3.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	180
3.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020	182
3.10. Extremadura	184
3.10.1. Modelo de 2021	184
3.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	186
3.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	188
3.11. Galicia	190
3.11.1. Modelo de 2021	190
3.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	192
3.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	193
3.12. Islas Baleares	195
3.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	195
3.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	196
3.13. Islas Canarias	198
3.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	198
3.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	199
3.14. La Rioja	201
3.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	201
3.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	203
3.15. Madrid	205

3.15.1. Modelo de 2021	205
3.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020	208
3.15.3. Convocatoria Ordinaria-Coincidente junio de 2021	209
3.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020	211
3.16. Murcia	213
3.16.1. Modelo de 2021	213
3.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	215
3.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	216
3.17. Navarra	217
3.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	217
3.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	220
3.18. País Vasco	222
3.18.1. Modelo de 2020	222
3.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	224
3.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	226
4. Probabilidad	229
4.1. Resúmenes teóricos	229
4.2. Andalucía	233
4.3. Aragón	233
4.3.1. Modelo de 2020	233
4.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	233
4.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020	233
4.4. Asturias	233
4.4.1. Modelo de 2020	233
4.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	234
4.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	234
4.5. Cantabria	235
4.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	235
4.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	235
4.6. Castilla La Mancha	236
4.6.1. Modelo de 2020	236
4.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	237
4.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	237
4.7. Castilla León	238
4.7.1. Modelo de 2021	238
4.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	239
4.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	239
4.8. Cataluña	240
4.9. Comunidad Valenciana	240
4.10. Extremadura	240
4.10.1. Modelo de 2021	240
4.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	241
4.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	241
4.11. Galicia	241
4.11.1. Modelo de 2021	241
4.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	242
4.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	242
4.12. Islas Baleares	243
4.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	243

4.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	243
4.13. Islas Canarias	244
4.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	244
4.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	245
4.14. La Rioja	245
4.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	245
4.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	245
4.15. Madrid	246
4.15.1. Modelo de 2021	246
4.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	246
4.15.3. Convocatoria Ordinaria junio-coincidente de 2021	247
4.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	247
4.16. Murcia	248
4.16.1. Modelo de 2021	248
4.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	248
4.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	249
4.17. Navarra	249
4.18. País Vasco	250
4.18.1. Modelo de 2020	250
4.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	250
4.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	251
5. Estadística	253
5.1. Resúmenes teóricos	253
5.2. Andalucía	256
5.3. Aragón	256
5.3.1. Modelo de 2020	256
5.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	256
5.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	257
5.4. Asturias	257
5.4.1. Modelo de 2020	257
5.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	258
5.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	258
5.5. Cantabria	259
5.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	259
5.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	259
5.6. Castilla La Mancha	259
5.6.1. Modelo de 2020	259
5.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	260
5.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	260
5.7. Castilla León	260
5.7.1. Modelo de 2021	260
5.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	261
5.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	261
5.8. Cataluña	261
5.9. Comunidad Valenciana	262
5.10. Extremadura	262
5.10.1. Modelo de 2021	262
5.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	262
5.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	263

5.11. Galicia	263
5.11.1. Modelo de 2021	263
5.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	263
5.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	264
5.12. Islas Baleares	264
5.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	264
5.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	265
5.13. Islas Canarias	265
5.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	265
5.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	266
5.14. La Rioja	267
5.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	267
5.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	267
5.15. Madrid	268
5.15.1. Modelo de 2021	268
5.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	268
5.15.3. Convocatoria Ordinaria-coincidente junio de 2021	269
5.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	270
5.16. Murcia	270
5.16.1. Modelo de 2021	270
5.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	271
5.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	271
5.17. Navarra	272
5.18. País Vasco	272
5.18.1. Modelo de 2020	272
5.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021	272
5.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021	273

“www.musat.net”

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Resúmenes teóricos

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- La matriz tiene que ser cuadrada

a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

■ Propiedades:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } |A^T| = |A|$$

$$\text{c) } |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

$$\text{i) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}, \text{ es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.}$$

$$\text{j) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}, \text{ es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.}$$

Matriz Adjunta:

■ Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij} .

■ Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinante de una matriz por adjuntos:

Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.

A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.

Rango de una matriz

Es el número de filas linealmente independientes.

De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.

Si $|A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si $\text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) = n^\circ$ de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si $\text{Rango}(\bar{A}) = \text{Rango}(A) < n^\circ$ de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si $\text{Rango}(\bar{A}) \neq \text{Rango}(A)$ se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que $\text{Rango}(A) < m$ (n° de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- Si $\text{Rango}(A) = m$ (nº de incógnitas) $\implies$ SCD $\implies x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ solución trivial.
- Si $\text{Rango}(A) < m$ (nº de incógnitas) $\implies$ SCI $\implies$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer

Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, B)$, entonces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \dots, C_n|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \dots, C_n|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \dots, B|}{|A|}$$

1.2. Andalucía

1.2.1. Modelo de 2021

Problema 1.2.1 Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

$$AX = XA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -c = b \\ -d = -a \\ a = d \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \\ a + d = 1 \\ ad - cb = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = d = \frac{1}{2} \\ b = -c \\ \frac{1}{4} + b = 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = d = \frac{1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ c = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a = d = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ c = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ o } X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 1.2.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 2m^2 - 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$$

considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^t A = B^t$, donde X^t , B^t denotan las traspuestas. Discútelas según los distintos valores de m .

Solución:

$$X^t A = B^t \Rightarrow (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2m^2 - 1 \ m \ 1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2-m)x + y + mz = 2m^2 - 1 \\ x + my + z = m \\ (2m-1)x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2-m & 1 & m & 2m^2 - 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$|A| = -2(m^3 - 3m + 2) = 0 \Rightarrow m = -2 \ m = 1$$

■ Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

■ Si $m = -2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 = F_2 \\ F_2 = F_1 \\ 2F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 + 5F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -6 & 15 \\ 0 & -9 & 6 & -9 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema incompatible.

- Si $m = 1$: $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$ Tenemos $F_1 = F_2 = F_3 \Rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 1 < n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

1.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.2.3 Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de m .
- Resuelve el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

$$\text{a) } \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m + 2/5 \end{array} \right), |A| = -6m^2 - 15m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ y } m = -5/2.$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq -5/2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -5/2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -5/2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -15/2 & 0 & -21/10 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 1/2 F_1 \\ F_3 + 2/5 F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5/2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -67/4 & -1 & -17/4 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $m = 0$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2/5 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 = F_3 \\ F_2 \\ F_3 = F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/5 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $m = 0$:

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

A la vista de esta solución podemos afirmar que no hay ninguna solución con $x = 0$. El valor de x es siempre $\frac{2}{5}$.

Si $m \neq 0$ y $m \neq -5/2$ sustituimos $x = 0$ en el sistema y tenemos:

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ -4y + 2z = 0 \\ 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases}$$

El sistema formado por las dos primeras ecuaciones es incompatible, luego no hay soluciones al sistema con $x = 0$.

Problema 1.2.4 En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Solución:

Sean x el número de botellas, y el número de garrafas y z el número de bidones.

$$\begin{cases} 50x + 100y + 1000z = 10000 \\ x = 2y \\ x + y + z = 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 20z = 200 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 15 \\ z = 7 \end{cases}$$

1.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.2.5 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$.

b) Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz X que verifica $A^4X + B = AC$.

Solución:

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = -A^{-1}$$

$$\text{b) } A^4 X + B = AC \Rightarrow A^2 A^2 X = AC - B \Rightarrow (-A^{-1})(-A^{-1})X = AC - B \Rightarrow$$

$$A(-A^{-1})(-A^{-1})X = A(AC - B) \Rightarrow A(-A^{-1})X = A^2(AC - B) \Rightarrow X = A^2(AC - B) =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$

Problema 1.2.6 Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A , B y C . Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C .

- a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta.
- b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?

Solución:

Sean x el número de viajes por la ruta A , y el número de viajes por la ruta B y z el número de viajes por la ruta C .

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 70 \\ y = x + z \\ 2(x + z) = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 70 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 35 \end{cases} \Rightarrow F_3 = F_1 + F_2 \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado. El sistema tiene infinitas soluciones:}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35 - \lambda \\ y = 35 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 70 \\ y = x + z \\ 2z = y - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 70 \\ x - y + z = 0 \\ y - 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 35 \\ z = 15 \end{cases}$$

1.3. Aragón

1.3.1. Modelo de 2020

Problema 1.3.1 Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz X que resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$AX - X = B$$

Solución:

$$AX - X = B \Rightarrow (A - I)X = B \Rightarrow X = (A - I)^{-1}B = \left(\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.3.2 Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie si existe la matriz inversa de B .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|B| = 0 \Rightarrow \nexists B^{-1}$.

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.3.3 Sea k un parámetro real y considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$$

Determine los valores del parámetro real k , para lo que ese sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array} \right), |A| = -(k^2 + k - 6) = 0 \Rightarrow k = -3 \text{ y } k = 2.$$

- Si $k \neq -3$ y $k \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $k = -3$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 4F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $k = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

1.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.3.4 Dada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Estudie el rango de la matriz $A - kI$ según los valores de $k \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- b) Calcule la inversa de $A - kI$ para $k = 0$.

Solución:

a) $A - kI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 0 & -2 \\ 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 0 & 3-k \end{pmatrix},$

$$|A - kI| = (2 - k)(k^2 - 3k + 2) = 0 \Rightarrow k = 2 \text{ y } k = 1.$$

☛ Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

☛ Si $k = 1$:

$$A - kI = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = 0 \quad \left| \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

☛ Si $k = 2$:

$$A - kI = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_1 = -2F_2 = -2F_3 \Rightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 1$$

b) Si $k = 0 \Rightarrow A - kI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - kI)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 1.3.5 Se pide:

a) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e + 2f & 2f \\ -g & -h - i & -i \\ a & b + c & c \end{vmatrix}$

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^T\right)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, donde A^T es la matriz traspuesta de A .

Solución:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ d & e+f & f \\ -g & -h-i & -i \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ d & e+f & f \\ g & h+i & i \end{vmatrix} =$$

$$-2 \left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c \\ d & f & f \\ g & i & i \end{vmatrix} \right) = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$$

$$\text{b) } A - \frac{1}{2}A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.3.6 Se pide:

a) Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solución:

a)

$$\begin{cases} \left(2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \right) (-3) \\ \left(3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right) (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6X - 9Y = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -9 & -21 \end{pmatrix} \\ 6X - 4Y = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow -13Y = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ -13 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y = -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ -13 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en una de las ecuaciones:

$$2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 2X + 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$2X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^1 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -15 & 1 \end{pmatrix} \text{ luego} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.3.7 Dada la siguiente matriz: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$

- Estudie el rango de la matriz $A = I + P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k \in \mathbb{R}$.
- Para $k = 1$, calcule la inversa de A del apartado anterior.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } A = I + P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & -2k \\ 1 & -k & 1 \end{pmatrix}, \\ |A| &= -2k^2 - 3k - 1 = 0 \Rightarrow k = -1 \text{ y } k = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

• Si $k \neq 1$ y $k \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

• Si $k = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

• Si $k = -\frac{1}{2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b) Si $k = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

Problema 1.3.8 Dadas las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.
 b) Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial: $I + BX = C_1 C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $|B| = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $I + BX = C_1 C_2 \Rightarrow BX = C_1 C_2 - I \Rightarrow X = B^{-1}(C_1 C_2 - I) =$
 $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$
 $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -7/2 & 5/2 & -1 \\ -5/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 1.3.9 Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$$

- a) Discuta según los valores de $a \in \mathbb{R}$ que tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.
 b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & a & -2 \end{array} \right), |A| = 13a - 13 = 0 \Rightarrow a = 1.$

- Si $a \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{array} \right) = [F_2 \leftrightarrow F_1] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 0$:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y = -2 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{13} \\ y = \frac{8}{13} \\ z = 0 \end{cases}$$

1.4. Asturias

1.4.1. Modelo de 2020

Problema 1.4.1 Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = 2a \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right), |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2.$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3a = 0 \Rightarrow a = 1$$

■ Si $a \neq 1 \Rightarrow |A_4| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

■ Si $a = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 1.4.2 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:

a) Su rango.

- b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes.
- c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes.

Solución:

$$a) |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3.$$

- b) Por ser el rango 3 y tener cuatro columnas una de ellas debe de ser combinación de las otras.
Por ejemplo: $C_2 = 0C_1 + 3C_3 + 0C_4 = 3C_3$.
- c) Como el rango es 3 las tres filas son linealmente independientes. No se puede obtener una fila por combinación lineal de las otras.

1.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.4.3 Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros. Se pide:

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio.
- b) Si le obligasen a rebajar un 20% el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería?
- c) ¿Cuál sería el precio del viaje a las Islas Maldivas necesario para compensar la bajada del 20% del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia).

Solución:

Sean x precio de un viaje al Caribe, y precio de un viaje a las Maldivas y z precio de un viaje a Tailandia.

$$a) \begin{cases} 10x + 10y + 10z = 12000 \\ 10x + 20z = 13000 \\ 10x + 10y = 7000 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 1200 \\ x + 2z = 1300 \\ x + y = 700 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 300\text{€} \\ y = 400\text{€} \\ z = 500\text{€} \end{cases}$$

- b) $300 \cdot 0,2 = 60\text{€}$ sería el descuento del 20% del precio por viaje. al Caribe. Como se han vendido 30 viajes $\implies 30 \cdot 60 = 1800\text{€}$ de pérdida.
- c) Hay que repartir 1800€ en 20 viajes a las Maldivas $\frac{1800}{20} = 90\text{€}$ Luego $y = 400 + 90 = 490\text{€}$

Problema 1.4.4 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- a) Escribe el sistema de ecuaciones $AX = X$ en la forma $BX = O$.
- b) Estudia para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones.

c) Para $a = 0$ calcula, si existe, la inversa de A .

Solución:

a) $AX = X \Rightarrow AX - X = O \Rightarrow (A - I)X = 0$, llamando $B = A - I \Rightarrow BX = O$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)x - z = 0 \\ -x - y = 0 \\ y + (a-1)z = 0 \end{cases}$$

b) Se trata de un sistema homogéneo y son siempre compatibles, luego cuando no sea compatible determinado será indeterminado. No obstante se comprobará y se sacarán las soluciones. $|B| = 2a - a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ y $a = 2$.

• Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(B) = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ sistema compatible determinado. La solución única sería la trivial $x = y = z = 0$.

• Si $a = 0$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} -x - z = 0 \\ -x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

• Si $a = 2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\text{c) Si } a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.4.5 Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + z = a \\ 2x - y - z = -1 \\ x + az = a \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

- a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de a .
b) Resuélvelo para los casos en que el sistema sea compatible indeterminado.

Solución:

a) $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a & a \end{array} \right), |A| = 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1.$

- Si $a \neq \pm 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

- Si $a = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ Sistema incompatible

- b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x - y - z = -1 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.4.6 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

- a) Si existe, su inversa.
b) La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica:
 $(X + A)^2 - X^2 - XA = I_3$ (I_3 matriz identidad de orden 3).

Solución:

a) $|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (X + A)^2 - X^2 - XA &= X^2 + A^2 + 2XA - X^2 - XA = A^2 + XA = I_3 \implies (A + X)A = \\
 I_3 \implies A + X &= A^{-1} \implies X = A^{-1} - A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

1.5. Cantabria

1.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.5.1 Considera el vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}^2$, y la matriz de rotación

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- Comprueba para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R(\theta) \cdot v$ rota el vector v un ángulo θ en sentido antihorario.
- Comprueba para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R^2(\theta) \cdot v$ rota el vector v un ángulo 2θ en sentido antihorario.
- Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ .
- Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$.

Solución:

- Si $\theta = \frac{\pi}{2} \implies R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $R\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, el vector v ha girado $\theta = \frac{\pi}{2}$ dando como resultado el w . El giro ha sido en sentido contrario a las agujas del reloj y el módulo de ambos vectores es el mismo e igual a 1. Además u y v son perpendiculares ($u \cdot v = 0$)
- $R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 $R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, el vector v ha girado $2\theta = \pi$ dando como resultado el w . El giro ha sido en sentido contrario a las agujas del reloj y el módulo de ambos vectores es el mismo e igual a 1. Además $u = -v$.
- $|R(\theta)| = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \neq 0 \implies \exists R^{-1}(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}$
- $R^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R(-\theta)$

Problema 1.5.2 Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ .

- Determina para que valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

b) Determina para que valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

c) Determina para que valores de λ el sistema no tiene solución.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -1 & 1 \\ 4 & -\lambda & 2\lambda - 2 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = 4 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

☛ Si $\lambda \neq \pm 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

☛ Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)}$$

☛ Si $\lambda = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$$

a) Como se ha visto el sistema tiene infinitas soluciones para $\lambda = 2 \Rightarrow 2x - y = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

b) Como se ha visto el sistema tiene solución única para $\lambda \neq \pm 2$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\lambda - 2 & -\lambda \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{1}{\lambda + 2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & 2\lambda - 2 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{2(\lambda + 1)}{\lambda + 2}$$

c) Como se ha visto el sistema no tiene solución para $\lambda = -2$

1.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.5.3 Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 3\lambda \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ .

a) Determina para que valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

b) Determina para que valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

c) Determina para que valores de λ el sistema no tiene solución.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda^2 & 3 & 3\lambda \\ 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3$$

☛ Si $\lambda \neq \pm 3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

☛ Si $\lambda = 3$:
 $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)}$

☛ Si $\lambda = -3$:
 $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & -9 \\ 3 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 18 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$

a) Como se ha visto el sistema tiene infinitas soluciones para $\lambda = 3 \Rightarrow 3x + y = 3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$$

b) Como se ha visto el sistema tiene solución única para $\lambda \neq \pm 3$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3\lambda & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{\lambda + 3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda^2 & 3\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3\lambda}{\lambda + 3}$$

c) Como se ha visto el sistema no tiene solución para $\lambda = -3$

Problema 1.5.4 Considera la ecuación matricial $XA - 2X = A$, en donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix}$, siendo a una constante real.

- Estudia el rango de A en función del parámetro a .
- Indica para que valores se puede calcular la inversa de A .
- Despeja X de la ecuación matricial.
- Calcula X para $a = 2$.

Solución:

a) $|A| = -4 + a = 0 \Rightarrow a = 4$.

☛ Si $a = 4 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 1$.

☛ Si $a \neq 4 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

b) Si $a \neq 4 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{4\}$

c) $XA - 2X = A \Rightarrow X(A - 2I) = A \Rightarrow X = A(A - 2I)^{-1}$

d) $X = A(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.6. Castilla La Mancha

1.6.1. Modelo de 2020

Problema 1.6.1 Se pide:

- a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax + 2y = a^2 \\ -x + y + z = 5 \\ x - ay - z = -(4 + a) \end{cases}$$

- b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$.

Solución:

a) $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & a^2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -a & -1 & -(4+a) \end{array} \right), |A| = a(a-1) = 0 \implies a = 0. \text{ y } a = 1$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \end{array} \right) =$$
$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = 0$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \longrightarrow F_3 \\ F_2 \\ F_3 \longrightarrow F_1 \end{array} \right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) =$$
$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \implies \text{Sistema incompatible}$$

- b) $a = 1$:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y + z = 5 \\ x - y - z = -5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 6 - 3\lambda \end{cases}$$

Problema 1.6.2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A .
- b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $AX - 2B = C$.

Solución:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } AX - 2B = C \Rightarrow X = A^{-1}(C + 2B) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{pmatrix}$$

1.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.6.3 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcula razonadamente el determinante de A^T , es decir, la matriz traspuesta de A .
- b) Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $XA + 3A = B$.

Solución:

$$\text{a) } |A^T| = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 1 - (2 + 0 + 0) = 1$$

$$\text{b) } XA + 3A = B \Rightarrow XA = B - 3A \Rightarrow X = (B - 3A)A^{-1}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Problema 1.6.4 Se pide:

- a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = a + 1 \\ ax + z = a - 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

Solución:

$$\text{a) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = 2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 1$$

☛ Si $a \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible determinado (solución única)}$

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$$

b) Si $a = 0$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

1.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.6.5 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A .

b) Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.

Solución:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } AX + 3I = A \Rightarrow AX = A - 3I \Rightarrow X = A^{-1}(A - 3I) =$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 11/2 & -3/2 \\ 3/2 & -9/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.6.6 Se pide:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x + z = a \\ ax + 2y + z = 3 \end{cases}$$

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución:

$$\text{a) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ a & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ y } a = 1$$

• Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = n^{\circ} \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

• Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)}$$

• Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$$

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + z = 2 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

1.7. Castilla León

1.7.1. Modelo de 2021

Problema 1.7.1 Se pide:

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ .

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$

Solución:

$$\text{a) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right), |A| = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ y } \lambda = 1.$$

■ Si $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^{\circ} \text{ de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $\lambda = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Problema 1.7.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, calcúlense a y b para que se verifiquen $|MA| = 2$ y $|M + B| = 3$, donde se esta usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz.

Solución:

$$|MA| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{array}{cc} 3 & 7 \\ a+2b & 2a+5b \end{array} \right| = b - a = 2$$

$$|M + B| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ a+1 & b+1 \end{array} \right| = -a + 2b + 1 = 3 \Rightarrow -a + 2b = 2$$

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ -a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$$

1.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.7.3 Se pide:

- a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

- b) Resolverlo para $\lambda = -1$

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $|A| = 3(\lambda + 1) = 0 \implies \lambda = -1$.

- Si $\lambda \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única, la trivial: $x = y = z = 0$)
- Si $\lambda = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Un sistema homogéneo no puede ser incompatible.

b) $\lambda = -1$:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Problema 1.7.4 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa.
- b) Para $n = 2$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-1)^2 & 0 \\ n-2 & 1 \end{pmatrix}$
 $|A^2| = (n-1)^2 = 0 \implies n = 1 \implies \exists (A^2) \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

b) Si $n = 2 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
 $AX + A = 2I \implies AX = 2I - A \implies X = A^{-1}(2I - A)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.7.5 Se pide:

- a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - \lambda y = 1 \\ 2x + \lambda z = 1 \end{cases}$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$

Solución:

$$\text{a) } \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \lambda & 1 \end{array} \right), |A| = \lambda - \lambda^2 = 0 \implies \lambda = 0 \text{ y } \lambda = 1.$$

☛ Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $\lambda = 0$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$\implies$ Sistema incompatible

☛ Si $\lambda = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies$$

Sistema compatible indeterminado

b) $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Problema 1.7.6 Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar la matriz P que verifica que $M^{-1}PM = N$.

Solución:

$$M^{-1}PM = N \implies MM^{-1}PMM^{-1} = MNM^{-1} \implies P = MNM^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1.8. Cataluña

1.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.8.1 Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real p :

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro p .
b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $p = 2$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -p^3 + 3p^2 - 2p = 0 \Rightarrow p = 0, p = 1 \text{ y } p = 2$

• Si $p \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

• Si $p = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$$

• Si $p = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$$

• Si $p = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)}$$

b) Si $p = 2$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ y + 3z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.8.2 Se pide:

- a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial $A^2X = A - 3I$ donde I es la matriz identidad.
- b) Una matriz cuadrada M satisface que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, en la que I es la matriz identidad. Justificar que M es invertible y expresar la inversa de M en función de las matrices M e I .

Solución:

a) $A^2X = A - 3I \implies X = (A^2)^{-1}(A - 3I) =$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \right)^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Si $|M| = 0$ tendríamos que $|M^3 - 3M^2 + 3M - I| = 0 \implies |M|^3 - 3|M|^2 + 3|M| - |I| = 0 - 0 + 0 - 1 \stackrel{?}{=} 0$ lo cual es falso por lo que $|M| \neq 0 \implies \exists M^{-1}$
 $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0 \implies M^3 - 3M^2 + 3M = I \implies$
 $M(M^2 - 3M + 3I) = I \implies M$ es invertible y su inversa es $M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$.

1.8.2. Convocatoria Extraordinaria septiembre de 2021

Problema 1.8.3 Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real k :

$$\begin{cases} x + ky + z = 3 + k \\ kx + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k .
- b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $k = 1$, y haga una interpretación geométrica.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 3+k \\ k & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right) \implies |A| = -k^2 + 4k - 3 = 0 \implies k = 1 \text{ y } k = 3$

• Si $p \in \mathbb{R} - \{1, 3\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies$ sistema compatible determinado (solución única)

☛ Si $k = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -8 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema in-} \\ \text{compatible (no tiene solución)}$$

☛ Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right) = [F_1 = F_2] \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado (infinitas} \\ \text{soluciones)}$$

b) Si $k = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} - \lambda \\ y = \frac{7}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Dos planos coinciden y el tercero les corta en una recta.

Problema 1.8.4 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en que a es un parámetro real.

a) Busque para qué valores de la matriz A es invertible.

b) Compruebe que, para el caso $a = 3$, la matriz A es invertible y resuelva la ecuación matricial

$$AX = B - 3I, \text{ en el que } B \text{ es la matriz } B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = a^3 - 3a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1 \text{ y } a = 2$.
Luego $\exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$

b) Como $a = 3 \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\} \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 13/3 & -3 & -1 \\ -14/3 & 7/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B - 3I \Rightarrow X = A^{-1}(B - 3I) =$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 13/3 & -3 & -1 \\ -14/3 & 7/2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\ \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 13/3 & -3 & -1 \\ -14/3 & 7/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

1.9. Comunidad Valenciana

1.9.1. Modelo de 2021

Problema 1.9.1 Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}, \text{ donde } \alpha \text{ es un parámetro real.}$$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado.
- La solución del sistema cuando $\alpha = -1$.
- El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$.

Solución:

a) $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha + 1 \end{array} \right), |A| = -1 \neq 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^o$
de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

b) Si $\alpha = -1 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3z = -1 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -4 \\ z = -5 \end{cases}$

c) $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha + 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 0 & -4 & 1 & 10 - \alpha \\ 0 & -2 & 1 & -\alpha + 2 \end{array} \right) =$
 $\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 0 & -4 & 1 & 10 - \alpha \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha - 6 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = 9 + 2\alpha \\ y = -4 \\ z = -6 - \alpha \end{cases}$

Como $x + y + z = 0 \Rightarrow (9 + 2\alpha) + (-4) + (-6 - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = -4 \\ z = -7 \end{cases}$

Problema 1.9.2 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ sólo admite una solución.
- Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$.
- Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100} , obtener el valor β tal que $A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $AX = \alpha X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = \alpha x \\ -x + 6y = \alpha y \end{cases} \Rightarrow,$
$$\begin{cases} (1 - \alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (6 - \alpha)y = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema homogéneo.

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{vmatrix} = a^2 - 7a + 10 = 0 \implies a = 2 \text{ y } a = 5.$$

El sistema tiene solución única para cualquier valor real a distinto de $a = 2$ y $a = 5$.
($\forall a \in \mathbb{R} - \{2, 5\}$).

b) Si $\alpha = 5$:

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \implies AX = 2X. \end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$AX = 2X,$$

$$A^2X = AAX = 2AX = 2^2X,$$

$$A^3X = AA^2X = A2^2X = 2^3X,$$

$$A^4X = AA^3X = A2^3X = 2^4X, \dots, A^{100}X = 2^{100}X \implies \beta = 2^{100}.$$

1.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.9.3 Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + (a-1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}.$$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a .

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

Solución:

$$\text{a) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{array} \right), |A| = 4 - a^2 = 0 \implies a = \pm 2$$

☛ Si $a \neq \pm 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y es un sistema compatible determinado.

☛ Si $a = -2$:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{array} \right) = \\ \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \implies \text{sistema incompatible} \end{aligned}$$

☛ Si $a = 2$:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array} \right) = \\ \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 5F_2 \end{array} \right] &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{sistema compatible indeterminado} \end{aligned}$$

b) Tenemos:

• El sistema es compatible determinado si $a \neq \pm 2$. Por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{2a+3}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4}{a+2}$$

• El sistema es compatible indeterminado si $a = 2$:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 1.9.4 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m .
- Explicad cuándo la matriz A es invertible.
- Resolved la ecuación $XA = I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m = 1$.

Solución:

a) $|A| = -m(m^2 + 2m + 1) = 0 \implies m = 0 \text{ y } m = -1$

• Si $m \neq 0$ y $m \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

• Si $m = 0 \implies A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

• Si $m = -1 \implies A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

b) La matriz es invertible cuando su rango sea 3, o lo que es lo mismo, cuando su determinante es distinto de cero:

$$\exists A^{-1} \forall m \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

c) Si $m = 1 \implies A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

$$XA = I \implies X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

1.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.9.5 Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}, \text{ donde } m \text{ es un parámetro real. Se pide:}$$

- La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m .
- La solución del sistema cuando $m = 1$.
- Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Solución:

$$\text{a) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & m & m \end{array} \right), |A| = 3m = 0 \Rightarrow m = 0$$

• Si $m \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y es un sistema compatible determinado.

• Si $m = 0$: Sistema homogéneo y, por tanto, sistema compatible indeterminado. Un sistema homogéneo no puede ser incompatible, porque siempre existe la solución trivial.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -9 & -15 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\text{b) Si } m = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\text{c) Si } m = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3}\lambda \\ y = -\frac{5}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.9.6 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ Obtened}$$

- El rango de la matriz A según los valores del parámetro real a .
- Una matriz C tal que $AC = 16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$.
- El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución.

Solución:

a) $|A| = 16 - 4a^2 = 0 \implies a = \pm 2$

• Si $a \neq \pm 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

• Si $a = 2 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

• Si $a = -2 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

b) Si $a = 0 \implies |A| \neq 0 \implies$ matriz A es invertible

$$AC = 16I \implies C = A^{-1}16I = 16 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$16 \begin{pmatrix} 1/8 & -3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{array} \right)$$

Como $F_2 = -F_1$ y $F_3 = 2F_1 \implies \text{Rango}(B) = 1 = \text{Rango}(\overline{B}) < n^\circ$ de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones:

$$x + 2y + 3z = 1 \implies \begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1.10. Extremadura

1.10.1. Modelo de 2021

Problema 1.10.1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobar la identidad $A^2 = 2A - I$. Utilizando la fórmula anterior, calcular A^4 .

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego $A^2 = 2A - I$.

$$A^4 = A^2 A^2 = A^2(2A - I) = 2A^3 - A^2 = 2AA^2 - (2A - I) = 2A(2A - I) - 2A + I = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I$$

$$A^4 = 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

Problema 1.10.2 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \alpha x + y = 1 + \alpha \\ -3x - 2y + \alpha z = -3 - \alpha \\ (1 + \alpha)x + y - z = 2 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 0 & 1 + \alpha \\ -3 & -2 & \alpha & -3 - \alpha \\ 1 + \alpha & 1 & -1 & 2 \end{array} \right), |A| = 3\alpha - 3 = 0 \implies \alpha = 1.$$

- Si $\alpha \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $\alpha = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Si $\alpha = 1$:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -3x - 2y + z = -4 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

1.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.10.3 Demostrar que la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = O$ y determinar los escalares λ_1 y λ_2 de $\mathbb{R}$ (donde I y O son las matrices 2×2 identidad y cero)

Solución:

$$M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = O \implies \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5 & \lambda_1 + 4 \\ \lambda_1 + 4 & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5 = 0 \\ \lambda_1 + 4 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 1.10.4 Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - y = \lambda \\ x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda \end{cases}$$

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & \lambda \end{array} \right), |\bar{A}| = \lambda(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \text{ y } \lambda = 0.$$

☛ Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 0 \Rightarrow |\bar{A}| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) \leq 2 \Rightarrow$ el sistema es incompatible. (No tiene solución)

☛ Si $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right) = \\ \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado} \\ &\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

☛ Si $\lambda = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\text{Sistema compatible indeterminado} \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \end{cases}$$

1.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.10.5 Sea la igualdad matricial $MX = N$, donde $M = \begin{pmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz X ? (Justificar la respuesta).

b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ es la matriz M invertible?

c) ¿Puede ser MN invertible para algún valor de $k \in \mathbb{R}$?

Solución:

a) $\begin{matrix} M & \cdot & X \\ 3 \times 3 & m \times n & 3 \times 2 \end{matrix} = \begin{matrix} N \\ 3 \times 2 \end{matrix} \implies \begin{matrix} X \\ 3 \times 2 \end{matrix}.$

b) $|M| = k^2 + k - 2 = 0 \implies k = -2 \text{ y } k = 1 \implies \exists M^{-1} \forall k \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}.$

c) $\begin{matrix} M & \cdot & N \\ 3 \times 3 & 3 \times 2 & 3 \times 2 \end{matrix} = \begin{matrix} MN \\ 3 \times 2 \end{matrix} \implies \nexists (MN)^{-1} \forall k \in \mathbb{R}. \text{ La matriz } MN \text{ no es cuadrada.}$

Problema 1.10.6 Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = a \\ ax + 2y = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 2 & 1 \end{array} \right), |\overline{A}| = 1 - a^2 = 0 \implies a = \pm 1.$$

☛ Si $\lambda \neq \pm 1 \implies |\overline{A}| \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) \leq 2 \implies$ el sistema es incompatible. (No tiene solución)

☛ Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) =$$

$\implies$ Sistema compatible determinado

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \implies$$

$$\text{Sistema compatible determinado} \implies \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

1.11. Galicia

1.11.1. Modelo de 2021

Problema 1.11.1 Se pide:

a) Suponiendo que A e X son matrices cuadradas y que $A + I$ es invertible, despeje X en la ecuación $A - X = AX$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule X tal que $A - X = AX$.

Solución:

a) $A - X = AX \implies AX + X = A \implies (A + I)X = A \implies X = (A + I)^{-1}A$.

b) $X = (A + I)^{-1}A = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$
 $\begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$

Problema 1.11.2 Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3 - m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{cases}$$

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{array} \right), |A| = 2m(m-3) = 0 \implies m = 0 \text{ y } m = 3.$$

■ Si $m \neq 0$ y $m \neq 3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

■ Si $m = 0$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

 $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{Sistema compatible indeterminado}$

■ Si $m = 3$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \implies \text{Sistema incompatible}$$

1.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.11.3 Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión 3×3 definida por

$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2 \\ (-1)^j(i-1) & \text{si } i \neq 2 \end{cases}$. Explique si A y $A + I$ son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j , e I es la matriz identidad)

Solución:

Siguiendo las indicaciones tenemos $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \implies$

$$|A| = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|A + I| = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.11.4 Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = m \\ my + 3z = 1 \\ x + (m + 2)y + (m + 1)z = m + 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array} \right), |A| = m(m-2) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ y } m = 2.$$

• Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

• Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

• Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

1.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.11.5 Despeje X en la ecuación matricial $B(X - I) = A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$B(X - I) = A \Rightarrow X - I = B^{-1}A \Rightarrow X = B^{-1}A + I =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Problema 1.11.6 Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} mx + y + z = 2m \\ mx + (m+1)y + z = 1 \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1 \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{array} \right), |A| = m^2 = 0 \implies m = 0.$$

☛ Si $m \neq 0 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \implies \text{Sistema incompatible}$$

1.12. Islas Baleares

1.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.12.1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$.

a) Estudia el rango de la matriz A según los valores de a .

b) Estudia para qué valores de a la matriz A es invertible.

c) Para el valor $a = -1$, calcular la solución X , de la ecuación matricial $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $|A| = a^2(a^2 - 1)^2 = 0 \implies a = 0, a = \pm 1$.

■ $\text{Rango}(A) = 3 \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

■ Si $a = 0 \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

■ Si $a = -1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y como $F_1 = -F_2 = -F_3 \implies \text{Rango}(A) = 1$.

■ Si $a = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y como $F_1 = F_2 = F_3 \implies \text{Rango}(A) = 1$.

b) $\exists A^{-1} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

c) $AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y - z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$
 Sistema homogéneo compatible indeterminado con dos grados de libertad.

Problema 1.12.2 Sea la matriz siguiente $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Calcula A^t , A^2 y A^{-1} , donde A^t es la matriz traspuesta y A^{-1} es la matriz inversa de A .
- b) Sea I es la matriz identidad. Calcular X en la ecuación $A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$
- c) Calcular todas las matrices B que cumplen $AB = BA^t$

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) $A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = \frac{1}{2} \left(A^2 + I - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow$
 $X = \frac{1}{2} A^{-1} \left(A^2 + I - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right) =$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $AB = BA^t$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+c = a+b \\ b+d = 2a+b \\ 2a+c = c+d \\ 2c+d = 2c+d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = b \\ d = 2a \\ 2a = d \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$$

1.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.12.3 Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

- Calcular los determinantes: $\det(A)$ y $\det(B)$.
- Calcula la matriz producto BA , la matriz transpuesta $(BA)^t$.
- ¿Para qué se cumpla la relación $AX = BA$, cuántas filas y columnas deben tener la matriz X ?
- Calcula la matriz X que satisface la relación

$$AX = BA$$

Solución:

- $|A| = -2$ y $|B| = -17$.
- $BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$
 $(BA)^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
- $AX = BA \implies \underset{2 \times 2}{A} \cdot \underset{m \times n}{X} = \underset{2 \times 2}{B} \cdot \underset{2 \times 2}{A} \implies m = n = 2$
 X tiene que ser una matriz cuadrada de orden 2.
- $AX = BA \implies X = A^{-1}BA =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.12.4 Una empresa fabrica tres tipos de bombillas: A , B y C . B tiene 20 puntos LED, y la tipo C tiene 50 puntos LED. El número de bombillas de 10 puntos LED fabricadas diariamente es λ veces el número de bombillas de 50 puntos LED. A la empresa le interesa saber cuántas bombillas de cada tipo pueden fabricar diariamente.

- Si $\lambda = 2$, y esta empresa usa, diariamente, 30000 puntos LED con los que fabrica 1300 bombillas:
 - Plantea el sistema de ecuaciones lineales de este problema.
 - Clasifica el sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, determina cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar.
- Si $\lambda = 3$, y la empresa fabrica diariamente 1.000 bombillas; clasifica el sistema de ecuaciones lineales y determina el número de puntos LED necesarios.
En este caso, cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar?

Solución:

Sea x el número de bombillas tipo A , y el número de bombillas tipo B y z el número de bombillas tipo C . Y tenemos $x = \lambda z$

- Si $\lambda = 2$:

$$\text{i. } \begin{cases} x = 2z \\ 10x + 20y + 50z = 30000 \\ x + y + z = 1300 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 1300 \\ x + 2y + 5z = 3000 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1300 \\ 1 & 2 & 5 & 3000 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \implies |A| = 1 \neq 0 \implies$$

$\text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^o \text{ de incógnitas} \implies \text{sistema compatible determinado.}$

$$\begin{cases} x + y + z = 1300 \\ x + 2y + 5z = 3000 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 800 \\ y = 100 \\ z = 400 \end{cases}$$

b) Si $\lambda = 3$, 1000 bombillas y μ puntos LED:

$$\begin{cases} x = 3z \\ 10x + 20y + 50z = \mu \\ x + y + z = 1000 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 1000 \\ x + 2y + 5z = \mu/10 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 1 & 2 & 5 & \mu/10 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 4 & \mu/10 - 1000 \\ 0 & -1 & -4 & -1000 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 4 & \mu/10 - 1000 \\ 0 & 0 & 0 & -2000 + \mu/10 \end{array} \right); \quad -2000 + \mu/10 = 0 \implies \mu = 20000$$

• Si $\mu = 20000$ el sistema es compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

$$\begin{cases} x + y + z = 1000 \\ x + 2y + 5z = 2000 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 1000 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1000 - 4t \\ z = t \end{cases}$$

Como x, y y z tienen que ser números enteros mayores de cero $1000 - 4t \geq 0 \implies t \geq 250$ y $t \in \mathbb{Z}$.

• Si $\mu \neq 20000$ el sistema es incompatible. (No tiene solución)

1.13. Islas Canarias

1.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.13.1 Calcular el valor de la matriz $M = X^2 - Y^2$, siendo X e Y las matrices que

son solución del siguiente sistema:
$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$M = X^2 - Y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}$$

Problema 1.13.2 Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero ha comprado un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A , B y C . Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas.

Solución:

Sea x el nº de sacos de la marca A , y el nº de sacos de la marca B y z el nº de sacos de la marca C .

$$\begin{cases} x + y + z = 66 \\ 5x + 4y + 4z = 274 \\ z = 2(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 66 \\ 5x + 4y + 4z = 274 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 12 \\ z = 44 \end{cases}$$

1.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.13.3 Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

- Sea la matriz $M = A + cB$, donde c es un número real cualquiera. Calcular los valores de c de forma que el rango(M) = 1.
- Sea la matriz $D = A^2 + BA$. Averiguar la matriz X que cumple la siguiente ecuación matricial:

$$DX = -30 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+1 & -1 \\ 4c+4 & 2-c \end{pmatrix}$$

$$|M| = -c^2 + 5c + 6 = 0 \Rightarrow c = 6 \text{ y } c = -1:$$

☛ Si $c \neq 6$ y $c \neq -1 \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 2$.

☛ Si $c = 6 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 1$.

☛ Si $c = -1 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow \text{Rango}(M) = 1$.

$$\text{b) } D = A^2 + BA = (A + B)A =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$DX = -30 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = -30D^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$-30 \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$-30 \begin{pmatrix} -1/10 & 1/15 \\ -1/5 & -1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 12 & 7 & 22 \end{pmatrix}$$

Problema 1.13.4 En la liga Mate-Basket, las mujeres matemáticas con mayor puntuación son: Lovelace, Noerther y Germain. Las tres acumulan 17500 puntos. Además, lo que ha anotado Germain más 2500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace. Finalmente, Noerther anotó el doble que Germain. ¿Cuál es el ranking de puntuaciones de la liga Mate-Basket de las jugadoras Lovelace, Noerther y Germain?

Solución:

Sea x el nº de puntos anotados por Lovelace, y el nº de puntos anotados por Noerther y z el nº de puntos anotados por Germain.

$$\begin{cases} x + y + z = 17500 \\ z + 2500 = \frac{x}{2} \\ y = 2z \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 17500 \\ x - 2z = 5000 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 10000 \\ y = 5000 \\ z = 2500 \end{cases}$$

1.14. La Rioja

1.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.14.1 Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x + ay = -1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real a . Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a = 0$.

Solución:

$$\text{a) } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right), |A| = -a^3 + 3a - 2 = 0 \implies a = 1 \text{ y } a = -2.$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a+1}{a^2+a-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{a+3}{a^2+a-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a+1}{a^2+a-2}$$

■ Si $a = -2$:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array} \right) = \\ & \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 4F_3 + 3F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible} \end{aligned}$$

■ Si $a = 1$:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado} \\ &\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

b) $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.14.2 Hallar A y B , matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3A - 5B = C \\ -A + 3B = D \end{cases}$$

donde C y D son las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz inversa de $C^T D$, donde C^T es la matriz traspuesta de C .

Solución:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3A - 5B = C \\ -A + 3B = D \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4}(3C + 5D) \\ B = \frac{1}{4}(C + 3D) \end{cases} \\ A &= \frac{1}{4} \left[3 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^T D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(C^T D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/27 & 1/54 \\ 1/162 & -13/162 \end{pmatrix}$$

Problema 1.14.3 Sabiendo que $|A| = 1$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular el determinante de la matriz B con

$$B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{pmatrix}$$

Calcular $|4B^{-1}A^T|^2$

Solución:

$$B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{pmatrix} =$$

$$-2 \begin{pmatrix} x & y & z \\ x+a & y+b & z+c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \left[\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$-2(0+1) = -2 \Rightarrow |B| = -2$$

$$|4B^{-1}A^T|^2 = |4B^{-1}A^T| \cdot |4B^{-1}A^T| = (4^3|B^{-1}||A^T|) \cdot (4^3|B^{-1}||A^T|) = (4|B^{-1}||A^T|)^2 = \left(4^3 \cdot \frac{1}{|B|} \cdot |A|\right)^2 =$$

$$\left(4^3 \cdot \frac{1}{-2} \cdot 1\right)^2 = (-32)^2 = 1024$$

1.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.14.4 Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ 2x + ay + a^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real a .

Solución:

☛ $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right), |A| = -a^3 + 3a^2 - 2a = 0 \implies a = 0, a = 1 \text{ y } a = 2.$

☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 0; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a^2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2a^2 - 1}{a(a-1)};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{2a-1}{a(a-1)}$$

☛ Si $a = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_2 \\ F_2 \rightarrow F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \\ \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \\ &\implies \text{Sistema incompatible} \end{aligned}$$

☛ Si $a = 1$:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) = \\ \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \implies \text{Sistema incompatible} \end{aligned}$$

☛ Si $a = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies$$

Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ y + 3z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3/2 + \lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.14.5 Hallar las matrices $A - B$, A y B , sabiendo que las matrices A y B , satisfacen las siguientes identidades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} A^2 - AB + BA - B^2 &= (A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ A - B &= (A + B)^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ (A + B) + (A - B) &= 2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \\ (A + B) - (A - B) &= 2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problema 1.14.6 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20} , utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad.

Solución:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \end{aligned}$$

$$A^4 = A^3 A = -A, \quad A^5 = A^3 A^2 = -A^2, \quad A^6 = A^3 A^3 = I$$

$$A^{20} = (A^6)^3 A^2 = I A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

1.15. Madrid

1.15.1. Modelo de 2021

Problema 1.15.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, se pide:

- Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.
- Para $x = -1$, calcular la inversa de A .
- Para $x = 1$, hallar $(AB^t)^3$ y $(AB^t)^{2020}$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución:

a) $|A| = x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2 \implies \exists A^{-1} \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

b) Si $x = -1 \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

c) Si $x = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$C = AB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1 & 2/3 \\ -1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$C^{2020} = (C^3)^{673} \cdot C = (-I)^{673} \cdot C = -C = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 1.15.2 Dadas la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ y el vector $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine el valor o valores de a para los que:

a) El sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ no tenga solución.

b) $A = A^{-1}$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & -3 & a & 1 \\ a-1 & -3 & a & 2 \end{array} \right); \quad |A| = 3 - a = 0 \implies a = 3$$

- Si $a \neq 3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^o$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 = F_2 \\ F_2 = F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{array} \right) = \\ &\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{array} \right] = \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \implies \text{Sistema Incompatible} \end{aligned}$$

b) $A = A^{-1} \implies A^2 = I$

$$A^2 = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Elegimos del producto la segunda fila de la primera matriz por la segunda columna de la segunda matriz y tiene que dar uno:

$$a + 9 - 3a = 1 \implies a = 4$$

Como sólo da un valor este debe de ser único. Comprobamos que con este valor se cumple el enunciado:

$$A^2 = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

1.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.15.3 Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A , B y C . Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C , que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el

número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Solución:

Si una acción de B cuesta 1 € $\implies$ una acción A cuesta 3 € $\implies$ una acción C cuesta 6 €.
Sean x el número de acciones de A , y el número de acciones de B y z el número de acciones de C .
Tendremos:

$$\begin{cases} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ z = \frac{y}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 360 \\ y = 120 \\ z = 60 \end{cases}$$

A cada hermano le corresponderán $\frac{360}{3} = 120$ acciones de A , $\frac{120}{3} = 40$ acciones de B y $\frac{60}{3} = 20$ acciones de C .

Problema 1.15.4 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax - 2y + (a - 1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema según los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{array} \right); \quad |A| = 3a^2 - 29a + 26 = 0 \implies a = 1, \quad a = \frac{26}{3}$$

• Si $a \neq 1$ y $a \neq \frac{26}{3} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

• Si $a = 26/3$:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 26/3 & -2 & 23/3 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -26/3 & 1 & -6 & 6 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} 3F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 26 & -6 & 23 & 12 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -26 & 3 & -18 & 18 \end{array} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} F_1 \\ 13F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 26 & -6 & 23 & 12 \\ 0 & 33 & -55 & 38 \\ 0 & -3 & 5 & 30 \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{ccc|c} F_1 & & & \\ F_2 & & & \\ 11F_3 + F_2 & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 26 & -6 & 23 & 12 \\ 0 & 33 & -55 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 368 \end{array} \right) \implies \end{aligned}$$

Sistema Incompatible

☛ Si $a = 1$:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{array} \right) = \\ &= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\text{Sistema Compatible Indeterminado}\end{aligned}$$

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -x + y - 6z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -16 - 12\lambda \\ y = -10 - 6\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

1.15.3. Convocatoria Ordinaria junio (coincidente) de 2021

Problema 1.15.5 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores del parámetro real m para los que la matriz A es invertible y calcule su inversa en esos casos.
- b) Estudie el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ en función del parámetro m .
- c) Resuelva el sistema del apartado anterior para el valor $m = 2$.

Solución:

a) $|A| = -m - 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow \exists A^{-1} \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{m+1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ m & 1 & -m \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$$

b) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$ con $|A| = -m - 1 = 0 \Rightarrow m = -1$

☛ Si $m \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $m = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

c) Si $m = 2$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{cases}$$

Problema 1.15.6 Una tienda online de productos gourmet elabora tres tipos de cafés exclusivos, el Gold Cuvée (a 7,85 euros/kg), el Paradiso (a 13,3 euros/kg) y el Cremissimo (a 24,85 euros/kg). Para ello utiliza solo dos tipos de grano, el Arábica y el Robusta. El Gold Cuvée tiene un 90 % de grano tipo Arábica, el Paradiso un 85 % y el Cremissimo un 80 %.

A lo largo de un mes han necesitado utilizar 27,1 kg de grano del tipo Robusta para atender todos los pedidos y han ingresado un total de 3112,5 euros. Sabiendo que se ha vendido doble cantidad de café Cremissimo que de las otras dos especialidades juntas, se pide calcular los kilogramos de grano del tipo Arábica que se han utilizado a lo largo de ese mes.

Solución:

Sean x los kg café Gold Cuvée, y los kg café Paradiso y z los kg café Cremissimo.

$$\begin{cases} 7,85x + 13,3y + 24,85z = 3112,5 \\ 0,1x + 0,15y + 0,20z = 27,1 \\ z = 2(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 157x + 266y + 497z = 62250 \\ 2x + 3y + 4z = 542 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 22 \\ z = 104 \end{cases}$$

Los kg de tipo Arábica utilizados son $0,9x + 0,85y + 0,8z = 0,9 \cdot 30 + 0,85 \cdot 22 + 0,8 \cdot 104 = 128,9$ kg.

1.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.15.7 Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25 % de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Solución:

Sean x el número de seguidores de Sara, y el número de seguidores de Cristina y z el número de seguidores de Jimena. Tendremos:

$$\begin{cases} x + y + z = 15000 \\ 0,75z = 3x \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 15000 \\ 4x - z = 0 \\ 10x + 4y - 5z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2000 \\ y = 5000 \\ z = 8000 \end{cases}$$

Sara tiene 2000 seguidores, Cristina 5000 seguidores y Jimena 8000 seguidores.

Problema 1.15.8 Se pide:

- Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y , que tenga como soluciones $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$.
- Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$$

- Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y , que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

Solución:

- Un sistema de ecuaciones lineales o bien tiene solución única o bien tiene infinitas soluciones o bien no tiene solución. Luego el caso que nos ocupa debe de tener infinitas soluciones, como una de ellas tiene que ser $\{x = 0, y = 0\}$ las infinitas soluciones buscadas serían:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \implies \lambda = x = \frac{y}{2} \implies 2x - y = 0$$

La segunda ecuación del sistema tiene que ser proporcional

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -6x + 3y = 0 \end{cases}$$

-

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases} \implies \lambda = x = y + 2 = z + 1 \implies \begin{cases} x = y + 2 \\ x = z + 1 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

- Calculamos un sistema con la solución buscada, por ejemplo

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Como el sistema tiene que ser compatible determinado la tercera ecuación tiene que ser irrelevante, hacemos una combinación lineal de las dos, por ejemplo multiplico la segunda por 3 y le sumo la primera. Me queda el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

1.16. Murcia

1.16.1. Modelo de 2021

Problema 1.16.1 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

- Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.
- Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a+3 \end{array} \right); \quad |A| = -a^3 + 3a - 2 = 0 \implies a = 1, \quad a = -2$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

Si $a = 0$:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ y + z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

b) Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

c) Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \implies \text{Sistema incompatible}$$

Problema 1.16.2 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Calcule las potencias sucesivas A^2 , A^3 y A^4 .
- b) Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$
- c) Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

Solución:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{c) } |A| = 1 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.16.3 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

- a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.
- b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{array} \right); \quad |A| = 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ \text{ de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

b) Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3/2 \\ y = 5/2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

c) Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \implies$$

Sistema incompatible

Problema 1.16.4 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.
- Resuelva la ecuación matricial $AX - B = C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C .

