Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Octubre 2026

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 11 \end{vmatrix} = 0,\ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -1 \end{vmatrix} = 0,\ |A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 11 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 3 & -1 \\ 2 & m+1 & 0 \\ m & -5 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.

b) Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} m & m-1 & -1 \\ m+1 & 2 & 1 \\ 3 & m+1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2m^2 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

Si $m = -1$ o $m = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

Si $m \neq -1$ y $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 3/2 & -1/2 \\ -5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

www.matesatmet.es

Problema 3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcular A^n y en particular A^{2026}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{2026} = \begin{pmatrix} 1 & 2026 & 2026 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -a+2c & -b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 2a-b \\ -c & 2c-d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -a+2c = -a \Longrightarrow c = 0 \\ -b+2d = 2a-b \Longrightarrow d = a \\ -c = -c \Longrightarrow c = c \\ -d = 2c-d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Problema 5 El azafrán ecológico es una especia culinaria muy apreciada y costosa. Una empresa lo envasa y comercializa en distintos formatos: sobres de papel reciclado,

www.roma.unsa.edu.ar

cajas de plástico y cajas de metal. Cada uno de ellos se envasa en una línea de envasado diferente. Se sabe que el total del azafrán pendiente de envasar a última hora de un día determinado se podría distribuir bien en 15 sobres de papel y 4 cajas de plástico, o bien en 4 cajas de plástico y 3 cajas de metal. Por otra parte, el contenido de un sobre de papel más el de una caja de plástico es 5 gramos inferior que el de una caja de metal. Además, si al total del contenido de 5 cajas de plástico se le añade un gramo más de azafrán, se dobla la capacidad conjunta de los otros dos envases. Indique cuántos gramos de azafrán contiene cada uno de los envases en que puede comercializarse el azafrán.

Solución:

Sean x los gramos contenidos en una caja de papel, y de plástico y z de metal.

$$\left\{\begin{array}{l} 15x+4y=4y+3z \\ x+y=z-5 \\ 5y+1=2(x+z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x-z=0 \\ x+y-z=-5 \\ 2x-5y+2z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=7 \\ z=15 \end{array}\right.$$

Resolvemos por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2-5F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & 25 \\ 0 & -7 & 4 & 11 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3-7F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & 25 \\ 0 & 0 & -8 & -120 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -8z=-120 \Longrightarrow z=15 \\ -5y+60=25 \Longrightarrow y=7 \\ x+7-15=-5 \Longrightarrow x=3 \end{array}\right.$$

La caja de papel contiene 3 gramos, la de plástico 7 gramos y la de metal 15 gramos.

www.matesfacil.com