Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2025

Problema 1 (4 puntos)

a) (2 puntos) Se consideran la matriz dependiente del parámetro real a:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a.1 (0,5 puntos) Calcula la matriz traspuesta de A y el determinante de A en función de a.

a.2 (0,5 puntos) Determina los valores de a para los que existe la matriz inversa de A y calcula dicha matriz cuando exista.

a.3 (0,5 puntos) Resuelve la ecuación matricial $AX + B = I$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

indicando para qué valores de a tiene solución.

a.4 (0,5 puntos) Para $a = 3$ calcula la matriz $C = A^{-1}B^tA$, donde B^t denota la traspuesta de B.

b) (2 puntos) Sea el sistema lineal dependiente del parámetro real b

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + by + z = b + 3 \\ x + y + bz = 4 \end{cases}$$

b.1 (0,5 punto) Escribe el sistema en forma matricial y calcula el determinante de la matriz de coeficientes en función del parámetro b.

b.2 (0,25 puntos) Di para qué valores de b la matriz de coeficientes es invertible.

b.3 (0,75 puntos) Estudia el sistema según los valores de b, indicando cuándo tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.

b.4 (0,5 puntos) Resuelve el sistema para $b = 0$.

Solución:

a) a.1 $A^t = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A| = a - 2$. Nota: $|A| = |A^t|$

a.2 $|A| = 0 \Longrightarrow a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 2 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \dfrac{1}{a-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix} \ \forall a \in \mathbb{R} - \{2\}$

a.3 ☛ Si $a \neq 2$:

$AX + B = I \Longrightarrow AX = I - B \Longrightarrow X \overset{a\neq 2}{=} A^{-1}(I - B) =$
$\frac{1}{a-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{a-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{a-2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & -a \end{pmatrix}$

☛ Si $a = 2$ y $X = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix}$ tenemos:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b+d & 2c+e \\ 2b+d & 2c+e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2b+d = 0 \wedge 2b+d = -1 \\ 2c+e = 0 \wedge 2c+e = 0 \end{cases}$
no tiene solución cuando $a = 2$.

a.4 Si $a = 3$: $C = A^{-1}B^tA \Longrightarrow C = \frac{1}{3-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) b.1 $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ b+3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{B}$ y $|A| = b^2 - 3b + 2$

b.2 $|A| = 0 \Longrightarrow b = 1 \wedge b = 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall b \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

b.3 $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & b & 1 & b+3 \\ 1 & 1 & b & 4 \end{array}\right)$

☛ Si $b \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $b = 1$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$
Sistema incompatible (no tiene solución)

☛ Si $b = 2$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema incompatible (no tiene solución)

b.4 Si $b = 0$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$

yoquieroaprobar.es

$$\begin{cases} -z = -2 \Longrightarrow z = 2 \\ -2y - 2 = -9 \Longrightarrow y = \dfrac{7}{2} \\ x + \dfrac{7}{2} + 2 = 6 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{7}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

;; www.musat.net ;;