Solución:

$$a) |A| = 1 \neq 0 \implies \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) AX - B = C^t \implies AX = C^t + B \implies X = A^{-1}(C^t + B)$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.16.5 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x + 5y - az = a + 1 \end{cases}$$

- Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.
- Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
- Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & 5 & -a & a+1 \end{array} \right); |A| = 3(a^2 - 2a - 3) = 0 \implies a = -1, a = 3$$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

b) Si $a = -1$:

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{array} \right) = \\ & \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \\ & \text{Sistema compatible indeterminado} \\ & \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3\lambda \end{array} \right.\end{aligned}$$

c) Si $a = 3$:

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right) = \\ & \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 + 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}\end{aligned}$$

Problema 1.16.6 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Si se denota por $\text{tr}(A)$ la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por $|A|$ el determinante de A , compruebe que, para cualquier valor de a , se cumple la ecuación $A^2 = \text{tr}(A)A - |A|I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.
- Determine para qué valores de a la matriz A es regular (o invertible).
- Para $a = -3$, resuelva la ecuación matricial $AX - A^t = A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

Solución:

$$\text{a) } \text{tr}(A)A - |A|I = 4 \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - (4+a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}$$

Luego: $A^2 = \text{tr}(A)A - |A|I$

$$\text{b) } |A| = 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{-4\}$$

$$\text{c) } \text{Para } a = -3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AX - A^t = A \Rightarrow AX = A + A^t \Rightarrow X = A^{-1}(A + A^t) =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

1.17. Navarra

1.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.17.1 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-1)x - y = 3 \\ (a-1)x + (a+1)y - (2-a)z = -2a \\ (-2a+2)x - ay + (a^2-a-2)z = 3a-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1 \end{array} \right), |A| = (a-1)(a^3+2a^2-4a-8) = 0 \implies a = 1$$

y $a = \pm 2$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-2, 2, 1\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2a & a+1 & a-2 \\ 3a-1 & -a & a^2-a-2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{a-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 3 & 0 \\ a-1 & -2a & a-2 \\ -2a+2 & 3a-1 & a^2-a-2 \end{vmatrix}}{|A|} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 3 \\ a-1 & a+1 & -2a \\ -2a+2 & -a & 3a-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{a-2}$$

- Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & -4 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & -7 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} -3x - y = 3 \\ -4z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 3\lambda \\ z = -1/4 \end{cases}$$

- Si $a = 2$:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & -2 & 0 & 5 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & -4 & 0 & 11 \end{array} \right) = \\ &= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}\end{aligned}$$

- Si $a = 1$:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) = \\ &= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}\end{aligned}$$

Problema 1.17.2 Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned}|A| &= \begin{vmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ t & t^2+2t & t \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 + F_3 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \\ (t-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & t^2+2t & t \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix} &= (t-1) \begin{vmatrix} t & t^2+2t \\ -1 & -1-t \end{vmatrix} = t(t-1) \begin{vmatrix} 1 & t+2 \\ -1 & -1-t \end{vmatrix} = \\ \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \end{bmatrix} &= t(t-1) \begin{vmatrix} 1 & t+2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = t(t-1)\end{aligned}$$

$$|A^3| = |A|^3 = 8 \Rightarrow |A| = 2 \Rightarrow t^2 - t = 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = -1 \text{ y } t = 2.$$

1.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.17.3 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax + (a-2)y = a-2 \\ ax + (a^2-2a)y + 2z = a \\ 3ax + (a^2-4)y + z = 4a-4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & a-2 & 0 & a-2 \\ a & a^2-2a & 2 & a \\ 3a & a^2-4 & 1 & 4a-4 \end{array} \right), |A| = -a(a^2-3a+2) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1 \text{ y } a = 2.$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a-2 & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 4a-4 & a^2-4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a-5}{a-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a & 2 \\ 3a & 4a-4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(a+1)}{a^2-3a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & a-2 & a-2 \\ a & a^2-2a & a \\ 3a & a^2-4 & 4a-4 \end{vmatrix}}{|A|} = -a$$

- Si $a = 0$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies$$

Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} -2y = -2 \\ 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

- Si $a = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \implies \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \implies \text{Sistema incompatible}$$

Problema 1.17.4 Calcula los valores de t para que se cumpla $|A \cdot B^{-1}| = 1$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A \cdot B^{-1}| = |A||B^{-1}| = |A| \frac{1}{|B|} = 1 \implies |A| = |B|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = t^2 - 3t + 2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2t^2 - 3t + 1$$

$$2t^2 - 3t + 1 = t^2 - 3t + 2 \implies t^2 - 1 = 0 \implies t = \pm 1$$

Si $t = 1 \implies |A| = |B| = 0 \implies \nexists B^{-1}$ luego esta solución no es válida.

Si $t = -1 \implies |A| = |B| = 6 \implies \exists B^{-1}$ luego esta solución si es válida.

1.18. País Vasco

1.18.1. Modelo de 2020

Problema 1.18.1 Discutir, en función de m , el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+3)x + my + mz = m-1 \\ 3x + mz = m-2 \\ -y + z = m-3 \end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m+3 & m & m & m-1 \\ 3 & 0 & m & m-2 \\ 0 & -1 & 1 & m-3 \end{array} \right); \quad |A| = m(m-3) = 0 \implies m = 0, \quad m = 3$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right) \implies$$

Sistema incompatible

■ Si $m = 3$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Si $m = 3$: (sistema compatible indeterminado)

$$\begin{cases} 6x + 3y + 3z = 2 \\ 3x + 3z = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.18.2 Dada la matriz $A(a)$

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4.

Solución:

$$|A(a)^2| = |A(a)|^2 = a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

1.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 1.18.3 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro α :

$$\begin{cases} \alpha x - y + z = 1 \\ 3x - y + \alpha z = \alpha \\ x + (\alpha - 1)z = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 3$, si es posible.

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha - 1 & 1 \end{array} \right); |A| = -\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \alpha = 2$$

☛ Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $\alpha = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

☛ Si $\alpha = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - 3F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

☛ Cuando $\alpha = 3$

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 1.18.4 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$

- Determinar para qué valores del parámetro α la matriz A no tiene inversa.
- Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $\alpha = 2$.

Solución:

$$\text{a) } |A| = a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \text{ y } \alpha = 3 \Rightarrow \nexists A^{-1} \text{ para } \alpha = 1 \text{ y } \alpha = 3 \text{ por ser } |A| = 0$$

$$\text{b) Si } \alpha = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 1.18.5 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro α :

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - z = \alpha \\ 2x + \alpha y + z = 2 + \alpha \\ x - \alpha y + 2z = 2\alpha \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2 & -1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 1 & 2 + \alpha \\ 1 & -\alpha & 2 & 2\alpha \end{array} \right); |A| = 3\alpha^2 + 3\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \alpha = -2$$

☛ Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, -2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ \text{ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)}$

☛ Si $\alpha = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

☛ Si $\alpha = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & -10 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema incompatible

☛ Cuando $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado y podemos eliminar la tercera ecuación:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} - \lambda \\ y = -\frac{1}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.18.6 Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Calcular la matriz X de orden 2×2 que verifica

$$A^2X + B = C$$

Solución:

$$A^2X + B = C \Rightarrow A^2X = C - B \Rightarrow X = (A^2)^{-1}(C - B) =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^2 \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

“www.musat.net”

Capítulo 2

Geometría

2.1. Resúmenes teóricos

Vectores

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes si $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$. En caso contrario uno de los vectores es combinación lineal de los otros.

- Producto escalar: $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha \end{cases}$

- Producto vectorial: $\vec{t} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$; el vector $\vec{t}$ es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Se cumple $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha$.
 $|\vec{u} \times \vec{v}| = S$ donde S es el área del paralelogramo que describen los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por paralelismo. (El área de un triángulo será $\frac{1}{2}S$)

- Producto mixto: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = V$, donde V es el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores por paralelismo. El volumen de un paralelepípedo es también $V = S_{\text{base}} \cdot \text{Altura}$. Para calcular el volumen de un tetraedro tenemos dos fórmulas:
 $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}V_{\text{paralelepípedo}}$ y $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3}S_{\text{base}} \cdot \text{Altura}$

Ecuaciones

Sea la recta $r : \begin{cases} \vec{u}_r = (u_1, u_2, u_3) \\ P_r(a, b, c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\vec{x} = P_r + \lambda \vec{u}_r$	$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \\ z = c + \lambda u_3 \end{cases}$	$\frac{x-a}{u_1} = \frac{y-b}{u_2} = \frac{z-c}{u_3}$	No hay

Sea el plano $\pi : \begin{cases} \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ P(a, b, c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\vec{x} = P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$	$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = b + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = c + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$	No hay	$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a \\ u_2 & v_2 & y-b \\ u_3 & v_3 & z-c \end{vmatrix} = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$

Ideas:

- Tres puntos $P_1(a_1, b_1, c_1)$, $P_2(a_2, b_2, c_2)$ y $P_3(a_3, b_3, c_3)$ no están alineados si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$
- El vector $\vec{u}_r$ y la recta r tienen la misma dirección.
- El vector $\vec{u}_\pi = (A, B, C)$ y el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ son perpendiculares.

Posiciones de rectas y planos:

- Dos rectas: $r : \begin{cases} \vec{u}_r \\ P_r \end{cases}$, $s : \begin{cases} \vec{u}_s \\ P_s \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$. Construimos la matriz $A = \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_s \\ \overrightarrow{P_r P_s} \end{pmatrix}$.

Si $\text{Rango}(A) = 3 \Rightarrow$ Se cruzan.

Si $\text{Rango}(A) = 2$: $\begin{cases} \text{Rango} \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_s \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{Se cortan} \\ \text{Rango} \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_s \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \text{Son paralelas} \end{cases}$.

Si $\text{Rango}(A) = 1 \Rightarrow$ Coinciden.

- De una recta $r : \begin{cases} \vec{u}_r \\ P_r \end{cases}$ y un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$: Se pasa la recta a paramétricas y se sustituye en el plano: $A(a + \lambda u_1) + B(b + \lambda u_2) + C(c + \lambda u_3) + D = 0$ Al resolver esta ecuación pueden ocurrir tres casos:
 - a) Encuentro un valor de $\lambda = k \Rightarrow$ se cortan. El punto de corte se encuentra sustituyendo el valor de λ en la ecuación paramétrica de la recta.
 - b) Encuentro infinitos valores de $\lambda \Rightarrow$ la recta se encuentra contenida en el plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $0 = 0$)
 - c) No existen valores de $\lambda \Rightarrow$ la recta es paralela al plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $7 = 0$)
- De dos planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2$. Puede ocurrir:
 - a) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ o $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ o $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ en cualquiera de ellos los dos planos se cortan en una recta.
 - b) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ en este caso son paralelos.
 - c) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ en este caso coinciden.

- De tres planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2$ y $\pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3$. Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y se discute por el teorema de Roché. Si el sistema tiene solución única los tres planos se cortan en un punto. En el caso de que tenga infinitas soluciones se analizan los planos dos a dos. En el caso de que no tenga soluciones se analizan los planos dos a dos.

Fórmulas:

- Distancia entre dos puntos: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$
- Distancia de un punto a una recta: $d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}$
- Distancia de un punto a un plano: $d(P, \pi) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- Distancia entre dos rectas que se cruzan: $d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{PP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$
- Ángulo entre dos vectores: $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| |\overrightarrow{v}|}$
- Ángulo entre dos rectas: $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}| |\overrightarrow{u_s}|}$
- Ángulo entre dos planos: $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}| |\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}$
- Ángulo entre una recta y un plano: $\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_{\pi}}|}{|\overrightarrow{u_r}| |\overrightarrow{u_{\pi}}|}$
- Punto medio de P y Q es $A = \frac{P + Q}{2}$
- Punto simétrico de P respecto de Q es $A = 2Q - P$
- Esfera: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ es una esfera de centro $C(a, b, c)$ y radio = r .

Ideas métricas:

- Punto simétrico de P respecto al plano π :
 - Calculo r que pasa por P perpendicular a π , $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi}}$.
 - Calculo el punto de corte P' de r con π .
 - $P'' = 2P' - P$
- Punto simétrico de P respecto a la recta r :
 - Calculo π perpendicular a r que contenga a P , $\overrightarrow{u_{\pi}} = \overrightarrow{u_r}$.
 - Calculo el punto de corte P' de r con π .
 - $P'' = 2P' - P$

- Recta perpendicular a otras dos que se cruzan (y las corta): Se calcula como intersección de los dos planos $\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t \\ \vec{u}_r \\ P_r \end{cases}$, $\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t \\ \vec{u}_s \\ P_s \end{cases}$ donde $\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s$

- Recta que pasa por un punto P y corta a dos rectas que se cruzan: Se calcula como intersección de los dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_r P} \\ \vec{u}_r \\ P_r \text{ o } P \end{cases}, \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_s P} \\ \vec{u}_s \\ P_s \text{ o } P \end{cases}$$

- Recta paralela a un plano π y que corta a otra recta t que a su vez corta a π y que pasa por el punto P :
 - Calculo un plano π' paralelo a π que contenga a P .
 - Calculo P' punto de corte de π' y t .
 - La recta buscada es la que une los puntos P y P' .
- Ecuación de la circunferencia resultante de cortar una esfera con un plano (vertical u horizontal). Si el plano es $z = k$, se sustituye en la ecuación y resulta una circunferencia. Tened cuidado, el centro de esta circunferencia es (a, b, k) .

- Plano tangente a una esfera de centro C en el punto de tangencia P : $\pi : \begin{cases} \vec{u}_\pi = \overrightarrow{CP} \\ \text{Contiene a } P \end{cases}$

- Encontrar los puntos de una recta r que están a una distancia λ de un punto P : Se calcula la ecuación de una esfera de centro P y radio λ . Se buscan los puntos de corte de esta esfera y la recta r .
- Plano Mediator π entre dos puntos P_1 y P_2 : Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, P_1) = d(P, P_2)$.
- Plano Bisector π entre dos planos π_1 y π_2 : Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.

2.2. Andalucía

2.2.1. Modelo de 2021

Problema 2.2.1 Considera la recta $r : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 : x = 0$ y $\pi_2 : y = 0$.

- a) Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 .
b) Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .

Solución:

$$\text{a) } r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 3, 1) \\ P_r(2, 2, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \implies P(2 - \lambda, 2 + 3\lambda, 1 + \lambda)$$

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \implies |2 - \lambda| = |2 + 3\lambda| \implies$$

$$\begin{cases} 2 - \lambda = 2 + 3\lambda \implies \lambda = 0 \implies P_1(2, 2, 1) \\ 2 - \lambda = -2 - 3\lambda \implies \lambda = -2 \implies P(4, -4, -1) \end{cases}$$

$$\text{b) } t : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \implies t : \begin{cases} \vec{u}_t = (0, 0, 1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{cases} \implies \overrightarrow{P_t P_r} = (2, 2, 1)$$

$$[\overrightarrow{P_t P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_t] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \implies r \text{ y } t \text{ se cruzan.}$$

Problema 2.2.2 Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(0, 2, 1)$.

- a) Halla el área de dicho triángulo.
b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A .

Solución:

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} = (0, -1, 2) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$$

$$S_T = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-3, -2, -1)| = \frac{\sqrt{14}}{2} u^2$$

b)

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-1 + 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{15} \implies \alpha = 7502'13''$$

2.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.2.3 Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

- a) Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$.
 b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$.

Solución:

$$\text{a) } s : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, 1, 2) \\ P_s(3, -1, -2) \end{cases}$$

$$\vec{u}_{\pi'} = \vec{u}_s = (-2, 1, 2) \implies \pi' : -2x + y + 2z + \lambda = 0, \text{ imponemos } P \in \pi' \implies -2 + 0 - 10 + \lambda = 0 \implies \lambda = 12 \implies \pi' : -2x + y + 2z + 12 = 0$$

$$\text{b) } r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \implies \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-8, -7, -5) \text{ y } \vec{u}_\pi = (-2, 1, 2)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi|}{|\vec{u}_r| |\vec{u}_\pi|} = \frac{16 - 7 - 10}{\sqrt{138} \cdot \sqrt{9}} = \frac{\sqrt{138}}{414}$$

Problema 2.2.4 La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s , que pasa por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $A(a, 1, 0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 2, 3) \\ P_r(-3, -4, 3) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = -4 + 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \overrightarrow{PA} = (a-1, 1, -2) \\ P_s = P(1, 0, 2) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 1 + (a-1)\mu \\ y = \mu \\ z = 2 - 2\mu \end{cases}$$

Punto de corte:

$$\begin{cases} -3 + 2\lambda = 1 + (a-1)\mu \\ -4 + 2\lambda = \mu \\ 3 + 3\lambda = 2 - 2\mu \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

Luego $a = 2$ y el punto de corte es $Q(-1 - 2, 6)$.

2.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.2.5 La recta perpendicular desde el punto $A(1, 1, 0)$ a un cierto plano π corta a este en el punto $B\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

- a) Calcula la ecuación del plano π .
 b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π .

Solución:

$$\text{a) } \vec{u} = \overrightarrow{BA} = (1, 1, 0) - \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 2(0, 1, -1) \perp \pi \implies \vec{u}_\pi = (0, 1, -1) \implies \pi : y - z + \lambda = 0 \text{ imponiendo } B \in \pi \implies 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \lambda = 0 \implies \lambda = 0$$

Luego $\pi : y - z = 0$.

$$b) \quad d = 2d(A, \pi) = 2 \frac{|0 + 1 - 0|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \, u$$

Problema 2.2.6 Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

- a) Estudia la posición relativa de r y s .
 b) Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s .

Solución:

$$r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, -1) \\ P_r(3, 1, -3) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, 0) \\ P_s(1, 0, 0) \end{cases} \quad y$$

$$\overrightarrow{P_s P_r} = (2, 1, -3)$$

$$a) \quad [\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \text{Rango} \left(\begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_s \end{pmatrix} \right) =$$

$$\text{Rango} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2 \implies r \text{ y } s \text{ se cortan.}$$

- b) Calculamos el punto de corte de r y s

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda = 1 - \mu \\ y = 1 = \mu \\ z = -3 - \lambda = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3 + \lambda = 1 - \mu \\ 1 = \mu \\ -3 - \lambda = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = -3 \\ \mu = 1 \end{cases} \implies P_h(0, 1, 0)$$

La recta h que corta perpendicularmente a r y a s :

$$t : \begin{cases} \vec{u}_h = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, 1) \\ P_h(0, 1, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

2.3. Aragón

2.3.1. Modelo de 2020

Problema 2.3.1 Se pide:

- a) Determine el valor de la constante real m para que los cuatro puntos siguientes:

$$A(1, 1, 0), \quad B(1, 3, 1), \quad C(2, 1, -1), \quad D(1, m, m)$$

sean coplanarios, es decir, estén en un mismo plano.

- b) Determine el área del triángulo que definen los puntos A , B y C .

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$ y $\overrightarrow{AD} = (0, m-1, m)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & m-1 & m \end{vmatrix} = -m-1 = 0 \Rightarrow m = -1$$

b)

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-2, 1, -2)| = \frac{1}{2} \sqrt{9} = \frac{3}{2} u^2$$

Problema 2.3.2 Determine la ecuación del plano π que contiene a las dos rectas r y s siguientes:

$$r : \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + 2z = 4 \end{cases} \quad s : x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Solución:

El problema no tiene sentido si las dos rectas se cruzan o coinciden. Estudiamos su posición relativa.

$$r : \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = -4 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 8 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, -3) \\ P_r(-4, 0, 8) \end{cases}$$

$$s : x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, -1) \\ P_s(0, -1, 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_s P_r} = (-4, 0, 8) - (0, -1, 1) = (-4, 1, 7)$$

$$[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_s P_r}] = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \text{Rango}(A) = 2 \text{ y } \text{Rango}\left(\begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_s \end{pmatrix}\right) = \text{Rango}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$2 \Rightarrow r$ y s se cortan.

La ecuación del plano π que contiene a las dos rectas sería:

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, -3) \\ \vec{u}_s = (1, 2, -1) \\ P_s(0, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : 5x - y + 3z - 4 = 0$$

2.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.3.3 Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A = (0, 1, 1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3 , y $\pi_1 \equiv x + 2z = 1$, siendo:

$$B_1 = (-1, 0, 2), \quad B_2 = (1, 3, 1), \quad B_3 = (2, -1, 0).$$

Solución:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{B_1 B_2} = (2, 3, -1) \\ \overrightarrow{B_1 B_3} = (3, -1, -2) \\ B_1(-1, 0, 2) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 : -7x + y - 11z - 7 = 0$$

$$\vec{u}_\pi \times \vec{u}_{\pi_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & -11 \end{vmatrix} = (-2, -3, 1)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_{\pi_1} = (-2, -3, 1) \\ P_r = A(0, 1, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \implies$$

$$r : \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1} \implies$$

$$r : \begin{cases} \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-3} \implies 3x - 2y + 2 = 0 \\ \frac{x}{-2} = \frac{z-1}{1} \implies x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Problema 2.3.4 Sean los siguientes vectores:

$$\vec{u}_1 = (-1, 1, 1), \quad \vec{u}_2 = (0, 3, 1), \quad \vec{u}_3 = (1, -2, 0), \quad \vec{u}_4 = (-2, 0, 1)$$

a) Compruebe si los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_3, \quad \vec{v}_3 = \vec{u}_4$$

b) Calcule las siguientes expresiones:

$$(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot (2\vec{u}_1 - \vec{u}_2); \quad (\vec{u}_4 - \vec{u}_1) \times (\vec{u}_4 - \vec{u}_1)$$

siendo $\cdot$ y $\times$ los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

Solución:

$$a) \quad \vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = 2(-1, 1, 1) - (0, 3, 1) = (-2, -1, 1)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_3 = (-1, 1, 1) + (1, -2, 0) = (0, -1, 1)$$

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_4 = (-2, 0, 1)$$

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ son linealmente independientes.}$$

$$b) \quad \bullet \quad 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (-2, -1, 1)$$

$$(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot (2\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = (-2, -1, 1) \cdot (-2, -1, 1) = 4 + 1 + 1 = 6$$

$$\bullet \quad \vec{u}_4 - \vec{u}_1 = (-2, 0, 1) - (-1, 1, 1) = (-1, -1, 0)$$

$$(\vec{u}_4 - \vec{u}_1) \times (\vec{u}_4 - \vec{u}_1) = (-1, -1, 0) \times (-1, -1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

2.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.3.5 Calcule la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto $(1, -2, 0)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $(1, 0, 1)$, $(3, 1, 0)$ y $(2, -1, 1)$. Exprésela como intersección de dos planos.

Solución:

Sean $A(1, 0, 1)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(2, -1, 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, 1, -1)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, -1, 0)$. La recta r que buscamos

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(1, 1, 3) \\ P_r(1, -2, 0) \end{cases}$$

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} \Rightarrow x-1 = y+2 \Rightarrow \pi_1 : x-y-3=0$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{z}{3} \Rightarrow 3x-3 = z \Rightarrow \pi_2 : 3x-z-3=0$$

$$r : \begin{cases} x-y-3=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases}$$

2.4. Asturias

2.4.1. Modelo de 2020

Problema 2.4.1 Los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r : \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$. Además la recta que une A y C es perpendicular a la recta r .

- Determina el punto C .
- Calcula el área del triángulo.

Solución:

$$r : \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x=4 \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (0, 1, 0) \\ P_r(4, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow C(4, \lambda, 1)$$

$$a) \overrightarrow{AC} = (4, \lambda, 1) - (0, 1, 0) = (4, \lambda-1, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} \perp \vec{u}_r \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow (4, \lambda-1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda-1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow C(4, 1, 1)$$

$$b) \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1) - (0, 1, 0) = (-1, 0, 1) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (4, 0, 1).$$

$$S_t = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(0, 5, 0)| = \frac{5}{2} u^2$$

Problema 2.4.2 Dados los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(1, 0, -1)$ y r la recta que determinan. Y sea s la recta definida por $s : \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$.

- Estudia la posición relativa de las rectas.
- Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1) = -(1, 1, 1) \\ P_r = B(1, 0, -1) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = \mu \\ z = -\mu \end{cases} \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \\ P_s(2, 0, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_r P_s} = (2, 0, 0) - (1, 0, -1) = (1, 0, 1)$

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango} \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_r P_s} \\ \vec{u}_r \\ \vec{u}_s \end{pmatrix} = 2 \implies$$

Las dos rectas están en el mismo plano, y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango} \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_s \end{pmatrix} = 2 \implies r \text{ y } s \text{ se cortan.}$

b) Sea $C(2 - \mu, \mu, -\mu)$

$$\overrightarrow{AC} = (2 - \mu, \mu, -\mu) - (2, 1, 0) = (-\mu, \mu - 1, -\mu),$$

$$\overrightarrow{CB} = (1, 0, -1) - (2 - \mu, \mu, -\mu) = (-1 + \mu, -\mu, -1 + \mu)$$

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB} \implies \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \implies (-\mu, \mu - 1, -\mu) \cdot (-1 + \mu, -\mu, -1 + \mu) = 0 \implies$$

$$-\mu(-1 + \mu) + (\mu - 1)(-\mu) + (-\mu)(-1 + \mu) = -3\mu^2 + 3\mu = 0 \implies \mu = 0, \mu = 1$$

Si $\mu = 0 \implies C(2, 0, 0)$

Si $\mu = 1 \implies C(1, 1, -1)$

2.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.4.3 Dadas las rectas $r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = z$ y $s : \begin{cases} x+2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

a) Comprueba que las rectas se cruzan.

b) Obtenga el plano π que contiene a s y es paralelo a la recta r . Halla la distancia entre el punto $P = (-1, 1, 0)$ de la recta r y el plano π .

c) Calcula la distancia entre las rectas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, -2, 1) \\ P_r(-1, 1, 0) \end{cases} \text{ y } s : \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, 1, 0) \\ P_s(-1, 0, 1) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_r P_s} = (0, -1, 1)$

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

$$b) \pi : \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, 1, 0) \\ \vec{u}_r = (3, -2, 1) \\ P_s(-1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : x + 2y + z = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{-1 + 2 + 0}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{6} u$$

- c) Como $r \parallel \pi$ cualquier punto de r a π tiene la misma distancia. Como s está contenida en π la distancia buscada es la calculada en el apartado anterior. De todas formas la calculamos.

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = |(-1, -2, -1)| = \sqrt{6}$$

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} u$$

Problema 2.4.4 Dados los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 0, 2)$ y la recta $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ Halla:

- a) Un punto $C \in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en B .
b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a r .

Solución:

- a) $C \in r \implies C(1, 1 + \lambda, 1 + \lambda)$, $\vec{BA} = (1, 1, -2)$ y $\vec{BC} = (1, 1 + \lambda, \lambda - 1)$. Como $\vec{BA} \perp \vec{BC} \implies \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 \implies 1 + (1 + \lambda) - 2(\lambda - 1) = 0 \implies \lambda = 4 \implies C(1, 5, 5)$

- b) $r : \begin{cases} \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ P_r(1, 1, 1) \end{cases}$ y $\vec{AB} = (-1, -1, 2)$

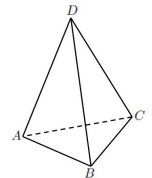
$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ \vec{AB} = (-1, -1, 2) \\ B(0, 0, 2) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : 3x - y + z - 2 = 0$$

2.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.4.5 Sea el tetraedro de la figura formado por $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 6)$ y $D(\alpha, 3, 1)$. Calcula:

- a) El área del triángulo limitado por los puntos A , B y C .
b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A , B y C .
c) El valor de α para que el vector $\vec{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior.
d) Para $\alpha = 5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π .



Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 6)$

$$S_t = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |6(2, 3, 1)| = 3\sqrt{14} u^2$$

b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-3, 2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 6) \\ A(3, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$$

c) $\overrightarrow{AD} = (\alpha - 3, 3, 1)$
 $\overrightarrow{AD} \perp \pi \Rightarrow \overrightarrow{AD} = k\vec{u}_\pi$

$$(\alpha - 3, 3, 1) = k(2, 3, 1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = 2k \\ 3 = 3k \\ 1 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ \alpha = 5 \end{cases}$$

d) Si $\alpha = 5 \Rightarrow D(5, 3, 1)$. Seguimos el siguiente procedimiento:

• Calculamos una recta $r \perp \pi$ tal que $D \in r$:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (2, 3, 1) \\ P_r = D(5, 3, 1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

• Calculamos el punto de corte D'' de r con π :

$$2(5 + 2\lambda) + 3(3 + 3\lambda) + (1 + \lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow D''(3, 0, 0)$$

• D'' es el punto medio entre D y D' :

$$\frac{D + D'}{2} = D'' \Rightarrow D' = 2D'' - D = 2(3, 0, 0) - (5, 3, 1) = (1, -3, -1)$$

Problema 2.4.6 Sean el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ Calcula:

- Las ecuaciones paramétricas de la recta r .
- La distancia de r a P y el punto $Q \in r$ donde se alcanza dicha distancia.
- La ecuación del plano π que contiene a r y está a la misma distancia de P que r .

Solución:

a) $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 0, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}$

$$b) \overrightarrow{P_r P} = (1, 0, 1)$$

$$\left| \overrightarrow{P_r P} \times \overrightarrow{u_r} \right| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = |2(0, 1, 0)| = 2$$

$$d(P, r) = \frac{\left| \overrightarrow{P_r P} \times \overrightarrow{u_r} \right|}{\left| \overrightarrow{u_r} \right|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} u^2$$

$$\text{Sea } Q(-\lambda, 0, \lambda) \text{ y } \left| \overrightarrow{PQ} \right| = |(-\lambda, 0, \lambda) - (1, 0, 1)| = |(-\lambda - 1, 0, \lambda - 1)| = \sqrt{(-\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)^2} = \sqrt{2} \implies \lambda = 0 \implies Q(0, 0, 0)$$

$$c) d(P, \pi) = d(Q, P) = \left| \overrightarrow{QP} \right| = |(1, 0, 1)| = \sqrt{2}$$

Por otra parte el vector $\overrightarrow{QP}$ es perpendicular a $\pi \implies \pi : x + z + \lambda = 0$ y $Q \in \pi \implies 0 + 0 + 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies \pi : x + z = 0$

2.5. Cantabria

2.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.5.1 Se dispara un misil en línea recta desde el punto $A = (1, 2, 8)$ hacia la posición de la base enemiga $B = (3, 4, 0)$.

- Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.
- Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.
- Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B .
- Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$.

Solución:

$$a) r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (2, 2, -8) = 2(1, 1, -4) \\ P_r = B(3, 4, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

$$b) \text{ Sustituyendo } r \text{ en el plano } z = 4 \implies 0 + 0 + (-4\lambda) = 4 \implies \lambda = -1 \implies P(2, 3, 4)$$

$$c) d(A, B) = \left| \overrightarrow{AB} \right| = |(2, 2, -8)| = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2} u$$

$$d) \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{AB} = (3, 4, 0) \times (1, 1, -4) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-16, 12, -1).$$

Problema 2.5.2 Considera el plano $\pi : 2x + 3y - 4z = 10$ y los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, 3)$.

- Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B .
- Halla el vector normal del plano π .
- Determina la posición relativa del plano π , y la recta que pasa por los puntos A y B .
- Halla la ecuación del plano paralelo a π que contiene al punto A .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{AB} = (1, 1, 2) \\ P_r = A(1, 2, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

b) $\vec{u}_\pi = (2, 3, -4)$

c) Sustituimos r en π :

$$2(1 + \lambda) + 3(2 + \lambda) - 4(1 + 2\lambda) = 10 \implies \lambda = -2$$

Luego la recta corta al plano π en el punto $H(-1, 0, -3)$. Son secantes.

d) Un plano π' paralelo a π tiene de ecuación $2x + 3y - 4z = \lambda$ imponiendo $A \in \pi' \implies 2 + 6 - 4 = 4 = \lambda \implies \pi' : 2x + 3y - 4z = 4$

2.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.5.3 Considera los puntos $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$ y el origen de coordenadas O .

a) Calcula la ecuación del plano, π , que contiene a los puntos A , B y C .

b) Comprueba que el origen de coordenadas, O , está contenido en el plano π .

c) Comprueba que $\vec{AB}$ es paralelo a $\vec{OC}$ y que $\vec{AO}$ es paralelo a $\vec{BC}$.

d) Calcula el área del paralelogramo $ABCO$.

Solución:

a) $\vec{AB} = (-1, 0, 1)$, $\vec{AC} = (-2, -1, 1)$

$$\pi : \begin{cases} \vec{AB} = (-1, 0, 1) \\ \vec{AC} = (-2, -1, 1) \\ A(1, 1, 0) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : x - y + z = 0$$

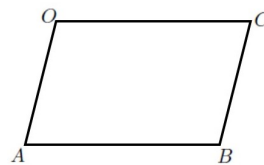
b) Sustituyendo $O(0, 0, 0)$ en $\pi \implies 0 - 0 + 0 = 0 \implies O \in \pi$

c) $\vec{AB} = (-1, 0, 1)$ y $\vec{OC} = (-1, 0, 1) \implies \vec{AB} = \vec{OC} \implies \vec{AB} \parallel \vec{OC}$
 $\vec{AO} = (-1, -1, 0)$ y $\vec{BC} = (-1, -1, 0) \implies \vec{AO} = \vec{BC} \implies \vec{AO} \parallel \vec{BC}$

d) El área del paralelogramo es:

$$S = |\vec{AB} \times \vec{AO}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right| =$$

$$|(1, -1, 1)| = \sqrt{3} u^2$$



Problema 2.5.4 Considera los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 4, 1)$ y la recta $r = \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$.

- Calcula la ecuación de la recta, r' , que pase por A y B .
- Determina la posición relativa de las rectas r y r' .
- Calcula el área del triángulo de vértices A , B y el origen de coordenadas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = -(1, 3, 4) \\ P_r(3, 4, 1) \end{cases}$$

- $r' : \begin{cases} \vec{u}_{r'} = \overrightarrow{AB} = (1, 3, -4) \\ P_{r'} = B(3, 4, 1) \end{cases} \implies r' : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$
- $P_{r'} = P_r = (3, 4, 1)$ y $\text{Rango}\left(\begin{smallmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_{r'} \end{smallmatrix}\right) = \text{Rango}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{smallmatrix}\right) = 2 \implies r \text{ y } r' \text{ se cortan en el punto } P_{r'} = P_r = (3, 4, 1)$
- $\overrightarrow{OA} = (2, 1, 5)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 4, 1)$

$$S_t = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-19, 13, 5)| = \frac{\sqrt{555}}{2} u^2$$

2.6. Castilla La Mancha

2.6.1. Modelo de 2020

Problema 2.6.1 Sean la recta $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ el punto $P(3, 1, -1)$ y el plano $\pi : 2x + y - z = 0$

- Calcula la distancia del punto P a la recta r .
- Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q , siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P .

Solución:

$$a) r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 1, 2) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}, \overrightarrow{P_r P} = (2, 1, 0)$$

$$|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(2, -4, -1)| = \sqrt{21}$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{6}}{2} u$$

- b) ■ Calculamos $\pi' \parallel \pi/P \in \pi'$:

$$\pi' : 2x + y - z + \lambda = 0 \implies 6 + 1 + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -8 \implies \pi' : 2x + y - z - 8 = 0$$

- Calculamos Q punto de corte de π' con r :

$$2(1 + 3\lambda) + (\lambda) - (-1 + 2\lambda) - 8 = 0 \implies \lambda = 1 \implies Q(4, 1, 1)$$

- Calculamos la recta t que pasa por P y Q :

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \overrightarrow{PQ} = (1, 0, 2) \\ P_t = P(3, 1, -1) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

Problema 2.6.2 Dados los puntos $A(1, 2, 0)$; $B(0, -1, 2)$; $C(2, -1, 3)$ y $D(1, 0, 1)$.

- a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D .
- b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A , B , C y D .

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 2) \\ P_r = A(1, 2, 0) \end{cases} &\implies r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad \text{y } s : \begin{cases} \vec{u}_s = \overrightarrow{CD} = (-1, 1, -2) \\ P_s = D(1, 0, 1) \end{cases} \implies \\ s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} & \\ \pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, -3, 2) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -2) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} &\implies \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x - y - z + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 2), \overrightarrow{AC} = (1, -3, 3) \text{ y } \overrightarrow{AD} = (0, -2, 1).$$

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \left| \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{|-4|}{6} = \frac{2}{3} u^3$$

2.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.6.3 Se pide:

- a) Sea el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r .
- b) Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 - 2a\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

Solución:

$$\text{a) } r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases} \quad \text{y } \overrightarrow{PP_r} = (-1, 0, 1) - (1, 0, 1) = (-2, 0, 0)$$

$$|\vec{u}_r \times \overrightarrow{PP_r}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| = |2(0, 1, 1)| = 2\sqrt{2}$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{PP_r}|}{|\vec{u}_r|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} u$$

$$\text{b) } s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, -2a, 2) \\ P_s(0, 1, 0) \end{cases} \quad \text{y } t : \begin{cases} \vec{u}_t = (a, -1, 1) \\ P_t(1, -1, 2) \end{cases}$$

$$\vec{u}_s \parallel \vec{u}_t \implies \vec{u}_s = k\vec{u}_t \implies (2, -2a, 2) = k(a, -1, 1) \implies \begin{cases} 2 = ka \\ -2a = -k \\ 2 = k \end{cases} \implies \begin{cases} k = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{Luego: } s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, -2, 2) \\ P_s(0, 1, 0) \end{cases} \quad \text{y } t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, -1, 1) \\ P_t(1, -1, 2) \end{cases}$$

Para comprobar que no son coincidentes sustituimos P_s en t :

$$\frac{0-1}{1} \neq \frac{1+1}{-1} = \frac{0-2}{1}$$

Como $P_s \notin t \implies r \parallel t$ cuando $a = 1$.

Problema 2.6.4 Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ y $D(1, 1, 2)$.

- Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D .
- Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A , B y C , y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D .

Solución:

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} = (2, 1, -1), \overrightarrow{AC} = (1, 1, 0) \text{ y } \overrightarrow{AD} = (1, 1, 1).$$

$$V_T = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |1| = \frac{1}{6} u^3$$

$$\text{b) } \pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 1, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 1, 0) \\ A(0, 0, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : x - y + z - 1 = 0$$

$$r \perp \pi \implies \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, -1, 1)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 1) \\ P_r = D(1, 1, 2) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

2.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.6.5 Sean los planos $\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + az = 0$

- Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.
- Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1 .

Solución:

a) $\vec{u}_{\pi_1} = (a, 1, 2)$ y $\vec{u}_{\pi_2} = (2, -1, a)$

$$\pi_1 \perp \pi_2 \implies \vec{u}_{\pi_1} \perp \vec{u}_{\pi_2} \implies \vec{u}_{\pi_1} \cdot \vec{u}_{\pi_2} = 0 \implies 2a - 1 + 2a = 0 \implies a = -\frac{1}{4}$$

b) Si $a = 1 \implies \pi_1 \equiv x + y + 2z - 3 = 0$

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2 + 0 + 2 - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} u$$

2.7. Castilla León

2.7.1. Modelo de 2021

Problema 2.7.1 Dada la recta $r : x + 2 = y = z - 2$ y el plano $\pi : x - z + 2 = 0$, se pide:

- Determinar la posición relativa de r y π .
- Calcular el punto simétrico respecto de π del punto de r $(-2, 0, 2)$ y hallar la recta que es simétrica de r respecto del plano π .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(-2, 0, 2) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

- Sustituyendo r en $\pi \implies (-2 + \lambda) + 0(\lambda) - (2 + \lambda) + 2 = 0 \implies -2 = 0$ lo que es imposible y, por tanto, la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común y son paralelos. ($r \parallel \pi$)
- Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P(-2, 0, 2) \in t$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (1, 0, -1) \\ P_t = P(-2, 0, 2) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto P' de corte de t y π

$$-2 + \lambda - (2 - \lambda) + 2 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P'(-1, 0, 1)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el simétrico P'' buscado

$$\frac{P + P''}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = (-2, 0, 2) - (-2, 0, 2) = (0, 0, 0)$$

Como la recta $r \parallel \pi$ la recta simétrica h de r respecto de π tiene que ser paralela a $r \implies \vec{u}_h = \vec{u}_r$ y tenemos

$$h : \begin{cases} \vec{u}_h = \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_h = P''(0, 0, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2.7.2 Dada la recta $r : x - 1 = \frac{y + 1}{2} = z - 1$ y el plano $\pi : x - y + z = 0$, se pide:

- Determinar la posición relativa de r y π .
- Calcular la distancia del plano π al punto de la recta r , $(1, -1, 1)$ y hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ P_r(1, -1, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \text{ y } \vec{u}_\pi = (1, -1, 1)$$

- Sustituyendo r en $\pi \implies (1 + \lambda) - (-1 + 2\lambda) + (1 + \lambda) = 0 \implies 3 = 0$ lo que es imposible y, por tanto, la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común y son paralelos. ($r \parallel \pi$)
-

$$d(P, \pi) = \frac{|1 + 1 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} u$$

Sea $\pi' : x - y + z + m = 0$ el plano que buscamos. Tenemos $d(r, \pi') = d(\pi, \pi') = \sqrt{3}$

$$d(r, \pi') = d(P, \pi') = \frac{|1 + 1 + 1 + m|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{|3 + m|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \implies |3 + m| = 3$$

$$|3 + m| = 3 \implies \begin{cases} 3 + m = 3 \implies m = 0 \implies \pi'_1 : x - y + z = 0 \equiv \pi \text{ no vale} \\ 3 + m = -3 \implies m = -6 \implies \pi' : x - y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

2.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.7.3 Se pide:

- Hallar la recta perpendicular al plano $\pi : x + y + z = 1$ que pasa por el punto $A = (0, 0, 0)$.
- Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (1, 3, -1)$ son simétricos.

Solución:

$$\text{a) } r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, 1, 1) \\ P_r = A(0, 0, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Dos métodos:

➤ **Método 1:** $\vec{u}_{\pi'} = \vec{PQ} = (0, 2, -2) = 2(0, 1, -1) \implies \pi' : y - z + \lambda = 0$. Este plano tiene que contener al punto medio M entre P y $Q \implies M = \frac{P + Q}{2} = (1, 2, 0)$, sustituyendo en el plano: $y + z + \lambda = 0 \implies 0 + 2 - 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = -2 \implies \pi' : y - z - 2 = 0$

☛ **Método 2:** Se trata de calcular el plano mediador π' . Un punto cualquiera de este plano $M(x, y, z)$ tiene que cumplir

$$d(P, M) = d(Q, M) \implies |\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{QM}| = \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} \implies \\ \pi' : y - z - 2 = 0$$

Problema 2.7.4 Dada la recta $r : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto $P = (0, 0, 0)$, hallar la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el punto P . **Solución:**

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -2) \\ P_r(-1, 2, 0) \end{cases} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{PP_r} = (-1, 2, 0)$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -2) \\ \overrightarrow{PP_r} = (-1, 2, 0) \\ P(0, 0, 0) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \\ \pi : 4x + 2y - z = 0$$

2.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.7.5 Dadas las rectas $r \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$, se pide:

- Determinar la posición relativa de r y s .
- Hallar la ecuación del plano que contiene a r y s .

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(0, -1, 2) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \implies s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 2) \\ P_s(0, 3, 3) \end{cases}$$

- Como $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} \implies r$ y s o son paralelas o son coincidentes. Son coincidentes si $P_s \in r$ lo que es falso, sustituyendo P_s en r tenemos $0 \neq 3 + 1 \neq \frac{3-2}{2}$. Por tanto, r y s son paralelas.

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (0, 4, 1) \\ P_r(0, -1, 2) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \\ \pi : 7x + y - 4z + 9 = 0$$

Problema 2.7.6 Dada la recta $r : x - 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$

- Calcular el plano π_1 que pasa por $A = (1, 2, 3)$ y es perpendicular a la recta r .
- Calcular el plano π_2 que pasa por $B = (-1, 1, -1)$ y contiene a la recta r .

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 2) \\ P_r(1, 2, 1) \end{cases}$$

a) $\vec{u}_{\pi_1} = \vec{u}_r = (1, -1, 2) \Rightarrow \pi_1 : x - y + 2z + \lambda = 0$ imponemos $A = (1, 2, 3) \in \pi_1 \Rightarrow 1 - 2 + 6 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -5 \Rightarrow \pi_1 : x - y + 2z - 5 = 0$.

b)

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{BP}_r = (2, 1, 2) \\ B(-1, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi : 4x - 2y - 3z + 3 = 0$$

2.8. Cataluña

2.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.8.1 Considere el punto $P = (-1, 3, 1)$, el plano $\pi : x = y$ y la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{3}$

- a) Encuentre las coordenadas del punto P' simétrico a P respecto al plano π .
- b) De todos los planos que contienen a la recta r , encuentra la ecuación cartesiana del que es perpendicular al plano π .

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

• Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $P \in t$:

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (1, -1, 0) \\ P_t = P(-1, 3, 1) \end{cases} \Rightarrow t : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

• Calculamos el punto A de intersección de t con π :
 $(-1 + \lambda) - (3 - \lambda) + 0 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow A(1, 1, 1)$

• El punto A es el punto medio entre P y el simétrico P' :

$$\frac{P + P'}{2} = A \Rightarrow P' = 2A - P = (2, 2, 2) - (-1, 3, 1) = (3, -1, 1)$$

b) $r \subset \pi' \perp \pi : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (1, -1, 0) \\ \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (2, 3, 1) \\ P_r(1, 0, 2) \end{cases} \Rightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' :$

$$x + y - 5z + 9 = 0$$

2.8.2. Convocatoria Extraordinaria septiembre de 2021

Problema 2.8.2 En $\mathbb{R}^3$ se dan los puntos $A = (3, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (4, 1, 2)$ y $D = (1, 1, t)$, donde t es un valor real.

- a) ¿Para qué valor de t los cuatro puntos son coplanarios?
- b) Encuentre el valor de t para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de $5 u^3$.

Nota: El volumen de un tetraedro definido por los vectores v_1 , v_2 y v_3 es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores, $V = \frac{1}{6} |\det(v_1, v_2, v_3)|$

Solución:

a) Sean los vectores $\overrightarrow{AB} = (-3, -1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 0, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-2, 0, t-1)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = t+1 = 0 \implies t = -1$$

b) $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6} |t+1| = 5 \implies |t+1| = 30 \implies$

$$\begin{cases} t+1 = 30 \implies t = 29 \\ t+1 = -30 \implies t = -31 \end{cases}$$

2.9. Comunidad valenciana

2.9.1. Modelo de 2021

Problema 2.9.1 Se da el plano $\pi : 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P(10, 0, 10)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La distancia del punto P al plano π .
- El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A , B y C , obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.
- El volumen del tetraedro cuyos vértices son P , A , B y C .

Solución:

$$a) d(P, \pi) = \frac{|20 + 0 + 20 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{32}{3} u$$

b) Puntos de corte de $\pi : 2x + y + 2z = 8$ con los ejes coordenados:

Con OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \implies 2x = 8 \implies x = 4 \implies A(4, 0, 0)$

Con OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \implies y = 8 \implies B(0, 8, 0)$

Con OZ hacemos $x = 0$ e $y = 0 \implies 2z = 8 \implies z = 4 \implies C(0, 0, 4)$

c) Calculamos los vectores:

$$\overrightarrow{AP} = (10, 0, 10) - (4, 0, 0) = (6, 0, 10), \overrightarrow{BP} = (10, 0, 10) - (0, 8, 0) = (10, -8, 10) \text{ y } \overrightarrow{CP} = (10, 0, 10) - (0, 0, 4) = (10, 0, 6)$$

$$V_t = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}]| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 10 & -8 & 10 \\ 10 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{|512|}{6} = \frac{256}{3} u^3$$

Problema 2.9.2 Se dan en el espacio la recta $r : \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β .

- b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$.
 c) La ecuación del plano que pasa por $(0, 0, 0)$ y que no corta al plano π .

Solución:

$$\text{a) } r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, -4, \beta) \\ P_r(\alpha, 0, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \alpha - \lambda \\ y = -4\lambda \\ z = \beta\lambda \end{cases} \quad \text{Sustituimos en } \pi$$

$$(\alpha - \lambda) + 2(-4\lambda) + 3(\beta\lambda) = 6 \implies -9\lambda + 3\beta\lambda = 6 - \alpha \implies (-9 + 3\beta)\lambda = 6 - \alpha$$

- Si $\alpha = 6$ y $\beta = 3 \implies 0 = 0 \implies r \subset \pi$
- Si $\alpha \neq 6$ y $\beta = 3 \implies 0 = 6 - \alpha \neq 0 \implies r \parallel \pi$
- Si $\alpha \neq 6$ y $\beta \neq 3 \implies \lambda = \frac{6 - \alpha}{-9 + 3\beta} \implies r$ y π se cortan.

- b) Por el apartado anterior si $\alpha = 6$ y $\beta = 3 \implies 0 = 0 \implies r \subset \pi$ y $d(r, \pi) = 0$
 c) Si el plano π' no corta al plano $\pi \iff \pi' \parallel \pi \implies \pi' : x + 2y + 3z + m = 0$ como $O \in \pi' \implies 0 + 0 + 0 + m = 0 \implies \pi' : x + 2y + 3z = 0$

2.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.9.3 Se dan los planos $\pi_1 : x + y + z = a - 1$, $\pi_2 : 2x + y + az = a$ y $\pi_3 : x + ay + z = 1$.

- a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a .
 b) Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 .
 c) Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 .

Solución:

$$\text{a) } \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right), |A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \implies a = 1 \text{ y } a = 2$$

☛ Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y es un sistema compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.

☛ Si $a = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{sistema compatible indeterminado}$$

Los tres planos tienen infinitos puntos comunes. Ahora los comparamos dos a dos:

$$\pi_1 \text{ con } \pi_2 : \frac{1}{2} \neq \frac{1}{1} \implies \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ se cortan en una recta.}$$

$$\pi_1 \text{ con } \pi_3 : \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \implies \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan en una recta.}$$

$$\pi_2 \text{ con } \pi_3 : \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2} \implies \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan en una recta.}$$

Luego π_1 , π_2 y π_3 se cortan en una recta.

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

sistema incompatible

No hay puntos comunes a los tres planos. Ahora los comparamos dos a dos:

$$\pi_1 \text{ con } \pi_2 : \frac{1}{2} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ se cortan en una recta.}$$

$$\pi_1 \text{ con } \pi_3 : \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ son paralelos.}$$

$$\pi_2 \text{ con } \pi_3 : \frac{1}{2} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan en una recta.}$$

Luego π_1 y π_3 son paralelos y π_3 corta a ambos.

b) Si $a = 1 \Rightarrow \pi_1$ y π_3 son paralelos, como se ha visto en el apartado anterior.

c) Si $a = 2$

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2.9.4 Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide

- Calculad la distancia del punto P al plano π .
- Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π .
- Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π .

Solución:

a) $d(P, \pi) = \frac{|3 + 4 + 3 + 4|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \text{ u}$

b) Seguimos el siguiente método:

☛ Calculamos una recta $r \perp \pi$ tal que $P \in r$:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (3, 2, 1) \\ P_r = P(1, 2, 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

☛ Calculamos el punto de corte A de r con π :

$$3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (3 + \lambda) + 4 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow A(-2, 0, 2)$$

☛ El punto A es el punto medio entre P y el que buscamos P' :

$$\frac{P + P'}{2} = A \Rightarrow P' = 2A - P = (-4, 0, 4) - (1, 2, 3) = (-5, -2, 1)$$

c) $\pi' \parallel \pi \Rightarrow \pi' : 3x + 2y + z + \lambda = 0$ como $P' \in \pi' \Rightarrow -15 - 4 + 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 18 \Rightarrow$
 $\pi' : 3x + 2y + z + 18 = 0$

2.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.9.5 Se dan las rectas $r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$, $s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi : x + my + z = 2$ que depende del parámetro real m . Obtener:

- La posición relativa de las rectas r y s .
- El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π .
- Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2, 2, 2)$.

