Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2027)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas

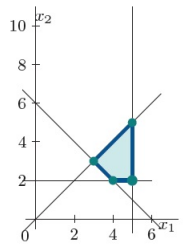
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

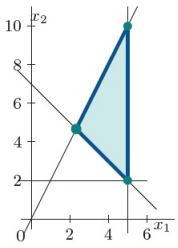
EJERCICIO 1 (2,5 puntos) **Responda los tres apartados. Esta pregunta no tiene opcionalidad.**

Problema 1 El restaurante de un reconocido chef atrae la atención de sus clientes por el prestigio gastronómico de sus platos elaborados siempre con productos de primera calidad. Sin embargo, el mayor atractivo para la clientela es su salsa secreta. Por ello, la gestión eficiente de esta receta y su correcto uso en los platos que conforman su oferta gastronómica es de vital importancia. La receta requiere el uso de dos ingredientes I_1 e I_2 cuyo nombre no puede desvelarse. Su mezcla será diluida posteriormente en un caldo previamente elaborado por el chef para obtener un litro de salsa. Para que la receta de la salsa secreta sea satisfactoria, es necesario que se usen a lo sumo 5 g del ingrediente I_1 y al menos 2 g del ingrediente I_2. La suma de las cantidades de ambos ingredientes debe ser al menos 6 g y la cantidad de ingrediente I_2 no puede exceder dos veces la cantidad del ingrediente I_1. Además, se sabe que los costes por cada gramo de los ingredientes I_1 e I_2 son respectivamente 20 y 30 céntimos de euro.

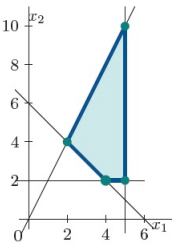
a) (0,5 puntos) Si x_1 y x_2 son las cantidades utilizadas de los ingredientes I_1 e I_2 respectivamente, indique cuál de las siguientes regiones representa el conjunto de valores que pueden tomar los ingredientes de acuerdo con el enunciado del problema.



Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

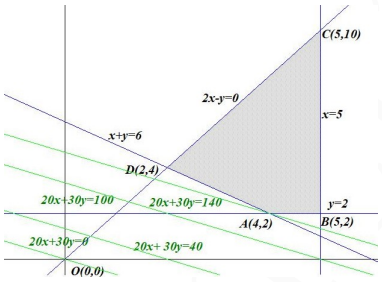
b) (1 punto) Obtenga las cantidades de los ingredientes en la mezcla de tal modo que minimice su coste, manteniendo las propiedades de calidad de la misma. Indique el coste de un litro de salsa elaborada.

c) (1 punto) El chef ha preparado 10 litros de salsa secreta para elaborar 3 platos diferentes P_1, P_2 y P_3 para los comensales del servicio de cena de esta noche. Para evitar el desperdicio de salsa secreta, se debe consumir la totalidad de la salsa. Además, se sabe que el plato P_1 usa exactamente el doble de cantidad de salsa secreta que el plato P_2 y que los platos P_2 y P_3 usan conjuntamente 4 litros en su preparación. ¿Es posible realizar este reparto de salsa secreta entre los tres platos? En caso afirmativo, obtenga la cantidad de salsa secreta que necesitará cada plato.

Solución:

a) Sean x los gramos de I_1 e y los de I_2:
Función objetivo: $f(x,y) = 20x + 30y$ (minimizar)
sujeto a:
Región factible:

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ y \geq 2 \\ x + y \geq 6 \\ y \leq 2x \\ x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq 5 \\ y \geq 2 \\ x + y \geq 6 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



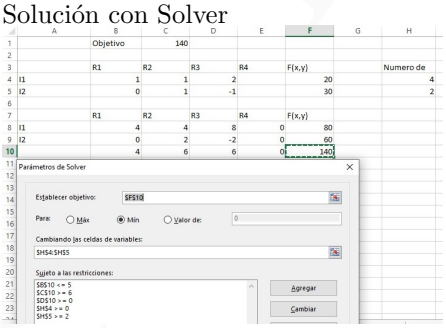
Los vértices de la región factible son: $A(4,2)$, $B(5,2)$, $C(5,10)$ y $D(2,4)$.
La región corresponde a la gráfica 3.

b) Sustituyendo los vértices en la función objetivo tenemos:

$$\begin{cases} f(4,2) = 140 \Longleftarrow \text{mínimo} \\ f(5,2) = 160 \\ f(5,10) = 400 \\ f(2,4) = 160 \end{cases}$$

El mínimo gasto sería de 1,4€ con 4 gramos de I_1 y 2 gramos de I_2.

Solución con Solver



c) Sean x el número de litros al plato P_1, y al plato P_2 y z al plato P_3.

