Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2027

Problema 1 Considere el plano $\pi : 2x - y + 3z - 5 = 0$ y la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

a) Estudie la posición relativa de r y π.

b) Si r corta a π en un solo punto, calcule dicho punto y el ángulo que forma r con π. Si r es paralela a π, calcule la distancia de r a π.

Solución:

a) $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{-1} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ sustituimos en π:

$2(1 + 2\lambda) - (-1 + \lambda) + 3(2 - \lambda) - 5 = 0 \Longrightarrow !4 = 0! \Longrightarrow r \parallel \pi$

b) $d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \dfrac{|2 + 1 + 6 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \dfrac{4}{\sqrt{14}} = \dfrac{2\sqrt{14}}{7}\ u$

Problema 2 Encuentra la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-2}; \quad s \equiv \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Solución:

$r : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-2}{-2} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -2) \\ P_r(0, -3, 2) \end{cases}$ y

$s : \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (3, 1, 2) \\ P_s(-4, 1, -1) \end{cases}$

La recta $t \perp r, s$ tiene como vector director:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4, -8, -2) = 2(2, -4, -1)$$

Vamos a calcular t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (2, -4, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -2) \\ P_r(0, -3, 2) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x & y+3 & z-2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9x + 3y + 6z - 3 = 0$$

$$\pi_1 : 3x + y + 2z - 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (2,-4,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (3,1,2) \\ P_s(-4,1,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z+1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7x-7y+14z-7=0$$

$$\pi_2 : x+y-2z+1=0$$

$$t : \begin{cases} 3x+y+2z-1=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1-2\mu \\ y = -2+4\mu \\ z = \mu \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = -(2,-4,-1) \\ P_t(1,-2,0) \end{cases}$$

$$t : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z}{-1}$$

Problema 3 Encuentra la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $A(2,4,-2)$ y corta a las rectas

$$s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \text{ y } r \equiv \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -2 \\ z = 1+3\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Solución:

$s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1,2,1) \\ P_s(2,-1,0) \end{cases}$ y

$r : \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -2 \\ z = 1+3\lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,0,3) \\ P_r(-1,-2,1) \end{cases}$

Calculamos la recta t que pasa por $A(2,4,-2)$ y corta a s y r como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_rA} = (3,6,-3) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,0,3) \\ P_r(-1,-2,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(3x-2y-z)=0$$

$$\pi_1 : 3x-2y-z=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_sA} = (0,5,-2) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,2,1) \\ P_s(2,-1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9x+2y+5z-16=0$$

$$\pi_2 : 9x+2y+5z-16=0$$

$$t : \begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ 9x+2y+5z-16=0 \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = \mu \\ y = -2+3\mu \\ z = 4-3\mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \Longrightarrow t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1,3,-3) \\ P_t(0,-2,4) \end{cases}$$

$$t : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-3}$$