Solución:

$$r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases}$$

$$s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, -1, 2) \\ P_s(1, 0, 0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_s P_r} = (-1, 1, -1) \quad \vec{u}_\pi = (1, m, 1)$$

- Como $\vec{u}_r = \vec{u}_s = (1, -1, 2) \Rightarrow r$ y s o son coincidentes o son paralelas.

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_s P_r} \\ \vec{u}_r \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow r \parallel s$$
- Para que $r \subset \pi$ se tiene que cumplir $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = 0 \Rightarrow 1 - m + 2 = 0 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow \pi : x + 3y + z = 2$. Para que $r \subset \pi$ también se tiene que cumplir $P_r \in \pi \Rightarrow 0 + 3 - 1 = 2 \Rightarrow r \subset \pi$.
 Luego si $m = 3 \Rightarrow r \subset \pi$.
- Si $m = 2 \Rightarrow \pi : x + 2y + z = 2$
 Corte con eje OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 0, 0)$
 Corte con eje OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(0, 1, 0)$
 Corte con eje OZ hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow C(0, 0, 2)$
 $\vec{AB} = (-2, 1, 0)$, $\vec{AC} = (-2, 0, 2)$ y $\vec{AP} = (0, 2, 2)$

$$V_T = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP}] \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |12| = 2 \text{ u}^3$$

Problema 2.9.6 Dados los puntos $P(1, 1, 0)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(\alpha, 3, -1)$ se pide

- La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$, y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas.
- La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q . Calcular la distancia entre las rectas r y s .
- Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

Solución:

a) Si $\alpha = 1 \Rightarrow R(1, 3, -1)$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1) \\ \overrightarrow{PR} = (0, 2, -1) \\ P(1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi : y + 2z - 1 = 0$$

$$d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 + 0 - 1|}{\sqrt{0 + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{5}}{5} u$$

$$\text{b) } s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1) \\ P(1, 1, 0) \end{cases} \quad y \quad r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (1, -2, 1) \\ R(1, 3, -1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

Por construcción r y s son paralelas luego $d(r, s) = d(R, s)$. Tenemos $\overrightarrow{PR} = (0, 2, -1)$ y

$$|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{u_s}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(0, -1, -2)| = \sqrt{5}$$

$$d(R, s) = \frac{|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} u$$

c) Tenemos $\overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1)$ y $\overrightarrow{PR} = (\alpha - 1, 2, -1)$. Los tres puntos están alineados si $\overrightarrow{PR} =$

$$k\overrightarrow{PQ} \Rightarrow (\alpha - 1, 2, -1) = k(1, -2, 1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = k \\ 2 = -2k \\ -1 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Luego $\alpha = 0$. La recta t que los contiene:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1) \\ P(1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

2.10. Extremadura

2.10.1. Modelo de 2021

Problema 2.10.1 Dados los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(0, 3, 1)$ y $C(1, 0, -1)$.

a) Hallar un vector unitario y ortogonal a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b) Hallar el área del triángulo que forman los puntos A , B y C .

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{AB} &= (0, 3, 1) - (1, 2, 1) = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} &= (1, 0, -1) - (1, 2, 1) = (0, -2, -2) \\ \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AC} &\implies \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-2, -2, 2) = -2(1, 1, -1) = -2\vec{v}$$

El vector $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ tiene módulo $\sqrt{3}$, luego el vector buscado sería $w_1 = \frac{\vec{v}}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $w_2 = \frac{-\vec{v}}{\sqrt{3}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\text{b) } S_t = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |(-2, -2, 2)| = \sqrt{3} u^2$$

Problema 2.10.2 Sea r la recta determinada por el punto $P(0, -2, 3)$ y el vector $\vec{u} = (1, 2, -1)$.

- a) Hallar el plano π paralelo a r y que contiene a la recta $\frac{x-2}{2} = y = z+1$.
b) Hallar el plano π' perpendicular a r y que pasa por el punto $Q(0, -2, 3)$.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u} = (1, 2, -1) \\ P_r = P(0, -2, 3) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$\text{a) } s : \frac{x-2}{2} = y = z+1 \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 1) \\ P_s(2, 0, -1) \end{cases}$$

$$\vec{u}_\pi = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -3, -3) = 3(1, -1, -1)$$

La ecuación del plano $\pi : x - y - z + \lambda = 0$ imponiendo que $P_s \in \pi \implies 2 - 0 + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -3 \implies \pi : x - y - z - 3 = 0$

$$\text{b) } \pi' \perp r \implies \vec{u}_{\pi'} = \vec{u}_r = (1, 2, -1) \implies x + 2y - z + \lambda = 0 \text{ como } Q \in \pi' \implies 0 - 4 - 3 + \lambda = 0 \implies \lambda = 7 \implies \pi' : x + 2y - z + 7 = 0$$

2.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.10.3 Dados el plano $\pi \equiv kx + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

- a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que el plano π contenga a r .
b) Para $k = 0$, calcular el ángulo que forman π y r .

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{u}_\pi &= (k, 1, -1) \text{ y } r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, -1) \\ P_r(4, 2, -2) \end{cases} \\ P_r \in \pi &\implies 4k + 2 + 2 = 0 \implies k = -1 \\ \vec{u}_\pi \perp \vec{u}_r &\implies \vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0 \implies 2k + 1 + 1 = 0 \implies k = -1 \\ \text{Si } k &= -1 \implies r \subset \pi. \end{aligned}$$

b) Si $k = 0 \Rightarrow \pi : y - z = 0 \Rightarrow \vec{u}_\pi = (0, 1, -1)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{|\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{u}_\pi| \cdot |\vec{u}_r|} = \frac{|0 + 1 + 1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 35^\circ 15' 52''$$

Problema 2.10.4 Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$. Encontrar un plano paralelo a π tal que el triángulo formado por los puntos de corte de dicho plano con los ejes tenga área $2\sqrt{3}$.

Solución:

$\pi' \parallel \pi \Rightarrow \pi' : x + y + z + \lambda = 0$. Este plano corta a los ejes coordenados en los siguientes puntos:

☛ Con eje OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Rightarrow x + \lambda = 0 \Rightarrow A(-\lambda, 0, 0)$

☛ Con eje OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Rightarrow y + \lambda = 0 \Rightarrow B(0, -\lambda, 0)$

☛ Con eje OZ hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Rightarrow z + \lambda = 0 \Rightarrow C(0, 0, -\lambda)$

Tenemos los vectores: $\vec{AB} = (0, -\lambda, 0) - (-\lambda, 0, 0) = (\lambda, -\lambda, 0)$ y $\vec{AC} = (0, 0, -\lambda) - (-\lambda, 0, 0) = (\lambda, 0, -\lambda)$

$$S_t = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{array} \right| = \frac{1}{2} |\lambda^2(1, 1, 1)| = \frac{1}{2} \lambda^2 \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

Los planos buscados son: $\pi'_1 : x + y + z + 2 = 0$ y $\pi'_2 : x + y + z - 2 = 0$

2.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.10.5 Sean las rectas r y s dadas por $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y

$$s : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases}.$$

a) Obtener un plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s .

b) Calcular la distancia entre las dos rectas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -3, 0) \\ P_r(1, 2, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} \vec{u}_s = (0, -1, 1) \\ P_s(3, -1, 0) \end{cases}$$

$$a) \pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -3, 0) \\ \vec{u}_s = (0, -1, 1) \\ P_r(1, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi : 3x + y + z - 6 = 0$$

b) $\overrightarrow{P_r P_s} = (2, -3, -1)$

$$\left| [\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] \right| = \left| \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |-2| = 2$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(3, 1, 1)| = \sqrt{11}$$

$$d(r, s) = \frac{\left| [\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] \right|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{2}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{11} u$$

Problema 2.10.6 Calcular un vector de módulo 3 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$ **Solución:**
 $\vec{t} = \vec{u} \times \vec{v} \implies \vec{t} \perp \vec{u}$ y $\vec{t} \perp \vec{v}$

$$\vec{t} = \vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = (1, -2, -1)$$

El vector que se busca será:

$$\vec{w} = \frac{3\vec{t}}{|\vec{t}|} = \frac{3(1, -2, -1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{-6}{\sqrt{6}}, \frac{-3}{\sqrt{6}} \right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

También valdría:

$$\vec{w} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

2.11. Galicia

2.11.1. Modelo de 2021

Problema 2.11.1 Da respuesta a los apartados siguientes:

- Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m .
- Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(0, 1, 0)$.

Solución:

a) π_1 con $\pi_2 \implies \frac{m}{2} = \frac{-1}{3} \implies m = \frac{-2}{3}$.

Si $m = \frac{-2}{3} \implies \pi_1$ y π_2 son paralelos. En caso contrario se cortan.

b) $\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 0, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 0) \\ A(0, 0, 0) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi' : x - z = 0$

Problema 2.11.2 Se pide:

- a) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$
- b) Calcular la distancia del punto $Q(1, 1, 1)$ al plano $\pi: -x + y + z + 4 = 0$ y el punto simétrico de Q respecto de π .

Solución:

a) $r: \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{cases}$

$\vec{u}_\pi = \vec{u}_r = (-1, 1, 1) \Rightarrow \pi: -x + y + z + m = 0$ como $P \in \pi \Rightarrow -1 - 3 + 0 + m = 0 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow \pi: -x + y + z + 4 = 0$

b) $d(Q, \pi) = \frac{|-1 + 1 + 1 + 4|}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} u$

Para calcular el punto simétrico seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi/Q \in t \Rightarrow t: \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (-1, 1, 1) \\ P_t = Q(1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow$
- $$t: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$
- Calculamos el punto de corte de t con π :

$$-(1 - \lambda) + (1 + \lambda) + (1 + \lambda) + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{3} \Rightarrow Q' \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

- $\frac{Q + Q''}{2} = Q' \Rightarrow Q'' = 2Q' - Q = \left(\frac{16}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{13}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{3} \right)$

2.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.11.3 Da respuesta a los apartados siguientes:

- a) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 3)$.
- b) Calcule el punto simétrico de $P(10, -5, 5)$ con respecto al plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Solución:

a) $\pi: \begin{cases} \vec{AB} = (-1, 2, 0) \\ \vec{AC} = (-1, 0, 3) \\ A(1, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$

- b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $r \perp \pi$ tal que $P \in r$:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (6, 3, 2) \\ P_r = P(10, -5, 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + 6\lambda \\ y = -5 + 3\lambda \\ z = 5 + 2\lambda \end{cases}$$

☛ Calculamos el punto de corte P' de r con π :

$$6(10 + 6\lambda) + 3(-5 + 3\lambda) + 2(5 + 2\lambda) - 6 = 0 \implies \lambda = -1 \implies P'(4, -8, 3)$$

☛ P' es el punto medio del segmento $\overline{PP''}$ donde P'' es el simétrico que buscamos:

$$\frac{P + P''}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = (8, -16, 6) - (10, -5, 5) = (-2, -11, 1)$$

Problema 2.11.4 Se pide:

- a) Halle el valor de a si el plano $\pi : ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$
- b) Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1 : 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2 : (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m .

Solución:

$$\text{a) } r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(1, 1, 2) \end{cases} \quad \text{y } \vec{u}_\pi = (a, 1, 1)$$

$$\vec{u}_\pi \perp \vec{u}_r \implies \vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0 \implies a + 1 + 1 = 0 \implies a = -2$$

$$\text{b) } \frac{2}{m-1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{3}$$

$\frac{2}{m-1} = \frac{1}{1} \implies m = 3$, luego para este valor tenemos: $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{3}{3} \neq \frac{3}{0} \implies$ los dos planos son paralelos. Para $m \neq 3 \implies \frac{2}{m-1} \neq \frac{1}{1} \implies$ los dos planos se cortan.

2.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.11.5 Se pide:

- a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0, m, 0)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 4, 3)$ y $D(2, 0, 2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

Solución:

$$\text{a) } \pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases} \implies \pi : \begin{cases} \vec{u} = (-1, 0, 1) \\ \vec{v} = (0, 1, 2) \\ P(1, 2, 1) \end{cases} \implies$$

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x - 2y + z + 2 = 0$$

b) $\overrightarrow{AB} = (0, 2 - m, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 4 - m, 3)$ y $\overrightarrow{AD} = (2, -m, 2)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & 2-m & 2 \\ 1 & 4-m & 3 \\ 2 & -m & 2 \end{vmatrix} = -2(m+4) = 0 \implies m = -4$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 6, 2) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 8, 3) \\ A(0, -4, 0) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x & y+4 & z \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x + y - 3z + 4 = 0$$

Problema 2.11.6 Calcule el punto simétrico de $P(1, 1, 2)$ con respecto al plano $\pi : 2x - y + z + 3 = 0$.

Solución:

☛ Calculamos una recta $r \perp \pi$ tal que $P \in r$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 1) \\ P_r = P(1, 1, 2) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

☛ Calculamos el punto de corte P' de r con π :

$$2(1 + 2\lambda) - (1 - \lambda) + (2 + \lambda) + 3 = 0 \implies \lambda = -1 \implies P'(-1, 2, 1)$$

☛ P' es el punto medio del segmento $\overline{PP''}$ donde P'' es el simétrico que buscamos:

$$\frac{P + P''}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = (-2, 4, 2) - (1, 1, 2) = (-3, 3, 0)$$

2.12. Islas Baleares

2.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.12.1 Considera los puntos: $A = (5, a, 7)$, $B = (3, -1, 7)$ y $C(6, 5, 4)$.

- Determina el valor del parámetro a para el que los puntos A , B y C forman un triángulo rectángulo, con el ángulo recto en el punto B .
- Para el valor de $a = -2$, calcula el área del triángulo de vértices A , B y C .
- Para el valor de $a = 5$, calcula el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución:

$$\text{a) } \overrightarrow{BA} = (2, 1 + a, 0) \text{ y } \overrightarrow{BC} = (3, 6, -3) \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 + 6(1 + a) + 0 = 0 \implies a = -2$$

$$\text{b) } \overrightarrow{BA} = (2, -1, 0) \text{ y } \overrightarrow{BC} = (3, 6, -3) \\ S_t = \frac{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{30}}{2} u^2$$

c) Si $a = 5 \Rightarrow A(5, 5, 7), B = (3, -1, 7)$ y $C(6, 5, 4)$
 $\vec{AB} = (-2, -6, 0)$ y $\vec{AC} = (1, 0, -3)$
 $\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-2 + 0 + 0}{2\sqrt{10}\sqrt{10}} = \frac{-1}{10} \Rightarrow \alpha = 95^\circ 44' 21''$

Problema 2.12.2 Dadas las rectas

$$r : \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}, \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

- a) Calcula el valor de m para que se corten en un punto.
b) Calcula el punto de corte.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} x = m - \mu \\ y = -10 + 4\mu \\ z = -3 + \mu \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - \mu = 1 \\ -10 + 4\mu = 6 + 4\lambda \\ -3 + \mu = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = 6 \\ \lambda = 2 \\ m = 7 \end{cases}$$

Luego $m = 7$

- b) El punto de corte es $P(m - \mu, -10 + 4\mu, -3 + \mu) = P(1, 6 + 4\lambda, -1 + 2\lambda) = P(1, 14, 3)$

2.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.12.3 Dadas las rectas:

$$(I) \begin{cases} y = x + 3 \\ z = 2x + 2 \end{cases}, \quad (II) \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 2z + 3 \end{cases},$$

- a) Calcula la ecuación vectorial de cada una de las rectas (I) y (II) .
b) Si es posible, calcula el plano paralelo a la recta (II) que contiene a la recta (I) .
c) Calcula el plano perpendicular a la recta (II) que pasa por el punto $(-1, 0, 2)$.
d) Calcula la recta de dirección perpendicular a las de las rectas (I) y (II) que pasa por el origen.

Solución:

a) $(I) : \begin{cases} y = x + 3 \\ z = 2x + 2 \end{cases} \Rightarrow (I) : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow (I) : \begin{cases} \vec{u}_I = (1, 1, 2) \\ P_I(0, 3, 2) \end{cases}$
 $\Rightarrow (I) : (x, y, z) = (0, 3, 2) + \lambda(1, 1, 2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$(II) : \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 2z + 3 \end{cases} \implies (II) : \begin{cases} x = 3 + 2\mu \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \mu \end{cases} \implies (II) : \begin{cases} \vec{u}_{II} = (2, 0, 1) \\ P_{II} \left(3, -\frac{1}{2}, 0 \right) \end{cases}$$

$$\implies (II) : (x, y, z) = \left(3, -\frac{1}{2}, 0 \right) + \mu(2, 0, 1), \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \pi : \begin{cases} \vec{u}_{II} = (2, 0, 1) \\ \vec{u}_I = (1, 1, 2) \\ P_I(0, 3, 2) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : x + 3y - 2z - 5 = 0$$

$$\text{c) } \vec{u}_{\pi'} = \vec{u}_{II} = (2, 0, 1) \implies \pi' : 2x + z + \lambda = 0$$

Imponiendo $P(-1, 0, 2) \in \pi' \implies -2 + 0 + 2 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies$

$$\pi' : 2x + z = 0$$

$$\text{d) } \vec{u}_t = \vec{u}_I \times \vec{u}_{II} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 3, -2)$$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 3, -2) \\ P_t = O(0, 0, 0) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 2.12.4 Dados los puntos: $P = (1, 0, 1)$, $Q = (1, 1, 0)$ y $R(0, 1, 1)$.

- Comprueba que P , Q y R no están alineados.
- Calcula la ecuación vectorial del plano que determinan P , Q y R .
- Calcula el área del triángulo que tiene por vértices P , Q y R .
- Calcula, de forma razonada, la condición que deben cumplir a , b y c para que los puntos P , Q , R y $S = (a, b, c)$ pertenezcan a un mismo plano.

Solución:

$$\text{a) } \vec{PQ} = (0, 1, -1) \text{ y } \vec{PR} = (-1, 1, 0)$$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \implies P, Q \text{ y } R \text{ no están alineados.}$$

$$\text{b) } \pi : \begin{cases} \vec{PQ} = (0, 1, -1) \\ \vec{PR} = (-1, 1, 0) \\ P(1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : x + y + z - 2 = 0$$

$$\text{c) } S_t = \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(1, 1, 1)| = \frac{\sqrt{3}}{2} u^2$$

$$\text{d) } S(a, b, c) \in \pi : x + y + z - 2 = 0 \implies a + b + c = 2$$

2.13. Islas Canarias

2.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.13.1 Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional: $A(0, -2, 3)$, $B(1, -1, 4)$, $C(2, 3, 3)$ y $D(4, 5, 5)$.

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios. A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene.

b) Calcular la ecuación de la recta r , perpendicular al plano $\pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases}$ que pasa por el punto A

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 5, 0)$ y $\overrightarrow{AD} = (4, 7, 2)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{los tres vectores están en el mismo plano, son coplanarios.}$$

El plano π' que contiene a estos puntos es

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 5, 0) \\ A(0, -2, 3) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} x & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies$$
$$\pi' : 5x - 2y - 3z + 5 = 0$$

$$\text{b) } \pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases} \implies \pi : \begin{cases} \vec{u} = (2, 1, -3) \\ \vec{v} = (3, 0, 3) \\ P(1, -2, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x & y+2 & z-3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \implies$$
$$\pi : x + y + z - 1 = 0 \implies \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, 1, 1)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, 1, 1) \\ P_r = A(0, -2, 3) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Problema 2.13.2 Dadas las ecuaciones de los planos

$$\pi_1 : 2x + 3y - z = 9, \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son $A(1, -1, 0)$ y $B(-1, -3, 2)$

b) Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2 .

Solución:

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u} = (1, -1, 3) \\ \vec{v} = (1, 2, -1) \\ P(1, -2, 3) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\begin{aligned}\pi_2 : 5x - 4y - 3z - 4 = 0 &\implies \vec{u}_{\pi_2} = (5, -4, -3) \\ \pi_1 : 2x + 3y - z - 9 = 0 &\implies \vec{u}_{\pi_1} = (2, 3, -1) \\ \text{a) } \vec{u}_{\pi_1} \times \vec{u}_{\pi_2} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (-13, 1, -23) \\ r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_{\pi_1} \times \vec{u}_{\pi_2} = (-13, 1, -23) \\ P_r = \frac{A+B}{2} = (0, -2, 1) \end{cases} &\implies r : \begin{cases} x = -13\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 23\lambda \end{cases}\end{aligned}$$

b) Calculamos el ángulo agudo:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_{\pi_1} \cdot \vec{u}_{\pi_2}|}{|\vec{u}_{\pi_1}| \cdot |\vec{u}_{\pi_2}|} = \frac{|10 - 12 + 3|}{\sqrt{14} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{70} \implies \alpha = 87^\circ 50' 2''$$

2.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.13.3 Dadas las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional:

$$r : 5 - x = y - 3 = 5 - z$$

$$\pi : 3x - 4y - 8z + 35 = 0$$

- a) Comprobar que la recta r y el plano π se cortan en un punto. Averiguar dicho punto.
b) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2, 2, 2)$, paralelo a la recta r , y perpendicular al plano π .

Solución:

$$r : 5 - x = y - 3 = 5 - z \implies r : \frac{x-5}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{-1} \implies r : \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, -1) \\ P_r(5, 3, 5) \end{cases}$$

- a) Sustituyendo r en $\pi \implies 3(5 - \lambda) - 4(3 + \lambda) - 8(5 - \lambda) + 35 = 0 \implies \lambda = 2$, luego r y π se cortan en un punto.
Sustituyendo $\lambda = 2$ en la recta r obtenemos el punto de corte $P(3, 5, 3)$.

$$\text{b) } \pi' : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, -1) \\ \vec{u}_\pi = (3, -4, -8) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi' : 12x + 11y - z - 44 = 0$$

Problema 2.13.4 Dado el plano $\pi : -x + 3y + 2z + 5 = 0$ y las rectas secantes:

$$r : \frac{x-5}{2} = y+2 = 1-z, \quad s : \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z$$

- a) Sea A el punto de intersección de las rectas r y s .
Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y que pasa por A .

b) Calcular el ángulo que forman las rectas r y s .

Solución:

$$r : \frac{x-5}{2} = y+2 = 1-z \Rightarrow r : \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, -1) \\ P_r(5, -2, 1) \end{cases}$$

$$s : \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z \Rightarrow s : \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1} \Rightarrow s : \begin{cases} x = -1+6\mu \\ y = -2\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (6, -2, 1) \\ P_s(-1, 0, 0) \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x = 5+2\lambda = -1+6\mu \\ y = -2+\lambda = -2\mu \\ z = 1-\lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5+2\lambda = -1+6\mu \\ -2+\lambda = -2\mu \\ 1-\lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow A(5, -2, 1)$$

$$h \perp \pi \Rightarrow \vec{u}_h = \vec{u}_\pi = (-1, 3, 2) \text{ Luego}$$

$$h : \begin{cases} \vec{u}_h = (-1, 3, 2) \\ P_h = A(5, -2, 1) \end{cases} \Rightarrow h : \begin{cases} x = 5-t \\ y = -2+3t \\ z = 1+2t \end{cases}$$

$$\text{b) } \cos \alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{|12-2-1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{41}} = \frac{3\sqrt{246}}{82} \Rightarrow \alpha = 54^\circ 58' 59''$$

2.14. La Rioja

2.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.14.1 Hallar la ecuación de una recta, tal que:

- a) pasa por el punto $P(0, 1, 1)$,
- b) está contenida en el plano $\pi \equiv x + y + 3z - 4 = 0$,
- c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = z + 3 \\ y = -z + 4 \end{cases}$

Solución:

$$r : \begin{cases} x = z + 3 \\ y = -z + 4 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 1) \\ P_r(3, 4, 0) \end{cases}$$

$$\pi \equiv x + y + 3z - 4 = 0 \Rightarrow \vec{u}_\pi = (1, 1, 3)$$

La recta s que buscamos tiene como vector director $\vec{u}_s \perp \vec{u}_r$ y $\vec{u}_s \perp \vec{u}_\pi$ luego

$$\vec{u}_s = \vec{u}_r \times \vec{u}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2(2, 1, -1)$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, -1) \\ P_s = P(0, 1, 1) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Problema 2.14.2 Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$$

Solución:

Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi \perp r$ tal que $P \in \pi$:
 $\vec{u}_\pi = \vec{u}_r = (2, 2, 1) \implies \pi : 2x + 2y + z + \lambda = 0$ imponemos $P \in \pi \implies 4 - 2 + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -3 \implies \pi : 2x + 2y + z - 3 = 0$

- Calculamos el punto de corte A de π con r , para ello pasamos la ecuación de r a paramétricas:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 2, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Sustituimos en π

$$2(2 + 2\lambda) + 2(1 + 2\lambda) + \lambda - 3 = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{3} \implies A\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

- La recta s que buscamos pasa por A y por P :

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \overrightarrow{AP} = (2, -1, 1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(1, -2, 2) \\ P_s = P(2, -1, 1) \end{cases} \implies$$

$$s : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

2.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.14.3 Hallar la ecuación de una recta, tal que:

- pasa por el punto $P(1, 1, 1)$,
- está contenida en el plano $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$,

- es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$

Solución:

$$r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, -2) \\ P_r(3, 2, 1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0 \implies \vec{u}_\pi = (1, 1, -2)$$

La recta s que buscamos tiene como vector director $\vec{u}_s \perp \vec{u}_r$ y $\vec{u}_s \perp \vec{u}_\pi$ luego

$$\vec{u}_s = \vec{u}_r \times \vec{u}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(2, 0, 1)$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 0, 1) \\ P_s = P(1, 1, 1) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Problema 2.14.4 Calcular el valor del parámetro real a para que las rectas r y s se corten y calcular este punto.

$$r \equiv \begin{cases} 4x + z = a \\ x + y = 2 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2z = 2a \end{cases}$$

Solución:

$$r : \begin{cases} 4x + z = a \\ x + y = 2 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = a - 4\lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, -4) \\ P_r(0, 2, a) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2z = 2a \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 2a - 2\mu \\ y = -2a + \mu \\ z = \mu \end{cases} \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ P_s(2a, -2a, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 2a - 2\mu \\ 2 - \lambda = -2a + \mu \\ a - 4\lambda = \mu \end{cases} \implies \begin{cases} a = -2 \\ \lambda = 0 \\ \mu = -2 \end{cases}$$

Para que r y s se corten el parámetro real es $a = -2$ y el punto de corte es $P(0, 2, -2)$.

2.15. Madrid

2.15.1. Modelo de 2021

Problema 2.15.1 Se consideran los puntos $A(3, 1, 2)$, $B(0, 3, 4)$ y $P(-1, 1, 0)$. Se pide:

- Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.
- Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P , y de la recta s que contiene a B y al punto $C(2, -1, -2)$.
- Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

Solución:

- $\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 2)$ y $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AB} = (3, -2, -2)$. Tenemos $\overrightarrow{PQ} = Q - P \implies Q = P + \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 0) + (3, -2, -2) \implies Q(2, -1, -2)$.

b) Tenemos:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{AP} = (-4, 0, -2) = -2(2, 0, 1) \\ P_r = A(3, 1, 2) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{BC} = (2, -4, -6) = 2(1, -2, -3) \\ P_s = B(0, 3, 4) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = \mu \\ y = 3 - 2\mu \\ z = 4 - 3\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda = \mu \\ y = 1 = 3 - 2\mu \\ z = 2 + \lambda = 4 - 3\mu \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases} \implies H(1, 1, 1)$$

$$c) \vec{PA} = (4, 0, 2) \implies |\vec{PA}| = 2\sqrt{5}, \vec{PB} = (1, 2, 4) \implies |\vec{PB}| = \sqrt{21} \text{ y } \vec{PA} \cdot \vec{PB} = 4 + 0 + 8 = 12$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}| |\vec{PB}|} = \frac{12}{2\sqrt{5}\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{105}} = \frac{6\sqrt{105}}{105}$$

$$\alpha = 549'32''$$

Problema 2.15.2 Dadas las rectas $r : \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, se pide:

- (0,5 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta s .
- (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de r y s .
- (0,75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene a la recta r y al vector perpendicular a r y a s .
- (0,75 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a r y a s .

Solución:

$$r : \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, -1, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \implies s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, -1, 1) \\ P_s(-3, 2, 1) \end{cases}$$

$$a) \vec{OP}_s = (-3, 2, 1) \text{ y } \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -5, 1) = \sqrt{35}$$

$$d(O, s) = \frac{|\vec{u}_s \times \vec{OP}_s|}{|\vec{u}_s|} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{210}}{6}$$

$$b) \overrightarrow{P_r P_s} = (-4, 0, 1)$$

$$\left[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s \right] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan } r \nparallel s.$$

$$c) \vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 4, 4) = 4(0, 1, 1)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (0, 1, 1) \\ \vec{u}_r = (-2, -1, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$$

d) Como intersección de dos planos. Uno de ellos sería el calculado en el apartado anterior y el otro sería:

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (0, 1, 1) \\ \vec{u}_s = (2, -1, 1) \\ P_s(-3, 2, 1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi_2 : x + y - z + 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

2.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.15.3 Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$.

Se pide:

- Calcular el ángulo que forman r y π .
- Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.
- Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .

Solución:

$$a) \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, -1) \text{ y un punto de la recta puede ser } P_r(-1, 0, -1). \text{ El}$$

vector ortogonal al plano π es $\vec{u}_\pi = (2, 1, -1)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_\pi|} = \frac{|-4 + 1 + 1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{3} \implies \alpha = 19^\circ 28' 16, 39''$$

b) Calculamos el punto de intersección de r con π , tenemos:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en $\pi \implies 2(-1 - 2\lambda) + \lambda - (-1 - \lambda) + 3 = 0 \implies \lambda = 1$ y sustituyendo en $r \implies A(-3, 1, -2)$

Para calcular el simétrico de A respecto del plano $\pi' : -y + z = 0$ seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos una recta $t \perp \pi' / A \in t$:

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_{\pi'}(0, -1, 1) \\ P_t = A(-3, 1, -2) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$$

☛ Calculamos el punto de corte A' de t con π' :

$$-(1 - \lambda) + (-2 + \lambda) = 0 \implies \lambda = \frac{3}{2}$$

$$\text{Sustituyendo en } t \implies A' \left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

☛ Calculamos el punto de corte A'' sabiendo que A' es el punto medio entre A'' y A :

$$A' = \frac{A + A''}{2} \implies A'' = 2A' - A = (-6, -1, -1) - (-3, 1, -2) = (-3, -2, 1)$$

c) Calculamos la recta proyección como intersección de dos planos, uno de ellos es $\pi : 2x + y - z + 3 = 0$ y el otro π'' será un plano perpendicular a π que contenga a r :

$$\pi'' : \begin{cases} \vec{u}_{\pi''} = (2, 1, -1) \\ \vec{u}_r = (-2, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{cases} \implies \pi'' : \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi'' : y + z + 1 = 0$$

$$h : \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \implies h : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2.15.4 Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

- Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.
- Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2 .
- Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y .

Solución:

a) Los planos paralelos a π_1 tienen de ecuación $\pi' : x + y + \lambda = 0$

$$d(O, \pi') = \frac{|0 + 0 + \lambda|}{\sqrt{2}} = 2 \implies |\lambda| = 2\sqrt{2} \implies \lambda = \pm 2\sqrt{2}$$

Los planos serían: $\pi'_1 : x + y + 2\sqrt{2} = 0$ y $\pi'_2 : x + y - 2\sqrt{2} = 0$

$$\text{b) } r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_{\pi_2} = (1, 0, 1) \\ P_r(0, 2, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

c) $\pi_1 : x + y = 1$ con eje OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \implies x = 1 \implies A(1, 0, 0)$
 $\pi_1 : x + y = 1$ con eje OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \implies y = 1 \implies B(0, 1, 0)$

$$d(A, B) = |\vec{AB}| = |(-1, 1, 0)| = \sqrt{2} u$$

2.15.3. Convocatoria Ordinaria junio de 2021 (coincidente)

Problema 2.15.5 Desde el punto $P_1 = (1, 1, -1)$ se ha trazado una recta, r , perpendicular a un plano, π . El punto de intersección del plano con la recta es $P_2 = (0, 0, 0)$. Se pide:

- Hallar una ecuación de la recta r .
- Hallar una ecuación del plano π .
- Hallar la distancia de P_1 al plano π .

Solución:

- $r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{P_2 P_1} = (1, 1, -1) \\ P_r = P_2 = (0, 0, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$
- $\vec{u}_\pi = \vec{u}_r = (1, 1, -1) \implies \pi : x + y - z + \lambda = 0$ como $P_2(0, 0, 0) \in \pi \implies 0 + 0 - 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies \pi : x + y - z = 0$
- $d(P_1, \pi) = \frac{|1 + 1 + 1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} u$

Problema 2.15.6 En un laboratorio se lanza un rayo láser desde el punto $P(2, 3, -5)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (-1, -2, 2)$, para que impacte en una placa metálica plana de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y - 2z = 1$, con el fin de perforar un orificio.

- Calcule las coordenadas del punto de impacto.
- Si el ángulo entre el láser y el plano es menor a 45° , el rayo será reflejado y no se realizará el orificio. Determine si ese es el caso.
- Para optimizar la velocidad de perforación, se decide lanzar el rayo desde P en dirección perpendicular a π , y lanzar simultáneamente otro rayo, también perpendicular a π , desde un punto situado al otro lado del plano y a la misma distancia de π que P . ¿Dónde habría que situar el origen del segundo rayo para que ambos impacten en el mismo punto del plano?

Solución:

- $r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{v} = (-1, -2, 2) \\ P_r = P(2, 3, -5) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -5 + 2\lambda \end{cases}$

Sustituyendo en el plano:

$$3(2 - \lambda) - 2(3 - 2\lambda) - 2(-5 + 2\lambda) = 1 \implies \lambda = 3 \implies P_1(-1, -3, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_\pi|} = \frac{|(-1, -2, 2) \cdot (3, -2, -2)|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{17}} = \\ &= \frac{|-3 + 4 - 4|}{3\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17} \implies \alpha = 14^\circ 2' 11'' \implies \text{no se realiza la perforación.} \end{aligned}$$

- Hay que calcular el punto simétrico de P respecto de π :

☛ Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $P \in t$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (3, -2, -2) \\ P_r = P(2, 3, -5) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -5 - 2\lambda \end{cases}$$

☛ Calculamos el punto P' de corte de t con π

$$3(2 + 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) - 2(-5 - 2\lambda) = 1 \implies \lambda = -\frac{9}{17} \implies$$

$$P' \left(\frac{7}{17}, \frac{69}{17}, -\frac{67}{17} \right)$$

☛ El punto P' calculado en apartado anterior será el punto medio entre el buscado P'' y el dado P :

$$P' = \frac{P + P''}{2} \implies P'' = 2P' - P = \left(\frac{14}{17}, \frac{138}{17}, -\frac{134}{17} \right) - (2, 3, -5) = \left(-\frac{20}{17}, \frac{87}{17}, -\frac{49}{17} \right)$$

2.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.15.7 Dado el punto $A(1, 0, -1)$, la recta $r \equiv x - 1 = y + 1 = \frac{z - 2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x + y - z = 6$, se pide:

- Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A .
- Determinar la distancia entre la recta r y el plano π .
- Calcular una ecuación de la recta que pasa por A , forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 2) \\ P_r(1, -1, 2) \end{cases} \quad \vec{u}_\pi = (1, 1, -1)$$

- El plano $\pi' \perp r \implies \vec{u}_{\pi'} = \vec{u}_r = (1, 1, 2) \implies \pi' : x + y + 2z + \lambda = 0$ imponiendo $A \in \pi' \implies 1 + 0 - 2 + \lambda = 0 \implies \lambda = 1 \implies \pi' : x + y + 2z + 1 = 0$
 $\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_{\pi'}|}{|\vec{u}_\pi| \cdot |\vec{u}_{\pi'}|} = \frac{|(1, 1, -1) \cdot (1, 1, 2)|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{0}{3\sqrt{2}} = 0 \implies \alpha = 90^\circ$
- Para que este apartado tenga sentido r y π tienen que ser paralelos. En efecto, $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = (1, 1, 2) \cdot (1, 1, -1) = 1 + 1 - 2 = 0$.
 Por el apartado anterior ya sabíamos que $r \parallel \pi$.

Elegimos un punto $B(1, -1, 2) \in r$ y calculamos la distancia de B a π

$$d(B, \pi) = \frac{|1 - 1 - 2 - 6|}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} u$$

c) La recta s que buscamos es perpendicular a r y paralela a π por lo que $\vec{u}_s \perp \vec{u}_r$ y $\vec{u}_s \perp$

$$\vec{u}_\pi \Rightarrow \vec{u}_s = \vec{u}_r \times \vec{u}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(-3, 3, 0) = 3(-1, 1, 0)$$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, 0) \\ P_s = A(1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 2.15.8 Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \quad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$$

a) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s .

b) Calcule la distancia entre r y s .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, -3) \\ P_r(2, -1, -4) \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 2(2 - \lambda) + 2\lambda = 5 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 0, 1) \\ P_s(2, 5, 0) \end{cases}$$

a) $\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, 1)$ Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 2, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 1, -3) \\ P_r(2, -1, -4) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 := \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 : 7x - 4y + z - 14 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 2, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 0, 1) \\ P_s(2, 5, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 := \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_2 : x - y + z + 3 = 0$$

$$t : \begin{cases} 7x - 4y + z - 14 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{P_r P_s} = (2, 5, 0) - (2, -1, -4) = (0, 6, 4)$

$$|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]| = \left| \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = |16| = 16$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = |\vec{u}_t| = |(1, 2, 1)| = \sqrt{6}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{16}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{3} u$$

2.16. Murcia

2.16.1. Modelo de 2021

Problema 2.16.1 Los puntos $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ y $C(0, 0, 3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A , B y C .

- Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos A , B y C .
- Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π .
- Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

Solución:

$$\text{a) } \pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-3, 3, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 3) \\ A(3, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : x + y + z - 3 = 0$$

$$\text{b) } r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi(1, 1, 1) \\ P_r = P(1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } D(1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda) &\Rightarrow \overrightarrow{AD} = (-2 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda) \\ V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 + \lambda & 1 + \lambda & 1 + \lambda \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= \frac{1}{6} |27\lambda| = 18 \Rightarrow |\lambda| = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 4 \\ \text{Si } \lambda = 4 &\Rightarrow D(5, 5, 5). \\ \text{Si } \lambda = -4 &\Rightarrow D(-3, -3, -3) \end{aligned}$$

Problema 2.16.2 Considere las siguientes rectas:

$$r : \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

- Estudie la posición relativa de ambas rectas.
- En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Tenemos: } r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(5, 6, -1) \end{cases} &\Rightarrow r : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \text{y } s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, -1) \\ P_s(1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow s : \\ \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

a) $\overrightarrow{P_s P_r} = (4, 6, 0)$

$$[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

- b) Calculamos la recta t como intersección de dos planos:
Primero calculamos su vector director:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1, 1, 0)$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_t = (-1, 1, 0) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(5, 6, -1) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-5 & y-6 & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : x + y - 2z - 13 = 0$$

$$\pi' : \begin{cases} \vec{u}_t = (-1, 1, 0) \\ \vec{u}_s = (1, 1, -1) \\ P_s(1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' : x + y + 2z + 1 = 0$$

$$t : \begin{cases} x + y - 2z - 13 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

2.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.16.3 Considere los planos de ecuaciones $\pi_1 : x - y + z = 0$ y $\pi_2 : x + y - z = 2$.

- a) Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta r determinada por la intersección de ambos planos.
- b) Compruebe que el punto $A = (3, 2, 1)$ no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta r y pasa por el punto A .

Solución:

- a) Tenemos que $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan en una recta r :

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- b) Sustituyendo A en $\pi_1 \Rightarrow 3 - 2 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow A \notin \pi_1$.
Sustituyendo A en $\pi_2 \Rightarrow 3 + 2 - 1 = 4 \neq 2 \Rightarrow A \notin \pi_2$.

$$\pi_3 : \begin{cases} \vec{u}_r = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_r A} = (2, 1, 1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi_3 : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_3 : y - z - 1 = 0$$

Problema 2.16.4 En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes. Considere los puntos $A = (a, 4, 3)$, $B = (0, 0, 5)$ y $C = (0, 3, -1)$.

- a) Calcule los valores de a para los cuales el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A .
- b) Tomando el valor de $a = 3$, determine la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{AB} &= (0, 0, 5) - (a, 4, 3) = (-a, -4, 2) \\ \overrightarrow{AC} &= (0, 3, -1) - (a, 4, 3) = (-a, -1, -4) \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} &\implies \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \implies a^2 + 4 - 8 = 0 \implies a^2 = 4 \implies a = \pm 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Si } a = 3 &\implies A = (3, 4, 3) \text{ y } B = (0, 0, 5) \implies \overrightarrow{AB} = (-3, -4, 2) \\ r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases} &\implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -2, -3) \\ P_r(0, 3, 3) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-3, -4, 2) \\ \vec{u}_r = (1, -2, -3) \\ B(0, 0, 5) \end{cases} \implies$$

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z - 5 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : 16x - 7y + 10z - 50 = 0$$

2.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.16.5 Considere las rectas de ecuaciones $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ y $s : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$.

- a) Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.
- b) Determine el ángulo que forman las dos rectas.
- c) Calcule la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = -1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 1 - \mu \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, -1) \\ P_s(-1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_s P_r} = (2, 0, 0)$$

$$[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \implies r \text{ y } s \text{ se cortan.}$$

$$\begin{cases} 1 + \lambda = -1 + 2\mu \\ \lambda = \mu \\ 1 - \lambda = 1 - \mu \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 2 \end{cases} \implies r \text{ y } s \text{ se cortan en el punto } P(3, 2, -1).$$

$$\text{b) } \cos \alpha = \frac{|\vec{u}_s \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_s| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{|2+1+1|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 19^\circ 28' 17''$$

$$\text{c) } \pi : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, -1) \\ \vec{u}_r = (1, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi : y + z - 1 = 0$$

Problema 2.16.6 Los puntos $A = (2, 0, 0)$ y $B = (-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C se encuentra en la recta r dada por

$$r : \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$$

- a) Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por A y C .
- b) Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

Solución:

$$r : \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 11 - \frac{4}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = \frac{1}{3}(3, 0, -4) \\ P_r(0, 0, 11) \end{cases} \Rightarrow$$

$$r : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 0 \\ z = 11 - 4\lambda \end{cases}$$

a) $C(3\lambda, 0, 11 - 4\lambda)$

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \overrightarrow{AC} = (3\lambda - 2, 0, 11 - 4\lambda) \\ P_s = A = (2, 0, 0) \end{cases}$$

$$\vec{u}_s \perp \vec{u}_r \Rightarrow \vec{u}_s \cdot \vec{u}_r = 9\lambda - 6 + 0 - 44 + 16\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Luego $C(6, 0, 3)$

b) $\overrightarrow{AC} = (4, 0, 3)$ y $\overrightarrow{AB} = (-3, 12, 4)$ Ángulo recto en $A \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (4, 0, 3) \cdot (-3, 12, 4) = -12 + 0 + 12 = 0 \Rightarrow$ el vértice A es un ángulo recto.

$$S_t = \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{169}}{2} = \frac{65}{2} u^2$$

2.17. Navarra

2.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.17.1 Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y + z + 3 = 0 \\ x + 6y - z - 7 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1}$$

y equidista de ambas.

Solución:

$$r : \begin{cases} x + 2y + z + 3 = 0 \\ x + 6y - z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -5 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-4, 1, 2) \\ P_r(2, 0, -5) \end{cases}$$

$$s : \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, 3, 1) \\ P_s(3, -2, -2) \end{cases}$$

Para analizar la posición relativa de las rectas calculamos el vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (3, -2, -2) - (2, 0, -5) =$

$$(1, -2, 3) \text{ y tenemos } [\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -70 \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

$$\vec{u}_\pi = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5(1, -2, 3)$$

Luego $\pi : x - 2y + 3z + \lambda = 0$ este plano tiene que estar a la misma distancia de P_r que de P_s

$$d(P_r, \pi) = d(P_s, \pi) \Rightarrow \frac{|2 - 0 - 15 + \lambda|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|3 + 4 - 6 + \lambda|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} \Rightarrow$$

$$|-13 + \lambda| = |1 + \lambda| \Rightarrow \begin{cases} -13 + \lambda = 1 + \lambda \Rightarrow -13 = 1 \text{ no tiene solución} \\ -13 + \lambda = -1 - \lambda \Rightarrow \lambda = 6 \end{cases} \Rightarrow \pi : x - 2y + 3z + 6 = 0$$

Problema 2.17.2 Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos $A(-1, -2, 3)$ y $B(2, -2, -1)$. Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide 16 u.

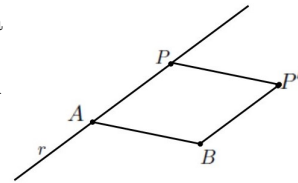
Solución:

$$r : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, -1, 2) \\ P_r(1, -1, 1) \end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de los puntos A y B respecto a la recta r .

$$\text{Sustituimos } A \text{ en } r \text{ y tenemos } \frac{-1-1}{-2} = \frac{-2+1}{-1} = \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow A \in r.$$

$$\text{Sustituimos } B \text{ en } r \text{ y tenemos } \frac{2-1}{-2} \neq \frac{-2+1}{-1} \Rightarrow B \notin r.$$



$$\text{Tenemos } P = A + \lambda \vec{u}_r \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u}_r \Rightarrow |\overrightarrow{AP}| = |\lambda| |\vec{u}_r| = |\lambda| \sqrt{9} = 3|\lambda| \Rightarrow |\overrightarrow{AP}| = 3|\lambda|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |(2, -2, -1) - (-1, -2, 3)| = |(3, 0, -4)| = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Perímetro} = 2|\overrightarrow{AP}| + 2|\overrightarrow{AB}| = 6|\lambda| + 10 = 16 \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\text{Si } \lambda = 1 \Rightarrow P = A + \vec{u}_r = (-1, -2, 3) + (-2, -1, 2) = (-3, -3, 5)$$

$$P' = P + \vec{PP'} = P + \vec{AB} = (-3, -3, 5) + (3, 0, -4) = (0, -3, 1)$$

$$\text{Si } \lambda = -1 \Rightarrow P = A - \vec{u}_r = (-1, -2, 3) - (-2, -1, 2) = (1, -1, 1)$$

$$P' = P + \vec{PP'} = P + \vec{AB} = (1, -1, 1) + (3, 0, -4) = (4, -1, -3)$$

2.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.17.3 Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2}$$

Solución:

$$r : \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, -2) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}$$

$$s : \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = 6 + 5\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 5, 2) \\ P_s(6, 6, 2) \end{cases}$$

Para analizar la posición relativa de las rectas calculamos el vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (6, 6, 2) - (0, 0, 0) =$

$$(6, 6, 2) \text{ y tenemos } [\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 88 \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

La recta t perpendicular a ambas tiene de vector director:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4(3, 1, -1)$$

Calculamos la ecuación de la recta t como intersección de dos planos.

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (3, 1, -1) \\ \vec{u}_r = (-1, 1, -2) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 : x - 7y - 4z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (3, 1, -1) \\ \vec{u}_s = (-1, 5, 2) \\ P_s(6, 6, 2) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x-6 & y-6 & z-2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_2 : 7x - 5y + 16z - 44 = 0$$

$$t : \begin{cases} x - 7y - 4z = 0 \\ 7x - 5y + 16z - 44 = 0 \end{cases} \Rightarrow t : \begin{cases} x = 7 - 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$t : \frac{x-7}{-3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$$

Problema 2.17.4 Halla un plano que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro $(0,0,0)$, y que corte perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$. Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r .

Solución:

☛ Ecuación de la esfera: $(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 9 \implies x^2 + y^2 + z^2 = 9$

☛ $\vec{u}_\pi = (2, 1, -2) \implies \pi : 2x + y - 2z + \lambda = 0$ y $d(O, \pi) = 3 \implies d(O, \pi) = \frac{|0+0+0+\lambda|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|\lambda|}{3} = 3 \implies \lambda = \pm 3$ Hay dos planos tangentes:

$$\pi_1 : 2x + y - 2z + 9 = 0 \quad \pi_2 : 2x + y - 2z - 9 = 0$$

☛ Puntos de tangencia:

Calculamos la recta s que pasa por $O(0,0,0)$ y es perpendicular a los dos planos $\vec{u}_s = \vec{u}_\pi = (2, 1, -2)$

$$\begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, -2) \\ P_s = O(0, 0, 0) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

Los puntos de tangencia son los puntos de corte de esta recta con cada uno de los planos:

Con $\pi_1 : 2(2\lambda) + \lambda - 2(-2\lambda) + 9 = 0 \implies \lambda = -1 \implies P_1(-2, -1, 2)$

Con $\pi_2 : 2(2\lambda) + \lambda - 2(-2\lambda) - 9 = 0 \implies \lambda = 1 \implies P_2(2, 1, -2)$

☛ Ahora calculamos los puntos de corte de r con los planos tangentes π_1 y π_2

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2} \implies r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -4 - 2\lambda \end{cases}$$

Con $\pi_1 : 2(3+2\lambda) + (4+\lambda) - 2(-4-2\lambda) + 9 = 0 \implies \lambda = -3 \implies Q_1(-3, 1, 2)$

Con $\pi_2 : 2(3+2\lambda) + (4+\lambda) - 2(-4-2\lambda) - 9 = 0 \implies \lambda = -1 \implies Q_2(1, 3, -2)$

Hay dos rectas:

$$\begin{aligned} \bullet t_1 : & \begin{cases} \vec{u}_{t_1} = \overrightarrow{P_1Q_1} = (-3, 1, 2) - (-2, -1, 2) = (-1, 2, 0) \\ P_{t_1} = P_1(-2, -1, 2) \end{cases} \implies t_1 : \frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{0} \\ \bullet t_2 : & \begin{cases} \vec{u}_{t_2} = \overrightarrow{P_2Q_2} = (1, 3, -2) - (2, 1, -2) = (-1, 2, 0) \\ P_{t_2} = P_2(2, 1, -2) \end{cases} \implies t_2 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{0} \end{aligned}$$

2.18. País Vasco

2.18.1. Modelo de 2020

Problema 2.18.1 Sean la recta

$$r : \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \text{y el plano } \pi : x - y + Az = 0$$

- a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r ?
- b) Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Solución:

$$\text{a) } \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (5, 8, 1), \quad \vec{u}_\pi = (1, -1, A) \text{ y } \vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi \implies \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = 0 \implies$$

$$5 - 8 + A = 0 \implies A = 3$$

$$\text{b) } \vec{u}_\pi = \vec{u}_r = (5, 8, 1) \implies \pi' : 5x + 8y + z + \lambda = 0 \text{ como } O(0, 0, 0) \in \pi' \implies 0 + 0 + 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies \pi' : 5x + 8y + z = 0$$

Problema 2.18.2 Se consideran los tres puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ y $C(-1, -1, 2)$. ¿Están alineados?

En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene.

En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Solución:

$$\vec{AB} = (1, 1, 0) \text{ y } \vec{AC} = (-1, -1, 1)$$

$\vec{AB} = k\vec{AC} \implies (1, 1, 0) = (-k, -k, k) \implies k = 0 \text{ y } k = -1$ lo cual es imposible y, por tanto no están alineados.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \implies \text{Rango}(\vec{AB}, \vec{AC}) = 2 \implies \text{Los puntos no están alineados.}$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{AB} = (1, 1, 0) \\ \vec{AC} = (-1, -1, 1) \\ A(0, 0, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x - y = 0$$

2.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 2.18.3 Sean r la recta que pasa por los puntos $A = (1, a, -1)$ y $B = (b, 1, 1)$ y π el plano de ecuación $x + y - 2z = 2b$.