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x = 2y \\ y + z = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - 2y = 0 \\ y + z = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 6 \text{ litros al } P_1 \\ y = 3 \text{ litros al } P_2 \\ z = 1 \text{ litros al } P_3 \end{cases}$$

Resolvemos por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \implies \begin{cases} 2z = 2 \implies z = 1 \\ -3y - 1 = -10 \implies y = 3 \\ x + 3 + 1 = 10 \implies x = 6 \end{cases}$$

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**

Problema 2 (2,5 puntos)

a) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-5}$$

a.1 (1,5 puntos) Determine el dominio y las asíntotas de esta función.

a.2 (1 punto) Determine la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x_0 = 0$.

b) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} e^{3x}-x+a & \text{si} \quad x<0 \\ -x^3+2x^2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

b.1 (1,2 puntos) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua.

b.2 (1,3 puntos) Determine el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas de modo que $x\geq 0$ y $f(x)\geq 0$.

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-5}$

a.1 $\text{Dom}(f)=R-\{5\}$ y asíntotas:

☛ Verticales: $x=5$

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{(x-1)^2}{x-5}=\left[\frac{16}{0^-}\right]=-\infty;\quad \lim_{x\to 5^+}\frac{(x-1)^2}{x-5}=\left[\frac{16}{0^+}\right]=+\infty$$

☛ Horizontales: No hay.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(x-1)^2}{x-5}=-\infty;\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{(x-1)^2}{x-5}=+\infty$$

☛ Oblicuas: $y=mx+n$

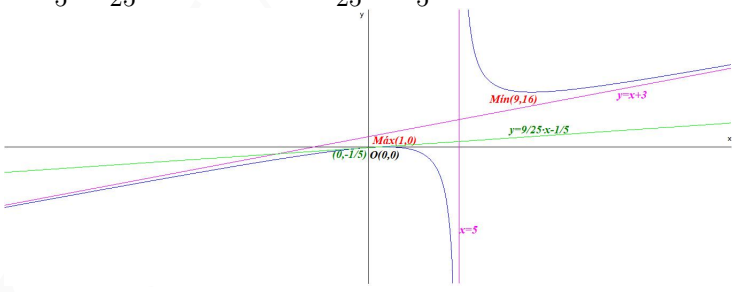
$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x}=1$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x-5}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+1-x^2+5x}{x-5}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+1}{x-5}=3\Longrightarrow y=x+3$$

a.2 $f'(x)=\dfrac{x^2-10x+9}{(x-5)^2}\Longrightarrow m=f'(x_0)=\dfrac{9}{25}$ e $y_0=f(x_0)=f(0)=-\dfrac{1}{5}\xrightarrow{y-y_0=m(x-x_0)}$

$$y+\frac{1}{5}=\frac{9}{25}(x-0)\Longrightarrow y=\frac{9}{25}x-\frac{1}{5}$$



b) b.1 La rama $x<0$ es continua como composición de un polinomio y una exponencial. La rama $x\geq 0$ también es continua por ser un polinomio. Hay que imponer la continuidad en $x=0$:

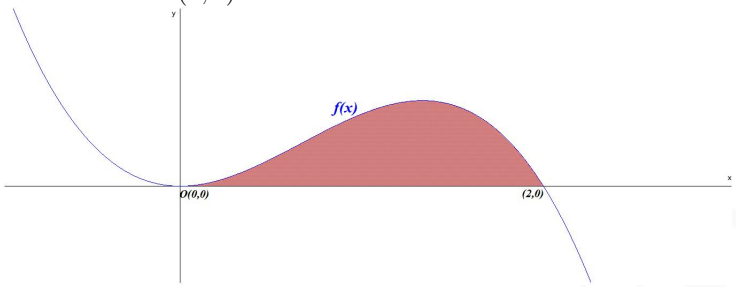
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(e^{3x} - x + a) = 1 + a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(-x^3 + 2x^2) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)}$$

$1 + a = 0 \Longrightarrow a = -1$

b.2 $x \geq 0 \Longrightarrow f(x) = -x^3 + 2x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(-x+2) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$. Luego el recinto de integración es $S_1 : [0, 2]$

$$S_1 = \int_0^2 (-x^3 + 2x^2)\, dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\Big]_0^2 = -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3} = 1,\widehat{3}\ u^2$$

El resultado de la integral es positiva por estar la función por encima del eje de abscisas en el intervalo $(0, 2)$.



EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.

Problema 3 (2,5 puntos)

a) En un club de lectura de un municipio de Madrid se sabe que al 30 % de los socios les gustan los libros de novela histórica, mientras que al 50 % de los socios les gustan los libros de ciencia ficción. Además se sabe que la probabilidad de que a un socio le gusten los libros de novela histórica sabiendo que le gustan los libros de ciencia ficción es 0,2.

a.1 (1 punto) Calcule la probabilidad de que a un socio no le gusten los libros ni de novela histórica ni de ciencia ficción.

a.2 (1 punto) Calcule la probabilidad de que a un socio le guste la novela histórica, sabiendo que no le gustan los libros de ciencia ficción.

a.3 (0,5 puntos) Justifique razonadamente si los sucesos de gustos de novela histórica y ciencia ficción son independientes y/o incompatibles.

b) En la plantilla de un equipo de balonmano de la liga Asobal se sabe que el 50 % de los jugadores son nacionales, el 40 % son comunitarios y el 10 % restante extracomunitarios. Se sabe que la probabilidad de que un jugador sea elegido para jugar en su selección nacional es del 80 % si el jugador es nacional, del 50 % si el jugador es comunitario y del 40 % si el jugador es extracomunitario.

b.1 (1,3 puntos) Determine la probabilidad de que un jugador del equipo de balonmano resulte seleccionado para jugar en su selección nacional.

b.2 (1,2 puntos) Determine la probabilidad de que, elegido un jugador que no va a ser convocado por su selección nacional, sea nacional.

