# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

**Febrero 2027**

**Problema 1 Responde sólo a uno de los dos ejercicios a o b.**

a) Sean la recta $r \equiv x = y - 1 = -z$ , y el plano $\pi \equiv -x + 2y + z + A = 0$.

a.I Discute la posición relativa de la recta $r$ y el plano $\pi$ en función de los valores del parámetro $A$.

a.II Calcula la distancia de la recta $r$ al plano $\pi$ en función de los valores del parámetro $A$.

b) Sean los puntos $A = (1, 1, 2)$ y $B = (-1, 0, 3)$.

b.I Encuentra la ecuación del plano $\pi$ que cumple que $A$ y $B$ son simétricos con respecto a $\pi$.

b.II ¿Cuál es la distancia de $A$ a $\pi$?

**Solución:**

a) (2 puntos) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ P_r(0, 1, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

a.I Sustituimos $r$ en $\pi$:

$$-(\lambda) + 2(1 + \lambda) + (-\lambda) + A = 0 \implies 2 + A = 0 \implies$$

Si $A = -2 \implies r \subset \pi$ y si $a \neq -2 \implies r \parallel \pi$

a.II $d(r, \pi) \overset{A=-2}{=} 0$ dado que $r \subset \pi$

$d(r, \pi) \overset{A\neq -2 \ r\parallel\pi}{=} d(P_r, \pi) = \dfrac{|0 + 2 + 0 + A|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \dfrac{|2 + A|}{\sqrt{6}}$

b) (2 puntos)

b.I Se trata de encontrar el plano mediador entre $A$ y $B$, es decir, hay que encontrar el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ tales que $d(A, P) = d(B, P) \implies |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$:
$|(x - 1, y - 1, z - 2)| = |(x + 1, y, z - 3)| \implies$
$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2} \implies$
$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 \implies 2x + y - z + 2 = 0$

b.II $d(A, \pi) = \dfrac{|2 + 1 - 2 + 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\ u$

**Problema 2 Responde a los dos ejercicios a o b.**

a) Sea $P$ el punto de corte de las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = s \\ y = -1 + s \\ z = 0 \end{cases}$$

Calcula el punto $P'$ simétrico de $P$ con respecto al plano de ecuación $2x+y-z = 3$.

b) Sea $r$ la recta que pasa por el punto $P(1, 7, 4)$ y cuyo vector director es $\overrightarrow{v} = (6, 3, -5)$ y sea $\pi \equiv 2x + y - 3z = -13$.

b.I Calcula el punto de corte de la recta $r$ y el plano $\pi$.

b.II Calcula el ángulo mínimo formado por la recta y el plano.

**Solución:**

a) Hacemos $r_1 = r_2 \Longrightarrow \begin{cases} 1 + t = s \\ 0 = -1 + s \\ -t = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ s = 1 \end{cases} \Longrightarrow P(1, 0, 0)$

Seguimos el siguiente método:

- Calculamos una recta $t \perp \pi \mid P \in t$:
$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ P_t = P(1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$
- Calculamos el punto $P''$ intersección de $t$ con $\pi$:
$$2(1 + 2\lambda) + \lambda - (-\lambda) = 3 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{6} \Longrightarrow P'' \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$
- El punto $P''$ es el punto medio entre $P$ y el que buscamos $P'$:
$$\frac{P + P'}{2} = P'' \Longrightarrow P' = 2P'' - P = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (1, 0, 0) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

b) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{v} = (6, 3, -5) \\ P_r = P(1, 7, 4) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 7 + 3\lambda \\ z = 4 - 5\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b.I Sustituimos $r$ en $\pi$:
$$2(1 + 6\lambda) + (7 + 3\lambda) - 3(4 - 5\lambda) = -13 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow P' \left(-1, 6, \frac{17}{3}\right)$$

b.II $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_\pi}| \cdot |\overrightarrow{u_r}|} = \dfrac{|(2, 1, -3) \cdot (6, 3, -5)|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{70}} = \dfrac{30}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{70}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \alpha = 73^\circ 23' 55''.$

2; WWW.LIUAT.NET