- a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r sea perpendicular al plano π .
- b) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r esté contenida en el plano π .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{AB} = (b-1, 1-a, 2) \\ P_r = A = (1, a, -1) \end{cases} \quad \vec{u}_\pi = (1, 1, -2)$$

$$\text{a) } \vec{u}_r = k\vec{u}_\pi \implies (b-1, 1-a, 2) = k(1, 1, -2) \implies \begin{cases} b-1 = k \\ 1-a = k \\ 2 = -2k \end{cases} \implies \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \\ k = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi \implies \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = 0 \implies (b-1, 1-a, 2) \cdot (1, 1, -2) = b-1+1-a-4 = -a+b-4 = 0 \implies -a+b=4$$

$$P_r \in \pi \implies 1+a+2 = 2b \implies a-2b = -3$$

$$\begin{cases} -a+b=4 \\ a-2b=-3 \end{cases} \implies \begin{cases} a=-5 \\ b=-1 \end{cases}$$

Problema 2.18.4 Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P = (-2, 1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\{x = 1 - 2t, y = 1 + t, z = t\}$$

Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 1, 1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases}$$

☛ Calculamos un plano $\pi \perp r$ tal que $P \in \pi$ como $\vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (-2, 1, 1) \implies \pi : -2x + y + z + \lambda = 0$ sustituyendo P tenemos $4 + 1 + 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = -5$ luego $\pi : -2x + y + z - 5 = 0$

☛ Calculamos el punto P' intersección de la recta r y el plano π :

$$-2(1 - 2t) + (1 + t) + t - 5 = 0 \implies t = 1 \implies P'(-1, 2, 1)$$

☛ La recta h que buscamos pasa por P y P'

$$h : \begin{cases} \vec{u}_h = \overrightarrow{PP'} = (1, 1, 1) \\ P_h = P(-2, 1, 0) \end{cases} \implies h : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

☛ La distancia es $|\overrightarrow{PP'}| = |(1, 1, 1)| = \sqrt{3} u$

2.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 2.18.5 Sea r la recta de ecuaciones paramétricas

$$\{x = t, y = 2 + 2t, z = 1 + 3t\}$$

y sean $A = (1, 2, 3)$ y $B = (3, 2, 1)$. Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r y que pasa por los puntos A y B . Calcular la distancia de la recta r a ese plano.

Solución:

$$\begin{aligned} r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 3) \\ P_r(0, 2, 1) \end{cases} \quad \overrightarrow{AB} = (2, 0, -2) = 2(1, 0, -1) \\ \pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 3) \\ \vec{v} = (1, 0, -1) \\ A = (1, 2, 3) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \\ \pi : x - 2y + z = 0 \\ d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|0 - 4 + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} u \end{aligned}$$

Problema 2.18.6 Sean los puntos $A = (0, 2, 1)$, $B = (1, b, 0)$, $C = (-1, 0, 2)$ y $D = (1, 1, 1)$.

- Calcular el valor de b para que A , B , C y D estén en el mismo plano.
- El plano que contiene a los puntos A , B , C y D es perpendicular al segmento PQ y lo divide en dos partes iguales. Si $P = (1, 2, -3)$, calcular las coordenadas de Q .

Solución:

a) Sean $\overrightarrow{AB} = (1, b-2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -2, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (1, -1, 0)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & b-2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = b-4 = 0 \implies b=4$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 2, -1) \\ \overrightarrow{AD} = (1, -1, 0) \\ A(0, 2, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \\ \pi : x + y + 3z - 5 = 0$$

• Calculamos la recta $t \perp \pi$ tal que $P \in t$:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u}_t = \overrightarrow{u}_\pi = (1, 1, 3) \\ P_t = P(1, 2, -3) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 + 3\lambda \end{cases}$$

• Calculamos el punto de corte de t con π :

$$(1 + \lambda) + (2 + \lambda) + 3(-3 + 3\lambda) - 5 = 0 \implies \lambda = 1$$

Sustituyendo en t obtenemos el punto de corte $P'(2, 3, 0)$

• El punto P' es el punto medio entre P y Q :

$$\frac{P+Q}{2} = P' \implies Q = 2P' - P = (4, 6, 0) - (1, 2, -3) = (3, 4, 3)$$

Capítulo 3

Análisis

3.1. Resúmenes teóricos

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones

Hay que seguir los siguientes pasos:

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ o $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists y = p \implies$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ ↗ Decreciente : $f'(x) < 0$ ↘ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7 Máximos y Mínimos	Máximo : ↗↘ de creciente a decreciente Mínimo : ↘↗ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0 \cup$ Convexa : $f''(x) < 0 \cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f' dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x $	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f $
Exponencial	$\int e^x dx = e^x$	$\int e^f \cdot f' dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2 x dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f dx = \tan f$
	$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1 + \tan^2 f) dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2 x dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f dx = -\cot f$
	$\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1 + \cot^2 f) dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f} dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2} dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano – Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \ln \pm \arctan x$	Si $\frac{M \neq 0}{ax^2+bx+c}$ irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)
- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Rightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad

Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a , entonces f tiene que ser continua en a .

Teorema de Weierstrass

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.

Teorema de Darboux

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ ($a < b$) y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) . Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del Valor Medio de Lagrange

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) . entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \text{donde } c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)

Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f , es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes

Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a, b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du \text{ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)}$$

Teorema del cambio de variable

Sea g una función con derivada g' continua en $[a, b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. Si hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

Límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que $\text{Grado}(P(x)) = n$ y $\text{Grado}(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- Si $n > m \Rightarrow L = \text{Signo}\left(\frac{A}{B}\right) \cdot \infty$
- Si $n < m \Rightarrow L = 0$
- Si $n = m \Rightarrow L = \frac{A}{B}$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x)(P(x) - 1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ o } \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \rightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x \ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$\arccos x \approx \frac{\pi}{2} - x$

3.2. Andalucía

3.2.1. Modelo de 2021

Problema 3.2.1 Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} \text{ para } x \neq -1$$

- a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .
- b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Solución:

- a) Asíntotas:

☛ **Verticales:** $x = -1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} &= \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} &= \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} &= \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty\end{aligned}$$

☛ **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \infty$$

☛ **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 + 2x} = \frac{1}{2}$$

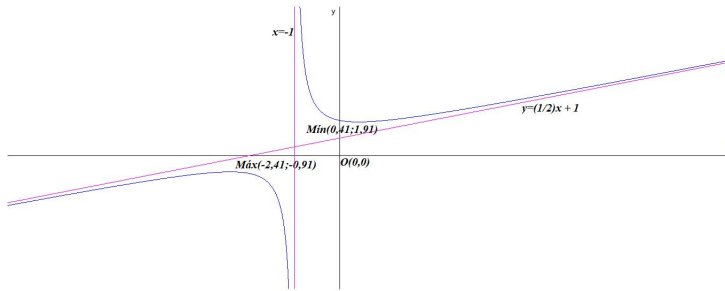
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} - \frac{x}{2} \right) = 1$$

Luego la asíntota oblicua es $y = \frac{1}{2}x + 1$

b) $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{2(x+1)^2} = 0 \implies x = -1 \pm \sqrt{2}$

	$(-\infty, -1 - \sqrt{2})$	$(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$	$(-1 + \sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{2})$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $\left(-1 + \sqrt{2}; \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}\right) = (0, 41; 1, 91)$ y un máximo relativo en el punto $\left(-1 - \sqrt{2}; \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}\right) = (-2, 41; -0, 91)$



Problema 3.2.2 Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - a)e^x$.

- Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$.
- Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f .

Solución:

- $f'(x) = e^x(x - a + 1)$ como $f'(0) = 0 \Rightarrow -a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$
- Si $a = 1 \Rightarrow f(x) = (x - 1)e^x \Rightarrow f'(x) = xe^x \Rightarrow f''(x) = (x + 1)e^x = 0 \Rightarrow x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función cambia de curvatura en $x = -1$ y en ese punto la función tiene continuidad y, por tanto, se trata de un punto de inflexión.

Problema 3.2.3 Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$)

Solución:

$$F(x) = \int \frac{1 + e^x}{1 - e^x} dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \\ dx = \frac{1}{e^x} dt \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt \end{array} \right] = \int \frac{1 + t}{t(1 - t)} dt =$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1 + t}{t(1 - t)} = \frac{A}{t} - \frac{B}{t - 1} = \frac{-A(t - 1) + Bt}{t(1 - t)} \\ 1 + t = -A(t - 1) + Bt \\ t = 0 \Rightarrow 1 = A \\ t = 1 \Rightarrow 2 = B \\ \frac{1 + t}{t(1 - t)} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t - 1} \end{array} \right] = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t - 1} \right) dx =$$

$$\ln |t| - 2 \ln |t - 1| + C = \ln |e^x| - 2 \ln |e^x - 1| + C = x - \ln(e^x - 1)^2 + C$$

$$F(1) = 1 - 2 \ln(e - 1) + C = 1 \Rightarrow C = 2 \ln(e - 1) \simeq 1,083$$

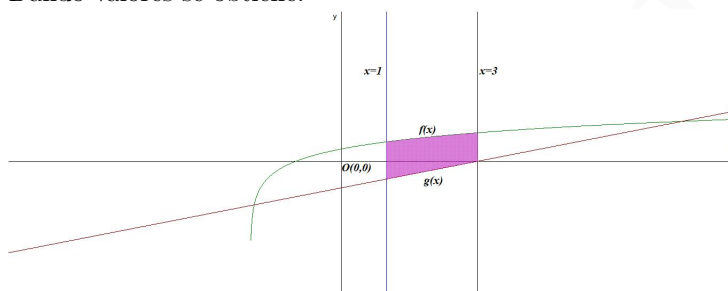
$$F(x) = x - \ln(e^x - 1)^2 + 2 \ln(e - 1)$$

Problema 3.2.4 Considera las funciones $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

- Esboza el recinto que determinan la gráfica de f , la gráfica de g , la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas)
- Determina el área del recinto anterior.

Solución:

- Dando valores se obtiene:



-

$$S = \int_1^3 \left(\ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3) \right) dx = (x+2) \ln(x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \Big|_1^3 = \ln\left(\frac{3125}{27}\right) - 1 \simeq 3,751 \text{ u}^2$$

Inciso:

$$\int \ln(x+2) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(x+2) \Rightarrow du = \frac{1}{x+2} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] = x \ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2} dx = x \ln(x+2) - \int \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) dx = x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2) = (x+2) \ln(x+2) - x$$

3.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.2.5 Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x-1}$ para $(x \neq -1)$ tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b .

Solución:

La ecuación de la asíntota oblicua es $y-1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x-1 \Rightarrow m = 2$ y $n = -1$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 - x} = a = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + bx + 2}{x-1} - 2x \right) = b + 2 = -1 \Rightarrow b = -3$$

$x = 2, \quad b = -3$

Problema 3.2.6 Considera la función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (3x-6)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{36(\sin x - ax)}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Calcula a .
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

- a) f es continua en las dos ramas hay aplicar las condiciones de continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ((3x-6)e^x) = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\sin x - ax)}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\cos x - a)}{3x^2} =$$

$$[\text{con } a = 1] = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(-\sin x)}{6x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-36 \cos x}{6} = -6$$

Luego $a = 1$.

- b) En $x = -1 = a \Rightarrow f(x) = (3x-6)e^x \Rightarrow b = f(-1) = -\frac{9}{e}$
 $f'(x) = 3(x-1)e^x \Rightarrow m = f'(-1) = -\frac{6}{e}$

La recta tangente en su ecuación punto pendiente: $y-b = m(x-a) \Rightarrow y + \frac{9}{e} = -\frac{6}{e}(x+1) \Rightarrow$
 $y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}$ en su ecuación explícita.

Problema 3.2.7 Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

- a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

Solución:

- a) $f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3-x) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 3$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	+	-
$f(x)$	creciente ↗	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 3)$ y decreciente en el intervalo $(3, \infty)$. La función presenta un máximo relativo en el punto $(3, 27)$

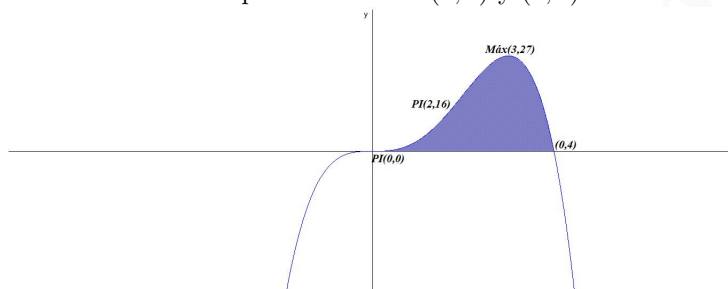
b) $f''(x) = 24x - 12x^2 = 12x(2 - x) = 0 \implies x = 0$ y $x = 2$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y cóncava en el $(0, 2)$

La función presenta los puntos de inflexión $(0, 0)$ y $(2, 16)$.

La función tiene de puntos de corte $(0, 0)$ y $(4, 0)$



$$S_1 = \int_0^4 (4x^3 - x^4) dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^4 = \frac{256}{5}$$

$$S = |S_1| = \frac{256}{5} u^2$$

Problema 3.2.8 Considera la función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

$$\int (2t + \sqrt{t}) dt = \int (2t + t^{1/2}) dt = t^2 + \frac{t^{3/2}}{3/2} = t^2 + \frac{2t\sqrt{t}}{3}$$

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt = \left[t^2 + \frac{2t\sqrt{t}}{3} \right]_0^x = x^2 + \frac{2x\sqrt{x}}{3}$$

$$x = 1 = a \implies b = F(1) = \frac{5}{3} \text{ y } F'(x) = 2x + \sqrt{x} \implies m = F'(1) = 3$$

$$\text{La recta tangente en su ecuación punto pendiente: } y - b = m(x - a) \implies y - \frac{5}{3} = 3(x - 1) \implies y = 3x - \frac{4}{3} \text{ en su ecuación explícita.}$$

3.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.2.9 Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos x) + b \sin x - 2(e^x - 1)}{x^2} = 7$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos x) + b \sin x - 2(e^x - 1)}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x + b \cos x - 2e^x}{2x} \stackrel{b=2}{=} \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos x - 2 \sin x - 2e^x}{2} = \frac{a-2}{2} = 7 \implies a = 16 \text{ y } b = 2.$$

Problema 3.2.10 Halla $a > 0$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto $(1, 2)$ un punto crítico.

Solución:

$$f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4} \implies f'(x) = \frac{2bx(1-ax^4)}{(ax^4+1)^2}$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \implies f(1) = \frac{b}{1+a} = 2 \implies b = 2+2a \\ f'(1) = 0 \implies f'(1) = \frac{2b(1-a)}{(a+1)^2} = 0 \implies 2b(1-a) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1, & b = 4 \\ a = -1, & b = 0 \end{cases}$$

Problema 3.2.11 Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t dt$$

Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtiene y valores que se alcanzan).

Solución:

$$\int te^t dt = \left[\begin{array}{l} u = t \implies du = dt \\ dv = e^t dt \implies v = e^t \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t$$

$$\int_0^x te^t dt = [te^t - e^t]_0^x = xe^x - e^x + 1$$

$$f(x) = 1 + xe^x - e^x + 1 = xe^x - e^x + 2$$

$$f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x \implies f''(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1) = 0 \implies x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función es convexa $\cap$ en el intervalo $(-\infty, -1)$ y cóncava $\cup$ en el intervalo $(-1, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(-1, 2 - \frac{2}{e}\right)$

Problema 3.2.12 Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. (para $x \neq 1, x \neq -1$). Halla una primitiva de f cuya grafica pase por el punto $(2, 4)$

Solución:

$$F(x) = \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx \stackrel{\text{dividiendo}}{=} \int \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1} = \\ 2 = A(x+1) + B(x-1) \\ x=1 \implies 2 = 2A \implies A=1 \\ x=-1 \implies 2 = -2B \implies B=-1 \\ \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} \end{array} \right] =$$

$$x + \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

$$F(2) = 2 + \ln 1 - \ln 3 + C = 2 - \ln 3 + C = 4 \implies C = 2 + \ln 3$$

$$F(x) = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2 + \ln 3$$

3.3. Aragón

3.3.1. Modelo de 2020

Problema 3.3.1 Determine la integral: $\int \frac{2-e^x}{e^{2x}-1} dx$
usando el cambio de variable $t = e^x$

Solución:

$$\int \frac{2-e^x}{e^{2x}-1} dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array} \right] = \int \frac{2-t}{t^2-1} \frac{dt}{t} =$$

$$\int \frac{2-t}{(t+1)(t-1)t} dt =$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2-t}{(t+1)(t-1)t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-1} = \frac{A(t^2-1) + B(t^2-t) + C(t^2+t)}{(t+1)(t-1)t} \\ -t+2 = A(t^2-1) + B(t^2-t) + C(t^2+t) \\ t=0 \implies 2 = -A \implies A = -2 \\ t=1 \implies 1 = 2C \implies C = 1/2 \\ t=-1 \implies 3 = 2B \implies B = 3/2 \end{array} \right] =$$

$$\int \left(\frac{-2}{t} + \frac{3/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1} \right) dt = -2 \ln|t| + \frac{3}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln|t-1| + C =$$

$$-2 \ln e^x + \frac{3}{2} \ln|e^x+1| + \frac{1}{2} \ln|e^x-1| + C = -2x + \frac{3}{2} \ln|e^x+1| + \frac{1}{2} \ln|e^x-1| + C$$

Problema 3.3.2 Calcule el límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+e^x)}$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+e^x)} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{e^x}{1+e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x(1+e^x)}{e^x(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2xe^x}{e^x+x^2e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+2e^x+2xe^x}{e^x+2e^x+2xe^x+x^2e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x+2e^x+2xe^x}{e^x+2e^x+2xe^x+x^2e^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(4+2x)}{e^x(3+4x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4+2x}{3+4x+x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{aligned}$$

Problema 3.3.3 Considere la función:

$$f(x) = \ln(1+x^2)$$

- a) Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$, si existen.
b) Determine los puntos de inflexión de la función $f(x)$, si existen.

Solución:

a) $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = 0.$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decrece ↘	crece ↗

La función f decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$.

La función f crece en el intervalo $(0, \infty)$.

La función f tiene un mínimo en el punto $(0, 0)$.

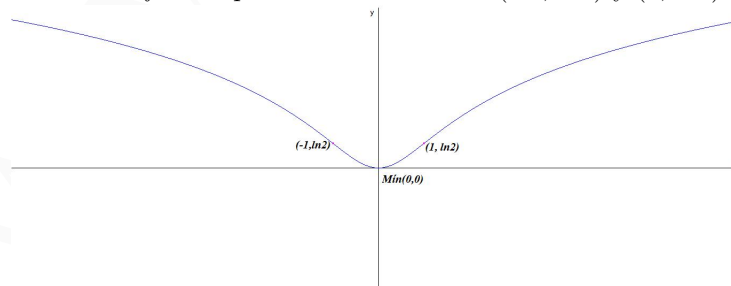
b) $f''(x) = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	convexa ∩	cóncava ∪	convexa ∩

La función f es convexa en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

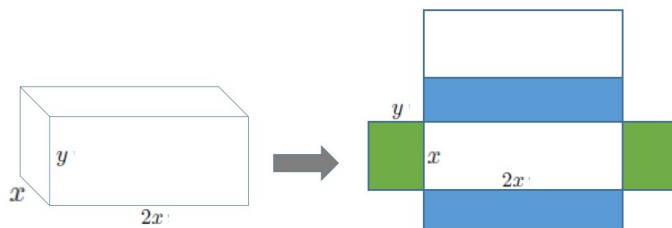
La función f es cóncava en el intervalo $(-1, 1)$.

La función f tiene puntos de inflexión en $(-1, \ln 2)$ y $(1, \ln 2)$



Problema 3.3.4 Se desea construir un contenedor con la forma habitual de una caja (tipo caja de zapatos cerrada) cuya capacidad sea de 35 m^3 . Dado que el único material empleado para su construcción es bastante costoso, se desea que la cantidad total de material empleado sea mínima. Además, el contenedor debe ser cerrado, es decir hay que construir sus seis caras. Sabiendo que la base es un rectángulo cuyo lado largo es el doble que el corto, determine las dimensiones del mismo para que el coste del material empleado para su fabricación sea mínimo.

Solución:



$$\bullet V(x, y) = 2x^2y = 35 \implies y = \frac{35}{2x^2}$$

$$\bullet S(x, y) = 4x^2 + 2xy + 4xy = 4x^2 + 6xy \text{ sustituyendo } y \implies$$

$$S(x) = 4x^2 + \frac{210x}{2x^2} = \frac{8x^4 + 210x}{2x^2} \implies S'(x) = \frac{8x^3 - 105}{x^2} = 0 \implies$$

$$x = \frac{\sqrt[3]{105}}{2} \simeq 2,359 \text{ m}$$

	$\left(0, \frac{\sqrt[3]{105}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt[3]{105}}{2}, \infty\right)$
$S'(x)$	-	+
$S(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $\left(0, \frac{\sqrt[3]{105}}{2}\right)$ y crece en el intervalo $\left(\frac{\sqrt[3]{105}}{2}, \infty\right)$, por tanto,

tiene un mínimo en $x = \frac{\sqrt[3]{105}}{2} = 2,359 \implies y = \frac{35}{2 \cdot 2,359^2} = 3,145$

Las medidas de la caja tienen que ser 2,359 m de ancho, 4,718 m de largo y 3,145 m de alto. El área mínima total sería $S(2,359) = 66,77 \text{ m}^2$

3.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.3.5 Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + bx + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{ax} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.

- b) Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$, y determine el tipo de extremo que es.

Solución:

- a) f es continua en la rama $x < 0$ y también lo es en la rama $x > 0$. Para que sea continua en $\mathbb{R}$ hay que estudiar la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + bx + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{ax} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{a} = \frac{1}{a}$$

$$2 = \frac{1}{a} \implies a = \frac{1}{2} \text{ y } b \text{ puede ser cualquier valor real.}$$

- b) En $x = -1 \implies f(x) = x^3 + bx + 2 \implies f'(x) = 3x^2 + b$. Si $x = -1$ es un extremo $\implies f'(-1) = 0 \implies 3(-1)^2 + b = 0 \implies b = -3$.
Tenemos $f'(x) = 3x^2 - 3 \implies f''(x) = 6x \implies f''(-1) = -6 < 0 \implies x = -1$ es un máximo relativo.

Problema 3.3.6 Calcule el valor de $a \in \mathbb{R}$, ($a \neq 0$) para que se verifique el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{a/x^2} = 2$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{a/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x)^{a/x^2} = [1^\infty]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos^2 x)^{a/x^2} = \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos^2 x)^{a/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos x)^{2a/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a \ln (\cos x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2a \frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2a \tan x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2a \frac{1}{\cos^2 x}}{2} =$$

$$-a = \ln 2 \implies a = -\ln 2$$

Problema 3.3.7 Calcule $\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} dx$

Solución:

Se observa que se puede construir en el numerador la derivada del denominador. Hacemos cambio de variable $t = x^3 - 3x + 2 \implies dt = 3(x^2 - 1)dx \implies dx = \frac{1}{3(x^2 - 1)} dt$ sustituyendo:

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} dx = \int \frac{x^2 - 1}{t} \cdot \frac{1}{3(x^2 - 1)} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} \ln |t| + C = \frac{1}{3} \ln |x^3 - 3x + 2| + C$$

Problema 3.3.8 Para la siguiente función $f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2}$

- a) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.
b) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 1$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ ($x^2 - x - 2 = 0 \implies x = -1, x = 2$)

Asíntotas:

☛ Verticales:

• $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = \left[\frac{-3}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = \left[\frac{-3}{0^+} \right] = +\infty$$

• $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = \left[\frac{12}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = \left[\frac{12}{0^+} \right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = \infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x^2}{x^3 - x^2 - 2x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} - 2x \right) = 1$$

$$y = 2x + 1$$

b) $b = f(a) = f(1) = -\frac{1}{2}$. Por otro lado $f'(x) = \frac{x(2x^3 - 4x^2 - 11x + 4)}{(x^2 - x - 2)^2}$ y $m = f'(1) = -\frac{9}{4}$

$$y - b = m(x - a) \implies y + \frac{1}{2} = -\frac{9}{4}(x - 1) \implies y = -\frac{9}{4}x + \frac{7}{4}$$

3.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.3.9 Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 5 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{6}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

a) Calcule los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua.

b) Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = e$ sea $6 u^2$.

Solución:

- a) f es continua en la rama $x < 1$ y también lo es en la rama $x > 1$. Para que sea continua en $\mathbb{R}$ hay que estudiar la continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5 - ax^2) = 5 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{6}{ax} = \frac{6}{a}$$

$$5 - a = \frac{6}{a} \implies a^2 - 5a + 6 = 0 \implies a = 3 \text{ y } a = 2.$$

- b) Sea S_1 en $[0, 1]$, S_2 en $[1, e]$ y $S = |S_1| + |S_2| = 6$. La función no corta al eje OX ni para $a = 3$ ni para $a = 2$ en el intervalo $[0, 1]$ ni en el $[1, e]$.

$$S_1 = \int_0^1 (5 - ax^2) dx = 5x - \frac{ax^3}{3} \Big|_0^1 = 5 - \frac{a}{3}$$

$$S_2 = \int_1^e \frac{6}{ax} dx = \frac{6}{a} \ln(x) \Big|_1^e = \frac{6}{a}$$

$$S = 5 - \frac{a}{3} + \frac{6}{a} = \frac{15a - a^2 + 18}{3a} = 6 \implies -a^2 - 3a + 18 = 0 \implies a = 3, \quad a = -6$$

Luego $a = 3$.

Problema 3.3.10 Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = [1^\infty] = e^\lambda$$

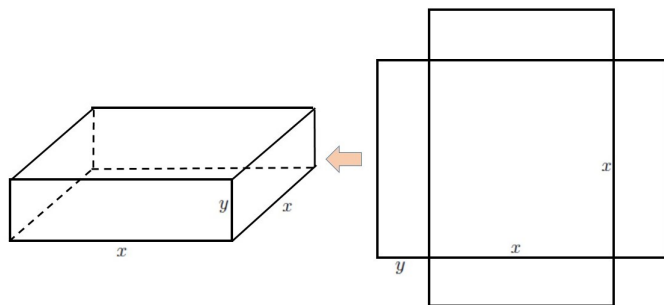
$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) - 1}{(1-x)^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right)}{-2(1-x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{\pi^2}{4} \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right)}{2} = -\frac{\pi^2}{8}$$

$$\text{Luego } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = e^{-\frac{\pi^2}{8}}$$

Problema 3.3.11 Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3 . El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2 , mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2 . Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

Solución:



$$V(x, y) = x^2 y = 64 \implies y = \frac{64}{x^2}$$

$$P(x, y) = 4xy \cdot 70 + x^2 \cdot 140 \implies P(x) = \frac{64 \cdot 4 \cdot 70 \cdot x}{x^2} + 140x^2 = \frac{17920 + 140x^3}{x}$$

$$P'(x) = \frac{280(x^3 - 64)}{x^2} = 0 \implies x^3 - 64 = 0 \implies x = 4$$

$$P''(x) = \frac{280(x^3 + 128)}{x^3} \implies P''(4) = 840 > 0 \implies x = 4 \text{ es un m\u00ednimo relativo. La altura es } y = \frac{64}{16} = 4.$$

La longitud de los lados del cuadrado de la base es de 4 m y la altura es tambi\u00e9n de 4 m. El precio de coste m\u00ednimo es $P(4) = 6720\text{€}$.

Problema 3.3.12 Para la siguiente funci\u00f3n

$$f(x) = \frac{e^x}{x^3 - x}$$

- Estudie la existencia de as\u00edntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calc\u00e9lelas cuando existan.
- Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 2$.

Soluci\u00f3n:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ ($x^3 - x = 0 \implies x = 0, x = \pm 1$)

As\u00edntotas:

☛ Verticales:

- $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x^3 - x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x^3 - x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

- $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^x}{x^3 - x} = \left[\frac{e^{-1}}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^x}{x^3 - x} = \left[\frac{e^{-1}}{0^+} \right] = +\infty$$

- $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x^3 - x} = \left[\frac{e}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x^3 - x} = \left[\frac{e}{0^-} \right] = -\infty$$

☛ Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^3 - x} \stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t}}{-t^3 + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t(t - t^3)} = \frac{1}{-\infty} = 0 \implies y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6} = \infty \implies \text{No hay}$$

• Oblicuas: $y = mx + n$

Cuando $x \rightarrow -\infty$ no hay por haber horizontales en esa rama.

Cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^4 - x^2} = \infty$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

b) $b = f(a) = f(2) = \frac{e^2}{6}$. Por otro lado $f'(x) = \frac{e^x(x^3 - 3x^2 - x + 1)}{x^2(x^2 - 1)^2}$ y $m = f'(2) = -\frac{5e^2}{36}$

$$y - b = m(x - a) \Rightarrow y - \frac{e^2}{6} = -\frac{5e^2}{36}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{5e^2}{36}x + \frac{4e^2}{9}$$

3.4. Asturias

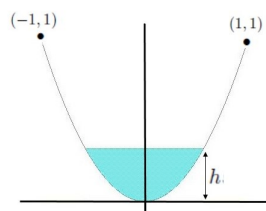
3.4.1. Modelo de 2020

Problema 3.4.1 Se tiene un abrevadero de longitud 6 m y de altura 1 m. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y = x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido.

a) Comprueba que el área de la región S , sombreada en la figura,

en función de h se puede expresar como $S(h) = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$.

b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero. (Nota: Volumen = $S \times$ longitud).



Solución:

a) Los puntos de corte de la parábola y la recta $y = h$:

$$x^2 = h \Rightarrow x = \pm\sqrt{h}$$

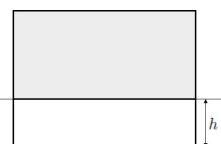
$$S(h) = \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} (h - x^2) dx = \left[hx - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = h\sqrt{h} - \frac{h\sqrt{h}}{3} + h\sqrt{h} - \frac{h\sqrt{h}}{3} = \frac{2h\sqrt{h}}{3} + \frac{2h\sqrt{h}}{3} = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$$

b) $V(h) = S(h) \times 6 = 8h\sqrt{h} \Rightarrow V(1) = 8 \Rightarrow V(h) = 4 \Rightarrow 8h\sqrt{h} = 4 \Rightarrow$

$$h^{3/2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0,62996 \text{ m.}$$

Problema 3.4.2 Se tienen 20 m de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular.

El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura h que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible.



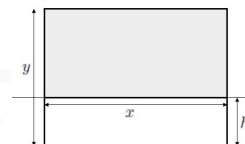
Solución:

☛ El perímetro del cartel es $P(x, y) = 2x + 2y = 20 \implies y = 10 - x$

☛ La altura undida es $h = \frac{x}{5}$

☛ El área que hay que optimizar es

$$S(x) = x(y - h) = x\left(10 - x - \frac{x}{5}\right) = \frac{2x(25 - 3x)}{5}$$



☛ Optimización:

$$S'(x) = \frac{2(25 - 6x)}{5} = 0 \implies x = \frac{25}{6}$$

$$S''(x) = -\frac{12}{5} \implies S''\left(\frac{25}{6}\right) = -\frac{12}{5} < 0 \implies x = \frac{25}{6} \text{ es un mínimo}$$

Las dimensiones son $x = \frac{25}{6} \simeq 4,167$ m de ancho e $y = 10 - \frac{25}{6} = \frac{35}{6} \simeq 5,833$ m de alto.

3.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.4.3 Sean las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$

- Calcula los valores de a y b para que en el punto de abscisa $x = 2$ las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente.
- Para $a = 1$, $b = 1$ esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo.

Solución:

- La parábola y_1 en el punto de abscisa $x = 2$ es 3, luego el punto de tangencia es $(2, 3)$ y debe de ser el punto de tangencia de $y_2 \implies (2, 4a + b) = (2, 3) \implies 4a + b = 3$
Por otro lado calculamos la pendiente de la recta tangente a y_1 en $x = 2$. $y'_1 = 2x - 2 \implies m_1 = 2$

Por otro lado calculamos la pendiente de la recta tangente a y_2 en $x = 2$. $y'_2 = 2ax \implies m_2 = 4a$

$$m_1 = m_2 \implies 2 = 4a \implies a = \frac{1}{2} \text{ y } b = 3 - 4a = 1.$$

La recta tangente pasa por el punto $(2, 3)$ y tiene de pendiente $m = 2 \implies y - 3 = 2(x - 2) \implies y = 2x - 1$

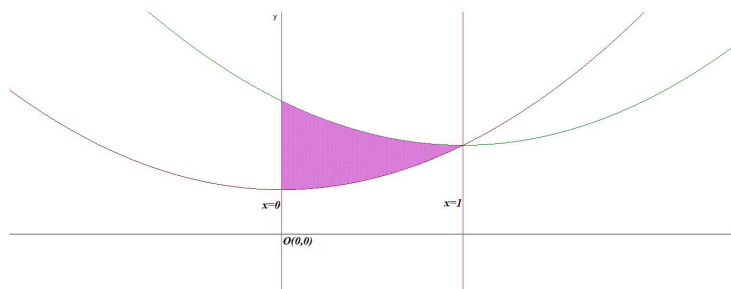
- Tenemos $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = x^2 + 1$.

$$y_1 = y_2 \implies x^2 - 2x + 3 = x^2 + 1 \implies x = 1$$

Las dos parábolas se cortan en un sólo punto $(1, 2)$. El área que tenemos que calcular se encuentra entre $x = 0$ y $x = 1$

$$S_1 = \int_0^1 (x^2 - 2x + 3 - x^2 - 1) dx = \int_0^1 (-2x + 2) dx = [-x^2 + 2x]_0^1 = 1$$

$$S = |S_1| = 1 \text{ u}^2$$



Problema 3.4.4 Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo.

Solución:

Tenemos $x + y + z = 90$ y $z = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x + y + \frac{x+y}{2} = 90 \Rightarrow 3x + 3y = 180 \Rightarrow x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - x$

Luego $z = \frac{x + 60 - x}{2} = 30$

Tenemos que optimizar $P(x, y, z) = xyz \Rightarrow$

$P(x) = x(60 - x)30 = -30x^2 + 1800x \Rightarrow P'(x) = -60x + 1800 = 0 \Rightarrow x = 30$

$P''(x) = -60 \Rightarrow P'(30) = -60 < 0 \Rightarrow x = 30$ es un máximo relativo.

Los números buscados son $x = 30$, $y = 30$ y $z = 30$.

3.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.4.5 Sea la función $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

- Haz un esbozo de su grafica determinando: dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y regiones de convexidad y concavidad.
- Calcula el área de la región limitada por la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$, la recta $y = 1$ y el eje de ordenadas.

Solución:

- Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con el eje de ordenadas no hay. Con el eje de abscisas $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (-1, 0)$ y $(1, 0)$

Asíntotas:

- Verticales $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

- Horizontales $y = 1$

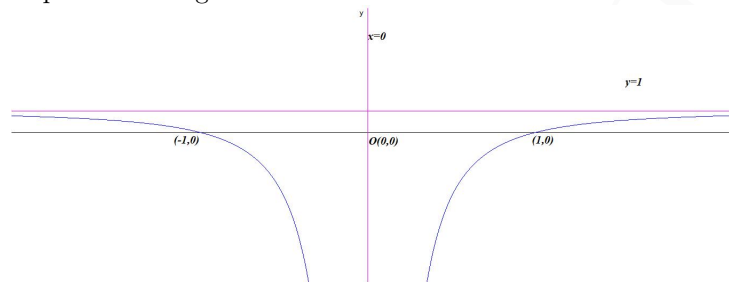
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

- Oblicuas no hay por haber horizontales.

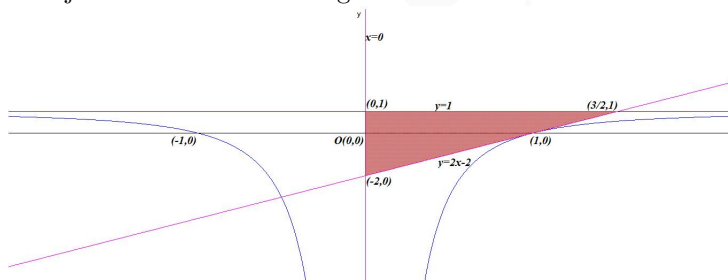
• Monotonía: $f'(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0 \Rightarrow$ no hay extremos relativos. $f'(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ y $f'(x) > 0$ en el $(0, \infty)$ luego f es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decreciente en el $(-\infty, 0)$.

• Curvatura: $f''(x) = -\frac{6}{x^4} \neq 0 \Rightarrow$ no hay puntos de inflexión. Como $f''(x) < 0$ en todo el dominio de la función $\Rightarrow f$ es convexa $\cap$ en $\text{Dom}(f)$.

• Representación gráfica:



b) Calculamos la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1 \Rightarrow b = f(1) = 0$ y $m = f'(1) = 2 \Rightarrow y = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$
Dibujamos la recta sobre la gráfica:

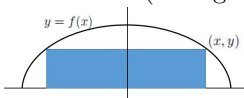


La tangente corta al eje de ordenadas en $(0, -2)$ y a la recta $y = 1$ en $1 = 2x - 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, 1\right)$. Se trata de un triángulo de base $\frac{3}{2}$ y altura 3 luego $S = \frac{\frac{3}{2} \cdot 3}{2} = \frac{9}{4} u^2$

Problema 3.4.6 En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura).

La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x) =$

$12 - \frac{x^2}{3} \geq 0$. Calcula los valores positivos (x, y) que hacen máxima el área de la pantalla.



Solución:

Tenemos $y = 12 - \frac{x^2}{3}$ y $S(x, y) = 2xy \Rightarrow S(x) = 2x \left(12 - \frac{x^2}{3}\right) = \frac{72x - 2x^3}{3}$

$S'(x) = 2(12 - x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$ la solución negativa no es relevante.

$S''(x) = -4x \Rightarrow S(2\sqrt{3}) = -8\sqrt{3} < 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ es un máximo relativo.

$$y = 12 - \frac{(2\sqrt{3})^2}{3} = 12 - 4 = 8$$

$$(x, y) = (2\sqrt{3}, 8)$$

El área = $2x \cdot y = 4\sqrt{3} \cdot 8 = 32\sqrt{3}$.

3.5. Cantabria

3.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

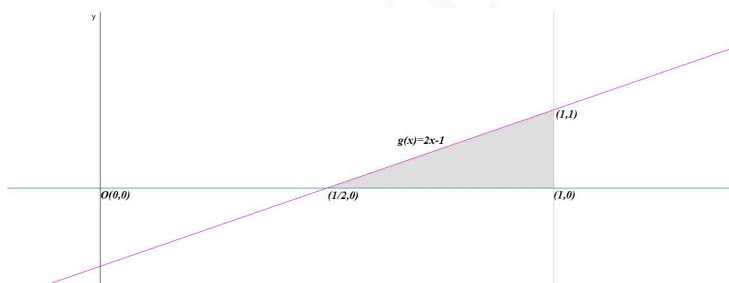
Problema 3.5.1 Considera la función $f(x) = x^2$

- a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Llamaremos a dicha recta $g(x)$.
- b) Calcula el área de la región limitada por las rectas $g(x)$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ y el eje OX de abscisas.
- c) Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.
- d) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $g(x)$, $x = \frac{1}{2}$.

Solución:

- a) $b = f(1) = 1$, $f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(1) = 2$ la recta tangente es $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = g(x) = 2x - 1$
- b) Hacemos una representación gráfica del recinto. Se trata de calcular el área de un triángulo de base $1/2$ y de altura 1 . El área es $\frac{1/2 \cdot 1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ u}^2$.
De otra manera sería:

$$S = \int_{1/2}^1 (2x - 1) dx = x^2 - x \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ u}^2$$



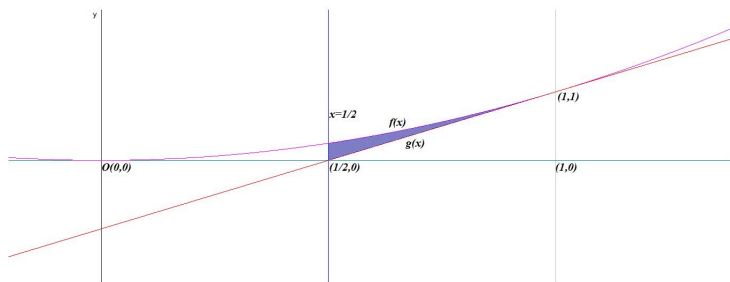
- c) $F(x) = \int f(x) dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Dando un valor cualquiera a C obtenemos una de las primitivas de $f(x)$:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 7$$

- d) $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$S_1 = \int_{1/2}^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{24}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{24} \simeq 0,0417 \text{ u}^2$$



Problema 3.5.2 En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, $I(t)$, viene dada por la función $I(t) = \begin{cases} ke^{2t} & \text{si } t < 1 \\ \frac{t^2}{3t^2 + 1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$, siendo k una constante real, t el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y $t = 1$ el inicio de la vacunación.

- Calcula el valor de k para que $I(t)$ sea continua.
- Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t \rightarrow \infty$.
- Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = \frac{1}{2}$.
- Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = 2$.

Solución:

- Las dos ramas son siempre continuas, estudiamos su continuidad en $t = 1$: $\lim_{t \rightarrow 1^-} I(t) =$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} ke^{2t} = ke^2 \text{ y } \lim_{t \rightarrow 1^+} I(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t^2}{3t^2 + 1} = \frac{1}{4} \Rightarrow ke^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{4e^2}$$

$$\text{b) } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{3t^2 + 1} = \frac{1}{3} = 0,3333 \Rightarrow 33,33\%$$

$$\text{c) Sea } k = \frac{1}{4e^2} \Rightarrow I(t) = \frac{1}{4e^2} e^{2t} = \frac{e^{2t-2}}{4} \text{ para } t < 1:$$

$$I'(t) = \frac{e^{2t-2}}{2} \Rightarrow I'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$$

$$\text{d) Sea } I(t) = \frac{t^2}{3t^2 + 1} \text{ para } t \geq 1:$$

$$I'(t) = \frac{2t}{(3t^2 + 1)^2} \Rightarrow I'(2) = \frac{4}{169}$$

3.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.5.3 Considera la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$

- Calcula la derivada primera.
- Halla los intervalos de crecimiento, y/o decrecimiento.

c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 2$.

d) Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Solución:

a) $f'(x) = -\frac{x-1}{e^x}$

b) $f'(x) = -\frac{x-1}{e^x} = 0 \implies x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el $(1, \infty)$

c) $b = f(2) = \frac{2}{e^2}$, $m = f'(2) = -\frac{1}{e^2}$ la recta tangente es $y - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x-2) \implies y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Problema 3.5.4 Considera la función $f(x) = -x^2 + 4x$.

a) Calcula la derivada de $f(x)$.

b) Halla los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$.

c) Calcula una primitiva de $f(x)$.

d) Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje OX de abscisas.

Solución:

a) $f'(x) = -2x + 4$

b) $f'(x) = -2x + 4 = 0 \implies x = 2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 2)$ y decreciente en el $(2, \infty)$. Con un máximo local en $(2, 4)$.

c) $F(x) = \int (-x^2 + 4x) dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + C$

d) Hacemos $f(x) = -x^2 + 4x = 0 \implies x = 0$ y $x = 4 \implies f(x)$ no corta el eje de abscisas en el intervalo $[1, 3]$

$$S_1 = \int_1^3 (-x^2 + 4x) dx = F(3) - F(1) = \frac{22}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{22}{3} u^2$$

3.6. Castilla La Mancha

3.6.1. Modelo de 2020

Problema 3.6.1 Se pide:

- a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución:

- a) Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx + 2) = a + b + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2}) = a - b \end{cases} \implies a + b + 2 = a - b \implies b = -1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} + \frac{2b}{x^3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1^-) = 2a + b \\ f'(1^+) = \frac{a}{2} + 2b \end{cases} \implies 2a + b = \frac{a}{2} + 2b \implies 3a - 2b = 0$$

$$\begin{cases} b = -1 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases} \implies a = -2/3$$

- b) La función $f(x) = x^2 - 4$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$, derivable en el intervalo $(-3, 3)$ y $f(3) = f(-3) = 5$. Luego verifica las condiciones del teorema de Rolle y podemos concluir que $\exists c \in [-3, 3] / f'(c) = 0$.

Se puede calcular este punto:

$f'(x) = 2x = 0 \implies x = 0$ y como $f''(x) = 2 \implies f''(0) = 2 > 0 \implies x = 0$ es un mínimo. El punto $c = 0$.

Problema 3.6.2 Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } L &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} = [1^\infty] = e^\lambda \\
 \lambda &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2xe^{x-1} - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\
 &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2e^{x-1} + 2xe^{x-1} - 2x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \implies L = e^{1/2} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2xe^{x^2-1} - 1}{2x + 4} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

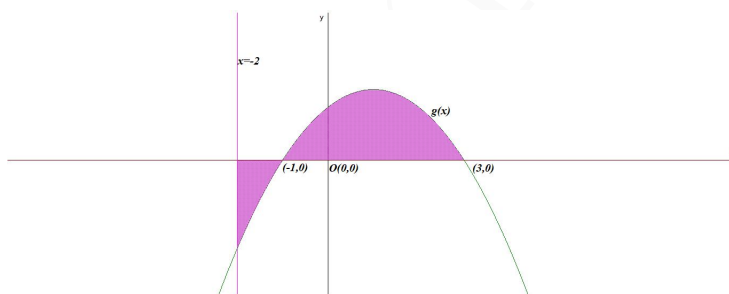
Problema 3.6.3 Se pide:

- Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas.
- Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$.

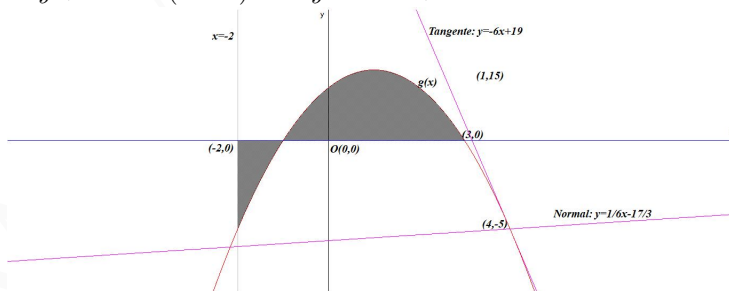
Solución:

- $g(x) = -x^2 + 2x + 3 = 0 \implies x = -1$ y $x = 3$. Luego tenemos dos recintos: S_1 en el intervalo $[-2, -1]$ y otro S_2 en el intervalo $[-1, 3]$.

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-2}^{-1} = -\frac{7}{3} \\
 S_2 &= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 = \frac{32}{3} \\
 S &= |S_1| + |S_2| = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = 13 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$



- $b = g(4) = -5$, $g'(x) = -2x + 2 \implies m = g'(4) = -6$. Luego la ecuación de la recta tangente es $y + 5 = -6(x - 4) \implies y = -6x + 19$



La recta normal tiene de ecuación $y + 5 = \frac{1}{6}(x - 4) \implies y = \frac{1}{6}x - \frac{17}{3}$

3.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.6.4 Se pide:

- a) Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3+e^x} dx$
(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$)
- b) Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x+1}{x^2+3} dx$

Solución:

a)

$$\int \frac{2}{3+e^x} dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array} \right] = \int \frac{2}{t(3+t)} dt =$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2}{t(3+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{3+t} = \frac{A(3+t) + Bt}{t(3+t)} \\ 2 = A(3+t) + Bt \\ t = 0 \Rightarrow 2 = 3A \Rightarrow A = 2/3 \\ t = -3 \Rightarrow 2 = -3B \Rightarrow B = -2/3 \\ \frac{2}{t(3+t)} = \frac{2/3}{t} + \frac{-2/3}{3+t} \end{array} \right] = \int \frac{2/3}{t} dt - \frac{2/3}{3+t} dt =$$

$$\frac{2}{3} \ln|t| - \frac{2}{3} \ln|3+t| + C = \frac{2}{3} \ln(e^x) - \frac{2}{3} \ln(3+e^x) + C = \frac{2x - 2\ln(3+e^x)}{3} + C$$

b) $I = \int \frac{-x+1}{x^2+3} dx = \int \frac{-x}{x^2+3} dx + \int \frac{1}{x^2+3} dx = I_1 + I_2$

$$I_1 = \int \frac{-x}{x^2+3} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2+3 \Rightarrow dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right] = \int \frac{-x}{t} \cdot \frac{dt}{2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{\ln|t|}{2} +$$

$$C = -\frac{\ln|x^2+3|}{2} + C_1$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2+3} dx = \left[\begin{array}{l} x^2+3 = 3 \left(\left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right) \\ t = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{3}} \\ dx = \sqrt{3} dt \end{array} \right] =$$

$$\int \frac{1}{3 \left(\left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)} dx = \int \frac{1}{3(t^2+1)} \sqrt{3} dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan t + C_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C_2$$

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{\ln|x^2+3|}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

Problema 3.6.5 Se pide:

- a) Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

- b) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & \text{si } x < 0 \\ be^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ y $f'(x) = 3ax^2 - 4x - 1$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \implies a - 2 - 1 + b = 2 \implies a + b = 5 \\ m = f'(1) = 1 \implies 3a - 4 - 1 = 1 \implies a = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

- b) Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - ax + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} be^x = b \end{cases} \implies b = 1$$

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies f(0^-) = -a = f'(0^+) = 1 \implies a = -1$$

Luego $a = -1$ y $b = 1$.

Problema 3.6.6 Se pide:

- a) Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{2x - 4}$

- b) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{2x - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2}}{2} = \frac{1}{2}$

- b) El único punto en el que la función no existe es en $x = 2$, luego $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-2} = -1 \\ f(1) = -1 \end{cases} \implies f \text{ continua}$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x-2} = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2e^x = 2e^3 \end{cases} \implies f \text{ discontinua no evitable}$$

En $x = 3$ hay un salto.

Continuidad en $x = 2$: (hay una asíntota vertical) y, por tanto, no es continua.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2} = \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{2, 3\}$.

3.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.6.7 Se pide:

a) Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int x \cos 3x \, dx$

b) Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x^2 + 1} \, dx$

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \int x \cos 3x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \cos 3x \, dx \implies v = \frac{1}{3} \sin 3x \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = \\ &= \frac{x \sin 3x}{3} - \frac{1}{3} \int \sin 3x \, dx = \frac{x \sin 3x}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) + C = \\ &= \frac{3x \sin 3x + \cos 3x}{9} + C \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x^2 + 1} \, dx &= \int \frac{1}{(\sqrt{2}x)^2 + 1} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2}x \implies dt = \sqrt{2}dx \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{2}} \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{1}{t^2 + 1} \cdot \frac{dt}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{t^2 + 1} \, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan t + C = \frac{\arctan(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}} + C = \\ &= \frac{\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x)}{2} + C \end{aligned}$$

Problema 3.6.8 Se pide:

a) Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1} - 1}$

b) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{e^{x-1}} = 1$$

b) Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = -1 \end{cases} \implies f \text{ discontinua no evitable}$$

En $x = 0$ hay un salto.

Continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2 \end{cases} \implies f \text{ discontinua no evitable}$$

En $x = 2$ hay un salto.

Problema 3.6.9 Sea la función $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2}{3x^2 + 3}$

- a) Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.
- b) Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

$$a) f'(x) = -\frac{2(x^2 - 4x - 1)}{3(x^2 + 1)^2} = 0 \implies x = 2 \pm \sqrt{5}$$

	$(-\infty, 2 - \sqrt{5})$	$(2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$	$(2 + \sqrt{5}, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función decrece en el intervalo $(-\infty, 2 - \sqrt{5}) \cup (2 + \sqrt{5}, +\infty)$ y crece en $(-1, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $\left(2 - \sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ y un máximo relativo $\left(2 + \sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

$$b) b = f(1) = \frac{1}{3} \text{ y } m = f'(1) = \frac{2}{3}$$

$$\text{Tangente: } y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(x - 1) \implies y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\text{Normal: } y - \frac{1}{3} = -\frac{3}{2}(x - 1) \implies y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{6}$$

Problema 3.6.10 Se pide:

- a) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 1$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1, 1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.

- b) Sea la función $f(x) = x \sin x - \cos x$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= ax^3 + bx^2 + x - 1, f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1 \text{ y } f''(x) = 6ax + 2b \\ \begin{cases} f(1) = 1 \implies a + b = 1 \\ f''(1) = 0 \implies 6a + 2b = 0 \implies 3a + b = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 3/2 \end{cases} \end{aligned}$$

- b) **Teorema de Rolle:** Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, derivable en el intervalo (a, b) y cumple $f(a) = f(b)$. Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

La función $f(x) = x \sin x - \cos x$ es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, lo es en el intervalo $[-1, 1]$. Además la función es derivable en $\mathbb{R}$ y, por tanto, lo es en el intervalo $(-1, 1)$.