Solución:

2ºBachillerato.es

a) Sean H le gusta la novela histórica y F las de ciencia ficción.
$P(H) = 0,3$, $P(F) = 0,5$ y $P(H|F) = 0,2$

a.1 $P(H|F) = \dfrac{P(H \cap F)}{P(F)} \Longrightarrow P(H \cap F) = P(H|F)P(F) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$
$P(H \cup F) = P(H) + P(F) - P(H \cap F) = 0,3 + 0,5 - 0,1 = 0,7$
$P(\overline{H} \cap \overline{F}) = P(\overline{H \cup F}) = 1 - P(H \cup F) = 1 - 0,7 = 0,3$

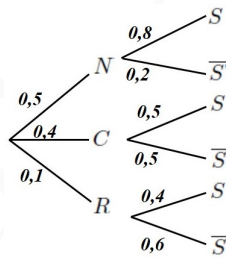
a.2 $P(H|\overline{F}) = \dfrac{P(H \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(H) - P(H \cap F)}{P(\overline{F})} = \dfrac{0,3 - 0,1}{1 - 0,5} = 0,4$

a.3 $P(H \cap F) = 0,1 \neq 0 \Longrightarrow H \cap F \neq \emptyset \Longrightarrow H$ y F no son incompatibles.
$P(H)P(F) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15 \neq P(H \cap F) = 0,1 \Longrightarrow H$ y F no son independientes.

b) Sean N jugador nacional, C comunitario, R restantes extracomunitarios, S es seleccionado y $\overline{S}$ no es seleccionado.

b.1 $P(S) = P(S|N)P(N) + P(S|C)P(C) + P(S|R)P(R) =$
$0,8 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,1 = 0,64$

b.2 $P(N|\overline{S}) = \dfrac{P(\overline{S}|N)P(N)}{P(\overline{S})} = \dfrac{0,2 \cdot 0,5}{1 - 0,64} = 0,2778$



EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.

Problema 4 (2,5 puntos)

a) El número de horas que tarda un jugador en completar todas las fases de un determinado videojuego se comporta según una distribución normal cuya desviación típica es 20 horas.

a.1 (1 punto) Con un nivel de confianza del 97 % se ha obtenido el intervalo de confianza $(116,764; 120,236)$ para el tiempo medio en superar el juego para una determinada muestra. Determine el tiempo medio empleado por los jugadores de la muestra en completar el videojuego y el tamaño de la muestra utilizada.

a.2 (1,5 puntos) Obtenga el tamaño mínimo de una muestra para que el error del intervalo de confianza sea como mucho 5 horas asumiendo un nivel de confianza del 98,8 %.

b) El 90 % de los atletas que se inscriben en una maratón completan la totalidad de sus 42,195 km.

b.1 (1 punto) En la última maratón celebrada en Madrid, se tomó una muestra de 100 atletas de los cuales, 85 terminaron la maratón. Obtenga un intervalo de confianza al 98,4 % de confianza para la proporción de atletas que terminan la carrera.

b.2 (1,5 puntos) Se sabe que en la próxima maratón de la temporada hay 400 atletas inscritos. Obtenga la probabilidad de que terminen la carrera a lo sumo 352 atletas.

Solución:

a) $N(\mu, 20)$

a.1 $\overline{X} = \dfrac{116,764 + 120,236}{2} = 118,8$ y $E = \dfrac{120,236 - 116,764}{2} = 1,736$

$NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$

$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,736 = 2,17\dfrac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 625 \Longrightarrow n = 625$

a.2 $NC = 98,8\,\% = 0,988 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,012 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,006$

$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,994 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,51$

$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 5 = 2,51\dfrac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 100,8016 \Longrightarrow n = 101$

b) $B(n, 0,9)$

a.1 $n = 100$ y $\hat{p} = \dfrac{85}{100} = 0,85 \Longrightarrow B(100; 0,85)$

$NC = 98,4\,\% = 0,984 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,016 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,008$

$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,992 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,41$

$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,41\sqrt{\dfrac{0,85 \cdot 0,15}{100}} = 0,0861$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,85 - 0,0861; 0,85 + 0,0861) =$
$(0,7639; 0,9361) = (76,39\,\%; 93,61\,\%)$

a.2 $n = 400 \geq 30$, $p = 0,9$ $np = 0,9 \cdot 400 = 360 > 5$ y $nq = 0,1 \cdot 400 = 40 > 5 \Longrightarrow$
$B(100; 0,9) \overset{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(360; 6)$

$P(X \leq 352) = P\left(Z \leq \dfrac{352,5 - 360}{6}\right) = P(Z \leq -1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) =$
$1 - 0,8944 = 0,1056$

www.matesat.net