Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2026

Problema 1 (2,5 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 puntos) Calcule la matriz C tal que $(I + 2C^t)^{-1} = A$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

b) (1 punto) Calcule, si es posible, la matriz D tal que $D^t = \dfrac{B^t B}{|BB^t|}$.

Nota: para cualquier matriz M, M^t indica su matriz traspuesta.

Solución:

a) $(I + 2C^t)^{-1} = A \Longrightarrow \left[(I + 2C^t)^{-1}\right]^{-1} = A^{-1} \Longrightarrow I + 2C^t = A^{-1} \Longrightarrow$

$C^t = \dfrac{1}{2}(A^{-1} - I) \Longrightarrow C = \left[\dfrac{1}{2}(A^{-1} - I)\right]^t = \dfrac{1}{2}\left(A^{-1} - I\right)^t$

$A^{-1} - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \dfrac{1}{2}\left(A^{-1} - I\right)^t = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^t = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B^t B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$BB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |BB^t| = 3$

$D^t = \dfrac{B^t B}{|BB^t|} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{D=(D^t)^t}$

$D = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Problema 2 (2,5 puntos) El azafrán ecológico es una especia culinaria muy apreciada y costosa. Una empresa lo envasa y comercializa en distintos formatos: sobres de papel reciclado, cajas de plástico y cajas de metal. Cada uno de ellos se envasa en una línea de envasado diferente. Se sabe que el total del azafrán pendiente de envasar a última hora de un día determinado se podría distribuir bien en 15 sobres de papel y 4 cajas de plástico, o bien en 4 cajas de plástico y 3 cajas de metal. Por otra parte, el contenido de un sobre

de papel más el de una caja de plástico es 5 gramos inferior que el de una caja de metal. Además, si al total del contenido de 5 cajas de plástico se le añade un gramo más de azafrán, se dobla la capacidad conjunta de los otros dos envases. Indique cuántos gramos de azafrán contiene cada uno de los envases en que puede comercializarse el azafrán.

Solución:

Sean x los gramos contenidos en una caja de papel, y de plástico y z de metal.

$$\begin{cases} 15x+4y=4y+3z \\ x+y=z-5 \\ 5y+1=2(x+z) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x-z=0 \\ x+y-z=-5 \\ 2x-5y+2z=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=7 \\ z=15 \end{cases}$$

Resolvemos por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-5F_1 \\ F_3-2F_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & 25 \\ 0 & -7 & 4 & 11 \end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3-7F_2 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & 25 \\ 0 & 0 & -8 & -120 \end{array}\right)\Longrightarrow \begin{cases} -8z=-120 \Longrightarrow z=15 \\ -5y+60=25 \Longrightarrow y=7 \\ x+7-15=-5 \Longrightarrow x=3 \end{cases}$$

La caja de papel contiene 3 gramos, la de plástico 7 gramos y la de metal 15 gramos.

Problema 3 (2,5 puntos) Considere las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 puntos) Calcule la matriz X en la ecuación matricial $AXB=A+B$.

b) (1 punto) Calcule el determinante $|C^2B|$, siendo $C=2(A^{-1})^t$.
Nota: M^t denota la matriz traspuesta de la matriz M.

Solución:

a.1. Tenemos $|A|=1 \Longrightarrow \exists A^{-1}=\begin{pmatrix} -3/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/4 & 1 & -3/4 \end{pmatrix}$ y

$|B|=\dfrac{1}{8} \Longrightarrow \exists B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$AXB=A+B \Longrightarrow X=A^{-1}(A+B)B^{-1}=(I+A^{-1}B)B^{-1}=B^{-1}+A^{-1}=$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/4 & 1 & -3/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1 & 13/4 \end{pmatrix}$

a.2. $|C| = |2(A^{-1})^t| = 2^3|A^{-1}| = 8 \cdot \dfrac{1}{|A|} = 8$

$|C^2| = |C|^2 = 64$

$|C^2B| = |C^2| \cdot |B| = 64 \cdot \dfrac{1}{8} = 8$

Problema 4 (2,5 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a.

$$\begin{cases} 3x + ay = 1 \\ 2x - y + az = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Discuta la solución del sistema para los diferentes valores de a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para el valor $a = 3$.

Solución:

a) Sea $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & a & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a^2 + 5a - 6 = 0 \Longrightarrow a = -6$ y $a = 1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-6, 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = -6$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \longleftrightarrow F_3 \\ F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 3F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema incompatible}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \longleftrightarrow F_3 \\ F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 10 & -6 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

yoquieroaprobar.es

b) Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \longleftrightarrow F_3 \\ F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 12 & -6 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 12F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -18 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible determinado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -18z = 2 \Longrightarrow z = -\dfrac{1}{9} \\ 5y + \dfrac{1}{9} = -1 \Longrightarrow y = -\dfrac{2}{9} \\ x + \dfrac{6}{9} - \dfrac{2}{9} = 1 \Longrightarrow x = \dfrac{5}{9} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{9} \\ y = -\dfrac{2}{9} \\ z = -\dfrac{1}{9} \end{array}\right.$$

www.musat.net