Por otro lado $f(-1) = (-1) \sin(-1) - \cos(-1) = (-1)(-\sin 1) - \cos 1 = \sin 1 - \cos 1 = f(1)$

La función cumple las condiciones del teorema de Rolle y el teorema afirma: $\exists c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0 \implies c$ es un punto crítico.

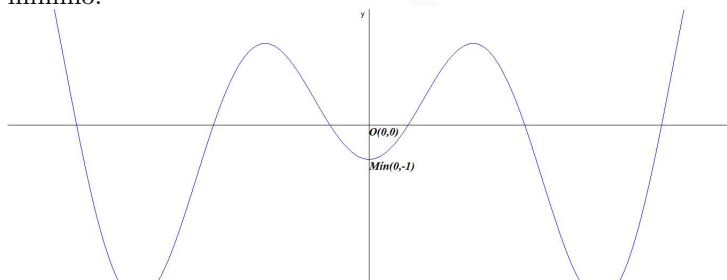
Comprobamos si se trata de un extremo relativo:

La función es PAR $f(-x) = f(x) \implies$ es simétrica respecto al eje de ordenadas y corta a este eje en $(0, f(0)) = (0, -1)$, luego en $x = 0$ hay un extremo relativo.

$$f(x) = x \sin x - \cos x \implies f'(x) = \sin x + x \cos x + \sin x = 2 \sin x + x \cos x$$

$$f'(c) = 2 \sin c + c \cos c = 0 \implies c = 0$$

$$f''(x) = 2 \cos x + \cos x - x \sin x = 3 \cos x - x \sin x \implies f''(0) = 3 > 0 \implies c = 0 \text{ es un mínimo.}$$



3.7. Castilla León

3.7.1. Modelo de 2021

Problema 3.7.1 Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula. (Téngase en cuenta la monotonía de la función y los valores que toma en los extremos relativos previamente calculados)

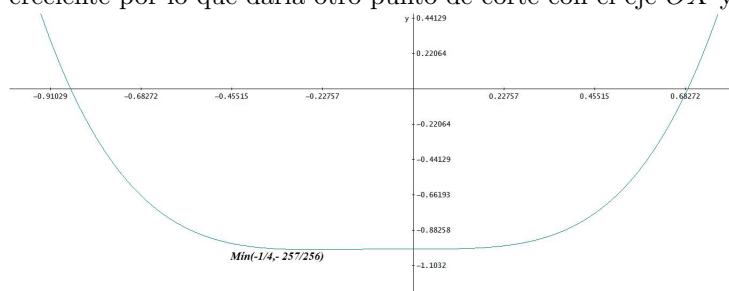
Solución:

$$\bullet f'(x) = 12x^3 + 3x^2 = 0 \implies x = -\frac{1}{4} \text{ y } x = 0.$$

	$(-\infty, -1/4)$	$(-1/4, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	creciente ↗

La función decrece en el intervalo $(-\infty, -1/4)$ y crece en $(-1/4, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(-1/4, -257/256)$.

- ☛ La función no tiene asíntotas horizontales y decrece hasta el mínimo en $(-1/4, -257/256)$ lo que daría un punto de corte con el eje OX . A partir de ese mínimo la función es siempre creciente por lo que daría otro punto de corte con el eje OX y no habría más.



Problema 3.7.2 Dada la función $f(x) = xe^{-x}$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica.

Solución:

- ☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- ☛ Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty \cdot e^{\infty} = -\infty$$

- Oblicuas: Cuando $x \rightarrow +\infty$ hay asíntota horizontal y, por tanto, no hay oblicua. Cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = e^{\infty} = \infty$$

Luego no hay oblicuas.

- ☛ $f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

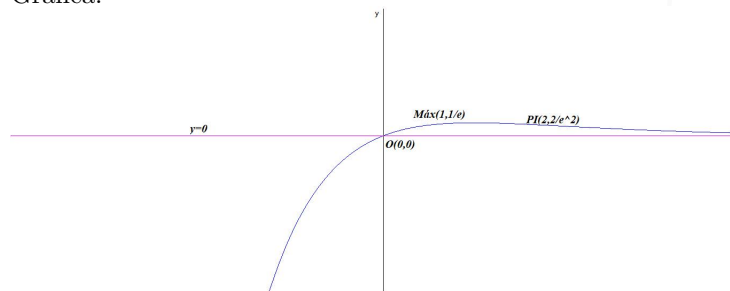
La función crece en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo relativo en $(1, 1/e)$.

☛ $f''(x) = e^{-x}(x-2) = 0 \implies x = 2.$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa ($\frown$) en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava ($\smile$) en el intervalo $(2, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(2, 2/e^2)$

☛ Gráfica:



Problema 3.7.3 Dada la función $f(x) = x \cos x$

- Demuestre que $f(x)$ es no negativa en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de las x , cuando x pertenece al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

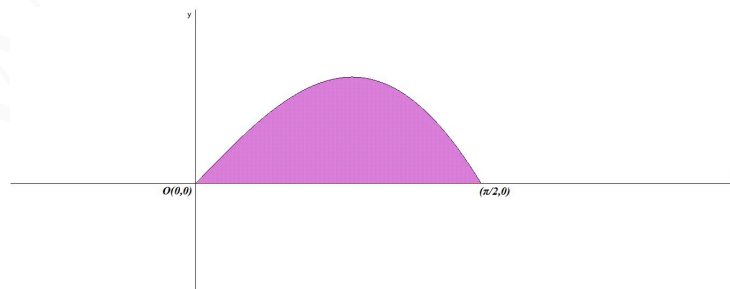
Solución:

- $f(x) = 0 \implies x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ luego la curva no corta con el eje de abscisas en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y, por tanto, el signo de la función en este intervalo es el mismo para todos sus puntos.

Si probamos con uno de ellos, por ejemplo $x = \frac{\pi}{3} \implies f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} > 0$. Luego f en este intervalo es positiva.

$$\text{b) } F(x) = \int x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \cos x \, dx \implies v = \sin x \end{array} \right] = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$S = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{2} - 1 = 0,5708 \, u^2$$



Problema 3.7.4 Se pide:

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(x+1)}$

b) Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(x+1)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{1/(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} [(x+1)(e^x + \sin x)] = 1$

b) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ dx = x dt \end{array} \right] = \int \frac{t^2}{x} x dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$

3.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.7.5 Representar la función $f(x) = e^{x^2}$, determinando antes sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas.

Solución:

☛ $f'(x) = 2xe^{x^2} = 0 \implies x = 0.$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(0, 1)$.

☛ $f''(x) = (4x^2 + 2)e^{x^2} \neq 0 \implies$ no tiene puntos de inflexión. Como $f''(x) > 0 \implies f$ es cóncava $\smile$ en todo el dominio de la función ($\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$)

☛ La función no tiene asíntotas.

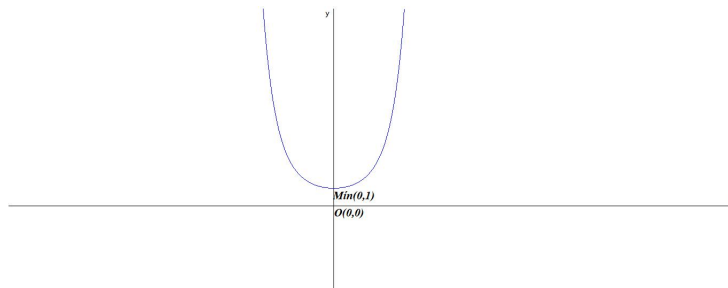
- Verticales: No hay ya que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- Horizontales: No hay ya que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty$$

- Oblicuas: No hay ya que ($y = mx + n$)

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2xe^{x^2}}{1} = \infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{x} = \left[\frac{\infty}{-\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2xe^{x^2}}{1} = -\infty$$



Problema 3.7.6 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos 3x}{\sin^2 x}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos 3x}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 3 \sin 3x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 3 \sin 3x}{\sin 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 9 \cos 3x}{2 \cos 2x} = \frac{10}{2} = 5$$

Problema 3.7.7 Se pide:

- Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 8$, hallar los valores de x para los que $g(x) \geq f(x)$
- Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

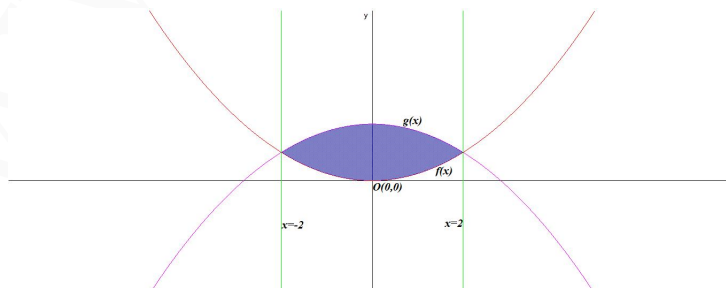
- $g(x) \geq f(x) \implies g(x) - f(x) \geq 0 \implies -x^2 + 8 - x^2 = -2x^2 + 8 \geq 0 \implies 2x^2 - 8 \leq 0 \implies x^2 - 4 \leq 0$. Las raíces del polinomio son $x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$

$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
+	-	+

La solución de $g(x) \geq f(x) \implies x^2 - 4 \leq 0$ es el intervalo $(-2, 2)$. En este intervalo la función g está por encima de la función f .

- Por el apartado anterior se sabe que las funciones se cortan en $x = -2$ y $x = 2$. Además se sabe que en ese intervalo la función g está por encima de la de f .

$$S = \int_{-2}^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-2}^2 (-2x^2 + 8) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x \right]_{-2}^2 = \frac{64}{3}$$



Problema 3.7.8 Hallar los valores de a , b y c para los cuales el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ cumple las siguientes condiciones:

- $P(0) = 1$

- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$ es $m = 1$.

- $\int_0^2 P(x) dx = 12$

Solución:

- $P(0) = 1 \implies 0 + 0 + c = 1 \implies c = 1$

- $P'(x) = 2ax + b \implies m = P'(0) = b = 1$

- $\int_0^2 (ax^2 + bx + c) dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_0^2 = \frac{8a}{3} + 2b + 2c = 12 \implies \frac{8a}{3} + 2 + 2 = 12 \implies a = 3$

3.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.7.9 Dada la función $f(x) = x^5 - 5x - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión.

Solución:

☛ $f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \implies x = \pm 1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

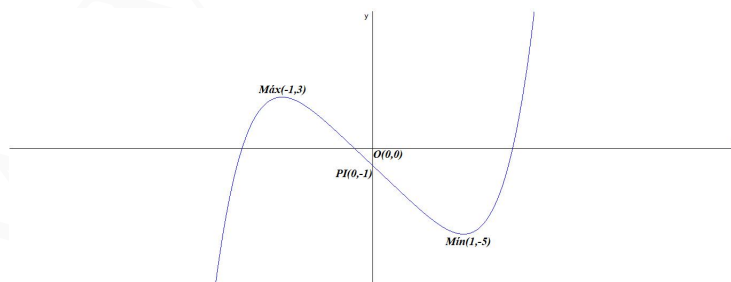
La función decrece en el intervalo $(-1, 1)$ y crece en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(1, -5)$ y un máximo relativo en $(-1, 3)$.

☛ $f''(x) = 20x^3 = 0 \implies x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	convexa ∩	cóncava ∪

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava en el $(0, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en el punto $(0, -1)$

☛ La función no tiene asíntotas por tratarse de un polinomio.



Problema 3.7.10 Calcular el valor de $m > 0$ para el cual se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2} = 2$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m \sin mx}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 \cos mx}{2} = \frac{m^2}{2} = 2 \implies m^2 = 4 \implies m = \pm 2. \text{ Como } m > 0 \implies m = 2$$

Problema 3.7.11 Se pide:

a) Estudiar la continuidad de la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) Calcular $\int x \ln x^2 dx$

Solución:

a) Para cualquier valor distinto de cero la función es continua. Hay que estudiar la continuidad en $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$

$$f(0) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \implies f \text{ continua en } x = 0 \text{ y, por tanto en } \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int x \ln x^2 dx &= \int 2x \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = 2 \ln x \implies du = \frac{2}{x} dx \\ dv = x dx \implies v = \frac{x^2}{2} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = x^2 \ln x - \int x dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C \\ &= \frac{2x^2 \ln x - x^2}{2} + C = \frac{x^2(\ln x^2 - 1)}{2} + C \end{aligned}$$

Problema 3.7.12 Se considera la función $f(x) = x - \cos x$

a) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$.

b) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ sólo puede tener una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$, de modo que la solución del apartado anterior es la única.

Solución:

a) $f(x)$ es una función continua, $f(0) = -1 < 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$, luego f cumple las condiciones del teorema de Bolzano, que asegura $\exists c \in (0, \pi/2)$ tal que $f(c) = 0$.

b) $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \implies f'(x) \geq 0 \forall x \in (0, \pi/2) \implies f$ es creciente en todo el intervalo $(0, \pi/2)$, luego sólo puede haber un único punto de corte.

3.8. Cataluña

3.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.8.1 Considere la parábola $y = 4 - x^2$ y un valor $a > 0$.

- Compruebe que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = a$ es $y = -2ax + a^2 + 4$ y calcule los puntos de corte de esta recta tangente con los ejes de coordenadas.
- Calcule el valor de $a > 0$ para que el área del triángulo determinado por esta recta tangente y los ejes de coordenadas sea mínima.

Solución:

- a) Sea $y = f(x) = 4 - x^2 \Rightarrow f(a) = 4 - a^2$, $f'(x) = -2x \Rightarrow m = f'(a) = -2a$ y la ecuación punto pendiente de la recta tangente es $y - f(a) = m(x - a) \Rightarrow y - 4 + a^2 = -2a(x - a) \Rightarrow y = -2ax + 2a^2 - a^2 + 4 = -2ax + a^2 + 4$.
Para calcular el punto de corte con el eje de ordenadas hacemos $x = 0 \Rightarrow y = a^2 + 4 \Rightarrow (0, a^2 + 4)$
Para calcular el punto de corte con el eje de abscisas hacemos $y = 0 \Rightarrow -2ax + a^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{a^2 + 4}{2a} \Rightarrow \left(\frac{a^2 + 4}{2a}, 0\right)$

b) $S(a) = \frac{\frac{a^2+4}{2a} \cdot (a^2+4)}{2} = \frac{(a^2+4)^2}{4a}$
 $S'(a) = \frac{(a^2+4)(3a^2-4)}{4a^2} = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$, la solución negativa no tiene relevancia.

	$\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$S'(a)$	-	+
$S(a)$	decreciente ↘	creciente ↗

Luego la función presenta un mínimo en $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Problema 3.8.2 Sea la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ definida en el dominio $x > 0$, en que $\ln$ es el logaritmo neperiano.

- Encuentre las coordenadas de un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a la curva sea horizontal y analice si la función tiene un extremo relativo en este punto.
- Determine si la función $f(x)$ tiene alguna asíntota horizontal.
- Calcule el área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 1$ y $x = e$. Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función en el dominio $0 < x < 5$, en el que quede representada el área que ha calculado.

Solución:

a) $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \implies 1 - \ln x = 0 \implies \ln x = 1 \implies x = e$

	$(0, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

Luego la función presenta un máximo relativo en $x = e \implies$ la función tiene en el punto $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ una tangente de pendiente cero, es decir, horizontal $y = \frac{1}{e}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies y = 0$ es una asíntota horizontal.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left[\frac{\ln(-\infty)}{\infty}\right] \implies$ no existe el límite.

- c) Calculamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas, para ver si hay algún punto de corte en el intervalo $[1, 5]$: $f(x) = 0 \implies \frac{\ln(x)}{x} = 0 \implies \ln x = 0 \implies x = 1$ que se encuentra en uno de los bordes del intervalo y, por tanto, sólo hay que calcular el área con los límites de integración 1 y e .

$$F(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln(x) \implies dt = \frac{1}{x} dx \\ dx = x dt \end{array} \right] =$$

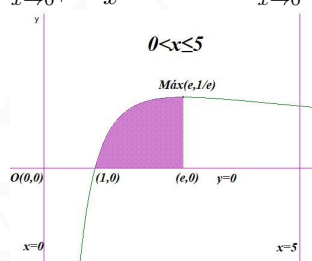
$$\int \frac{t}{x} x dt = \int t dt = \frac{(\ln(x))^2}{2}$$

$$S_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{2} u^2$$

Para dibujar la gráfica de la función comprobamos que hay una asíntota vertical en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x)}{x} \text{ no existe.}$$



Problema 3.8.3 Considere la función $f(x) = e^{x-1} - x - 1$

- a) Estudiar la continuidad, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 b) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones entre $x = -1$ y $x = 3$.

Solución:

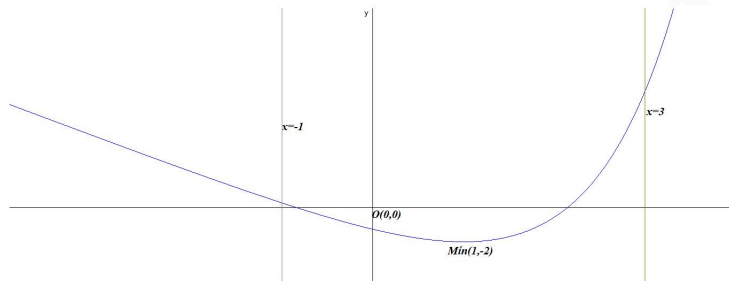
- a)  Continuidad: La función es continua por ser suma de funciones continuas, polinomio y exponencial.
-  Intervalos crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = e^{x-1} - 1 = 0 \implies e^{x-1} = 1 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(1, \infty)$ y decreciente en el $(-\infty, 1)$

-  Extremos relativos: La función tiene un mínimo relativo en $(1, -2)$



- b) Lo primero que observamos es que el mínimo calculado en el apartado anterior es absoluto en $x = 1$.
La función es siempre continua y decreciente en $(-1, 1)$. Tenemos $f(-1) = e^{-2} > 0$ y $f(1) = -2 < 0$, por el teorema de Bolzano $\exists c_1 \in (-1, 1)$ tal que $f(c_1) = 0$, además este punto es único al ser la función decreciente en todo el intervalo.
La función es siempre continua y creciente en $(1, 3)$. Tenemos $f(1) = -2 < 0$ y $f(3) = e^2 - 4 > 0$, por el teorema de Bolzano $\exists c_2 \in (1, 3)$ tal que $f(c_2) = 0$, además este punto es único al ser la función creciente en todo el intervalo.
Luego en el intervalo $(-1, 3)$ hay dos únicos puntos c_1 y c_2 tales que $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

3.8.2. Convocatoria Extraordinaria septiembre de 2021

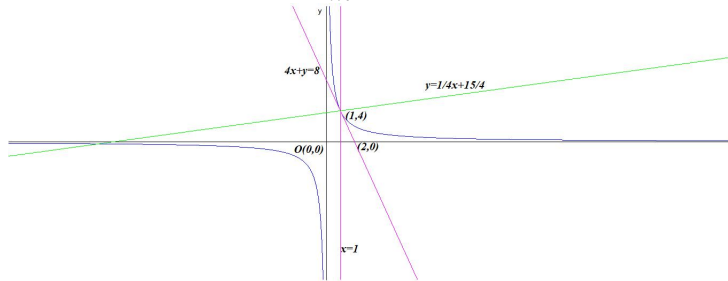
Problema 3.8.4 Se pide:

- a) Dada la función $f(x) = \frac{4}{x}$ calcular la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Encuentra también la ecuación de la recta normal a $y = f(x)$ en este mismo punto.
- b) Haga un esbozo de las gráficas de la curva $y = f(x)$ y de la recta $4x + y = 8$, y calcular el área delimitada para estas dos gráficas, el eje de las abscisas y la recta vertical $x = 3$.

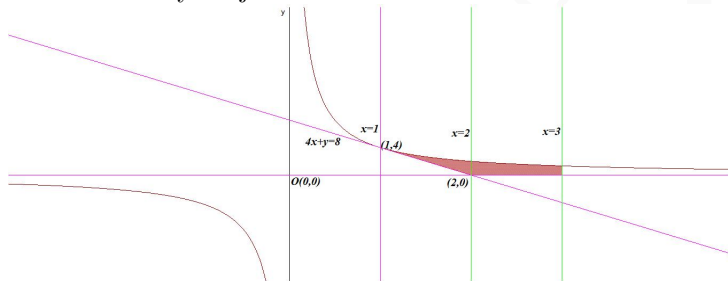
Solución:

- a) $a = 1 \implies b = f(1) = 4, f'(x) = -\frac{4}{x^2} \implies m = f'(1) = -4$
La recta tangente: $y - b = m(x - a) \implies y - 4 = -4(x - 1) \implies y = -4x + 8$

La recta normal: $y - b = -\frac{1}{m}(x - a) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{4}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{4}$



- b) Haciendo una tabla de valores representamos la función su tangente y el área delimitado con la recta $x = 1$ y el eje de abscisas:



Hay dos áreas S_1 entre la función y la recta en el intervalo $[1, 2]$ y otro S_2 entre la función y el eje de abscisas en el intervalo $[2, 3]$

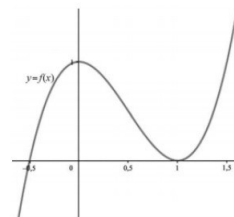
$$S_1 = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} + 4x - 8 \right) dx = 4 \ln |x| + 2x^2 - 8x \Big|_1^2 = 4 \ln 2 - 2$$

$$S_2 = \int_2^3 \left(\frac{4}{x} \right) dx = 4 \ln |x| \Big|_2^3 = 4 \ln 3 - 4 \ln 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4 \ln 2 - 2 + 4 \ln 3 - 4 \ln 2 = -2 + 4 \ln 3 = 2,3944 \text{ u}^2$$

Problema 3.8.5 Se pide:

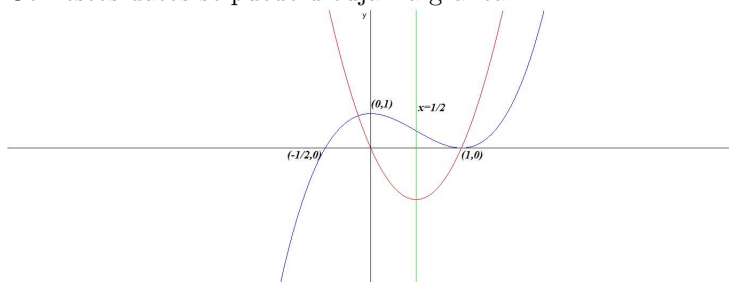
- a) En la figura se muestra la gráfica de la función $f(x)$. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explica el razonamiento que ha seguido.
- b) Calcular los valores de a y b para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tenga un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2}$ y su derivada en este punto sea $-\frac{3}{2}$.



Solución:

- a) Tenemos un máximo relativo en $x = 0 \Rightarrow g(0) = f'(0) = 0$
 Tenemos un mínimo relativo en $x = 1 \Rightarrow g(1) = f'(1) = 0$
 Tenemos $g(x) = f'(x) > 0$ en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ y $g(x) = f'(x) < 0$ en el intervalo $(0, 1)$
 Luego la función $g(x) = f'(x)$ tiene dos puntos de corte con el eje de abscisas, es positiva en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ y negativa en el $(0, 1)$.

Por otra parte $g' \left(\frac{1}{2} \right) = f'' \left(\frac{1}{2} \right) = 0$ por ser $x = \frac{1}{2}$ un punto de inflexión de $f(x)$. Es decir, $g(x)$ tiene un extremo relativo en $x = \frac{1}{2}$, que tiene que ser un mínimo local. Con estos datos se puede dibujar la gráfica:



b) $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1 \implies g'(x) = 3ax^2 + 2bx \implies g''(x) = 6ax + 2b$

$$\begin{cases} f' \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2} \implies \frac{3a}{4} + b = -\frac{3}{2} \\ f'' \left(\frac{1}{2} \right) = 0 \implies 3a + 2b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \implies$$

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

Problema 3.8.6 Considere la función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

- a) Estudiar si tiene puntos críticos y, en caso de que tenga, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- b) Compruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(-2, 1)$.

Solución:

a) $f'(x) = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} = 0 \implies x = 0 \implies x = 3$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	-	-	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	decreciente ↘	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$ y creciente en el $(3, \infty)$. Luego la función presenta un mínimo relativo en $x = 3 \implies (3, 27)$.

- b) La función f es continua en el intervalo $(-2, 1)$

Cumple: $f(-2) = \frac{-8}{-4} = 2 > 0$ y $f(1) = \frac{1}{-1} = -1 < 0$. La función cambia de signo en los extremos del intervalo y es continua en él, luego cumple las condiciones del teorema de Bolzano que asegura $\exists c \in (-2, 1)$ en el que se cumple $f(c) = 0$. Como la función es decreciente en todo el intervalo este punto c es único y, por tanto, $f(x) = 0$ tiene una solución única en el intervalo $(-2, 1)$.

3.9. Comunidad valenciana

3.9.1. Modelo de 2021

Problema 3.9.1 Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El dominio de la función h . Los límites $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.
- La asíntota de la curva $y = h(x)$.
- La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x) dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$.

Solución:

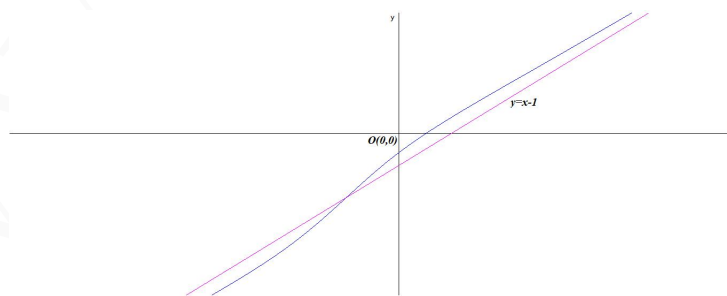
- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, el denominador no se anula nunca.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = -\frac{3}{5}$$

- b) Asíntotas:

- **Verticales:** No hay
- **Horizontales:** No hay
- **Oblicuas:** $y = mx + n$

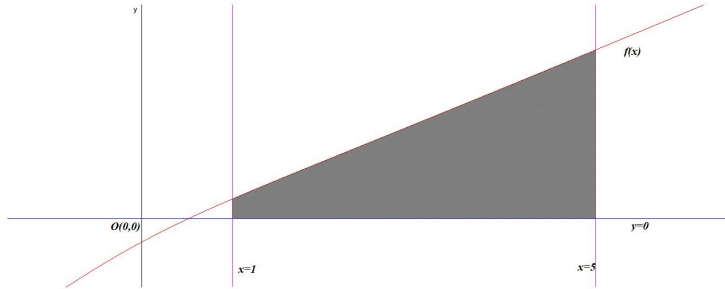
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x^2 + 5x} = 1$$
$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} - x \right) =$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 + 5x - 3 - x^3 - 2x^2 - 5x}{x^2 + 2x + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3}{x^2 + 2x + 5} = -1$$
$$y = x - 1$$



- c) $h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = x - 1 + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5}$. Luego:

$$S = \int_1^5 h(x) dx = \int_1^5 \left(x - 1 + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln |x^2 + 2x + 5| \right]_1^5 =$$

$$8 + \ln 5 \, u^2 \simeq 9,61 \, u^2$$



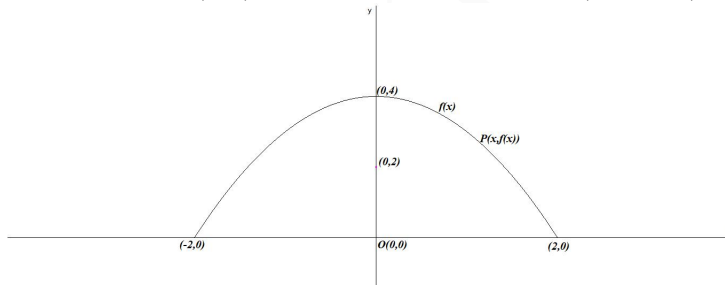
Problema 3.9.2 Un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$.
- Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$.
- Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$.
- El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$.

Solución:

- Sean el punto $A(0, 2)$ y un punto de la función $P(x, 4 - x^2)$. Llamamos $d(x) = d(AP)$:



$$d(x) = \sqrt{(x - 0)^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

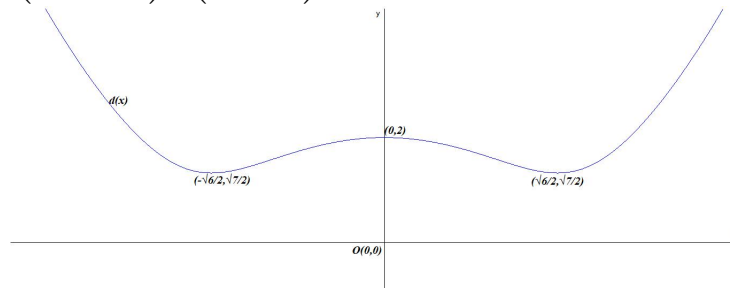
-

$$d'(x) = \frac{x(2x^2 - 3)}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0 \implies x = 0, \quad x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

	$(-\infty, -\sqrt{6}/2)$	$(-\sqrt{6}/2, 0)$	$(0, \sqrt{6}/2)$	$(\sqrt{6}/2, \infty)$
$d'(x)$	-	+	-	+
$d(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{6}/2) \cup (0, \sqrt{6}/2)$ y creciente en el intervalo $(-\sqrt{6}/2, 0) \cup (\sqrt{6}/2, \infty)$. La función presenta dos mínimos relativo en los puntos

$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ y tendría el máximo relativo en $(0, 2)$.

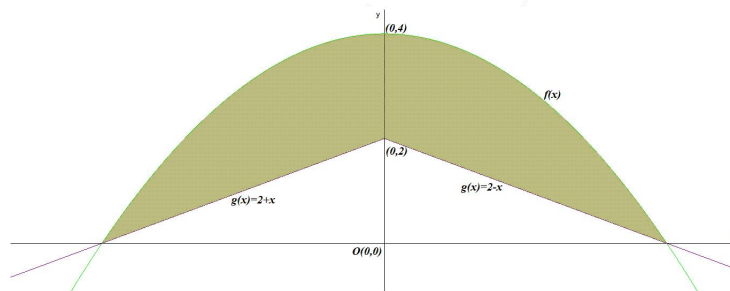


c) Contestado en el apartado anterior.

d)

$$S = \int_{-2}^0 (4-x^2-2-x) dx + \int_0^2 (4-x^2-2+x) dx = \int_{-2}^0 (-x^2-x+2) dx + \int_0^2 (-x^2+x+2) dx =$$

$$\left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^0 = \frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3} u^2$$



3.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.9.3 Consideramos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

- El dominio y las asíntotas de la función.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- La integral $\int f(x) dx$.

Solución:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x}$$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, -2\}$, el denominador no se anula nunca.
Asíntotas:

• Verticales:

- $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2+2x} = \left[\frac{-1}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2+2x} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty$$

- $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-1}{x^2+2x} = \left[\frac{-3}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x^2+2x} = \left[\frac{-3}{0^-} \right] = +\infty$$

☛ **Horizontales:** $y = 0$

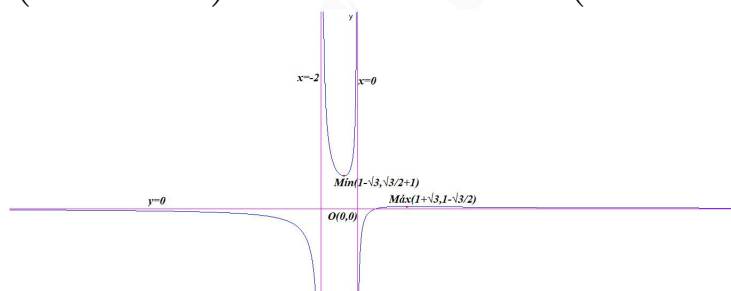
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2+2x} = 0$$

☛ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\frac{x^2-2x-2}{x^2(x+2)^2} = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{3}$

	$(-\infty, 1 - \sqrt{3})$	$(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$	$(1 + \sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

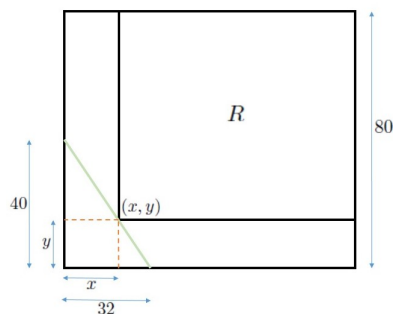
La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, \infty)$ y creciente en el intervalo $(1 - \sqrt{3}, 0) \cup (0, 1 + \sqrt{3})$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $\left(1 - \sqrt{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y un máximo relativo en el $\left(1 + \sqrt{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



c) $\int \frac{x-1}{x(x+2)} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + Bx}{x(x+2)} \\ x-1 = A(x+2) + Bx \\ x=0 \implies -1 = 2A \implies A = -\frac{1}{2} \\ x=-2 \implies -3 = -2B \implies B = \frac{3}{2} \\ \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{-1/2}{x} + \frac{3/2}{x+2} \end{array} \right] =$

$$\int \left(\frac{-1/2}{x} + \frac{3/2}{x+2} \right) dx = -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+2| + C$$

Problema 3.9.4 Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R , uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura)



- Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x , cuando $0 \leq x \leq 32$.
- Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.
- Calculad el valor de dicha área máxima.

Solución:

- Por el teorema de Tales, por la semejanza de triángulos $\frac{32-x}{y} = \frac{32}{40} \implies y = \frac{5(32-x)}{4}$.

$$\text{El área de } R \text{ es } S(x, y) = (80-x) \cdot (80-y) \implies S(x) = (80-x) \cdot \left(80 - \frac{5(32-x)}{4}\right) = \frac{-5x^2 + 240x + 12800}{4}$$

$$\text{b) } S'(x) = \frac{-5x + 120}{2} = 0 \implies x = 24$$

$$S''(x) = -\frac{5}{2} \implies S''(24) = -\frac{5}{2} < 0 \implies x = 24 \text{ es un máximo relativo.}$$

$$\text{Las dimensiones del rectángulo } R \text{ serán } 80 - 24 = 56 \text{ cm de base y } 80 - y = 80 - \frac{5(32-24)}{4} = 80 - 10 = 70 \text{ cm de alto}$$

$$\text{c) El área del rectángulo } R \text{ es } S(24) = \frac{-5 \cdot 24^2 + 240 \cdot 24 + 12800}{4} = 3920 \text{ cm}^2.$$

3.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.9.5 Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$. calculad:

- El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.
- Las asíntotas y la gráfica de f .
- La integral $\int f(x) dx$.

Solución:

$$\text{a) } \bullet \text{ Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\bullet f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2} = 0 \implies x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ y creciente en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}e}{2}\right) = (-0,7071; -1,1658)$ y un máximo relativo en el $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}e}{2}\right) = (0,7071; 1,1658)$.

b) $\bullet$ Asíntotas:

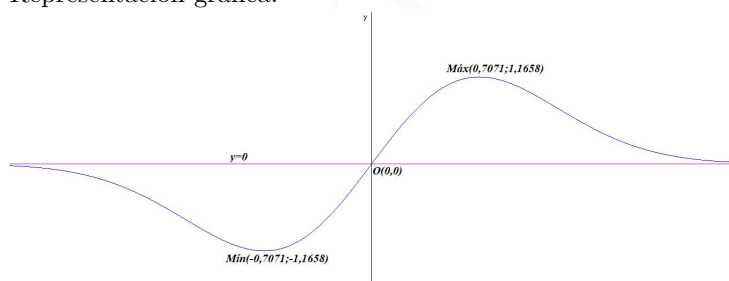
- **Verticales:** No hay
- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ex}{e^{x^2}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]^{L'H} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e}{2xe^{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{1-x^2} = 0 \implies y = 0$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

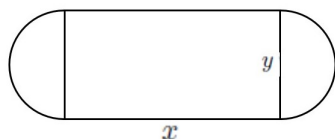
$\bullet$ Representación gráfica:



$$\begin{aligned} \text{c) } \int xe^{1-x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} t = 1 - x^2 \implies dt = -2x dx \\ dx = \frac{dt}{-2x} \end{array} \right] = \\ &= \int xe^t \frac{dt}{-2x} = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{e^{1-x^2}}{2} + C \end{aligned}$$

Problema 3.9.6 Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $4 + \pi$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

- Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo.
- Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.



Solución:

$$\text{a) } S = \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 + xy = 4 + \pi \implies xy = 4 + \pi - \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 \implies x = \frac{16 + 4\pi - \pi y^2}{4y}$$

$$L(x, y) = \pi y + 2x + 2y \implies L(y) = \pi y + \frac{16 + 4\pi - \pi y^2}{2y} + 2y \implies$$

$$L(y) = (\pi + 2)y + \frac{16 + 4\pi - \pi y^2}{2y}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } L'(y) &= (\pi + 2) + \frac{-4\pi y^2 - 2(16 + 4\pi - \pi y^2)}{4y^2} = \\ &= (\pi + 2) - \frac{2\pi y^2 + 16 + 4\pi - \pi y^2}{2y^2} = (\pi + 2) - \frac{\pi y^2 + 16 + 4\pi}{2y^2} = \\ &= \frac{2\pi y^2 + 4y^2 - \pi y^2 - 16 - 4\pi}{2y^2} = \frac{\pi y^2 + 4y^2 - 16 - 4\pi}{2y^2} = \\ &= \frac{(\pi + 4)y^2 - 4(4 + \pi)}{2y^2} = \frac{(\pi + 4)(y^2 - 4)}{2y^2} = 0 \implies \\ &y^2 - 4 = 0 \implies y = \pm 2 \end{aligned}$$

La solución negativa no es relevante.

	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$L'(y)$	$-$	$+$
$L(y)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(0, 2)$ y crece en el intervalo $(2, \infty)$, por tanto, tiene un mínimo en $y = 2 \implies x = \frac{16 + 4\pi - 4\pi}{8} = 2$

Las medidas del rectángulo son 2 m de ancho, 2 m de largo y 1 m el radio de las circunferencias.

3.10. Extremadura

3.10.1. Modelo de 2021

Problema 3.10.1 Estudiar los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ para $x > 0$.

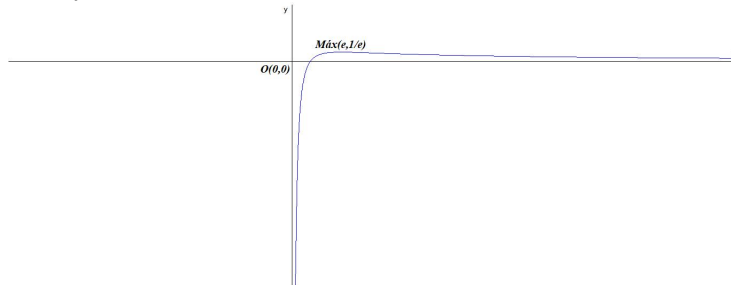
Solución:

$$\text{Dom}(f) = (0, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \implies x = e.$$

	$(0, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo $(0, e)$ y decrece en (e, ∞) . Tiene un máximo relativo en $(e, 1/e)$ y no hay mínimos relativos



Problema 3.10.2 Calcular los valores de los parámetros a y b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en el punto $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \leq 1 \\ e^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

☛ Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + b) = a + b, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{1-x} = 1$$

Para que sea continua $a + b = 1$.

☛ Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x \leq 1 \\ -e^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Para que sea derivable en } x = 1 \text{ es } f'(1^-) = f'(1^+) \implies 2a = -1$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 3/2 \end{cases}$$

Problema 3.10.3 Calcular la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (2x-3)e^{2x}$ que cumpla $F(0) = 0$.

Solución:

$$F(x) = \int (2x-3)e^{2x} dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x-3 \implies du = 2dx \\ dv = e^{2x} dx \implies v = \frac{1}{2}e^{2x} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] =$$

$$\frac{(2x-3)e^{2x}}{2} - \int e^{2x} dx = \frac{(2x-3)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} = (x-2)e^{2x} + C$$

$$F(0) = 0 \implies -2 + C = 0 \implies C = 2 \implies F(x) = (x-2)e^{2x} - 2$$

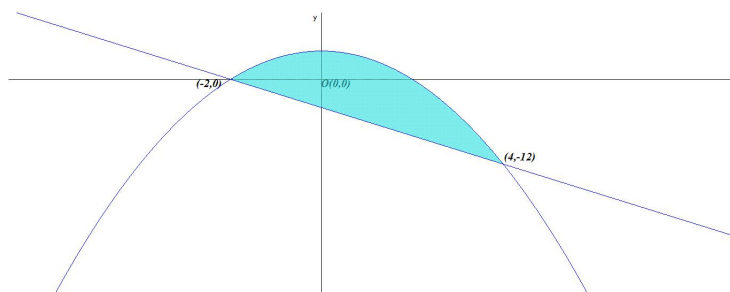
Problema 3.10.4 Dadas las funciones $f(x) = -2x - 4$ y $g(x) = -x^2 + 4$. Calcular el área de la región limitada por sus gráficas.

Solución:

$$f(x) = g(x) \implies -2x - 4 = -x^2 + 4 \implies x^2 - 2x - 8 = 0 \implies x = -2 \text{ y } x = 4$$

$$S_1 = \int_{-2}^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^4 (x^2 - 2x - 8) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x \right]_{-2}^4 = -36$$

$$S = |S_1| = 36 u^2$$



3.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.10.5 Estudiar asíntotas, monotonía (crecimiento y decrecimiento), extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- Asíntotas:
 - Verticales: No hay
 - Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.
- Monotonía: $f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función crece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, \infty)$. Tiene un máximo relativo en $(0, 1)$ y no hay mínimos relativos.

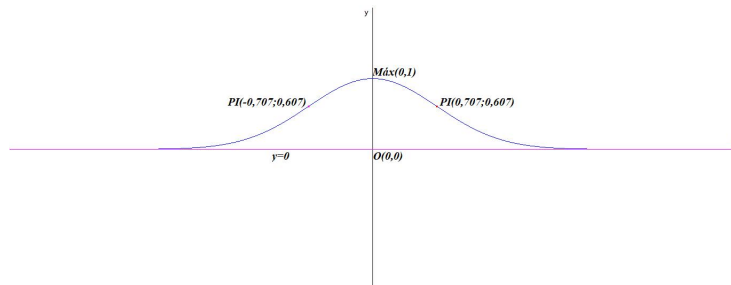
- Curvatura: $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	cóncava ∪	convexa ∩	cóncava ∪

La función es cóncava en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ y convexa en el $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La función tiene dos puntos de inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$

■ Representación gráfica:



Problema 3.10.6 Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan en al menos 2 puntos. Para cada uno de los puntos de corte, encontrar un intervalo que lo contenga de longitud menor o igual que 1. Razonar las respuestas exponiendo y verificando los resultados (teoremas) que lo justifiquen.

Solución:

Sea la función continua $h(x) = f(x) - g(x) = 2 - x^2 - e^x$. Los puntos de corte se encuentran cuando $h(x) = 0$.

Probamos intervalos, si tomamos $[0, 1]$, intervalo de longitud 1, tenemos $h(0) = 1 > 0$ y $h(1) = 1 - e < 0$, por el teorema de Bolzano $\exists c_1 \in (0, 1)$ tal que $h(c_1) = 0$.

Hay que buscar otro intervalo de longitud 1, el $[-2, -1]$, tenemos $h(-2) = -2 - e^{-2} < 0$ y $h(-1) = 1 - e^{-1} > 0$, por el teorema de Bolzano $\exists c_2 \in (-2, -1)$ tal que $h(c_2) = 0$.

Luego hay dos puntos de corte entre las funciones f y g y los puntos de corte están en los intervalos $(0, 1)$ y $(-2, -1)$ de longitud menor a igual a 1.

Problema 3.10.7 Calcular la integral racional

$$\int \frac{3x}{x^2 + x - 2} dx$$

Solución:

$$\int (2x - 3)e^{2x} dx = \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 2 = 0 \implies x = 1, x = -2 \\ \frac{3x}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 1)}{x^2 + x - 2} \\ 3x = A(x + 2) + B(x - 1) \\ x = -2 \implies -6 = -3B \implies B = 2 \\ x = 1 \implies 3 = 3A \implies A = 1 \\ \frac{3x}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 2} \end{array} \right] =$$

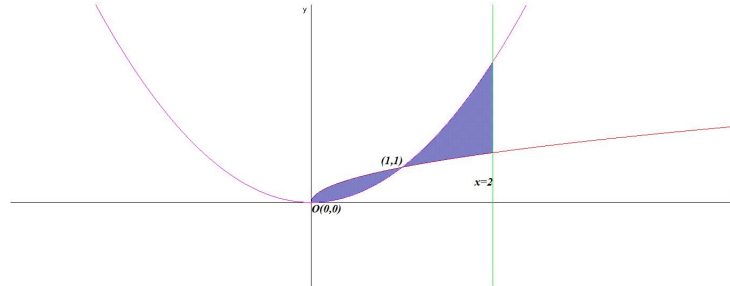
$$\int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{2}{x + 2} dx = \ln|x - 1| + 2\ln|x + 2| + C$$

Problema 3.10.8 Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

- Representar la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 2]$.
- Calcular el área de la región anterior.

Solución:

a) $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = 0.$



b)

$$S_1 = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (x^2 - x^{1/2}) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^2 (x^2 - x^{1/2}) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} \right]_1^2 = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3} \simeq 1,4477 \text{ u}^2$$

3.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.10.9 Se pide:

a) Estudiar la continuidad de la siguiente función $f(x)$ para $x \neq 0$ (con $a \in \mathbb{R}$):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) Calcular el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

Solución:

a) Cuando $x \neq 0$ la función está compuesta de funciones continuas: exponencial y polinomios. Además el denominador no se anula en $\mathbb{R} - \{0\}$. Luego f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Es decir, } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} = f(0) = a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Problema 3.10.10 Sea la función $f(x) = \frac{2 - x^2}{x^2 - 4}$.

a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de la función $f(x)$.

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) • Dom(f) = $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$

• Asíntotas:

• Verticales:

◦ En $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

◦ En $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2 - x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2 - x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

• Horizontales: $y = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x^2}{x^2 - 4} = -1$$

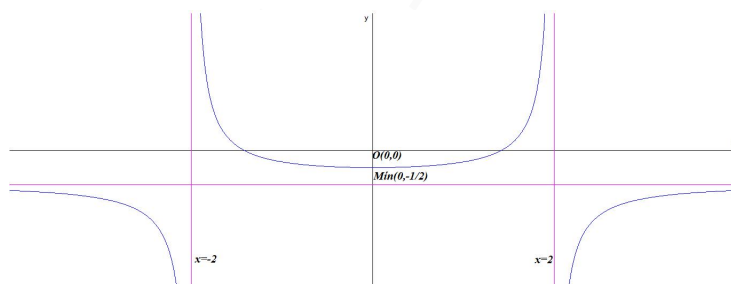
• Oblicuas: No hay por haber horizontales.

• Monotonía: $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$. Tiene un mínimo relativo en $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ y no hay máximos relativos.

b) Representación gráfica:



Problema 3.10.11 Resolver la integral $\int \ln^2 x \, dx$

Solución:

$$\int \ln^2 x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln^2 x \Rightarrow du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = x \ln^2 x - 2 \left[x \ln x - \int dx \right] =$$

$$x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$$

Problema 3.10.12 Dadas las funciones $f(x) = 3x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$, calcular el área de la región limitada por sus gráficas.

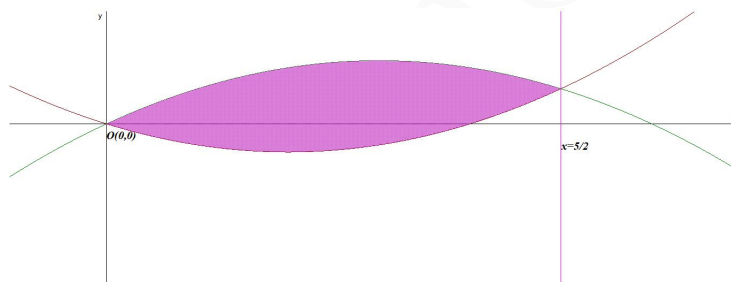
Solución:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = \frac{5}{2}$$

$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (5x - 2x^2) dx = \frac{5x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}$$

$$S_1 = \int_0^{5/2} (5x - 2x^2) dx = F\left(\frac{5}{2}\right) - F(0) = \frac{125}{24}$$

$$S = |S_1| = \frac{125}{24} \simeq 5,2083 \text{ u}^2$$



3.11. Galicia

3.11.1. Modelo de 2021

Problema 3.11.1 Da respuesta a los siguientes apartados:

- a) Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ ax + b & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$, di que relación debe existir entre a y b para que f sea continua y que valores deben tener para que f sea derivable.
- b) Calcular el área encerrada entre el eje X , la recta $x = 4$ y la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$$

Solución:

a) Continuidad en $x = e$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \ln x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} (ax + b) = ae + b$$

$$ae + b = 1$$

Derivabilidad en $x = e$ $f'(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in (0, e] \\ a & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$ $f'(e^-) = \frac{1}{e}$ y $f'(e^+) = a \Rightarrow \frac{1}{e} = a \Rightarrow ae = 1$

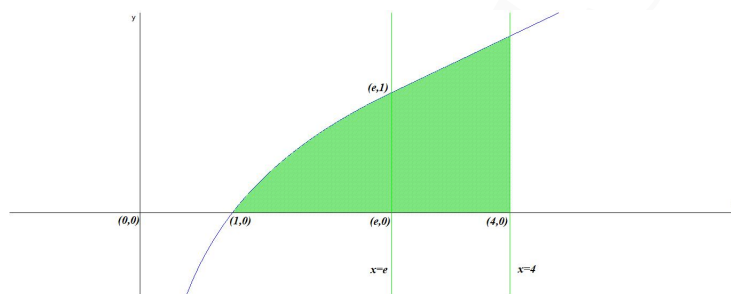
$$\begin{cases} ae + b = 1 \\ ae = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{e} \\ b = 0 \end{cases}$$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$:

$$S_1 = \int_1^e \ln x \, dx = x(\ln x - 1) \Big|_1^e = 1$$

$$S_2 = \int_e^4 \frac{x}{e} \, dx = \frac{x^2}{2e} \Big|_e^4 = \frac{16 - e^2}{2e}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 + \frac{16 - e^2}{2e} = \frac{-e^2 + 2e + 16}{2} \simeq 2,584 \, u^2$$



Problema 3.11.2 Da respuesta a los apartados siguientes:

- a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y , obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.
- b) Enuncia el teorema de Bolzano y Rolle.

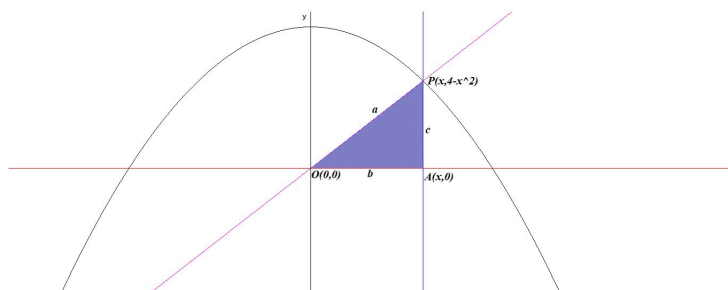
Solución:

- a) El cateto $b = x$ el $c = f(x) = 4 - x^2$ y la hipotenusa $a = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x^2)^2} = \sqrt{x^4 - 7x^2 + 16}$.

$$S(x) = \frac{bc}{2} = \frac{x(4 - x^2)}{2} = \frac{4x - x^3}{2} \Rightarrow S'(x) = \frac{4 - 3x^2}{2} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S''(x) = -3x \Rightarrow S''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \, u \text{ es un máximo.}$$

Luego los catetos miden $b = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,155 \text{ u}$, $c = \frac{8}{3} = 2,667 \text{ u}$ y $a = \frac{2\sqrt{19}}{3} = 2,906 \text{ u}$

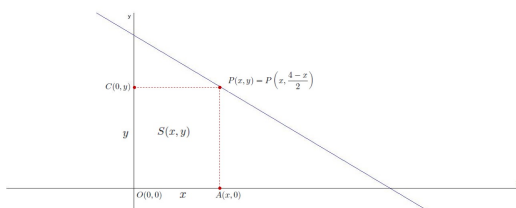


b) Ver teoría.

