Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2026

Problema 1 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule, si existe, la matriz $D = (AB+I)^{-1}$, donde M^{-1} significa la matriz inversa de M e I es la matriz identidad.

b) Obtenga, si existe, el valor de k para que se verifique $AA^t - kB^tB = C$, donde M^t representa la matriz transpuesta de la matriz M.

Solución:

a.1. Tenemos $\underset{2\times3}{A} \cdot \underset{3\times2}{B} = \underset{2\times2}{AB} \Longrightarrow \underset{2\times2}{I}$

$$D = (AB+I)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \overset{|AB+I|\neq0}{=} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

a.2. $AA^t - kB^tB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 11-2k & 3-k \\ 3-k & 5-2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 11-2k = 5 \\ 3-k = 0 \\ 5-2k = -1 \end{cases} \Longrightarrow k = 3$$

Problema 2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k & -k \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Averigüe para qué valores de k la matriz A es regular.

b) Para $k = 1$, calcule A^{-1}.

c) Para $k = 1$, resuelva $AX - A = 5(B \cdot C)^t$.

Solución:

a.1 Una matriz es regular si es invertible:
$|A| = 6 - k = 0 \Longrightarrow k = 6 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall k \in \mathbb{R} - \{6\}$

a.2 Si $k = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/5 & 1/5 & -1 \end{pmatrix}$

a.3 Para $k = 1$:
$AX - A = 5(BC)^t \Longrightarrow AX = 5(BC)^t + A \Longrightarrow X = 5A^{-1}(BC)^t + I =$
$5\begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/5 & 1/5 & -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]^t + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -14 & 9 \\ -5 & 30 & -10 \\ -1 & -12 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -1 & -14 & 9 \\ -5 & 31 & -10 \\ -1 & -12 & 8 \end{pmatrix}$

Problema 3 Haroun se ha propuesto seguir un plan de entrenamiento mensual que combine rutinas de tres influencers de fitness: Sergio Peinado, Patry Jordán y Coco Constans. En total, deben ser 18 rutinas al mes. Las rutinas de Sergio Peinado incluyen 4 ejercicios de cardio, las de Patry Jordán, 3, y las de Coco Constans, 2. Haroun ha decidido hacer exactamente 59 ejercicios de cardio en total. Además, quiere que el número de rutinas de Sergio Peinado sea el doble que el número de rutinas de Coco Constans.

a) Plantee un sistema de ecuaciones que nos permita saber cuántas rutinas de cada influencer de fitness debe incluir Juan en su plan de entrenamiento.

b) Resuelva razonadamente el sistema planteado.

Solución: Sean x el número de rutinas de Sergio, y de Patry y z de Coco.

a) $\begin{cases} x + y + z = 18 \\ 4x + 3y + 2z = 59 \\ x = 2z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ 4x + 3y + 2z = 59 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ rutinas} \\ y = 3 \text{ rutinas} \\ z = 5 \text{ rutinas} \end{cases}$

b) Resolvemos por Gauss: (primero ordeno las ecuaciones)
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 18 \\ 4 & 3 & 2 & 59 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 18 \\ 0 & 3 & 10 & 59 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{bmatrix} =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única)

$$\begin{cases} z = 5 \\ y + 15 = 18 \Longrightarrow y = 3 \\ x - 10 = 0 \Longrightarrow x = 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Juan tiene que hacer 10 rutinas de Sergio, 3 de Patry y 5 de Coco.

;; www.musat.net ;;