3.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.11.3 De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

Solución:



$$x + 2y = 4 \implies y = \frac{4-x}{2}$$

$$S(x,y) = xy \implies S(x) = x \cdot \frac{4-x}{2} = \frac{4x-x^2}{2}$$

$$S'(x) = 2 - x = 0 \implies x = 2$$

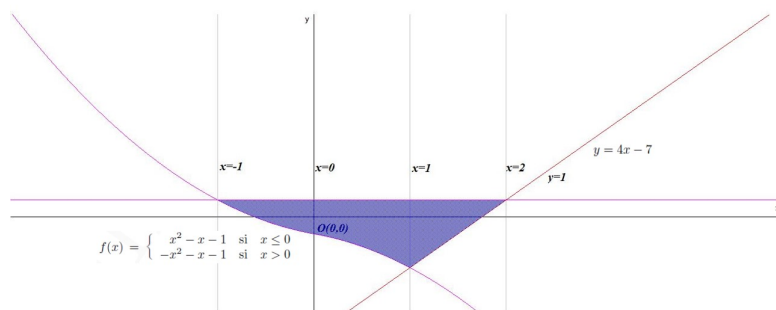
$S''(x) = -1 \implies S''(2) = -1 < 0 \implies x = 2$ es un máximo relativo e $y = \frac{4-2}{2} = 1$, con un área máxima de $2 \cdot 1 = 2 \text{ u}^2$.

Los vértices serán $O(0,0)$, $A(2,0)$, $P(2,1)$ y $C(0,1)$

Problema 3.11.4 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 - x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

Solución:

Hacemos un esbozo de las gráficas y calculamos los puntos de corte:



- De f con $y = 1$ tenemos:
 $x^2 - x - 1 = 1 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies x = -1$ y $x = 2$ (no válida por no estar en la rama)
 $-x^2 - x - 1 = 1 \implies x^2 + x + 2 = 0$ no tiene solución y, por tanto, no hay punto de corte.
- De f con la recta $y = 4x - 7$: $x^2 - x - 1 = 4x - 7 \implies x^2 - 5x + 6 = 0$ no tiene solución y, por tanto, no hay punto de corte.
 $-x^2 - x - 1 = 4x - 7 \implies x^2 + 5x - 6 = 0 \implies x = 1$ y $x = -6$ (no válida por no estar en la rama)
- De las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1 \implies 4x - 7 = 1 \implies x = 2$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (x^2 - x - 1 - 1) dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x - 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^0 = -\frac{7}{6}$$

$$S_2 = \int_0^1 (-x^2 - x - 1 - 1) dx = \int_0^1 (-x^2 - x - 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^1 = -\frac{17}{6}$$

$$S_3 = \int_1^2 (4x - 7 - 1) dx = \int_1^2 (4x - 8) dx = \left[2x^2 - 8x \right]_1^2 = -2$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{7}{6} + \frac{17}{6} + 2 = 6 \text{ u}^2$$

Al resolver el problema no he tenido en cuenta la posición de las gráficas. A la vista de la gráfica se observa que la recta $y = 1$ está por encima de las otras. Si tomásemos $1 - (x^2 - x - 1)$ la integral saldría positiva. Si se toman valores absolutos se corrige este detalle y, de esta manera, no hay que analizar sus posiciones.

3.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.11.5 Se pide:

- Enuncie el teorema de Bolzano.
- Obtenga los valores de a , b y c que hacen que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpla $f(0) = 1$ y tenga extremos relativos en $x = \pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

Solución:

a) Teorema de Bolzano:

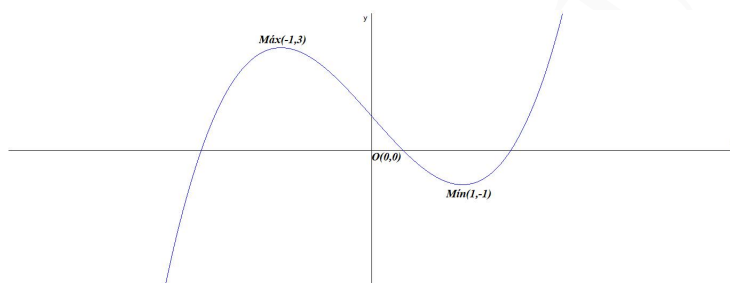
Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ que cumple:
 $\text{signo}(f(a)) \neq \text{signo}(f(b))$. Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c &\implies f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3 \\ \begin{cases} f(0) = 1 \implies c = 1 \\ f'(1) = 0 \implies 3a + 2b - 3 = 0 \\ f'(-1) = 0 \implies 3a - 2b - 3 = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm 1$$

$$f''(x) = 6x \implies \begin{cases} f''(1) = 6 > 0 \implies x = 1 \text{ M\'{i}nimo} \\ f''(-1) = -6 < 0 \implies x = -1 \text{ M\'{a}ximo} \end{cases}$$



Problema 3.11.6 Se pide:

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el \'{a}rea de la regi\'{o}n encerrada por las gr\'{a}ficas de

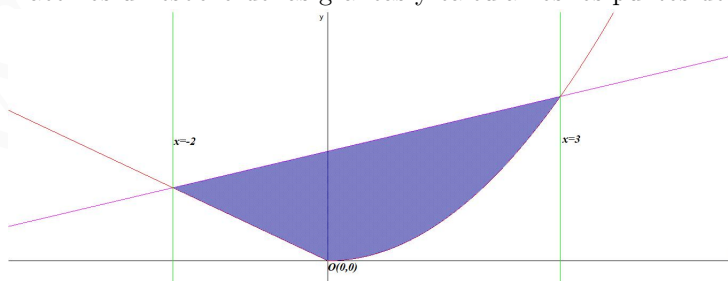
$$f(x) = x + 6 \text{ y } g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Soluci\'{o}n:

a) Teorema de Rolle:

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y derivable en (a, b) que cumple $f(a) = f(b)$. Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

b) Hacemos un esbozo de las gr\'{a}ficas y calculamos los puntos de corte:



En la rama $x < 0 \implies x + 6 = -2x \implies x = -2$

En la rama $x \geq 0 \implies x + 6 = x^2 \implies x^2 - x - 6 = 0 \implies x = 3 \text{ y } x = -2 \text{ (no v\'{a}lida por } x \geq 0 \text{)}$

estar fuera de la rama)

$$S_1 = \int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^0 (3x + 6) dx = \left[\frac{2x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^0 = 6$$

$$S_2 = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^3 (-x^2 + x + 6) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^3 = \frac{27}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 6 + \frac{27}{2} = \frac{39}{2} u^2$$

3.12. Islas Baleares

3.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.12.1 Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^4}$

- Representarla gráficamente.
- Comprobar que $f(2) = f(-2)$.
- Comprobar que no existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$.
- ¿Hay una contradicción con la conclusión del teorema de Rolle?

Solución:

- Para representar la gráfica tenemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, no tiene puntos de corte con los ejes, es PAR $f(-x) = \frac{1}{(-x)^4} = \frac{1}{x^4} = f(x)$ simétrica respecto al eje OY , es siempre positiva $f(x) > 0$, tiene una asíntota vertical en $x = 0$, una horizontal en $y = 0$ y no tiene extremos $f'(x) = -\frac{4}{x^5} \neq 0$.

☛ Asíntotas verticales: $x = 0$

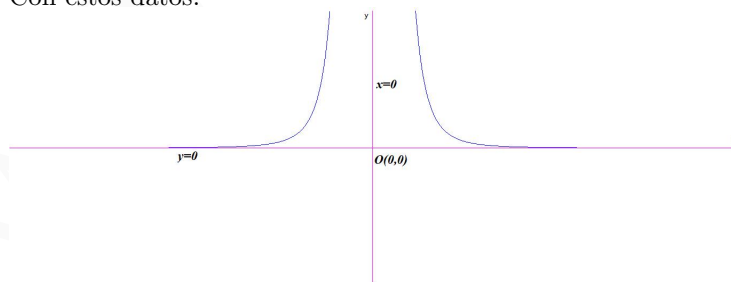
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

☛ Asíntotas horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$$

☛ Asíntotas oblicuas: No hay por haber horizontales

Con estos datos:



b) $f(-2) = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{2^4} = f(2)$ como era de esperar, ya que la función es PAR.

c) $f'(x) = -\frac{4}{x^5} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ y, por tanto, no existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ ya que en ese intervalo la derivada es positiva.

La función es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$ ya que en ese intervalo la derivada es negativa.

En el intervalo $[-2, 2]$ será creciente en $(-2, 0)$ y decreciente en $(0, 2)$.

d) Para poder aplicar el teorema de Rolle la función debe de ser continua en $[-2, 2]$ (que no lo es en $x = 0$) y derivable $(-2, 2)$ (que no lo es en $x = 0$) Luego NO HAY contradicciones aunque cumpla $f(-2) = f(2)$. Ese sólo dato no aporta todas las condiciones necesarias del teorema.

Problema 3.12.2 Dada la función $f(x) = \frac{-x}{4-x^2}$

a) Calcula la primitiva de $f(x)$

b) Calcula el área limitada por la gráfica de $f(x)$, las rectas $x = \sqrt{5}$, $x = \sqrt{6}$ y el eje X .

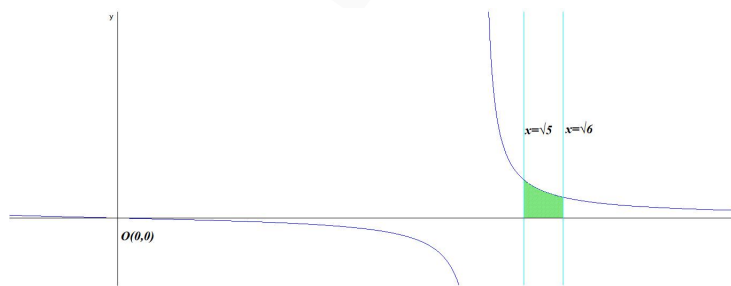
Solución:

a) $F(x) = \int \frac{-x}{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |4-x^2| + C$

b) $\frac{-x}{4-x^2} = 0 \implies x = 0 \notin [\sqrt{5}, \sqrt{6}]$

$$S_1 = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{-x}{4-x^2} dx = \left. \frac{1}{2} \ln |4-x^2| \right|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} = \frac{\ln 2}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{\ln 2}{2} \simeq 0,3465735902 \text{ u}^2$$



3.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.12.3 Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - 1}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función en los puntos $x_0 \neq 0$.

- b) Calcula la relación que debe haber entre a y b para que f sea una función continua en el punto $x_0 = 0$.
- c) Si para los valores de $a = 2$ y $b = 1$, f es una función derivable en el punto $x = 0$, calcula $f'(0)$.

Solución:

- a) La función f es composición de funciones continuas y el denominador no se anula en las ramas $x \neq 0$, luego es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax}}{2} = \frac{a}{2}$$

Para que sea continua:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{ax} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} - 1}{2x} = \frac{a}{2} = f(0) = b \implies \frac{a}{2} = b \implies a - 2b = 0$$

- c) Si $a = 2$ y $b = 1$: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, la función es continua ya que cumple $a - 2b = 0$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{2h} - 1}{2h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - 1 - 2h}{2h^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{2h} - 2}{4h} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4e^{2h}}{4} = 1$$

Problema 3.12.4 El número de individuos de una población en un determinado instante de tiempo, t , expresado en millones de individuos, viene dado por la función

$$P(t) = \frac{15 + t^2}{(t + 1)^2}$$

donde la variable real $t \geq 0$ mide el número de años transcurridos desde el 1 de enero del año 2000.

- a) Calcula la población que había el 1 de enero del año 2000.
- b) Prueba de que el número de individuos de la población alcanza un mínimo. Qué año se alcanza este mínimo? ¿Cuántos de individuos habrá el año del mínimo?
- c) Calcular el tamaño de la población, esto es el número de individuos, que habrá a largo plazo.

Solución:

- a) $P(0) = 15$ millones de individuos.

$$b) P'(t) = \frac{2(t - 15)}{(t + 1)^3} = 0 \implies t = 15$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 15)$	$(15, \infty)$
$P'(t)$	+	-	+
$P(t)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

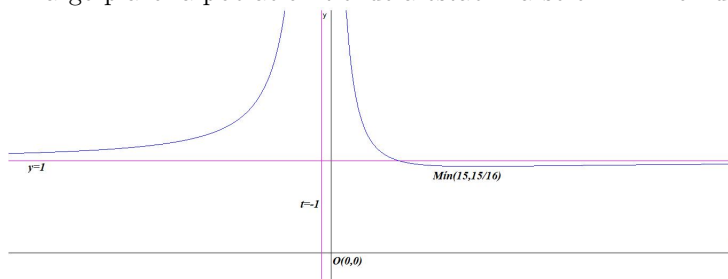
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (15, \infty)$ y decreciente en el $(-1, 15)$. Presenta un mínimo relativo en el punto $\left(15, \frac{15}{14}\right)$

El mínimo de población se da el 1 de enero de 2015 con $\frac{15}{14}$ millones de individuos.

c) A largo plazo $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{15 + t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{15 + t^2}{t^2 + 2t + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

A largo plazo la población tiende a estabilizarse en 1 millón de individuos.



3.13. Islas Canarias

3.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.13.1 Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 - 2}{b - x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.

- Calcular el valor de los parámetros a y b que verifican $f(-2) = 2$ y que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R} - \{5\}$. Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$.
- Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a = -1$ y $b = -3$.

Solución:

- $f(-2) = \frac{4a - 2}{b + 2} = 2 \Rightarrow 4a - 2 = 2b + 4 \Rightarrow 2a - b = 3$. $f(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{5\} \Rightarrow f(x)$ no es continua en $x = 5 \Rightarrow b - 5 = 0 \Rightarrow b = 5$ y, por tanto, $2a - 5 = 3 \Rightarrow a = 4$.

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2}{5 - x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2(2x^2 - 20x + 1)}{(x - 5)^2}$$

- Si $a = -1$ y $b = -3 \Rightarrow f(x) = \frac{-x^2 - 2}{-3 - x} = \frac{x^2 + 2}{3 + x}$. Calculamos sus asíntotas:

• Verticales: $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + 2}{3 + x} = \left[\frac{11}{0^-} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + 2}{3 + x} = \left[\frac{11}{0^+} \right] = +\infty$$

• Horizontales: No hay ya que

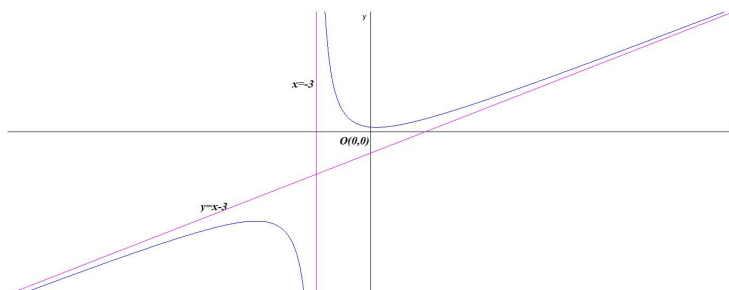
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{3 + x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{3 + x} = +\infty$$

• Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{3x + x^2} = 1$$

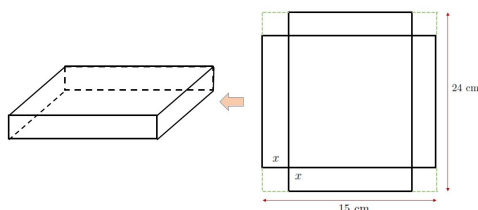
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{3 + x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x}{3 + x} = -3$$

$$y = x - 3$$



Problema 3.13.2 Se desea construir una caja sin tapa superior. Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas. Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo.

Solución:



$$V(x) = (15 - 2x)(24 - 2x)x = 4x^3 - 78x^2 + 360x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 156x + 360 = 0 \implies x = 3, \quad x = 10$$

$$V''(x) = 24x - 156 \implies \begin{cases} V''(3) = -84 < 0 \implies x = 3 \text{ es un máximo} \\ V''(10) = 84 > 0 \implies x = 10 \text{ es un mínimo} \end{cases}$$

El volumen es máximo cuando el cuadrado que se recorta mide 3 cm de lado, por lo que las dimensiones de la caja son 9 cm de ancho por 18 cm de largo y 3 cm de alto.

El volumen máximo será $V(3) = 486 \text{ cm}^3$.

3.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.13.3 Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{2x - 4} & \text{si } x \leq 0 \\ 10x^2 + x + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$. Dar las expresiones de la función $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$.

Solución:

- Continuidad en $\mathbb{R} - \{0\}$: La función es composición de funciones continuas (polinómicas) El denominador no se anula en la rama $x \leq 0$ y en la otra rama no hay denominador, luego la

función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Continuidad en $x = 0$:

$$f(0) = -\frac{a}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + a}{2x - 4} = -\frac{a}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (10x^2 + x + b) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \implies -\frac{a}{4} = b \implies a + 4b = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x - a}{2(x-2)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 20x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$: La función es composición de funciones continuas y derivables (polinómicas). El denominador no se anula en la rama $x \leq 0$ y en la otra rama no hay denominador, luego la función es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Derivable en $x = 0$:

$$f'(0^-) = -\frac{a}{8} \text{ y } f'(0^+) = 1. f'(0^-) = f'(0^+) \implies -\frac{a}{8} = 1 \implies a = -8$$

f continua y derivable en $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a + 4b = 0 \\ a = -8 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -8 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 8}{2x - 4} & \text{si } x \leq 0 \\ 10x^2 + x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ y } f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 8}{2(x-2)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 20x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

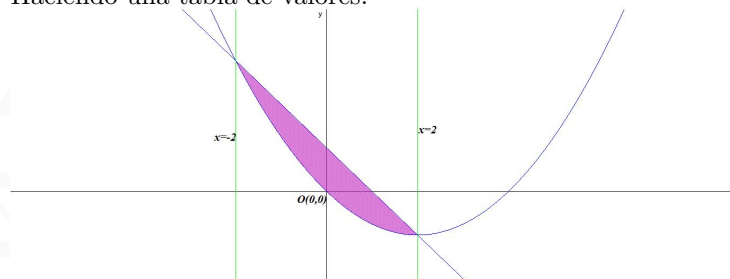
Problema 3.13.4 Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = 4 - 4x$

- Esbozar el gráfico del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.
- Determinar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

- Calculamos los puntos de corte de las dos gráficas: $f(x) = g(x) \implies x^2 - 4x = 4 - 4x \implies x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$

Haciendo una tabla de valores:



- $S = |S_1|$ donde:

$$S_1 = \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^2 = -\frac{32}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{32}{3}$$

3.14. La Rioja

3.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.14.1 Sea la función $f(x) = xe^{1/x^3}$

Determinar el dominio y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

Solución:

☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

☛ Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1/x^3} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x^3} = [0 \cdot (+\infty)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x^3}}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3e^{1/x^3}}{-1/x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3e^{1/x^3}}{x^2} = \left[\frac{3e^{+\infty}}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1/x^3} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1/x^3} = +\infty$$

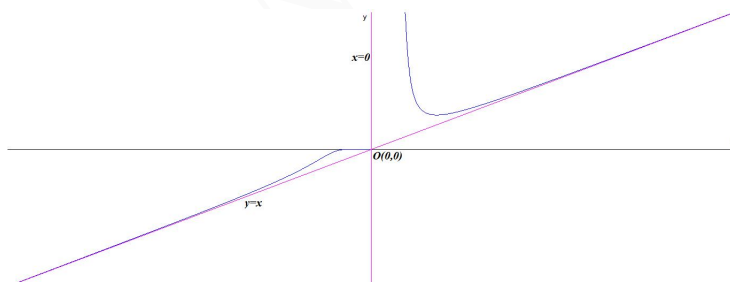
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{1/x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{1/x^3} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x^3} - 1) =$$

$$[\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^3} - 1}{1/x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^{1/x^3}}{x^2} = \frac{3}{\infty} = 0$$

$$y = x$$



Problema 3.14.2 Sea f una función continua cuya derivada viene dada de la siguiente manera:

$$f'(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Hallar la expresión de la función f y las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en el punto $x = 0$.

Solución:

$$\text{Si } x < 0 \implies f(x) = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + C_1$$

$$\text{Si } x \geq 0 \implies f(x) = \int e^x dx = e^x + C_2$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + C_1 & \text{si } x < 0 \\ e^x + C_2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como f tiene que ser continua: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1 \right) = C_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x + C_2 = 1 + C_2 \implies f$ es continua si $C_1 = 1 + C_2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + 1 + C_2 & \text{si } x < 0 \\ e^x + C_2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Comprobamos la derivabilidad en $x = 0$, tenemos $f'(0^-) = 1 = f'(0^+) \implies f$ es derivable en $x = 0$ y es $m = f'(0) = 1$. Por otro lado $b = f(0) = 1 + C_2$.

$$y - f(0) = m(x - 0) \implies y - 1 - C_2 = x \implies y = x + 1 + C_2 \implies y = x + C_1$$

Problema 3.14.3 Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

Solución:

$$F(x) = \int \frac{x+3}{(x+2)^2} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x+3}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2) + B}{(x+2)^2} \\ x+3 = A(x+2) + B \\ x = -2 \implies 1 = B \\ x = -3 \implies 0 = -A + B \implies A = B = 1 \\ \frac{x+3}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} \end{array} \right] = \int \frac{1}{x+2} dx +$$

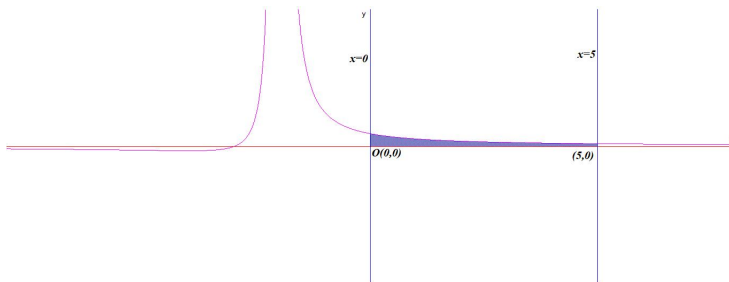
$$\int \frac{1}{(x+2)^2} dx = \ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + C$$

Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con el eje de abscisas $f(x) = 0 \implies x+3 = 0 \implies x = -3$ y la función no corta este eje en el intervalo $[0, 5]$.

$$S_1 = \int_0^5 \frac{x+3}{(x+2)^2} dx = F(5) - F(0) = \left(\ln 7 - \frac{1}{7} \right) - \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) =$$

$$\ln \left(\frac{7}{2} \right) + \frac{5}{14} \simeq 1,61$$

$$S = |S_1| = \ln \left(\frac{7}{2} \right) + \frac{5}{14} \simeq 1,61 \text{ u}^2$$



3.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.14.4 Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{2 - e^{-x}}$

Determinar el dominio, extremos relativos y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

Solución:

$$\bullet \quad 2 - e^{-x} = 0 \implies e^{-x} = 2 \implies -x \ln e = \ln 2 \implies x = -\ln 2 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-\ln 2\}$$

• Asíntotas:

- Verticales: $x = -\ln 2$

$$\lim_{x \rightarrow (-\ln 2)^-} \frac{x^2}{2 - e^{-x}} = \left[\frac{(-\ln 2)^2}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\ln 2)^+} \frac{x^2}{2 - e^{-x}} = \left[\frac{(-\ln 2)^2}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2 - e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{-\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{-x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-e^{-x}} =$$

$$\left[\frac{2}{\infty} \right] = 0 \implies y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2 - e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{2} \right] = +\infty \implies \text{no hay}$$

- Oblicuas:

Cuando $x \rightarrow -\infty$ no hay por haber horizontales.

Cuando $x \rightarrow \infty$: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x - xe^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2 - e^{-x} + xe^{-x}} =$$

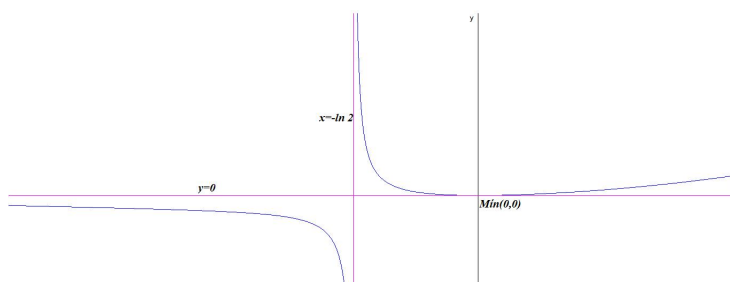
$$\left[\frac{\infty}{2} \right] = +\infty \implies \text{no hay}$$

$$\text{Nota: } \lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0$$

• $f'(x) = \frac{x(4 - 2e^{-x} - xe^{-x})}{(2 - e^{-x})^2} = 0 \implies x = 0$ y $4 - 2e^{-x} - xe^{-x} = 0 \implies -e^{-x}(2 - x) = -4 \implies 4e^x = 2 - x$ no tiene solución.

	$(-\infty, -\ln 2)$	$(-\ln 2, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\ln 2) \cup (-\ln 2, 0)$ y creciente en el $(0, \infty)$.
Presenta un mínimo relativo en el punto $(0, 0)$.



Problema 3.14.5 Sea la función

$$f(x) = \cos x$$

Hallar el área de la superficie encerrada por la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = -\frac{\pi}{4}$, la gráfica de f y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

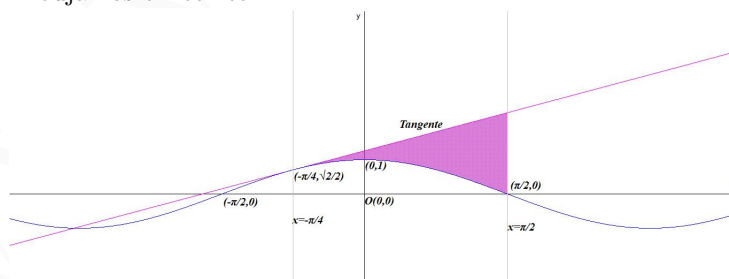
Calculamos la recta tangente:

$$b = f(a) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) = -\sin x \implies m = f'(a) = f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y - b = m(x - a) \implies y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \implies y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dibujamos el recinto:



En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ sólo hay un punto de corte, el de tangencia, entre ambas gráficas.

Cálculo del área: $S = |S_1| = \left| \int (f(x) - g(x)) dx \right|$

$$S_1 = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) dx = \sin x - \frac{x^2\sqrt{2}}{4} - \frac{x\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{x\sqrt{2}}{2} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$-\frac{9\sqrt{2}\pi^2}{64} - \frac{3\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \simeq -1,921779876$$

$$S = |S_1| = 1,9218 \text{ u}^2$$

Problema 3.14.6 Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\tan x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x} \right)^x$

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\tan x} = [\infty^0] = \lambda \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\tan x} = \ln \lambda \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln \left(\frac{1}{x^2} \right) = \ln \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln \left(\frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x (\ln 1 - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x (-2 \ln x) = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln x =$$

$$-2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\tan x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] \stackrel{L'H}{=} -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1/\cos^2 x}{\tan^2 x}} =$$

$$-2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1/\cos^2 x}{\sin^2 x / \cos^2 x}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0$$

$$-2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0$$

$$\ln \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\tan x} = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x} \right)^x = [1^\infty] = e^\lambda$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{4x-1}{4x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{-x}{4x} \right) = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x} \right)^x = e^{-\frac{1}{4}}$$

3.15. Madrid

3.15.1. Modelo de 2021

Problema 3.15.1 Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{si } x \leq 1, \ x \neq -1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Estudie la continuidad de f en $x = 1$.
- b) Halle las asíntotas de f , si existen.
- c) Determine el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. Escriba la ecuación de dicha recta tangente.

Solución:

- a) Continuidad en $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x+1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1/x}{1} = 1$ y $f(1) = 1 \Rightarrow f$ es continua en $x = 1 \Rightarrow f$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

- b) Asíntotas:

En la rama $x \leq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x+1}$

- Verticales:

En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x+1} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x+1} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

En la rama $x > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

- Verticales: No hay, ya que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

- Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

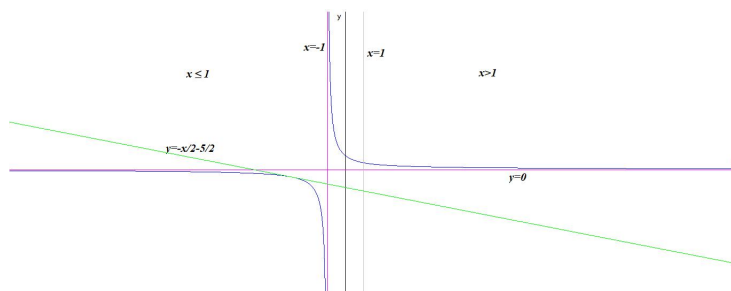
c) $f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x \leq 1, x \neq -1 \\ -\frac{x \ln x - x + 1}{x(x-1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Como $x_0 < 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow$

$$f'(x_0) = -\frac{2}{(x_0+1)^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = -3 \text{ y } x_0 = 1, \text{ esta última no es válida ya que } x_0 < 1.$$

En $x_0 = -3 \Rightarrow f(-3) = \frac{2}{-3+1} = -1 \Rightarrow (-3, -1)$ es el punto de tangencia. Luego la ecuación de la recta tangente es

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x + 3) \Rightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$$



Problema 3.15.2 Dada la función $f(x) = x^6 - 4x^4$, se pide:

- Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Encontrar sus máximos y mínimos relativos, y determinar si son o no absolutos.
- Hallar el área de la región acotada limitada por el eje $y = 0$ y la gráfica de f .

Solución:

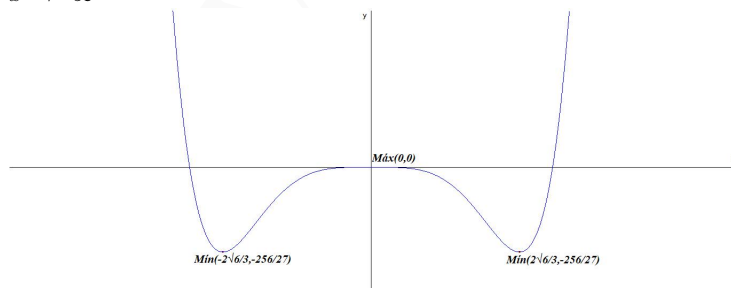
a) $f'(x) = 6x^5 - 16x^3 = 2x^3(3x^2 - 8) = 0 \implies x = 0$ y $x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

	$\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right)$	$\left(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$, y decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

- b) Tiene un mínimos relativos en los puntos de abscisa $x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$ y un máximo en el punto de abscisa $x = 0$.

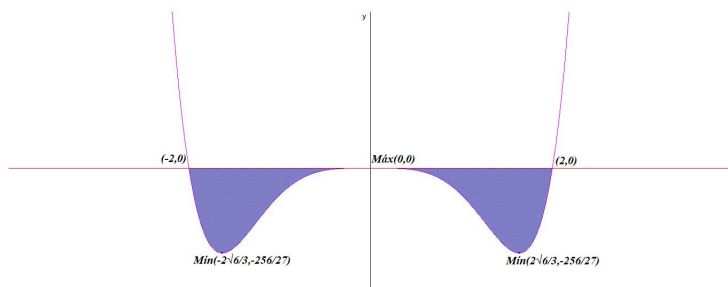
Tenemos que f es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser un polinomio y tenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, luego el máximo es relativo. Por el contrario, los mínimos si son relativos.



- c) $f(x) = x^6 - 4x^4 = x^4(x^2 - 4) = 0 \implies x = 0$ y $x = \pm 2$. Tenemos dos recintos $S_1 : [-2, 0]$ y $S_2 : [0, 2]$ y como la función es par estas dos áreas son iguales.

$$S_1 = \int_{-2}^0 (x^6 - 4x^4) dx = \left[\frac{x^7}{7} - \frac{4x^5}{5} \right]_{-2}^0 = -\frac{2^8}{35}$$

$$S = 2|S_1| = \frac{2^9}{35} = \frac{512}{35} u^2$$



3.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.15.3 Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

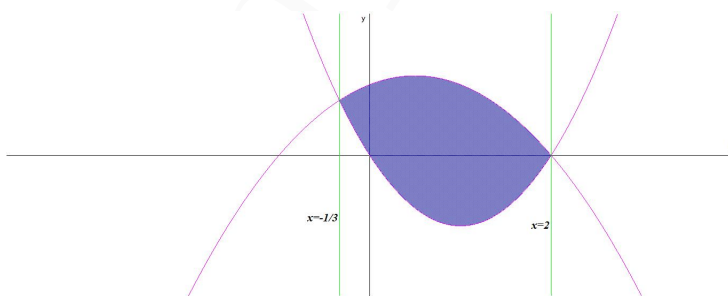
$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x$$

Solución:

$$f(x) = g(x) \implies 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x \implies -3x^2 + 5x + 2 = 0 \implies x = -\frac{1}{3}, \quad x = 2$$

$$S_1 = \int_{-1/3}^2 [2 + x - x^2 - (2x^2 - 4x)] dx = \int_{-1/3}^2 (-3x^2 + 5x + 2) dx =$$

$$\left[-x^3 + \frac{5x^2}{2} + 2x \right]_{-1/3}^2 = \frac{343}{54} \implies S = |S_1| = \frac{343}{54} u^2$$



Problema 3.15.4 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
- Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$ Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.
- Calcule $\int_{-\pi/2}^1 f(x) dx$.

Solución:

a) **Continuidad en $x = 0$:**

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \implies f \text{ continua en } x = 0$$

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ e^x(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases} \implies f \text{ derivable en } x = 0$$

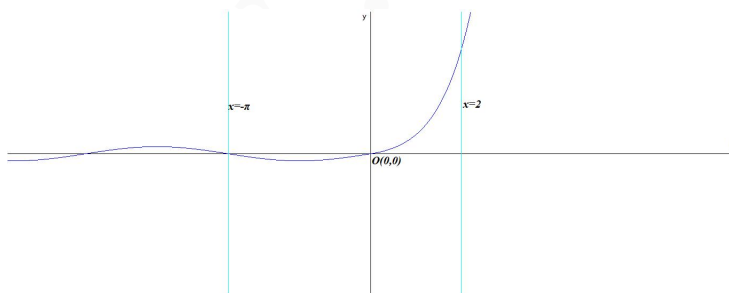
b) $\cos x = 0 \implies x = -\frac{\pi}{2}$ en el intervalo $(-\pi, 0)$.
 $e^x(x+1) = 0 \implies x = -1 \notin [0, 2]$ Luego:

	$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$(0, 2)$
$f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ y creciente en $(-\frac{\pi}{2}, 2)$, con un mínimo relativo en $(-\frac{\pi}{2}, -1)$.

En el intervalo $[0, 1]$ es $f(x) = xe^x$. Sea la función $g(x) = xe^x - 2$ en este intervalo y tenemos:
 $g(0) = -2 < 0$ y $g(1) = e - 2 > 0$, como g es continua en el intervalo podemos aplicar el teorema de Bolzano que nos afirma que $\exists x_0 \in (0, 1)$ tal que $g(x_0) = 0 \implies x_0 e^{x_0} - 2 = 0 \implies x_0 e^{x_0} = 2 \implies f(x_0) = 2$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \int xe^x dx &= \left[\begin{matrix} u = x \implies du = dx \\ dv = e^x dx \implies v = e^x \end{matrix} \right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx + \int_0^1 xe^x dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + [e^x(x-1)]_0^1 = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

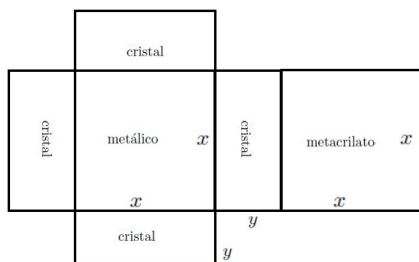


3.15.3. Convocatoria Ordinaria-Coincidente junio de 2021

Problema 3.15.5 Se quiere construir un acuario con forma de paralelepípedo recto, con tapa y base cuadradas. La tapa es de metacrilato, la base es de un material metálico y las caras verticales, de cristal. El metacrilato tiene un precio de 15 euros/m², el material metálico, de 90 euros/m², y el cristal, de 25 euros/m².

- a) Exprese la altura del acuario en función del lado de la base, x , y del coste total del material utilizado, C .
- b) Con un presupuesto de 1260 euros, ¿cuál es el volumen máximo del acuario que se puede construir con estas características?

Solución:



$$a) C = 15x^2 + 90x^2 + 4 \cdot 25xy = 105x^2 + 100xy \Rightarrow y = \frac{C - 105x^2}{100x}$$

$$b) V(x, y) = x^2y \Rightarrow V(x) = x^2 \frac{1260 - 105x^2}{100x} = \frac{1260x - 105x^3}{100}$$

$$V'(x) = -\frac{63(x^2 - 4)}{20} = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ (el valor } x = -2 \text{ no es relevante)}$$

$$V''(x) = -\frac{63x}{10} \Rightarrow V''(2) = -\frac{126}{10} < 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es un máximo.}$$

Luego las dimensiones de los cuadrados son de 2 m de lado y las caras verticales serían de 2 m por $y = \frac{1260 - 105 \cdot 4}{100 \cdot 2} = \frac{21}{5}$ m.

$$\text{El volumen máximo es } V(2) = \frac{1260 \cdot 2 - 105 \cdot 2^3}{100} = \frac{84}{5} \simeq 16,8 \text{ m}^3.$$

Problema 3.15.6 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^2}$.

- a) Estudie su continuidad y derivabilidad en $[-2, 4]$.
- b) Analice crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos absolutos de f en $[-2, 4]$.
- c) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ es continua en $x = 2$ y si tiene recta tangente en dicho punto.

Solución:

- a) La función es siempre positiva y su dominio es toda la recta real. Se trata de un polinomio y, la raíz que lo contiene es impar, luego es continua en todo el dominio. El único punto a estudiar sería en $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 0 \Rightarrow f \text{ es continua en } [-2, 4]$$

La función es derivable en todos los puntos salvo en $x = 2$ donde lo estudiaremos:

$$f'(x) = \frac{2}{5 \sqrt[5]{(x-2)^3}} \Rightarrow f'(2^+) = \infty \quad f'(2^-) = -\infty$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$ en nuestro caso la función es derivable en $[-2, 2) \cup (2, 4]$.

- b) $f'(x) < 0$ en el intervalo $[-2, 2)$ y, por tanto, decreciente. $f'(x) > 0$ en el intervalo $(2, 4]$ y, por tanto, creciente. No tiene máximos relativos.
Comprobamos los valores de la función en $x = -2 \Rightarrow f(-2) = \sqrt[5]{16}$ y en $x = 4 \Rightarrow f(4) = \sqrt[5]{4}$, luego hay un máximo absoluto en $(-2, \sqrt[5]{16})$ y un mínimo relativo y absoluto en $(2, 0)$.
- c) La función no es derivable en $x = 2 \Rightarrow$ no existe recta tangente a f en $x = 2$.

3.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.15.7 Se pide:

- a) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}$

a.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin \frac{1}{x}} \right)$

(Indicación: use el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ donde sea necesario).

- b) Calcule las siguientes integrales:

b.1 $\int \frac{x}{x^2-1} dx$

b.2 $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

Solución:

a) a.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x^3}{x-2x^2-\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-12x}{-4+\sin x} = -\frac{1}{2}$

a.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin \frac{1}{x}} \right) = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} t \left(3t - \frac{2}{\sin t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} t \left(\frac{3t \sin t - 2}{\sin t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2 \sin t - 2t}{\sin t} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{6t \sin t + 3t^2 \cos t - 2}{\cos t} = -2$

b) b.1 $\int \frac{x}{x^2-1} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right] = \int \frac{x}{t} \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C$

b.2 $\int x^2 e^{-x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] =$

$$-x^2 e^{-x} + 2 \left[-x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right] = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) \Big|_0^1 = 2 - \frac{5}{e} \simeq 0,161$$

Problema 3.15.8 Sea la función

$$f(x) = x^3 - |x| + 2$$

- Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
- Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.
- Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f , el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 - x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) **Continuidad en $x = 0$:**

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + x + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - x + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \implies f \text{ continua en } x = 0$$

Luego f es continua en $\mathbb{R}$

- Derivabilidad en $x = 0$:**

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = -1 \end{cases} \implies$$

f no es derivable en $x = 0$

Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

- b) En la rama $x < 0 \implies f'(x) > 0 \implies$ no hay extremos en la rama y la función es siempre creciente. En el intervalo $(-\infty, 0)$.

En la rama $x \geq 0 \implies f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ la solución negativa no es válida por estar fuera de la rama. Para saber qué tipo de extremo es recurrimos a la segunda derivada: $f''(x) = 6x \implies f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0 \implies x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ es un mínimo relativo.

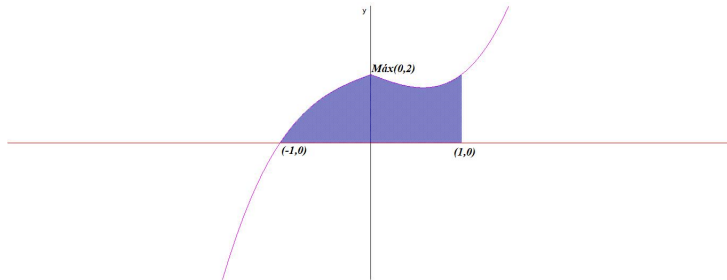
En $x = 0$ la función pasa de crecer a decrecer y además es continua, por lo que en $x = 0$ hay un máximo relativo.

- c) Hay dos recintos de integración $[-1, 0]$ y $[0, 1]$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 = \frac{5}{4}$$

$$S_2 = \int_0^1 (x^3 - x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{7}{4}$$

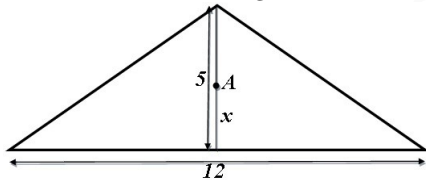
$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3 \text{ u}^2$$



3.16. Murcia

3.16.1. Modelo de 2021

Problema 3.16.1 Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



- Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$.
- Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.
- Calcule dicha cantidad mínima.

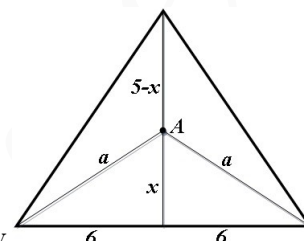
Solución:

- a) La función suma de distancia de A a los vértices es:

$f(x) = 2a + 5 - x = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$ según se deduce del dibujo.

b) $f'(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 36}}{\sqrt{x^2 + 36}} = 0 \implies x = 2\sqrt{3}$

	$(0, 2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗



La función es decreciente en el intervalo $(0, 2\sqrt{3})$ y creciente en el intervalo $(2\sqrt{3}, \infty)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(2\sqrt{3}, 5 + 6\sqrt{3}) = (3, 46; 15, 39)$.

c) $f(2\sqrt{3}) = 5 + 6\sqrt{3} \simeq 15,39$ cm

Problema 3.16.2 Se pide:

- a) Calcule la integral indefinida $\int x^2 \cos x \, dx$
- b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX , las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

Solución:

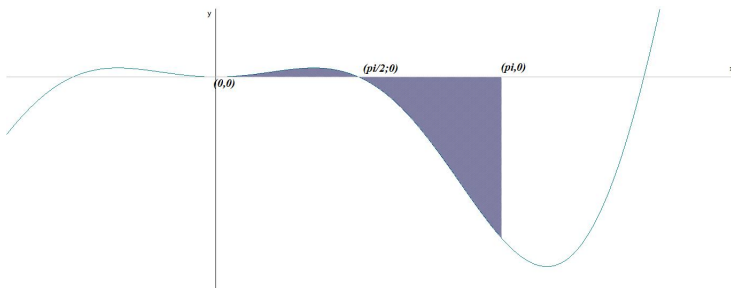
a) $\int x^2 \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \implies du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \implies v = \sin x \end{array} \right] = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx =$
 $\left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \sin x dx \implies v = -\cos x \end{array} \right] = x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x \, dx \right) = x^2 \sin x + 2x \cos x -$
 $2 \sin x + C = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C$

- b) La función $f(x) = x^2 \cos x = 0 \implies x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$. Uno de los puntos de corte de la función f con el eje OX se encuentra dentro del intervalo de integración, luego habrá dos áreas a calcular, una S_1 en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y otra S_2 en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Sea $F(x) = \int x^2 \cos x \, dx = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x$ y tenemos:

$$S_1 = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$S_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} x^2 \cos x \, dx = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} - 2\pi + 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{\pi^2}{4} - 2 + \frac{\pi^2}{4} + 2\pi - 2 = \frac{\pi^2 + 4\pi - 8}{2} \simeq 7,22 \, u^2$$



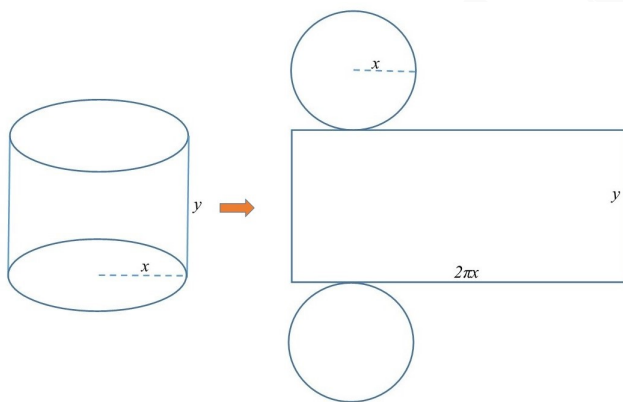
3.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.16.3 En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior y superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2 .

- Si denotamos por x el radio de las tapas y por y la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por $10\pi x^2 + 6\pi xy$
- Si el volumen de la lata es $90\pi \text{ cm}^3$, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

Solución:



- El coste de las dos tapas es $2\pi x^2 \cdot 5 = 10\pi x^2$ € y el coste del rectángulo es $2\pi xy \cdot 3 = 6\pi xy$ €. La función de coste será:

$$c(x, y) = 10\pi x^2 + 6\pi xy$$

- $V(x, y) = \pi x^2 y = 90\pi \implies x^2 y = 90 \implies y = \frac{90}{x^2}$. Sustituyendo en la función de coste:

$$c(x) = 10\pi x^2 + 6\pi x \cdot \frac{90}{x^2} = \frac{10\pi(x^3 + 54)}{x}$$

Para la optimización derivamos:

$$c'(x) = \frac{20\pi(x^3 - 27)}{x^2} = 0 \implies x^3 = 27 \implies x = 3$$

	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$c'(x)$	$-$	$+$
$c(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(0, 3)$ y creciente en el intervalo $(3, \infty)$. La función presenta un mínimo relativo en $x = 3$.

Luego el radio de las tapas es de $x = 3$ cm con una altura $y = \frac{90}{9} = 10$ cm. El coste del material será $c(3) = 270\pi$ €

Problema 3.16.4 En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$
- b) Calcule la integral indefinida $\int x^2 \ln(x) dx$. Determine la primitiva de la función $f(x) = x^2 \ln x$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1, 0)$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

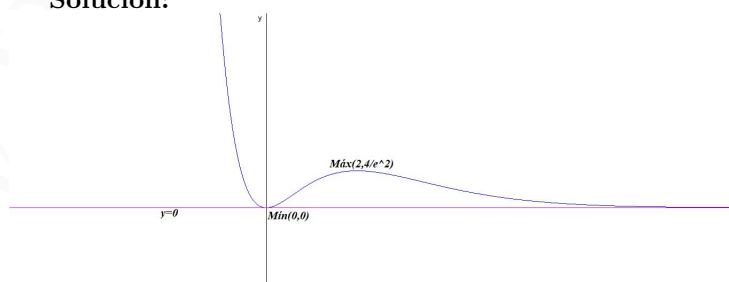
$$\begin{aligned} \text{b) } F(x) &= \int x^2 \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C = \frac{3x^3 \ln x - x^3}{9} + C = \frac{x^3(3 \ln x - 1)}{9} + C \\ F(1) &= 0 \Rightarrow -\frac{1}{9} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{9} \Rightarrow \\ F(x) &= \frac{x^3(3 \ln x - 1)}{9} + \frac{1}{9} = \frac{x^3(3 \ln x - 1) + 1}{9} \end{aligned}$$

3.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.16.5 Dada la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, se pide:

- a) Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Solución:



a) $f'(x) = xe^{-x}(2-x) = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = 2$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y creciente en el intervalo $(0, 2)$.

La función presenta un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo es $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{-x}) = [\infty \cdot \infty] = \infty$

Problema 3.16.6 Se pide:

a) Calcule la integral indefinida $\int x \sin(x^2) dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

b) Determine el menor valor de $a > 0$ para el cual se cumple $\int_0^a x \sin(x^2) dx = 1$.

Solución:

a) $\int x \sin(x^2) dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \implies dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right] = \int x \sin t \frac{dt}{2x} =$
 $\frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$

b) $\int_0^a x \sin(x^2) dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^a = -\frac{1}{2} \cos a^2 + \frac{1}{2} \cos 0 = \frac{1}{2} (1 - \cos a^2) = 1 \implies 1 - \cos a^2 =$
 $2 \implies \cos a^2 = -1 \implies a^2 = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N} \implies a = \pm \sqrt{\pi + 2k\pi} \quad k \in \mathbb{N}.$
 Como $a > 0$ la solución más pequeña y positiva es $a = \sqrt{\pi}$.

3.17. Navarra

3.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.17.1 Sea la función $f(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log[2^{x-1} \sin \frac{\pi(x+2)}{6}]}$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

a) En principio es una potencia de base $x^2 - 3x + 10 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y por tanto en $[1, 3]$. Al ser la base positiva la función es siempre positiva, el problema se daría cuando se tenga $\log 0 = -\infty$

$2^{x-1} \sin \frac{\pi(x+2)}{6} = 0 \xRightarrow{2^{x-1} > 0} \sin \frac{\pi(x+2)}{6} = 0 \Rightarrow \frac{\pi(x+2)}{6} = 0 \Rightarrow x = -2$ o bien $\sin \frac{\pi(x+2)}{6} = \pi \Rightarrow x = 4$ ninguno de estos dos valores pertenecen al intervalo $[1, 3]$ y, por tanto, f es continua en el intervalo $[1, 3]$ como composición de funciones continuas.

b) $f(1) = 1$ y $f(3) = 2$ Como la función f es continua en el intervalo $[1, 3]$ con $f(1) = 1$ y $f(3) = 2$ por el teorema de los valores intermedios $\exists \alpha \in (1, 3)$ tal $f(\alpha) = \frac{3}{2}$ dado que

$$f(1) = 1 \leq f(\alpha) = \frac{3}{2} \leq f(3) = 2$$

Problema 3.17.2 Calcula las asíntotas de esta función y estudia la posición de la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4}$$

Solución:

• Verticales:

• $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{-1}{0^-} \right] = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty$$

• $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{-1}{0^-} \right] = +\infty$$

• Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} = +\infty$$

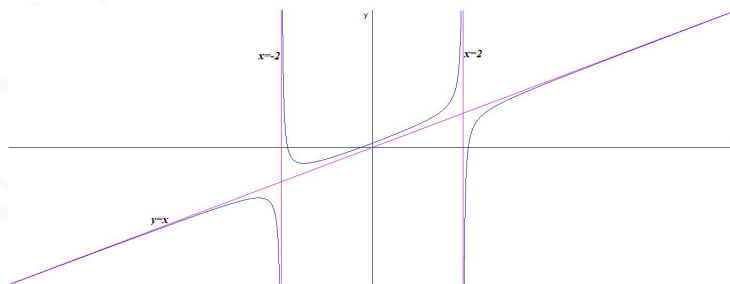
• Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^3 - 4x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} - x \right) = 0 \Rightarrow y = x$$

Para $x = 20 \Rightarrow f(20) = 19,997 \Rightarrow f$ está por debajo de $y = x$.

Para $x = -20 \Rightarrow f(-20) = -20,0025 \Rightarrow f$ está por debajo de $y = x$.



Problema 3.17.3 Sea la función $f(x) = \ln \left[\frac{5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2}}{x^2 - 4x + 6} \right]$

- a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.
- b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{3 \ln 2}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

- a) La función es un logaritmo y para que tenga sentido la expresión que abarca tiene que ser positiva.

El denominador: $x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow$ no tiene solución y $x^2 - 4x + 6 > 0$.

El numerador: $g(x) = 5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2} = 0 \Rightarrow g(1) = 2, g(2) = 8$ y $g(3) = 16$ es siempre positivo y no se anula.

Luego $\frac{5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2}}{x^2 - 4x + 6} > 0$ en el intervalo $[1, 3]$ y la función es continua como composición de funciones continuas.

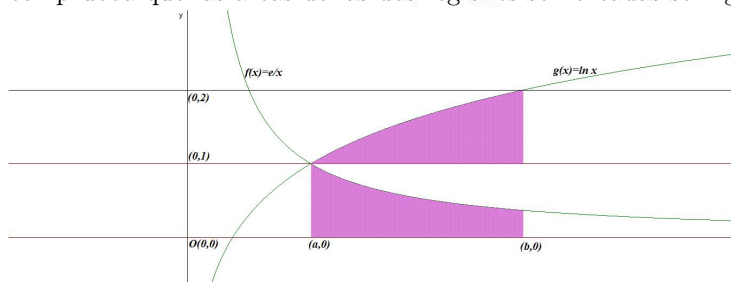
- b) Tenemos $f(x) = \ln \left[\frac{5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2}}{x^2 - 4x + 6} \right] - \ln(x^2 - 4x + 6) \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{5 - \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2}}{5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2}} - \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 6}$$

La función es continua en $[1, 3]$ y derivable en $(1, 3)$, por el teorema del valor medio $\exists \alpha \in (1, 3)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{\ln 16 - \ln 3 - (\ln 2 - \ln 3)}{2} = \frac{3 \ln 2}{2}$$

Problema 3.17.4 Calcula los valores de las abscisas a y b que aparecen en el gráfico, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales:



Solución:

$$f(a) = \frac{a}{e^a} = g(a) = \ln a = 1 \Rightarrow a = e$$

$$g(b) = \ln b = 2 \Rightarrow b = e^2.$$

$$G(x) = \int (g(x) - 1) dx = \int (\ln x - 1) dx = \int \ln x dx - x =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] = x \ln x - \int dx - x = x \ln x - 2x + C_1$$

$$S_1 = \int_e^{e^2} (g(x) - 1) dx = G(e^2) - G(e) = 0 - (-e) = e$$

$$F(x) = \int \frac{e}{x} dx = e \ln x + C_2$$

$$S_2 = \int_e^{e^2} f(x) dx = F(e^2) - F(e) = 2e - (e) = e$$

Luego $S_1 = S_2$.

3.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.17.5 Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3 + 2x^2} - \sqrt{3x^3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3 + 2x^2} - \sqrt{3x^3}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{3x^3 + 2x^2} + \sqrt{3x^3})}{(\sqrt{3x^3 + 2x^2} - \sqrt{3x^3})(\sqrt{3x^3 + 2x^2} + \sqrt{3x^3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^4 + 2x^3} + \sqrt{3x^4}}{(\sqrt{3x^3 + 2x^2})^2 - (\sqrt{3x^3})^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^4 + 2x^3} + \sqrt{3x^4}}{2x^2} = \\ \left[\frac{\infty}{\infty} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^4} + \sqrt{3x^4}}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2\sqrt{3}}{2x^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} &= [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{-1}{x^2} \right) \cos \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = 1 \end{aligned}$$

Problema 3.17.6 Sea considera la función $f(x) = \log_2 \left[\sin \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \right]$

- Demuestra que la función es continua en el intervalo $[6, 7]$
- Demuestra que existe $\alpha \in (6, 7)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

- la función es composición de funciones continuas, habrá que comprobar que $g(x) = \sin \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} > 0$ en el intervalo $[6, 7]$.
Tenemos $2^{\frac{x-5}{2}} > 0$ y $-1 \leq \sin \frac{\pi(x+1)}{4} \leq 1$.
Vamos a acotar $2^{\frac{x-5}{2}}$ en $[6, 7]$:

$$6 \leq x \leq 7 \implies 6 - 5 \leq x - 5 \leq 7 - 5 \implies \frac{1}{2} \leq \frac{x-5}{2} \leq 1 \implies 2^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 2$$

$$\text{Acotamos } g(x) \text{ (sumando): } -1 + 2^{\frac{1}{2}} \leq \sin \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 3$$

Como $-1 + 2^{\frac{1}{2}} \geq 0 \implies \sin \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} > 0$ en el intervalo $[6, 7]$ y, por tanto, continua en $[6, 7]$.

- b) El teorema de Bolzano: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y cambia de signo en los extremos del intervalo, $\text{signo}(f(a)) \neq \text{signo}(f(b))$. Entonces $\exists \alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

$$\text{Tenemos } f(6) = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \log_2 2 - \log_2 2 = -\frac{1}{2} < 0 \text{ y } f(7) = \log_2 2 = 1 > 0$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano por lo que $\exists \alpha \in (6, 7)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Problema 3.17.7 Se considera la función $f(x) = \sqrt{x + \sin \frac{\pi x}{2}}$

- a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.
b) Demuestra que existen dos valores $\alpha \in (1, 2)$ y $\beta \in (2, 3)$ tal que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

- a) Se trata de composición de funciones continuas, habrá que ver $g(x) = x + \sin \frac{\pi x}{2} \geq 0$ en el intervalo $[1, 3]$.

$$1 \leq x \leq 3 \text{ y } -1 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 1 \implies 0 \leq x + \sin \frac{\pi x}{2} \leq 4$$

Luego $x + \sin \frac{\pi x}{2} \geq 0 \implies f(x)$ es continua en el intervalo $[1, 3]$.

- b) Teorema de Rolle: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) que cumple $f(a) = f(b)$. Entonces $\exists \alpha \in (a, b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$
La función es derivable en $(1, 3)$ y su derivada es:

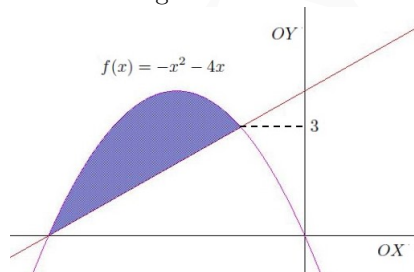
$$f(x) = \sqrt{x + \sin \frac{\pi x}{2}} \implies f'(x) = \frac{1 + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}}{2\sqrt{x + \sin \frac{\pi x}{2}}}$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[1, 2]$ ya que $f(1) = f(2) = \sqrt{2} \implies \exists \alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

Se cumplen las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[2, 3]$ ya que $f(2) = f(3) = \sqrt{2} \implies \exists \alpha \in (2, 3)$ tal que $f'(\beta) = 0$.

Luego $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$

Problema 3.17.8 Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el siguiente gráfico, calcula el área de la región sombreada.



Solución:

$$f(x) = -x^2 - 4x$$

- La función corta al eje de abscisas en $-x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = -4 \Rightarrow (0, 0)$ y $(-4, 0)$
- Hacemos $f(x) = 3 \Rightarrow -x^2 - 4x = 3 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ y $x = -1 \Rightarrow$ la recta corta a la curva en los puntos $A(-4, 0)$ y $B(-1, 3)$ la ecuación de la recta que pasa por estos puntos es

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{AB} = 3(1, 1) \\ P_r = A(-4, 0) \end{cases} \Rightarrow r : \frac{x+4}{1} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = x + 4$$

- Los límites de integración son de $x = -4$ a $x = -1$

$$S = |S_1| = \left| \int_{-4}^{-1} (f(x) - g(x)) dx \right|$$

$$S_1 = \int_{-4}^{-1} (-x^2 - 5x - 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_{-4}^{-1} = \frac{9}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{9}{2} u^2$$

3.18. País Vasco

3.18.1. Modelo de 2020

Problema 3.18.1 Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el punto exterior a su gráfica $P(6, 0)$, encontrar la recta o rectas tangentes a f que pasen por P .

Solución:

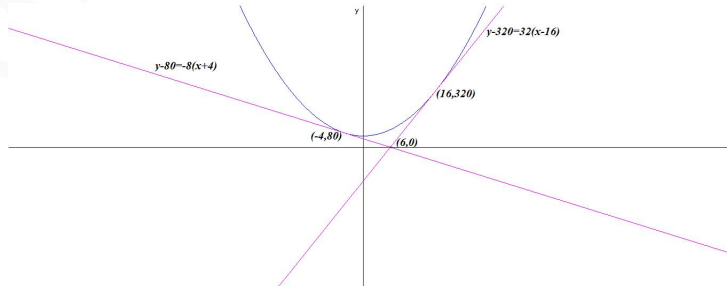
Lo primero que tenemos que encontrar son los puntos de la función en los que su tangente pasa por el punto exterior $P(6, 0)$. Sea $(a, f(a)) = (a, a^2 + 64)$ el punto de tangencia que buscamos, si la recta tangente tiene que pasar por $P(6, 0)$ la pendiente de esta recta será: $m = \frac{a^2 + 64}{a - 6}$. Por otra parte calculamos la pendiente con la derivada de la función $f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(a) = 2a$. Luego

$$\frac{a^2 + 64}{a - 6} = 2a \Rightarrow a^2 - 12a - 64 = 0 \Rightarrow a = -4, a = 16$$

$$P_1(-4, 80), P_2(16, 320)$$

La tangente en $P_1(-4, 80)$ tiene de pendiente $m_1 = -8 \Rightarrow y - 80 = -8(x + 4)$.

La tangente en $P_2(16, 320)$ tiene de pendiente $m_2 = 32 \Rightarrow y - 320 = 32(x - 16)$.



Problema 3.18.2 Calcular $\int x e^{-4x} dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

Solución:

$$\int x e^{-4x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-4x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{4} e^{-4x} \end{array} \right] = -\frac{x e^{-4x}}{4} + \frac{1}{4} \int e^{-4x} dx =$$

$$-\frac{x e^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16} + C = -e^{-4x} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{16} \right) + C = -e^{-4x} \left(\frac{4x+1}{16} \right) + C$$

Problema 3.18.3 Sea f la función $f(x) = x^2 e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de f . Hallar los máximos y mínimos de f .

Solución:

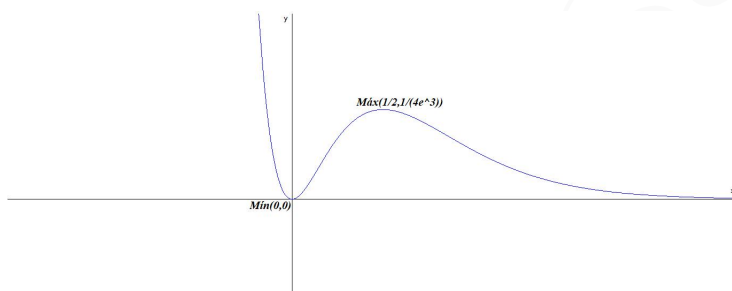
$$f'(x) = 2x e^{-4x} - 4x^2 e^{-4x} = e^{-4x} (2x - 4x^2) = 2x e^{-4x} (1 - 2x)$$

$$f''(x) = -4e^{-4x} (2x - 4x^2) + e^{-4x} (2 - 8x) = 2e^{-4x} (8x^2 - 8x + 1)$$

$$f'(x) = 2x e^{-4x} (1 - 2x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = \frac{1}{2}$$

$$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{en } (0, 0) \text{ hay un mínimo local.}$$

$$f''(1/2) = -\frac{2}{e^2} < 0 \Rightarrow \text{en } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4e^3} \right) \text{ hay un máximo local.}$$

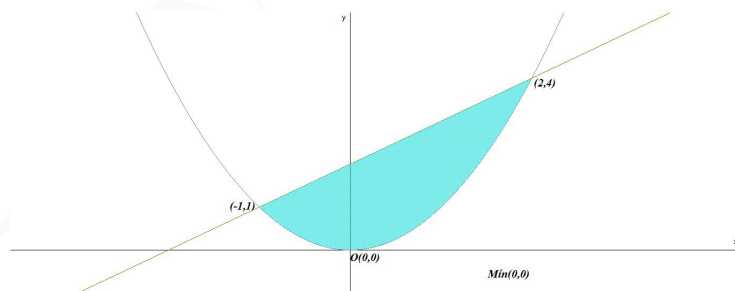


Problema 3.18.4 Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la parábola $y = x^2$. Calcular su área.

Solución:

$$x + 2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$$

$$S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$



3.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 3.18.5 Estudiar los máximos, los mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$. Representar la gráfica de f .

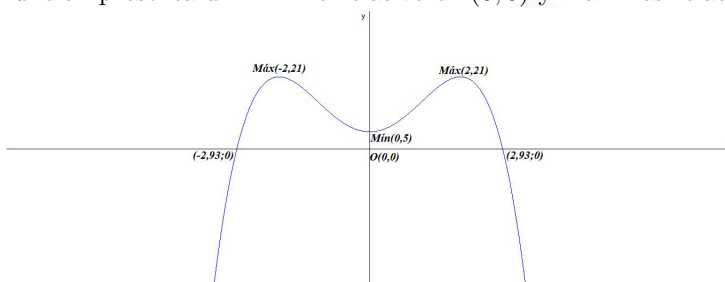
Solución:

Se trata de una función cuyo $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, es PAR (simétrica respecto al eje OY , con un punto de corte en ese eje $(0, 5)$ y con el eje de abscisas $5 + 8x^2 - x^4 = 0 \implies (-2, 93; 0)$ y $(2, 93; 0)$

$$f'(x) = 16x - 4x^3 = 0 \implies x = 0, \quad x = \pm 2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(-2, 0) \cup (2, \infty)$ y creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$. La función presenta un mínimo relativo en $(0, 5)$ y máximos relativos en $(-2, 21)$ y $(2, 21)$



Problema 3.18.6 Sea la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$

- Obtener los valores de los parámetros A , B y C para que la gráfica de f pase por el punto $(0, 1)$ y tenga un mínimo en el punto $(1, 1)$.
- ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos? En caso afirmativo, encontrarlos.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= Ax^3 + Bx^2 + Cx + A \implies f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ \begin{cases} f(0) = 1 \implies A = 1 \\ f(1) = 1 \implies A + B + C + A = 1 \\ f'(1) = 0 \implies 3A + 2B + C = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \\ C = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

$$\text{b) } f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1 \implies f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \implies x = 1 \text{ y } x = \frac{1}{3}$$

Recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x) = 6x - 4 \implies f''(1) = 2 > 0 \implies x = 1 \text{ es un mínimo.}$$

$$f''(x) = 6x - 4 \implies f''\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0 \implies x = \frac{1}{3} \text{ es un máximo.}$$

Problema 3.18.7 Sean las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2 \quad h(x) = \frac{x^2}{8}$$

- a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.
- b) Calcular el área de dicho recinto.

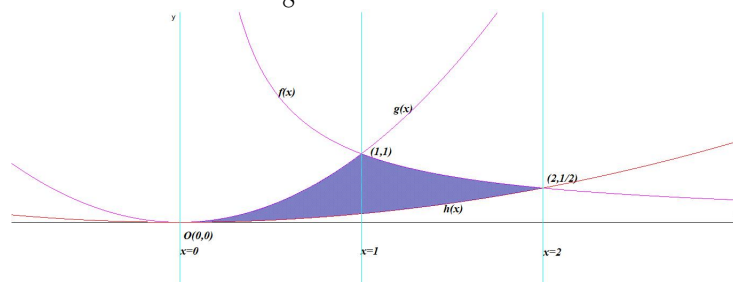
Solución:

- a) Haciendo una tabla de valores y puntos de intersección de las funciones:

$$f(x) = h(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x^2}{8} \Rightarrow x = 2$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = x^2 \Rightarrow x = 1$$

$$g(x) = h(x) \Rightarrow x^2 = \frac{x^2}{8} \Rightarrow x = 0$$



$$b) S_1 = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx = \left[\frac{7x^3}{24} \right]_0^1 = \frac{7}{24}$$

$$S_2 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8} \right) dx = \left[\ln x - \frac{x^3}{24} \right]_1^2 = \ln 2 - \frac{7}{24}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{7}{24} + \ln 2 - \frac{7}{24} = \ln 2$$

Problema 3.18.8 Calcular, explicando los métodos utilizados

$$I = \int (x+2) \sin(2x) dx, \quad J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} dx$$

Solución:

$$I = \int (x+2) \sin(2x) dx = \left[\begin{array}{l} u = x+2 \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin(2x) dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos(2x) \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] =$$

$$-\frac{(x+2) \cos(2x)}{2} + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx = -\frac{(x+2) \cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x+7}{x^2-4x-5} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5) + B(x+1)}{x^2-4x-5} \\ x+7 = A(x-5) + B(x+1) \\ x=5 \Rightarrow 12 = 6B \Rightarrow B=2 \\ x=-1 \Rightarrow 6 = -6A \Rightarrow A=-1 \\ \frac{x+7}{x^2-4x-5} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-5} \end{array} \right] =$$

$$\int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x-5} dx = -\ln|x+1| + 2\ln|x+5| + C$$

3.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 3.18.9 Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{x-4}{x^2-4}$ y calcular sus máximos y sus mínimos.

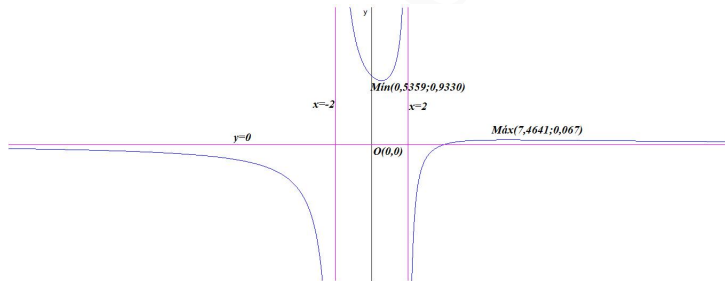
Solución:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

$$f'(x) = -\frac{x^2 - 8x + 4}{(x^2 - 4)^2} = 0 \implies x = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

	$(-\infty, 4 - 2\sqrt{3})$	$(4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$	$(4 + 2\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(4 - 2\sqrt{3}, 2) \cup (2, 4 + 2\sqrt{3})$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 4 - 2\sqrt{3}) \cup (4 + 2\sqrt{3}, \infty)$. La función presenta un mínimo relativo en $\left(4 - 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3} + 2}{4}\right) \simeq (0, 5359; 0, 9330)$ y un máximo relativo en $\left(4 + 2\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3} + 2}{4}\right) \simeq (7, 4641; 0, 067)$



Problema 3.18.10 Sea la función $f(x) = x^4 + Ax^2 + Bx + C$. Obtener los valores de A , B y C para que en el punto de abscisa $x = 0$ la recta tangente a la gráfica de f sea $y = 2x - 1$ y en el punto de abscisa $x = 1$ la recta tangente a la gráfica de f sea horizontal. El extremo situado en el punto de abscisa $x = 1$, ¿es máximo o mínimo?

Solución:

$$\bullet f(x) = x^4 + Ax^2 + Bx + C \implies f'(x) = 4x^3 + 2Ax + B$$

Si $x = 0$ el punto de tangencia lo obtenemos sustituyendo en la recta $y = 0 - 1 \implies (0, -1)$

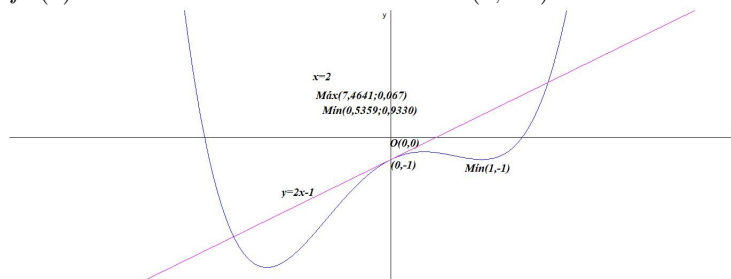
$$\text{y tenemos: } \begin{cases} f(0) = -1 \implies C = -1 \\ m = f'(0) = 2 \implies B = 2 \\ f'(1) = 0 \implies 4 + 2A + B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -3 \\ B = 2 \\ C = -1 \end{cases} \implies$$

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$$

☛ $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Recurrimos a la segunda derivada: $f''(x) = 12x^2 - 6$

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow x = 1$ es un mínimo $(1, -1)$.

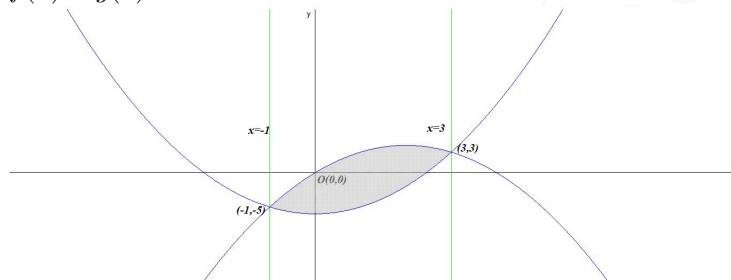


Problema 3.18.11 Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las parábolas $y = 4x - x^2$ e $y = x^2 - 6$ y calcular su área.

Solución:

a) Haciendo una tabla de valores y puntos de intersección de las funciones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4x - x^2 = x^2 - 6 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 2 \Rightarrow x = -1 \text{ y } x = 3$$



b) $S = \left| \int_{-1}^3 (f(x) - g(x)) dx \right|$

$$S_1 = \int_{-1}^3 (4x - x^2 - x^2 + 6) dx = \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx =$$

$$\left[\frac{-2x^3}{3} + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^3 = \frac{64}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{64}{3} \simeq 21,3333 \text{ u}^2$$

Problema 3.18.12 Calcular $\int x \ln(x+1) dx$ explicando el método utilizado.

Solución:

$$\int x \ln(x+1) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right] =$$

$$\frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2} \left[\int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx \right] =$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right] + C = \\ & \frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln(x+1)}{2} + C = \frac{2(x^2 - 1) \ln(x+1) - x^2 + 2x}{4} + C \end{aligned}$$

Capítulo 4

Probabilidad

4.1. Resúmenes teóricos

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Rightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Rightarrow f_r(A) = \frac{f(A)}{N}$

Ley de los grandes números: $\lim_{N \rightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacío** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

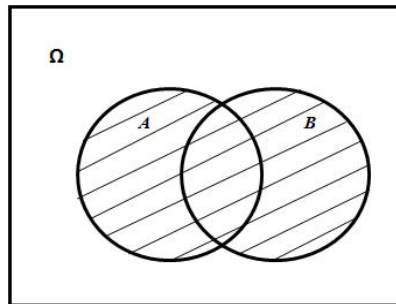
En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

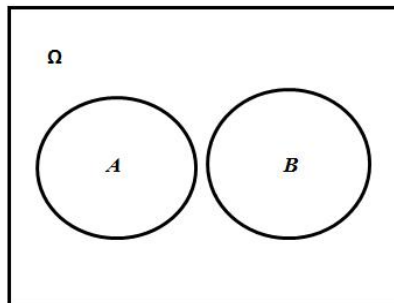
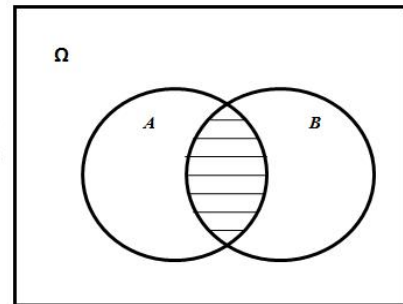
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B : $A \cup B$

Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B : $A \cap B$

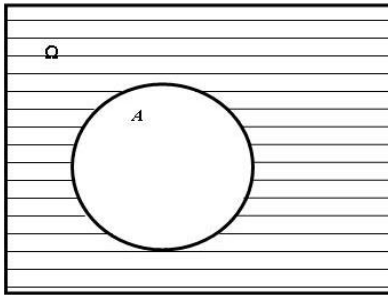


Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \implies P(A \cap B) = 0$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, \dots, 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

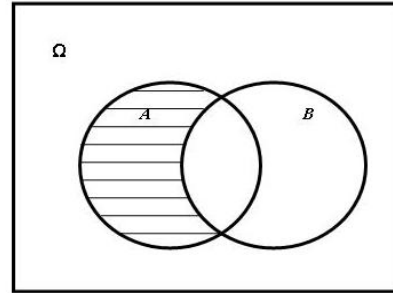
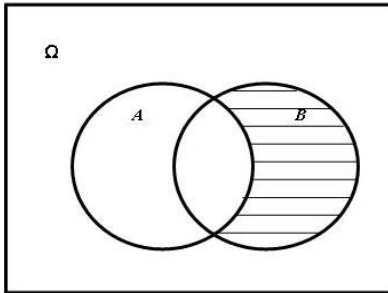
$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



$\bar{A}$ es el suceso contrario o complementario de A :

$$\bar{A} = \Omega - A \implies P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$



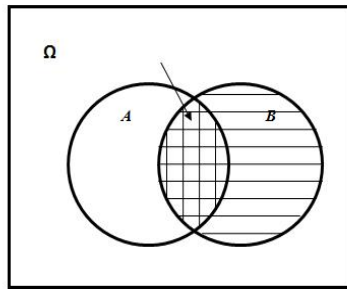
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

Organización por árboles:

Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

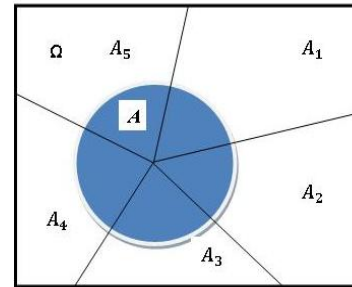
$$P(B|S) = \frac{20}{475}, \quad P(N|M) = \frac{200}{210}, \quad P(B) = \frac{45}{1000}, \quad P(M) = \frac{210}{1000}$$



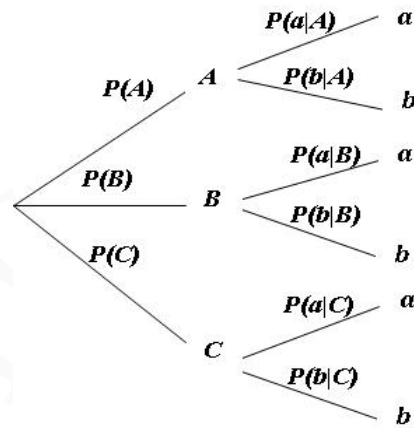
Probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



4.2. Andalucía

No pusieron problemas de probabilidad.

4.3. Aragón

4.3.1. Modelo de 2020

No pusieron problemas de probabilidad.

4.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

No pusieron problemas de probabilidad.

4.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.3.1 En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 correspondían a coches eléctricos.

- Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.
- Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor

Solución: Sean E coche eléctrico, H coche híbrido, S errores de software y $\bar{S}$ sin errores de software.

Hacemos una tabla de contingencia:

	S	$\bar{S}$	Totales
E	12		85
H			145
Totales	43		

 $\Rightarrow$

	S	$\bar{S}$	Totales
E	12	73	85
H	31	114	145
Totales	43	187	230

- $P(H \cap \bar{S}) = \frac{114}{230} = \frac{57}{115} = 0,4957$
- $P(S|H) = \frac{P(H \cap S)}{P(H)} = \frac{31/230}{145/230} = \frac{31}{145} = 0,2138$.

4.4. Asturias

4.4.1. Modelo de 2020

Problema 4.4.1 Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

- Calcula la probabilidad de sacar 5.

- b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?

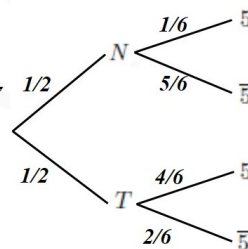
Solución:

Sea N : dado normal y T : el dado trucoado.

Tenemos $P(N) = P(T) = \frac{1}{2}$, $P(5|N) = \frac{1}{6}$ y $P(5|T) = \frac{4}{6}$.

$$a) P(5) = P(5|N)P(N) + P(5|T)P(T) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} = 0,4167$$

$$b) P(T|5) = \frac{P(5|T)P(T)}{P(5)} = \frac{4/6 \cdot 1/2}{5/12} = \frac{2}{5} = 0,8$$



4.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 4.4.2 En un edificio hay dos ascensores. Cada vecino, cuando utiliza el ascensor, lo hace en el primero el 60 % de las veces y en el segundo el 40 %. El porcentaje de fallos del primer ascensor es del 3 % y del segundo es del 8 %.

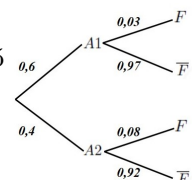
- a) Un vecino usa un ascensor. ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor falle?
- b) Otro día, un vecino coge un ascensor y le falla. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el segundo?

Solución:

Sean $A1$ coge el ascensor 1, $A2$ coge el ascensor 2 y F falla el ascensor.

$$a) P(F) = P(F|A1)P(A1) + P(F|A2)P(A2) = 0,03 \cdot 0,6 + 0,08 \cdot 0,4 = 0,05$$

$$b) P(A2|F) = \frac{P(F|A2)P(A2)}{P(F)} = \frac{0,08 \cdot 0,4}{0,05} = 0,64$$



4.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 4.4.3 Se tienen tres cajas. En la caja A hay 4 bolas negras y 6 bolas rojas. En la caja B , 6 dados negros y 2 dados rojos y en la caja C , 2 dados negros y 4 dados rojos. El suceso consiste en sacar una bola y un dado. En primer lugar se extrae al azar una bola de la caja A . Si es negra, se extrae al azar un dado de la caja B pero, si la bola es roja se extrae al azar un dado de la caja C . Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos sin relación entre ellos:

- a) La probabilidad de que la bola y el dado sean rojos.
- b) La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color.
- c) La probabilidad de que el dado sea rojo.

Solución:

Sean N sale dado negro, R sale dado rojo, B_n ha salido bola negra en la caja A y se saca dado de

la caja B y C_r ha salido bola roja en la caja A y se saca dado de la caja C .

$$a) P(\text{bola roja y dado rojo}) = P(R|C_r)P(C_r) =$$

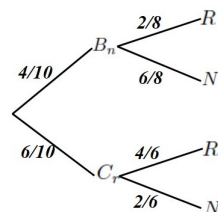
$$\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$b) P(\text{mismo color}) = P(N|B_n)P(B_n) + P(R|C_r)P(C_r) =$$

$$\frac{6}{8} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{7}{10} = 0,7$$

$$c) P(R) = P(R|B_n)P(B_n) + P(R|C_r)P(C_r) =$$

$$\frac{2}{8} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{2} = 0,5$$



4.5. Cantabria

4.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 4.5.1 En ajedrez, la mitad de las partidas se juegan con piezas blancas y la otra mitad con negras. Un determinado jugador gana el 40 % de las partidas oficiales que juega con blancas y el 30 % jugando con negras.

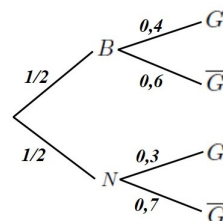
- Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.
- Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.

Solución:

Sean B juega con blancas, N juega con negras, G gana, $\bar{G}$ no gana.

$$a) P(G) = P(G|B)P(B) + P(G|N)P(N) = 0,4 \cdot \frac{1}{2} + 0,3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{20} = 0,35$$

$$b) P(B|G) = \frac{P(G|B)P(B)}{P(G)} = \frac{0,4 \cdot \frac{1}{2}}{0,35} = \frac{4}{7} = 0,5714$$



4.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 4.5.2 Una determinada especie de aves siempre pone dos huevos, pero a la madre sólo le es posible alimentar a un polluelo, el más fuerte de los dos. El polluelo del huevo que primero eclosiona tiene un 60 % de probabilidad de ser el superviviente, mientras que el polluelo del huevo que eclosiona en segundo lugar tiene una probabilidad de sobrevivir del 30 %.

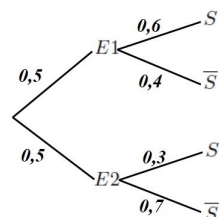
- Calcula la probabilidad de que un polluelo cualquiera sea el superviviente, si no sabemos si eclosionó en primer lugar o en segundo lugar su huevo.
- Calcula la probabilidad de que un ave adulta de dicha especie proceda de un huevo eclosionado en segundo lugar.

Solución:

Sean $E1$ eclosiona el primero, $E2$ eclosiona el segundo, S sobrevive, $\bar{S}$ no sobrevive.

$$\text{a) } P(S) = P(S|E1)P(E1) + P(S|E2)P(E2) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,45$$

$$\text{b) } P(E2|S) = \frac{P(S|E2)P(E2)}{P(S)} = \frac{0,3 \cdot 0,5}{0,45} = 0,3333$$



4.6. Castilla La Mancha

4.6.1. Modelo de 2020

Problema 4.6.1 Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A , el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C . Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a) No salga defectuoso.

b) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C .

Solución:

A : fábrica A , B : fábrica B , C : fábrica C y D : defectuoso.

$P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$, $P(C) = 0,5$, $P(D|A) = 0,04$, $P(D|B) = 0,1$ y $P(D|C) = 0,02$

$P(D \cap A) = P(D|A)P(A) = 0,04 \cdot 0,3 = 0,012$; $P(D \cap B) = P(D|B)P(B) = 0,1 \cdot 0,2$ y $P(D \cap C) = P(D|C)P(C) = 0,02 \cdot 0,5$

	A	B	C	Total
D	0,012	0,02	0,01	
$\bar{D}$				
	0,3	0,2	0,5	

 $\Rightarrow$

	A	B	C	Total
D	0,012	0,02	0,01	0,042
$\bar{D}$	0,288	0,18	0,49	0,958
	0,3	0,2	0,5	

$$\text{a) } P(\bar{D}) = 0,958$$

$$\text{b) } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \bar{C} & C & \text{Total} \\ \hline D & 0,032 & 0,01 & 0,042 \\ \hline \bar{D} & 0,468 & 0,49 & 0,958 \\ \hline & 0,5 & 0,5 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow P(\bar{C}|D) = \frac{P(\bar{C} \cap D)}{P(D)} = \frac{0,032}{0,042} = 0,7619$$

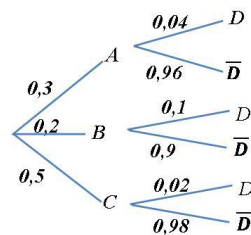
De otra manera:

a)

$$P(\bar{D}) = P(\bar{D}|A)P(A) + P(\bar{D}|B)P(B) + P(\bar{D}|C)P(C) = 0,96 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 + 0,98 \cdot 0,5 = 0,958$$

b)

$$P(\bar{C}|D) = \frac{P(\bar{C} \cap D)}{P(D)} = \frac{0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,1}{1 - 0,958} = 0,7619$$



4.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 4.6.2 Se pide:

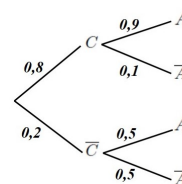
- a) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.
- a.1 ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?
- a.2 Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?
- b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.
- b.1 ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?
- b.2 ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

Solución:

- a) Sean C comparten fotos, $\bar{C}$ no comparten fotos, A comentan la foto y $\bar{A}$ no comentan la foto.

a.1
$$P(A) = P(A|C)P(C) + P(A|\bar{C})P(\bar{C}) = 0,9 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,82$$

a.2
$$P(C|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|C)P(C)}{P(\bar{A})} = \frac{0,1 \cdot 0,8}{1 - 0,82} = 0,4444$$



- b) $B(4; 0,8)$

b.1
$$P(X = 4) = \binom{4}{4} 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 0,4096$$

b.2
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0,8^0 \cdot 0,2^4 = 0,9984$$

4.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 4.6.3 Se pide:

- a) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:
- a.1 ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?
- a.2 Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

b.1 ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

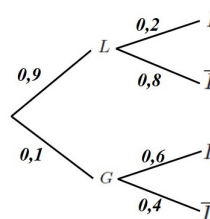
b.2 ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

Solución:

a) Sean L pacientes leves, G pacientes graves, I debe ingresar en el hospital y $\bar{I}$ no debe ingresar en el hospital.

$$\text{a.1 } P(I) = P(I|L)P(L) + P(I|G)P(G) = 0,2 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,1 = 0,24$$

$$\text{a.2 } P(L|I) = \frac{P(I|L)P(L)}{P(I)} = \frac{0,2 \cdot 0,9}{0,24} = 0,75$$



b) $B(8; 0,9)$ ($p = P(L) = 0,9$)

$$\text{b.1 } P(X = 4) = \binom{8}{4} 0,9^4 \cdot 0,1^4 = 0,0045927$$

$$\text{b.2 } P(X \leq 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - P(X = 8) = 1 - \binom{8}{8} 0,9^8 \cdot 0,1^0 = 0,569533$$

4.7. Castilla León

4.7.1. Modelo de 2021

Problema 4.7.1 Una corporación informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados, el bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20 % de los casos legales y gana el 70 % de los casos presentados.

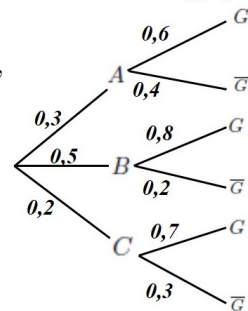
a) Se consideran los sucesos A = "caso adjudicado al bufete A ", B = "caso adjudicado al bufete B ", C = "caso adjudicado al bufete C ", G = "caso ganado". Deduzca del enunciado los valores de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(G|A)$, $P(G|B)$, $P(G|C)$.

b) Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales. Determine la probabilidad de que la empresa gane el caso.

c) Si se ha ganado el caso elegido, calcule la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A .

Solución:

- a) $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$, $P(C) = 0,2$, $P(G|A) = 0,6$,
 $P(G|B) = 0,8$, $P(G|C) = 0,7$.
- b) $P(G) = P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C) =$
 $0,6 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,72$
- c) $P(A|G) = \frac{P(G|A)P(A)}{P(G)} = \frac{0,6 \cdot 0,3}{0,72} = 0,25$



4.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 4.7.2 En un club deportivo, el 55 % de los socios son hombres y el 45 % mujeres. Entre los socios, el 60 % de los hombres practica la natación, así como el 40 % de las mujeres.

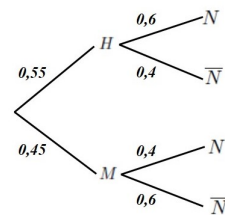
- a) Describir los sucesos y sus probabilidades, y calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación.
- b) Sabiendo que una persona practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Solución:

Sean H hombre, M mujer, N practica natación y $\bar{N}$ no practica natación.

- a) $P(H) = 0,55$, $P(M) = 0,45$, $P(N|H) = 0,6$, $P(\bar{N}|H) = 0,4$,
 $P(N|M) = 0,4$, $P(\bar{N}|M) = 0,6$.
 $P(N) = P(N|H)P(H) + P(N|M)P(M) =$
 $0,6 \cdot 0,55 + 0,4 \cdot 0,45 = 0,51$

- b) $P(M|N) = \frac{P(N|M)P(M)}{P(N)} = \frac{0,4 \cdot 0,45}{0,51} = 0,3529$



4.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 4.7.3 Dentro de una caja hay bolas de varios colores que tienen todas el mismo tamaño y aspecto, siendo algunas de madera y las otras de metacrilato. Concretamente:

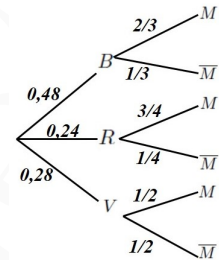
- El 48 % son blancas y entre ellas dos tercios son de madera.
- El 24 % son rojas, y de ellas las tres cuartas partes son de madera.
- El 28 % son verdes, de las cuales la mitad son de madera.

Considerando los sucesos: B = "ser blanca", R = "ser roja", V = "ser verde" y M = "ser de madera"

- a) Indicar cuales son los valores de $P(M|B)$, $P(M|R)$ y $P(M|V)$.
- b) Calcular la probabilidad de que al sacar al azar una de las bolas de la caja, sea de madera.
- c) Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(M|B) &= \frac{2}{3}, P(M|R) = \frac{3}{4} \text{ y } P(M|V) = \frac{1}{2} \\ \text{b) } P(M) &= P(M|B)P(B) + P(M|R)P(R) + P(M|V)P(V) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0,48 + \frac{3}{4} \cdot 0,24 + \frac{1}{2} \cdot 0,28 = 0,64 \\ \text{c) } P(B|M) &= \frac{P(M|B)P(B)}{P(M)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,48}{0,64} = 0,5 \end{aligned}$$



4.8. Cataluña

No pusieron problemas de probabilidad.

4.9. Comunidad Valenciana

No pusieron problemas de probabilidad.

4.10. Extremadura

4.10.1. Modelo de 2021

Problema 4.10.1 En un instituto hay tres grupos de 2º de Bachillerato. El grupo 1 tiene 36 alumnos y han suspendido el 25 %, en el grupo 2 hay 40 alumnos y 8 de los alumnos han suspendido, y en el grupo 3 hay 30 alumnos todos aprobados. Si elegimos un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:

- Haya aprobado y sea del grupo 1.
- Sabiendo que el alumno ha aprobado, que sea del grupo 2.

Solución:

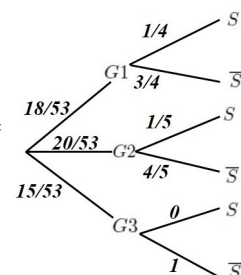
Sean G_1 pertenece al grupo 1, G_2 pertenece al grupo 2, G_3 pertenece al grupo 3 y S suspende.

$$P(G_1) = \frac{36}{106} = \frac{18}{53} = 0,3396, P(G_2) = \frac{40}{106} = \frac{20}{53} = 0,3774 \text{ y } P(G_3) = \frac{30}{106} = \frac{15}{53} = 0,2830$$

$$P(S|G_1) = 0,25 = \frac{1}{4}, P(S|G_2) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} \text{ y } P(\bar{S}|G_3) = 1$$

$$\text{a) } P(G_1 \cap \bar{S}) = P(\bar{S}|G_1)P(G_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{18}{53} = \frac{27}{106} = 0,2547.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\bar{S}) &= P(\bar{S}|G_1)P(G_1) + P(\bar{S}|G_2)P(G_2) + P(\bar{S}|G_3)P(G_3) = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{18}{53} + \frac{4}{5} \cdot \frac{20}{53} + 1 \cdot \frac{15}{53} = \frac{89}{106} = 0,8396 \\ P(G_2|\bar{S}) &= \frac{P(\bar{S}|G_2)P(G_2)}{P(\bar{S})} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{20}{53}}{\frac{89}{106}} = \frac{32}{89} = 0,3596 \end{aligned}$$



4.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 4.10.2 Un mecánico compra ruedas a dos marcas A y B . Compra el 40 % a la marca A que tiene un 3 % de ruedas defectuosas. Y compra el resto a la marca B con un 1 % de defectuosas. El mecánico tiene que cambiar una rueda y elige una al azar.

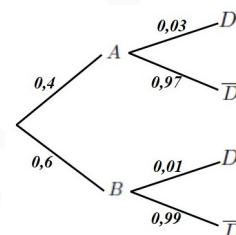
- Calcular la probabilidad de que dicha rueda sea defectuosa.
- Si la rueda es defectuosa, calcular la probabilidad de que sea de la marca A .

Solución:

Sean A marca A , B marca B , D defectuosa y $\bar{D}$ no defectuosa.

$$\text{a) } P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) = 0,03 \cdot 0,4 + 0,01 \cdot 0,6 = 0,018$$

$$\text{b) } P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0,03 \cdot 0,4}{0,018} = 0,6667$$



4.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 4.10.3 En un estudio a 1000 estudiantes europeos, 500 saben hablar inglés, 300 saben hablar español, y 100 de ellos hablan los dos idiomas. Se elige un estudiante al azar del estudio:

- Calcular la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas.
- Calcular la probabilidad de que hable español, sabiendo que habla inglés.

Solución:

Sean I habla inglés, E habla español.

Tenemos $P(I) = \frac{500}{1000} = 0,5$, $P(E) = \frac{300}{1000} = 0,3$ y $P(I \cap E) = \frac{100}{1000} = 0,1$

$$\text{a) } P(I \cup E) = P(I) + P(E) - P(I \cap E) = 0,5 + 0,3 - 0,1 = 0,7$$

$$\text{b) } P(E|I) = \frac{P(I \cap E)}{P(I)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

4.11. Galicia

4.11.1. Modelo de 2021

Problema 4.11.1 El 40 % de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35 % tienen rosas y el 21 % tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

Solución:

Llamamos C al suceso "tiene camelias", R al suceso "tiene rosas"

$P(C) = 0,4$, $P(R) = 0,35$ y $P(C \cap R) = 0,21$

- $P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) = 0,4 + 0,35 - 0,21 = 0,54$
- $P(\overline{C} \cap \overline{R}) = P(\overline{C \cup R}) = 1 - P(C \cup R) = 1 - 0,54 = 0,46$
- $P(C|R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{0,21}{0,35} = 0,6$
- $P(R|C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{0,21}{0,4} = 0,525$
- $P(R \cap \overline{C}) + P(C \cap \overline{R}) = P(C \cup R) - P(C \cap R) = 0,54 - 0,21 = 0,33$

4.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 4.11.2 Se pide:

- a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0,1$ y $P(A \cup B) = 0,8$.
- b) Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,3$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,82$

Solución:

- a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies 0,8 = P(A) + 2P(A) - 0,1 \implies 3P(A) = 0,9 \implies P(A) = 0,3$
- b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,82 \implies P(A \cap B) = 0,18$
 $P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,18 \implies A$ y B son independientes.

4.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 4.11.3 En una determinada ciudad, el 8 % de la población practica yoga, el 20 % tiene mascota y el 3 % practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:

- a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.
- b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

Solución:

Sea Y practica yoga y M tiene mascota.

Tenemos $P(Y) = 0,08$, $P(M) = 0,2$ y $P(Y \cap M) = 0,03$

- a) $P(\overline{Y} \cap M) = P(M) - P(Y \cap M) = 0,2 - 0,03 = 0,17$.
- b) $P(M|Y) = \frac{P(Y \cap M)}{P(Y)} = \frac{0,03}{0,08} = 0,375$

4.12. Islas Baleares

4.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

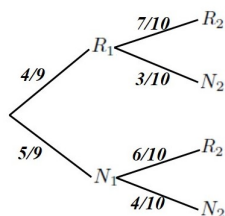
Problema 4.12.1 Se dispone de dos urnas: U_1 y U_2 . La urna U_1 tiene: 4 bolas rojas y 5 bolas negras. La urna U_2 tiene: 6 bolas rojas y 3 bolas negras. Al azar se saca una bola de U_1 y se introduce a U_2 , después se extrae al azar una bola de U_2 .

Calcula la probabilidad de que:

- Salga una bola roja de U_2 .
- La bola extraída de U_1 sea negra, sabiendo que la bola que ha salido de U_2 también ha sido negra.
- Salga al menos una bola roja.

Solución:

Sean R_1 sale roja en U_1 , N_1 sale negra en U_1 , R_2 sale roja en U_2 , N_2 sale negra en U_2 .



$$\text{a) } P(R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) + P(R_2|N_1)P(N_1) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{29}{45} = 0,644$$

$$\text{b) } P(N_1|N_2) = \frac{P(N_2|N_1)P(N_1)}{P(N_2)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}}{1 - \frac{29}{45}} = \frac{5}{8} = 0,625$$

- c) Sacar al menos una bola roja en las dos extracciones es lo contrario de sacar dos negras en la dos extracciones:

$$P(\text{Dos rojas}) = 1 - P(N_1 \cap N_2) = 1 - P(N_2|N_1)P(N_1) =$$

$$1 - \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{7}{9} = 0,778$$

4.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 4.12.2 En una urna hay 12 bolas rojas, 8 bolas blancas y 5 bolas azules. Se realiza el experimento aleatorio de extraer dos bolas, consecutivamente y sin devolución en la urna. Calcula la probabilidad de los siguientes eventos:

- A = "las dos bolas son rojas"
- B = "las dos bolas son del mismo color"
- C = "al menos una bola es roja"
- D = "ninguna de las dos bolas es roja"

Solución:

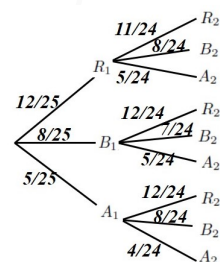
Sean R_1 la primera sale roja, R_2 la segunda sale roja, B_1 la primera sale blanca, B_2 la segunda sale blanca, A_1 la primera sale azul, A_2 la segunda sale azul.

$$a) P(A) = P(R_2|R_1)P(R_1) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = \frac{11}{50} = 0,22$$

$$b) P(B) = P(R_2|R_1)P(R_1) + P(B_2|B_1)P(B_1) + P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \frac{26}{75} = 0,3467$$

$$c) P(C) = P(R_2|R_1)P(R_1) + P(B_2|B_1)P(B_1) + P(A_2|A_1)P(A_1) + P(R_2|B_1)P(B_1) + P(R_2|A_1)P(A_1) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{8}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{12}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{12}{24} = \frac{37}{50} = 0,74$$

$$d) P(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{11}{50} = \frac{39}{50} = 0,78$$

**4.13. Islas Canarias****4.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021**

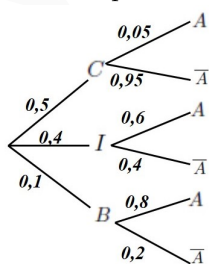
Problema 4.13.1 En un cierto instituto el 50 % de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40 % lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5 % de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60 % y en los desayunos comprados en el bazar del 80 %.

- Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.
- Justificar si es cierto que más de un 30 % de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas.
- Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0,1

Solución:

Sean C lleva el desayuno de casa, I desayuna en la cafetería del instituto, B compra el desayuno en un bazar, A incluye bebidas azucaradas y $\bar{A}$ no incluye bebidas azucaradas.

- Árbol de probabilidades:



- b) $P(A) = P(A|C)P(C) + P(A|I)P(I) + P(A|B)P(B) = 0,05 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,1 = 0,345$
El 34,5% son bebidas azucaradas y, por tanto, es cierta la afirmación: "más de un 30% de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas".

c) $P(C|A) = \frac{P(A|C)P(C)}{P(A)} = \frac{0,05 \cdot 0,5}{0,345} = 0,07246376811 < 0,1$

La afirmación: "la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada" es falsa, es menor de 0,1.

4.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

No se puso problema de probabilidad.

4.14. La Rioja

4.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 4.14.1 Una bolsa contiene 4 bolas negras y 2 blancas. Otra bolsa contiene 2 bolas negras y 6 blancas. Se elige una de las bolsas al azar y se extrae una bola.

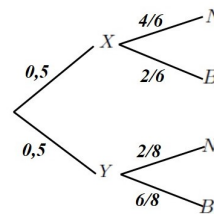
- a) Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca.
b) Sabiendo que la bola es blanca, calcular la probabilidad de que sea de la primera bolsa.

Solución:

Sean X bolsa con 4n y 2b, Y bolsa con 2n y 6b, N sale negra y B sale blanca.

a) $P(B) = P(B|X)P(X) + P(B|Y)P(Y) = \frac{2}{6} \cdot 0,5 + \frac{6}{8} \cdot 0,5 = \frac{13}{24} = 0,5417$

b) $P(X|B) = \frac{P(B|X)P(X)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot 0,5}{\frac{13}{24}} = \frac{4}{13} = 0,3077$



4.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 4.14.2 Sofía va al teatro, cine o de concierto con probabilidades 0,5, 0,2 y 0,3. El 60% de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de cena con los amigos. Lo mismo le ocurre el 10% de las veces que va al teatro y el 90% de las que va de concierto.

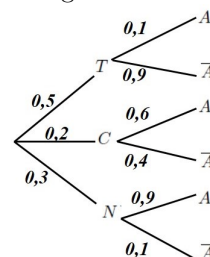
- a) ¿Qué probabilidad hay de que se vaya de cena con los amigos?
b) Si vuelve a casa después del espectáculo, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al cine?

Solución:

Sean T va al teatro, C va al cine, N va al concierto y A va de cena con los amigos.

a) $P(A) = P(A|T)P(T) + P(A|C)P(C) + P(A|N)P(N) = 0,1 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,3 = 0,44$

b) $P(C|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|C)P(C)}{P(\bar{A})} = \frac{0,4 \cdot 0,2}{1 - 0,44} = 0,1429$



4.15. Madrid

4.15.1. Modelo de 2021

Problema 4.15.1 Una prueba diagnóstica para una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da resultado positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada diez mil personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule la probabilidad de:

- Que la prueba dé resultado positivo.
- Que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido positivo.
- Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido negativo.
- Que el resultado de la prueba diagnóstica sea erróneo.

Solución:

E : enfermo, $\bar{E}$: no enfermo, $+$: positivo y $-$: negativo.

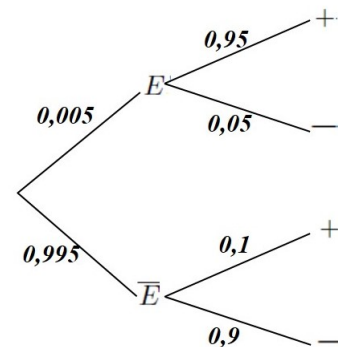
$$P(-|E) = 0,05, P(+|\bar{E}) = 0,10 \text{ y } P(E) = \frac{50}{10000} = 0,005$$

$$\text{a) } P(+) = P(+|E)P(E) + P(+|\bar{E})P(\bar{E}) = 0,95 \cdot 0,005 + 0,10 \cdot 0,995 = 0,10425$$

$$\text{b) } P(E|+) = \frac{P(+|E)P(E)}{P(+)} = \frac{0,95 \cdot 0,005}{0,10425} = 0,0456$$

$$\text{c) } P(\bar{E}|-) = \frac{P(-|\bar{E})P(\bar{E})}{P(-)} = \frac{0,90 \cdot 0,995}{1 - 0,10425} = 0,9997$$

$$\text{d) } P(\text{errónea}) = P(E \cap -) + P(\bar{E} \cap +) = P(-|E)P(E) + P(+|\bar{E})P(\bar{E}) = 0,05 \cdot 0,005 + 0,10 \cdot 0,995 = 0,09975$$



4.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 4.15.2 Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0,16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0,33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0,08.

- ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?
- ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2 " y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?
- ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2 , sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Solución:

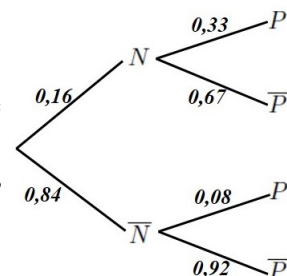
N : supera los niveles de NO_2 y P : supera los niveles partículas.

a) $P(N \cap P) = P(N)P(P|N) = 0,16 \cdot 0,33 = 0,0528$

b) $P(P) = P(P|N)P(N) + P(P|\bar{N})P(\bar{N}) = 0,33 \cdot 0,16 + 0,08 \cdot 0,84 = 0,12$
 $P(N \cup P) = P(N) + P(P) - P(N \cap P) = 0,16 + 0,12 - 0,0528 = 0,2272$

c) $P(N) \cdot P(P) = 0,16 \cdot 0,12 = 0,0192 \neq P(N \cap P) \Rightarrow N$ y P no son independientes.

d) $P(N|\bar{P}) = \frac{P(\bar{P}|N)P(N)}{P(\bar{P})} = \frac{0,67 \cdot 0,16}{1 - 0,12} = 0,122$

**4.15.3. Convocatoria Ordinaria junio-coincidente de 2021**

Problema 4.15.3 En el primer cajón de una mesita de noche hay 6 calcetines rojos y 4 verdes. En el segundo cajón de dicha mesita hay 4 calcetines rojos y 10 verdes. Se extrae aleatoriamente uno de los calcetines del primer cajón para introducirlo en el segundo cajón. Se extraen posteriormente dos calcetines del segundo cajón. Calcule la probabilidad de que estos dos calcetines sean del mismo color.

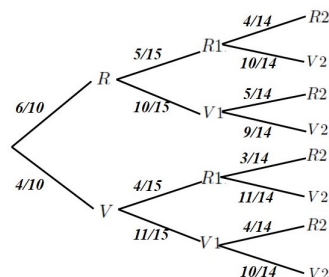
Solución:

R sale rojo en el cajón 1, V sale verde en el cajón 1, $R1$ sale primero rojo en el cajón 2, $V1$ sale primero verde en el cajón 2, $R2$ sale segundo rojo en el cajón 2 y $V2$ sale segundo verde en el cajón 2

$$P(\text{mismo color}) = P(\text{dos rojas}) + P(\text{dos verdes}) =$$

$$P(R \cap R1 \cap R2) + P(V \cap R1 \cap R2) + P(R \cap V1 \cap V2) + P(V \cap V1 \cap V2) =$$

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} + \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{4}{10} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{41}{75} \simeq 0,5467$$

**4.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021**

Problema 4.15.4 En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

Solución:

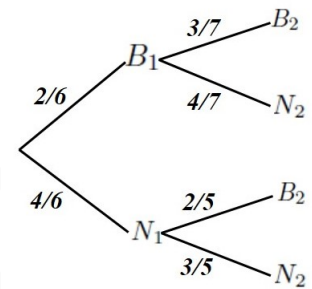
B_1 : sale blanca en la primera extracción, N_1 : sale negra en la primera extracción, B_2 : sale blanca

en la segunda extracción y N_2 : sale negra en la segunda extracción.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{distinto color}) &= P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = \\ &= P(N_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{35} = 0,457 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{43}{105}$$

$$P(N_1|B_2) = \frac{P(B_2|N_1)P(N_1)}{P(B_2)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{43}{105}} = \frac{28}{43} = 0,651$$



4.16. Murcia

4.16.1. Modelo de 2021

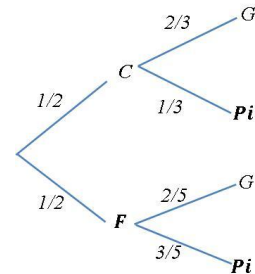
Problema 4.16.1 La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

- Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.
- Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

Solución: Llamamos G al suceso "gana", Pi al suceso "pierde", C al suceso "en casa" y F al suceso "fuera de casa".

$$\text{a) } P(G) = P(G|C)P(C) + P(G|F)P(F) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{15} = 0,533$$

$$\text{b) } P(C|G) = \frac{P(G|C)P(C)}{P(G)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{8} = 0,625$$



4.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 4.16.2 Un estudio revela que el 10% de los hombres son daltónicos y que el 1% de las mujeres son daltónicas. Según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5% de hombres y un 49,5% de mujeres. Determine:

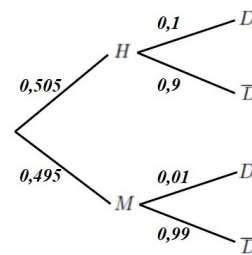
- La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica.
- Si una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- ¿Son independientes los sucesos "ser una persona daltónica" y "ser mujer"?

Solución: Sean H al suceso "hombre", M al suceso "mujer", D al suceso "daltónico" y $\bar{D}$ al suceso "no daltónico".

$$\text{a) } P(D) = P(D|H)P(H) + P(D|M)P(M) = 0,1 \cdot 0,505 + 0,01 \cdot 0,495 = 0,05545$$

$$\text{b) } P(M|D) = \frac{P(D|M)P(M)}{P(D)} = \frac{0,01 \cdot 0,495}{0,05545} = 0,08927$$

$$\text{c) } P(D) \cdot P(M) = 0,05545 \cdot 0,495 = 0,02744775 \text{ y } P(D \cap M) = P(D|M)P(M) = 0,01 \cdot 0,495 = 0,00495 \Rightarrow P(D \cap M) \neq P(D)P(M) \Rightarrow D \text{ y } M \text{ no son independientes.}$$



4.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 4.16.3 Una urna contiene cinco bolas negras, numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:

- La probabilidad de que la bola sea blanca.
- La probabilidad de que bola esté numerada con un número par.
- La probabilidad de que bola esté numerada con un número par, sabiendo que es una bola blanca.
- La probabilidad de que bola sea blanca y esté numerada con un número par.
- La probabilidad de que bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par.

Solución:

Sean B bola blanca y N bola negra.

$$\text{a) } P(B) = \frac{7}{12} = 0,5833$$

$$\text{b) } P(\text{PAR}) = \frac{5}{12} = 0,4167$$

$$\text{c) } P(\text{PAR}|B) = \frac{3}{7} = 0,4286$$

$$\text{d) } P(B \cap \text{PAR}) = \frac{3}{12} = 0,25$$

$$\text{e) } P(B|\text{PAR}) = \frac{P(B \cap \text{PAR})}{P(\text{PAR})} = \frac{3/12}{5/12} = \frac{3}{5} = 0,6$$

4.17. Navarra

No pusieron problemas de probabilidad.

4.18. País Vasco

4.18.1. Modelo de 2020

Problema 4.18.1 Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?
- Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de pertenezca a la primera caja?

Solución:

Llamamos V al suceso "botón rojo", $C1$ al suceso "caja primera", $C2$ al suceso "caja segunda" y $C3$ al suceso "caja tercera":

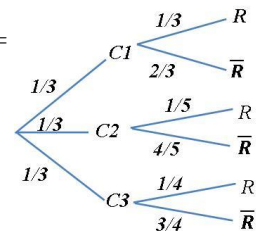
a)

$$P(R) = P(R|C1)P(C1) + P(R|C2)P(C2) + P(R|C3)P(C3) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{47}{180} = 0,261$$

b)

$$P(C1|R) = \frac{P(R|C1)P(C1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} = 0,426$$



4.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 4.18.2 En una farmacia se ha recibido un lote de medicamentos de los tipos A , I y M . El 80 % corresponde al medicamento A , el 10 % al I y el resto al M . En la revisión realizada por la farmacéutica se ha observado que hay medicamentos caducados en los siguientes porcentajes: el 10 % de A , el 20 % de I y el 5 % de M . Se elige una caja de medicamentos al azar. Hallar:

- La probabilidad de coger un medicamento caducado.
- Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A .

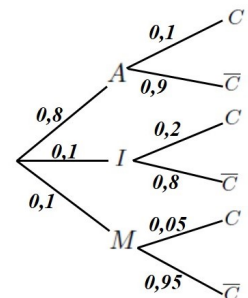
Solución: Sean A al medicamento "A", I al medicamento "I", M al medicamento "M", C al suceso "caducado" y $\bar{C}$ al suceso "no caducado".

a)

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|I)P(I) + P(C|M)P(M) =$$

$$0,1 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,1 = 0,105$$

$$b) P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{0,1 \cdot 0,8}{0,105} = 0,7619$$



4.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 4.18.3 De los 700 estudiantes que tiene un centro escolar se sabe que 500 proceden del barrio donde está ubicado el centro, 575 utilizan el servicio de comedor y 400 son del barrio y utilizan el servicio de comedor. Se escoge un estudiante al azar:

- Si es del barrio, ¿cuál es la probabilidad de que use el comedor?
- Si usa el servicio de comedor, ¿cuál es la probabilidad de que no proceda del barrio?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea del barrio o use el servicio de comedor?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no sea del barrio ni utilice el servicio de comedor?

Solución: Sean B proceden del barrio donde está ubicado el centro, $\bar{B}$ no proceden del barrio donde está ubicado el centro, C utilizan el servicio de comedor y $\bar{C}$ no utilizan el servicio de comedor.

Tenemos $P(B) = \frac{500}{700} = \frac{5}{7}$, $P(C) = \frac{575}{700} = \frac{23}{28}$ y $P(B \cap C) = \frac{400}{700} = \frac{4}{7}$

Lo ordenamos en una tabla de contingencia:

	C	$\bar{C}$	Total
B	$4/7$		$5/7$
$\bar{B}$			
Total	$23/28$		1

 $\Rightarrow$

	C	$\bar{C}$	Total
B	$4/7$	$1/7$	$5/7$
$\bar{B}$	$7/28$	$1/28$	$2/7$
Total	$23/28$	$5/28$	1

$$\text{a) } P(C|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\text{b) } P(\bar{B}|C) = \frac{P(\bar{B} \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{28}}{\frac{23}{28}} = \frac{7}{23} = 0,3043$$

$$\text{c) } P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{5}{7} + \frac{23}{28} - \frac{4}{7} = \frac{27}{28} = 0,9643$$

$$\text{d) } P(\bar{B} \cap \bar{C}) = \frac{1}{28} = 0,0357$$

“www.musat.net”

Capítulo 5

Estadística

5.1. Resúmenes teóricos

Gráficos:

- Variable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i, p(x_i) = p_i, \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i, \text{ Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i^2 - \mu^2$$

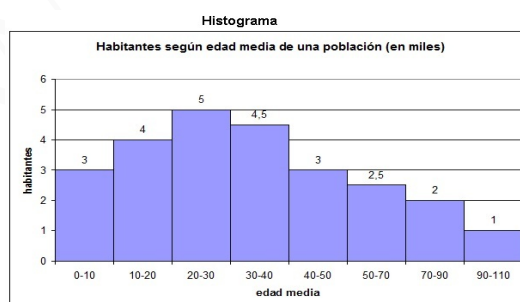
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i, f_i,$$

$$\text{Media} = \bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}, \text{ Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial $B(n, p)$:

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si $B(7, 0, 4) \Rightarrow n = 7, p = 0,4$ y $q = 0,6$:

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3), \text{ ó}$$

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

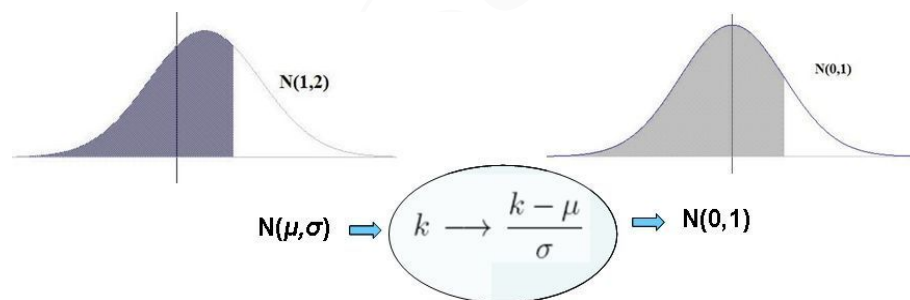
Su Media = $\mu = np$, su Varianza = $\sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica = $\sqrt{\text{Varianza}}$.

Distribución Normal $N(\mu, \sigma)$:

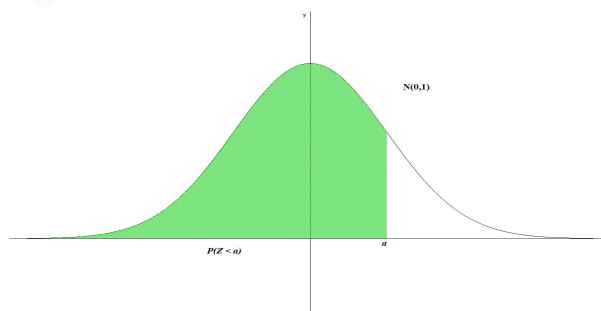
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Tipificación Paso de una normal $N(\mu, \sigma)$ a otra $N(0, 1)$: $k \rightarrow \frac{k - \mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal $N(\mu, \sigma)$ entonces Z seguirá una normal $N(0, 1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$



Cuando una distribución binomial $B(n, p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:

$$P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$$

$$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$$

$$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$$

$$P(X > a) = P(X \geq a + 0,5)$$

$$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5)$$

Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95%: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ (α = **Nivel de significación**) $\Rightarrow \alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$

Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\bar{X}$ de una $N(\mu, \sigma)$ la media $\bar{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Error: $E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\bar{X} - E, \bar{X} + E) = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.

Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n , se distribuye como una $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

Error: $E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\hat{p} - E, \hat{p} + E) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

5.2. Andalucía

Sin problemas de estadística

5.3. Aragón

5.3.1. Modelo de 2020

Problema 5.3.1 Una máquina automática que rellena botellas de un refresco está presuntamente regulada para que rellene cada botella con 250 ml. Sin embargo, se sabe que la cantidad real de líquido que hay en cada botella se representa por una variable aleatoria Normal de media 250 ml y varianza 400.

- a) Se considera que una botella está correctamente rellenada si contiene entre 240 y 260 ml. ¿Cuál es la probabilidad de que una botella esté correctamente rellenada?
- b) Por otra parte, las botellas con un contenido inferior a 210 ml deben ser desechadas. ¿Cuál es la probabilidad de que se deseché una botella?

Solución:

Tenemos $N(250, \sqrt{400}) = N(250, 20)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(240 \leq X \leq 260) &= P\left(\frac{240 - 250}{20} \leq Z \leq \frac{260 - 250}{20}\right) = P(-0,5 \leq Z \leq 0,5) = P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq -0,5) \\ &= P(Z \leq 0,5) - (1 - P(Z \leq 0,5)) = 2P(Z \leq 0,5) - 1 = 2 \cdot 0,6915 - 1 = 0,383 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(X \leq 210) = P\left(Z \leq \frac{210 - 250}{20}\right) = P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

5.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 5.3.2 La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu\text{g/dl}$ y desviación típica 30 $\mu\text{g/dl}$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu\text{g/dl}$.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?
- b) El 45 % de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k . Averigüe el valor de k .

Solución:

$N(120; 30)$

$$\text{a) } P(X \leq 75) = P\left(Z \leq \frac{75 - 120}{30}\right) = P(Z \leq -1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \geq k) &= 0,45 \implies P(X \leq k) = 0,55 \implies P\left(Z \leq \frac{k - 120}{30}\right) = 0,55 \implies \frac{k - 120}{30} = 0,125 \\ &\implies k = 123,75. \end{aligned}$$

5.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 5.3.3 Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

Solución:

$$B\left(9; \frac{1}{7}\right), \quad n = 9 \quad p = \frac{1}{7}, \quad q = \frac{6}{7}$$

$$\text{a) } P(X = 2) = \binom{9}{2} \left(\frac{1}{7}\right)^2 \left(\frac{6}{7}\right)^7 = 0,2497$$

$$\text{b) } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{9}{0} \left(\frac{1}{7}\right)^0 \left(\frac{6}{7}\right)^9 = 0,7503$$

5.4. Asturias

5.4.1. Modelo de 2020

Problema 5.4.1 Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el baloncesto y al 30 % les gustan ambos deportes.

- a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?
- b) Se eligen 100 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que como mucho a 75 les guste el fútbol.
- c) Si en el apartado anterior la muestra hubiese sido de 10 alumnos, y no de 100 ¿cuál hubiese sido la probabilidad de que exactamente a 5 les gustase el fútbol?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $x \geq 0$: $F(1,5) = 0,9332$; $F(1,375) = 0,9154$; $F(1,25) = 0,8944$; $F(1,125) = 0,8697$; $F(1) = 0,8413$) **Solución:**

Sean F al suceso "fútbol" y B al suceso "baloncesto" Tenemos $P(F) = 0,8$, $P(B) = 0,4$ y $P(\cap B) = 0,3$

$$\text{a) } P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(\cap B) = 0,8 + 0,4 - 0,3 = 0,9$$

- b) Tenemos $p = P(F) = 0,8 \implies B(100; 0,8)$, $n > 10$, $np = 80 > 5$ y $nq = 20 > 5$ la podemos aproximar con una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(80, 4)$

$$P(X \leq 75) = P\left(Z \frac{75,5 - 80}{4}\right) = P(Z \leq -1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

- c) Si $n = 10 \leq 10$, $np = 8 \geq 5$ y $nq = 2 < 5$, luego $B(10; 0,8)$ no se puede aproximar por una normal.

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0,8^5 0,2^5 = 0,02642$$

5.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 5.4.2 Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$. Calcula:

- La probabilidad de que $X \in [6, 10]$.
- Se hace una revisión de los datos y se observa que la media coincide pero la probabilidad del 80 % se alcanza en el valor $X \leq 12$. ¿Cuál es la nueva desviación típica?

Solución:

$$N(10; 2)$$

$$\text{a) } P(6 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{6-10}{2} \leq Z \leq \frac{10-10}{2}\right) = P(-2 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 0) - (1 - P(Z \leq 2)) = 0,5 - (1 - 0,9772) = 0,4772$$

$$\text{b) } P(X \leq 12) = 0,8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{12-10}{\sigma'}\right) = 0,8 \Rightarrow \frac{12-10}{\sigma'} = 0,8416 \Rightarrow \sigma' = 2,376$$

5.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 5.4.3 Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

- La probabilidad de que $X \leq 20$.
- Se hace una revisión de los datos y se observa que la probabilidad del 50 % se alcanza en el valor $X \leq 35$ y la probabilidad del 75 % se alcanza en el valor $X \leq 40$. ¿Cuáles son las nuevas media y desviación típica?

Solución:

$$N(30; 10)$$

$$\text{a) } P(X \leq 20) = P\left(Z \leq \frac{20-30}{10}\right) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587 \Rightarrow 15,87\%$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \leq 35) = 0,5 &\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{35-\mu}{\sigma}\right) = 0,5 \Rightarrow \frac{35-\mu}{\sigma} = 0 \Rightarrow \mu = 35 \\ P(X \leq 40) = 0,75 &\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{40-\mu}{\sigma}\right) = 0,75 \Rightarrow \frac{40-35}{\sigma} = 0,6745 \Rightarrow \sigma = 7,412898443 \end{aligned}$$

5.5. Cantabria

5.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 5.5.1 La testosterona es una hormona que se produce en el cuerpo de los hombres. En ciclismo la testosterona puede utilizarse como sustancia dopante, de forma que niveles elevados se consideran ilegales. En una población dada, la concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado, sigue una distribución normal con media 600 ng/dl, y desviación típica 200 ng/dl.

- Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.
- ¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1000?

Solución:

$$N(600; 200)$$

$$\text{a) } P(X \geq 1000) = P\left(Z \geq \frac{1000 - 600}{200}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \geq a) = 0,001 &\implies P(X \leq a) = 0,999 \implies \\ P(X \leq a) &= P\left(Z \leq \frac{a - 600}{200}\right) = 0,999 \implies \frac{a - 600}{200} = 3,08 \implies a = 1216 \end{aligned}$$

El nivel de testosterona debería ser de 1216 ng/dl.

5.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 5.5.2 En una determinada población de adultos sanos, la concentración media de colesterol en sangre sigue una distribución normal con media 190 mg/dl y desviación típica 30 mg/dl. Un nivel elevado de colesterol puede indicar posibles problemas de salud.

- Calcula la probabilidad de que un adulto sano de la población tenga un nivel de colesterol superior a 250 mg/dl.
- Calcula qué nivel de colesterol sólo superan el 1 % de adultos sanos de dicha población.

Solución:

$$N(190; 30)$$

$$\text{a) } P(X \geq 250) = P\left(Z \geq \frac{250 - 190}{30}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \geq a) = 0,01 &\implies P(X \leq a) = 0,99 \implies \\ P(X \leq a) &= P\left(Z \leq \frac{a - 190}{30}\right) = 0,99 \implies \frac{a - 190}{30} = 2,325 \implies a = 259,75 \end{aligned}$$

El nivel de colesterol sería 260 mg/dl.

5.6. Castilla La Mancha

5.6.1. Modelo de 2020

Problema 5.6.1 En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

- a) Tres chicas.
- b) Al menos tres chicos.

Solución:

Llamamos A : chica.

$$p = P(A) = \frac{16}{20} = 0,8 \implies B(20; 0,8)$$

$$a) P(X = 3) = \binom{5}{3} 0,8^3 0,2^2 = 0,2048$$

- b) Si hay 3 chicos quiere decir que hay 2 chicas, que hay 4 chicos quiere decir que hay 1 chica y que salgan 5 chicos quiere decir que han salido 0 chicas. Está claro que 5 chicos no puede haber.

$$P = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{5}{0} 0,8^0 0,2^5 + \binom{5}{1} 0,8^1 0,2^4 + \binom{5}{2} 0,8^2 0,2^3 = 0,0579$$

Problema 5.6.2 El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10, 2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

- a) Entre 6,5 y 13 horas.
- b) En menos de siete horas.

Solución:

$$N(10; 2)$$

$$a) P(6,5 \leq X \leq 13) = P\left(\frac{6,5 - 10}{2} \leq Z \leq \frac{13 - 10}{2}\right) = P(-1,75 \leq Z \leq 1,5) = P(Z \leq 1,5) - P(Z \leq -1,75) = P(Z \leq 1,5) - (1 - P(Z \leq 1,75)) = 0,9332 - (1 - 0,9599) = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544$$

$$b) P(X \leq 7) = P\left(Z \leq \frac{7 - 10}{2}\right) = P(Z \leq -1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

5.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Ver el segundo apartado del problema de probabilidad.

5.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Ver el segundo apartado del problema de probabilidad.

5.7. Castilla León

5.7.1. Modelo de 2021

Problema 5.7.1 La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas

adultas obesas de ese país.

Solución:

$$N(26; 6)$$

$$P(X \geq 35) = P\left(Z \geq \frac{35 - 26}{6}\right) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668 \Rightarrow 6,68\%$$

5.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 5.7.2 El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.

- a) ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos?
- b) ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96,41 % de los test?

Solución:

$$N(20; 4)$$

- a) $P(16 \leq X \leq 26) = P\left(\frac{16 - 20}{4} \leq Z \leq \frac{26 - 20}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1,5) = P(Z \leq 1,5) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1,5) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0,9332 - (1 - 0,8413) = 0,7745 \Rightarrow 77,45\%$
- b) $P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a - 20}{4}\right) = 0,9641 \Rightarrow \frac{a - 20}{4} = 1,8 \Rightarrow a = 27,2$ minutos.

5.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 5.7.3 Se sabe que el coeficiente intelectual de la población adulta española sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20.

- a) ¿Qué porcentaje de españoles adultos se espera que tengan un coeficiente intelectual entre 95 y 105?
- b) Si se considera que una persona es superdotada cuando su coeficiente intelectual es mayor que 160, calcular el porcentaje de españoles adultos que son superdotados.

Solución:

$$N(100; 20)$$

- a) $P(95 \leq X \leq 105) = P\left(\frac{95 - 100}{20} \leq Z \leq \frac{105 - 100}{20}\right) = P(-0,25 \leq Z \leq 0,25) = P(Z \leq 0,25) - P(Z \leq -0,25) = P(Z \leq 0,25) - (1 - P(Z \leq 0,25)) = 2P(Z \leq 0,25) - 1 = 2 \cdot 0,5987 - 1 = 0,1974 \Rightarrow 19,74\%$
- b) $P(X \geq 160) = P\left(Z \geq \frac{160 - 100}{20}\right) = P(Z \geq 3) = 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0,9987 = 0,0013 \Rightarrow 0,13\%$

5.8. Cataluña

No pusieron problemas de estadística.

5.9. Comunidad Valenciana

No pusieron problemas de estadística.

5.10. Extremadura

5.10.1. Modelo de 2021

Problema 5.10.1 Una empresa cárnica produce cerdos y ha comprobado que el peso de los animales recién nacidos sigue una distribución normal de media 4,2 kg y desviación típica 0,5 kg. Calcular:

- a) La probabilidad de que un animal elegido al azar pese entre 3,7 y 4,7 kg.
- b) ¿Qué peso debería tener un animal recién nacido para que esté por encima del 30 %?

Solución:

$$N(4, 2; 0, 5)$$

$$\text{a) } P(3,7 \leq X \leq 4,7) = P\left(\frac{3,7 - 4,2}{0,5} \leq Z \leq \frac{4,7 - 4,2}{0,5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 1)) = 2P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826$$

- b) Sea a el peso:

$$P(X \leq a) = 0,3 \implies P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a - 4,2}{0,5}\right) = 0,3 \implies$$

$$P\left(Z \leq -\frac{a - 4,2}{0,5}\right) = 0,7 \implies -\frac{a - 4,2}{0,5} = 0,525 \implies a = 3,9375$$

5.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 5.10.2 Las notas del examen de Matemáticas II de la EBAU siguen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica de 1,5. Se elige al azar un alumno de Matemáticas II de la EBAU:

- a) Calcular la probabilidad de que un alumno haya aprobado (≥ 5).
- b) Calcular la nota que tiene que sacar un alumno para que su nota sea superior al 97,50 % de las notas.

Solución:

$$N(6, 5; 1, 5)$$

$$\text{a) } P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5 - 6,5}{1,5}\right) = P(Z \geq -1) = 1 - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) = 0,8413$$

$$\text{b) } P(X \leq a) = 0,975 \implies P\left(Z \leq \frac{a - 6,5}{1,5}\right) = 0,975 \implies$$

$$\frac{a - 6,5}{1,5} = 1,96 \implies a = 9,44.$$

Debería sacar 9,44 como mínimo.

5.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 5.10.3 La duración de un Smartphone se ajusta a una normal de media 3 años y desviación típica de 1 año. El fabricante da una garantía de 3,5 años a sus Smartphone.

- a) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure menos que la garantía.
- b) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure más de 5 años.

Solución:

$$N(3; 1)$$

$$\text{a) } P(X \leq 3,5) = P\left(Z \leq \frac{3,5-3}{1}\right) = P(Z \leq 0,5) = 0,6915$$

$$\text{b) } P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5-3}{1}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

5.11. Galicia

5.11.1. Modelo de 2021

Problema 5.11.1 En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25°C y desviación típica 4°C. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21°C y 27,2°C. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

Solución:

$$N(25, 4)$$

$$P(21 \leq X \leq 27,2) = P\left(\frac{21-25}{4} \leq Z \leq \frac{27,2-25}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0,55) =$$

$$P(Z \leq 0,55) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0,55) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0,7088 - (1 - 0,8413) = 0,5501$$

Como julio tiene 31 días: $31 \cdot P(21 \leq X \leq 27,2) = 31 \cdot 0,5501 = 17,0531 \simeq 17$ días aproximadamente.

5.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 5.11.2 El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:

- a) La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.
- b) La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

Solución:

$$\text{a) } p = 0,1, q = 1 - p = 0,9 \text{ y } n = 8 \implies B(8; 0,1)$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{8}{0} 0,1^0 \cdot 0,9^8 + \binom{8}{1} 0,1^1 \cdot 0,9^7 +$$

$$\binom{8}{2} 0,1^2 \cdot 0,9^6 = 0,9619082100$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = \\ &= 1 - \left(\binom{8}{0} 0,1^0 \cdot 0,9^8 + \binom{8}{1} 0,1^1 \cdot 0,9^7 \right) = 0,1868952699 \end{aligned}$$

5.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 5.11.3 El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0,5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7,6 mm y 8,2 mm.

Solución:

$$N(8; 0,5)$$

$$\begin{aligned} P(7,6 \leq X \leq 8,2) &= P\left(\frac{7,6-8}{0,5} \leq Z \leq \frac{8,2-8}{0,5}\right) = P(-0,8 \leq Z \leq 0,4) = P(Z \leq 0,4) - P(Z \leq -0,8) \\ &= P(Z \leq 0,4) - (1 - P(Z \leq 0,8)) = 0,6554 + 0,7881 - 1 = 0,4435 \end{aligned}$$

5.12. Islas Baleares

5.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 5.12.1 Una compañía aérea ha observado que los pesos de las maletas de un determinado trayecto siguen una distribución normal de media 7,5 kg y desviación típica de 0,4 kg. Calcule la probabilidad de que, elegida una maleta al azar:

- a) Pese menos de 7,2 kg pero más de 7 kg.
- b) Pese entre 7,8 kg y 8 kg.
- c) Si en un trayecto hay 90 maletas, ¿cuántas maletas esperamos que pesen al menos 8,1 kg?

Solución:

$$N(7,5; 0,4)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(7 \leq X \leq 7,2) &= P\left(\frac{7-7,5}{0,4} \leq Z \leq \frac{7,2-7,5}{0,4}\right) = P(-1,25 \leq Z \leq -0,75) = P(Z \leq -0,75) - P(Z \leq -1,25) \\ &= 1 - P(Z \leq 0,75) - (1 - P(Z \leq 1,25)) = P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq 0,75) = 0,8944 - 0,7734 = 0,121 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(7,8 \leq X \leq 8) &= P\left(\frac{7,8-7,5}{0,4} \leq Z \leq \frac{8-7,5}{0,4}\right) = P(0,75 \leq Z \leq 1,25) = P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq 0,75) \\ &= 0,8944 - 0,7734 = 0,121 \end{aligned}$$

$$\text{c) } P(X \geq 8,1) = P\left(Z \geq \frac{8,1-7,5}{0,4}\right) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

$$90 \cdot P(X \geq 8,1) = 90 \cdot 0,0668 = 6,012$$

Se espera que 6 maletas pesen al menos 8,1 kg.

5.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 5.12.2 La altura de las personas de una clase se distribuye según una normal de media 160 cm y desviación típica 10 cm. Calcula la probabilidad de que, escogida al azar una persona de la clase, su altura:

- a) sobrepase los 170 cm.
- b) sea menor que 155 cm.
- c) esté comprendida entre 155 cm y 170 cm

Solución:

$$N(160; 10)$$

- a) $P(X \geq 170) = P\left(Z \geq \frac{170 - 160}{10}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$
- b) $P(X \leq 155) = P\left(Z \leq \frac{155 - 160}{10}\right) = P(Z \leq -0,5) = 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$
- c) $P(155 \leq X \leq 170) = P\left(\frac{155 - 160}{10} \leq Z \leq \frac{170 - 160}{10}\right) = P(-0,5 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0,5) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 0,5)) = 0,8413 - (1 - 0,6915) = 0,5328$

5.13. Islas Canarias

5.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 5.13.1 Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos.

- a) Si se lo toman 100 pacientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes?
- b) Si se lo toman 225 pacientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes?
- c) ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes?

Solución:

$$B(100; 0,8)$$

- a) $B(100; 0,8), n > 10, np = 80 > 5, nq = 20 > 5 \implies$

$$B(100; 0,8) \xrightarrow{N(np, \sqrt{npq})} N(80, 4)$$

Aplicamos la aproximación por continuidad de Yates y tenemos:

$$P(X > 75,5) = P\left(Z \geq \frac{75,5 - 80}{4}\right) = P(Z \geq -1,13) = 1 - P(Z \leq -1,13) = 1 - (1 - P(Z \leq 1,13)) = P(Z \leq 1,13) = 0,8708$$

- b) $B(225; 0, 8)$, $n > 10$, $np = 180 < 5$, $nq = 45 < 5 \Rightarrow$

$$B(225; 0, 8) \xrightarrow{N(np, \sqrt{npq})} N(180, 6)$$

Aplicamos la aproximación por continuidad de Yates y tenemos:

$$P(169,5 \leq X \leq 190,5) = P\left(\frac{169,5 - 180}{6} \leq Z \leq \frac{190,5 - 180}{6}\right) =$$

$$P(-1,75 \leq Z \leq 1,75) = P(Z \leq 1,75) - P(Z \leq -1,75) = P(Z \leq 1,75) - (1 - P(Z \leq 1,75)) = 2P(Z \leq 1,75) - 1 = 2 \cdot 0,9599 - 1 = 0,9198$$

- c) El número esperado de pacientes que si eliminarán el acné es $E(X) = np = 500 \cdot 0,8 = 400$, luego serán 100 los pacientes que no eliminarán el acné.
Se podría haber pensado como $E(\bar{X}) = nq = 500 \cdot 0,2 = 100$ pacientes que no eliminarían el acné.

5.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 5.13.2 Con el objetivo de llevar a cabo el proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0,01 y considerando independencia de sucesos:

- Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor del 20 %.
- Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el lote?
- ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas?

Solución:

$$B(20; 0, 01), \quad n = 20, \quad p = 0, 01, \quad q = 0, 99$$

- $P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\}) = P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{20}{1} 0,01^1 \cdot 0,99^{19} + \binom{20}{2} 0,01^2 \cdot 0,99^{18} = 0,1811 \Rightarrow 18,11 \%$, luego la probabilidad de encontrar una o dos arandelas defectuosas es menor del 20 %.
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{20}{0} 0,01^0 \cdot 0,99^{20} = 0,1821 \Rightarrow 18,21 \%$ La probabilidad de rechazar un lote es del 18,21 %.
- Si $n = 200 \Rightarrow E(X) = np = 200 \cdot 0,01 = 2$ arandelas defectuosas, luego habrá $200 - 2 = 198$ arandelas sin defectos.

Problema 5.13.3 Suponiendo que el tiempo de espera en la cola de Correos sigue una distribución normal de media 7,5 minutos con 2 minutos de desviación típica.

- Hallar el porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos.
- Correos afirma que: "Menos del 40 % de las personas que acuden a Correos esperan entre 7 y 10 minutos". ¿Es correcta la afirmación?

Solución:

$$N(7, 5; 2)$$

$$\text{a) } P(X \geq 9) = P\left(Z \geq \frac{9-7,5}{2}\right) = P(Z \geq 0,75) = 1 - P(Z \leq 0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266 \Rightarrow 22,66\%$$

$$\text{b) } P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7-7,5}{2} \leq Z \leq \frac{10-7,5}{2}\right) = P(-0,25 \leq Z \leq 1,25) = P(Z \leq 1,25) - P(Z \leq -0,25) = P(Z \leq 1,25) - (1 - P(Z \leq 0,25)) = 0,8944 - (1 - 0,5987) = 0,4931 \Rightarrow 49,31\%. \text{ Luego la afirmación de correos es falsa, la espera es } 9,31\% \text{ mayor.}$$

5.14. La Rioja

5.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 5.14.1 La duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado sigue una distribución normal, con media 20 años y desviación típica 5 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de la máquina por un periodo de 25 años.

a) ¿Qué porcentaje de máquinas se espera que no cumplan la garantía?

b) ¿Qué proporción de máquinas tienen una duración comprendida entre los 15 y 21 años?

Solución:

$$N(20; 5)$$

$$\text{a) } P(X \leq 25) = P\left(Z \leq \frac{25-20}{5}\right) = P(Z \leq 1) = 0,8413 \Rightarrow 84,13\%$$

$$\text{b) } P(15 \leq X \leq 21) = P\left(\frac{15-20}{5} \leq Z \leq \frac{21-20}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0,2) = P(Z \leq 0,2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0,2) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0,5793 - (1 - 0,8413) = 0,4206 = \frac{4206}{10000} = \frac{2103}{5000}$$

5.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 5.14.2 El tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos. Se ha comprobado que el 84,1% de los días llega antes de 22 minutos. Si durante el año acude a su lugar de trabajo 290 días, ¿cuántos días puede estimar que tardará menos de 18 minutos en llegar?. **Solución:**

$$N(20; \sigma)$$

$$P(X \leq 22) = P\left(Z \leq \frac{22-20}{\sigma}\right) = 0,841 \Rightarrow \frac{22-20}{\sigma} = 0,995 \Rightarrow \sigma = 2,01$$

$$N(20; 2,01)$$

$$P(X \leq 18) = P\left(Z \leq \frac{18-20}{2,01}\right) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

$$290P(X \leq 18) = 290 \cdot 0,1587 = 46,023 \simeq 46 \text{ días tardará menos de 18 minutos durante ese año.}$$

5.15. Madrid

5.15.1. Modelo de 2021

Problema 5.15.1 En un instituto, uno de cada cuatro alumnos practica baloncesto. Se eligen 6 alumnos al azar y se considera la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes entre estos 6 que practican baloncesto. Se pide:

- Identificar la distribución de la variable aleatoria X y calcular $P(X = 0)$.
- Calcular la probabilidad de que al menos 5 de los 6 elegidos practiquen baloncesto.
- Calcular la probabilidad de que al menos 1 de los 6 practique baloncesto.

Solución:

- a) Es una distribución binomial $X \sim B(6; 0,25)$.

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} 0,25^0 \cdot 0,75^6 = 0,177979$$

$$b) P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{6}{5} 0,25^5 \cdot 0,75^1 + \binom{6}{6} 0,25^6 \cdot 0,75^0 = 0,004639$$

$$c) P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,177979 = 0,822021$$

5.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 5.15.2 El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8,8 meses y una desviación típica de 3 meses.

- ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?
- Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?
- ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8 - c; 8,8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

Solución:

$$N(8,8; 3)$$

$$a) P(X \geq 10) = P\left(Z \geq \frac{10 - 8,8}{3}\right) = P(Z \geq 0,4) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446 \Rightarrow 34,46 \%$$

$$P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7 - 8,8}{3} \leq Z \leq \frac{10 - 8,8}{3}\right) = P(-0,6 \leq Z \leq 0,4) = P(Z \leq 0,4) - P(Z \leq -0,6) = P(Z \leq 0,4) - (1 - P(Z \leq 0,6)) = 0,6554 - 1 + 0,7257 = 0,3811 \Rightarrow 38,11 \%$$

$$b) \text{ Se trata de una binomial } p = P(X \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10 - 8,8}{3}\right) = P(Z \leq 0,4) = 0,6554$$

$$B(4; 0,6554), n = 4, p = 0,6554 \text{ y } q = 1 - 0,6554 = 0,3446$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0,6554^0 \cdot 0,3446^4 = 0,9859$$

c)

$$\begin{aligned}
 P(8,8 - c; 8,8 + c) &= P\left(\frac{8,8 - c - 8,8}{3} \leq Z \leq \frac{8,8 + c - 8,8}{3}\right) = \\
 P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{3}\right) &= P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - P\left(Z \leq \frac{-c}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right)\right) = \\
 2P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - 1 &= 0,98 \implies P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) = 0,99 \implies \frac{c}{3} = 2,325 \implies c = 6,975
 \end{aligned}$$

De otra forma:

$$\begin{aligned}
 NC = 0,98 = 1 - \alpha &\implies \alpha = 0,02 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,01 \\
 P\left(Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) &= 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,01 = 0,99 \implies Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,325 \\
 c = E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma &= 2,325 \cdot 3 = 6,975
 \end{aligned}$$

5.15.3. Convocatoria Ordinaria-coincidente junio de 2021

Problema 5.15.3 El delantero de un equipo de fútbol, que suele marcar en tres quintas partes de sus disparos a puerta, ha de lanzar una tanda de penaltis en un entrenamiento.

- Calcule la probabilidad de no marcar si la tanda es de cuatro disparos.
- Calcule la probabilidad de que marque más de dos penaltis en la tanda de cuatro disparos.
- Calcule cuántos penaltis debería lanzar para que la probabilidad de marcar al menos un tanto sea mayor que 0,999.

Solución:

- a) $B(4; 0,6)$, $n = 4$, $p = 0,6$ y $q = 1 - p = 0,4$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^4 = 0,0256$$

- b) $B(4; 0,6)$, $n = 4$, $p = 0,6$ y $q = 1 - p = 0,4$

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) =$$

$$\binom{4}{3} 0,6^3 \cdot 0,4^1 + \binom{4}{4} 0,6^4 \cdot 0,4^0 = 0,4752$$

- c) la probabilidad de marcar si se lanzan n disparos es $1 - 0,4^n$ y esta probabilidad debe de ser mayor de 0,999:

$$1 - 0,4^n > 0,999 \implies 0,4^n < 0,001 \implies n \ln 0,4 > \ln 0,001 \implies$$

$$n > \frac{\ln 0,001}{\ln 0,4} = 7,5388 \implies n = 8$$

5.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 5.15.4 Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

- a) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.
- b) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

Solución:

$$B(100; 0,45), \quad n = 100, \quad p = 0,45, \quad q = 1 - p = 0,55$$

$$\text{a) } P(X = 40) = \binom{100}{40} 0,45^{40} \cdot 0,55^{60} = 0,0488$$

$$\text{b) } n = 100 > 10, \quad np = 45 > 5, \quad nq = 55 \implies$$

$$B(100; 0,45) \xrightarrow{N(np; \sqrt{npq})} N(45; 4,975)$$

$$\begin{aligned} P(X = 40) &= P\left(\frac{39,5 - 45}{4,975} \leq Z \leq \frac{40,5 - 45}{4,975}\right) = P(-1,11 \leq Z \leq -0,9) = P(Z \leq -0,9) - \\ &P(Z \leq -1,11) = 1 - P(Z \leq 0,9) - (1 - P(Z \leq 1,11)) = P(Z \leq 1,11) - P(Z \leq 0,9) = \\ &0,8665 - 0,8159 = 0,0506 \end{aligned}$$

5.16. Murcia

5.16.1. Modelo de 2021

Problema 5.16.1 El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ . Se sabe que el 69,50 % de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60 % de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?
- b) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

Solución:

$$N(\mu, \sigma)$$

$$\text{a) } P(X \leq 5061,2) = 0,6950 \text{ y } P(X \geq 5116,4) = 0,1660 \implies P(X \leq 5116,4) = 1 - 0,1660 = 0,834$$

$$P(5061,2 \leq X \leq 5116,4) = P(X \leq 5116,4) - P(X \leq 5061,2) = 0,834 - 0,695 = 0,139$$

b)

$$P(X \leq 5061,2) = P\left(\frac{5061,2 - \mu}{\sigma}\right) = 0,6950 \implies \frac{5061,2 - \mu}{\sigma} = 0,51 \implies 0,51\sigma + \mu = 5061,2$$

$$P(X \leq 5116,4) = P\left(\frac{5116,4 - \mu}{\sigma}\right) = 0,834 \implies \frac{5116,4 - \mu}{\sigma} = 0,97 \implies 0,97\sigma + \mu = 5116,4$$

$$\begin{cases} 0,51\sigma + \mu = 5061,2 \\ 0,97\sigma + \mu = 5116,4 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu = 5000 \\ \sigma = 120 \end{cases}$$

5.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 5.16.2 En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La velocidad de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 120 Km/h sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica $\sigma = 10$ km/h. Se sabe que el 69,15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h.

- Calcule la media de la distribución.
- ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida?
- La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h
¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?

Solución:

$$N(\mu, 10)$$

$$\text{a) } P(X \leq 130) = 0,6915 \implies P(X \leq 130) = P\left(Z \leq \frac{130 - \mu}{10}\right) = 0,6915 \implies \frac{130 - \mu}{10} = 0,5 \implies \mu = 125$$

$$N(125; 10)$$

$$\text{b) } P(X \leq 120) = P\left(Z \leq \frac{120 - 125}{10}\right) = P(Z \leq -0,5) = 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085 \implies 30,85\%$$

$$\text{c) } P(120 \leq X \leq 150) = P\left(\frac{120 - 125}{10} \leq Z \leq \frac{150 - 125}{10}\right) = P(-0,5 \leq Z \leq 2,5) = P(Z \leq 2,5) - P(Z \leq -0,5) = P(Z \leq 2,5) - (1 - P(Z \leq 0,5)) = 0,9938 - (1 - 0,6915) = 0,6853$$

5.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 5.16.3 Juan es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Él se defiende diciendo que no es para tanto y que la tutora le tiene manía. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 9 días Juan llega tarde como muchos 2 días, la tutora le sube 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Juan llegue tarde a clase cada día es 0,45, determine:

- El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días. ¿Cuáles son sus parámetros?
- ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?
- ¿Cuál es la probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final?

Solución:

$$\text{a) } B(9; 0,45) \text{ binomial donde } n = 9, p = 0,45 \text{ y } q = 0,55.$$

$$\text{b) } \text{Media} = np = 9 \cdot 0,45 = 4,05 \text{ y } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{9 \cdot 0,45 \cdot 0,55} = 1,4925$$

$$\text{c) } P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{9}{0} \cdot 0,45^0 \cdot 0,55^9 + \binom{9}{1} \cdot 0,45^1 \cdot 0,55^8 + \binom{9}{2} \cdot 0,45^2 \cdot 0,55^7 = 0,1495$$

5.17. Navarra

No pusieron problemas de estadística.

5.18. País Vasco

5.18.1. Modelo de 2020

Problema 5.18.1 Lanzamos un dado de seis caras 6000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5

- a) sea superior a 1500.
- b) esté comprendido entre 1000 y 1100.

Solución:

$B(6000; 0,167)$, $n = 6000 > 10$, $np = 6000 \cdot 0,167 = 1000 > 5$, $nq = 6000 \cdot 0,833 = 5000 > 5 \Rightarrow B(6000; 0,167) \approx N(np, \sqrt{npq}) = N(1000, 28,87)$

$$\text{a) } P(X > 1500) = P\left(Z > \frac{1500,5 - 1000}{28,87}\right) = P(Z > 17,34) = 1 - P(Z < 17,34) = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(1000 \leq X \leq 1100) &= P\left(\frac{999,5 - 1000}{28,87} < Z < \frac{1100,5 - 1000}{28,87}\right) = \\ &P(-0,02 < Z < 3,48) = P(Z < 3,48) - P(Z < -0,02) = \\ &P(Z < 3,48) - (1 - P(Z < 0,02)) = 1 - 1 + P(Z < 0,02) = 0,5080 \end{aligned}$$

5.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2021

Problema 5.18.2 En una ciudad se han elegido al azar 3900 personas. Hallar:

- a) La probabilidad de que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.
- b) La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.

Solución:

La probabilidad de que una persona cumpla los años el día del patrón de la ciudad es $p = \frac{1}{365} = 0,00274$ (probabilidad muy pequeña $p < 0,1$) y se han elegido 3900 personas (tamaño muy grande $n > 100$). La distribución así definida sería una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = np = \frac{3900}{365} = 10,6849$. Dado que en el curso actual no entra esta distribución en su contenido, desarrollaré el problema considerando que es una binomial $B\left(3900; \frac{1}{365}\right)$.

Como $n = 3900 > 10$, $np = 10,6849 > 5$ y $nq = 3889,3151 > 5 \Rightarrow B\left(3900; \frac{1}{365}\right) \xrightarrow{N(np, \sqrt{npq})} N(10,6849; 3,2643)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \geq 14,5) &= P\left(Z \geq \frac{14,5 - 10,6849}{3,2643}\right) = P(Z \geq 1,17) = 1 - P(Z \leq 1,17) = 1 - \\ &0,8790 = 0,1210 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(4,5 \leq X \leq 15,5) &= P\left(\frac{4,5 - 10,6849}{3,2643} \leq Z \leq \frac{15,5 - 10,6849}{3,2643}\right) = P(-1,89 \leq Z \leq \\ &1,48) = P(Z \leq 1,48) - P(Z \leq -1,89) = P(Z \leq 1,48) - (1 - P(Z \leq 1,89)) = 0,9306 - (1 - \\ &0,9706) = 0,9012 \end{aligned}$$

Ahora resuelvo por la distribución de Poisson $P(\lambda)$:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

donde k es el número de observaciones y $\lambda = np = \frac{3900}{365} = 10,6849 \Rightarrow P(10,6849)$.

Como $n > 100$ y $np = 10,6849 > 5 \Rightarrow P(10,6849) \xrightarrow{N(\lambda, \sqrt{\lambda})} N(10,6849; 3,2688)$

$$\text{a) } P(X \geq 14,5) = P\left(Z \geq \frac{14,5 - 10,6849}{3,2688}\right) = P(Z \geq 1,17) = 1 - P(Z \leq 1,17) = 1 - 0,8790 = 0,1210$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(4,5 \leq X \leq 15,5) &= P\left(\frac{4,5 - 10,6849}{3,2688} \leq Z \leq \frac{15,5 - 10,6849}{3,2688}\right) = P(-1,89 \leq Z \leq \\ &1,47) = P(Z \leq 1,47) - P(Z \leq -1,89) = P(Z \leq 1,47) - (1 - P(Z \leq 1,89)) = 0,9292 - (1 - \\ &0,9706) = 0,8998 \end{aligned}$$

Como puede observarse los resultados son prácticamente iguales.

5.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2021

Problema 5.18.3 La estatura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 1,74 cm y desviación típica 0,05 cm. Se elige un individuo al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una estatura igual o inferior a la media?
- ¿Cuál es la probabilidad de que su estatura esté comprendida entre 1,64 y 1,84 cm?
- Si la población está compuesta por 1500 individuos. ¿Cuántos tienen una estatura inferior a 1,54 cm?

Solución:

$$N(1,74; 0,05)$$

$$\text{a) } P(X \leq \mu) = 0,5$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(1,64 \leq X \leq 1,84) &= P\left(\frac{1,64 - 1,74}{0,05} \leq Z \leq \frac{1,84 - 1,74}{0,05}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq \\ &2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 2)) = 2P(Z \leq 2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544 \end{aligned}$$

$$\text{c) } n = 1500 \text{ y } P(X \leq 1,54) = P\left(Z \leq \frac{1,54 - 1,74}{0,05}\right) = P(Z \leq -4) = 1 - P(Z \leq 4) = 1 - 1 = 0$$

El número de personas con una estatura inferior a 1,54 es $nP(X \leq 1,54) = 1500 \cdot 0 = 0$ personas.