Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2027

Problema 1 Responda a una de las dos preguntas siguientes a o b:

a) Sean las rectas $r_1 \equiv (x.y, z) = (1 + t, 1, 0)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (1 + s, s, 0)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

a.1. Estudie la posición relativa de las rectas r_1 y r_2.

a.2. Halle una recta r_3 tal que las intersecciones de r_1, r_2 y r_3 formen un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa está contenida en r_2 y tenga longitud $\sqrt{2}$.

b) Se consideran el punto $P(1, 2, 1)$ y el plano de ecuación $2x - 2y + z = 1$. Se traza un cubo con una cara en el plano y un vértice en el punto P.

b.1. Determine la longitud del lado de dicho cubo y su volumen.

b.2. Halle otro vértice del cubo.

Solución:

a) Tenemos $r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 0, 0) \\ P_{r_1}(1, 1, 0) \end{cases}$ y $r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (1, 1, 0) \\ P_{r_2}(1, 0, 0) \end{cases}$

a.1. $\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}} = (0, 1, 0)$ y $[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$ r_1 y r_2 no se cruzan, están en el mismo plano.

Como Rango$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow$ r_1 y r_2 se cortan (no pueden ser ni paralelas ni coincidentes)

a.2. Calculamos el punto P de intersección de r_1 y r_2:

$\begin{cases} x = 1 + t = 1 + s \\ y = 1 = s \\ z = 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow t = s = 1 \Longrightarrow P(2, 1, 0)$

Sea $Q \in r_2 \Longrightarrow Q(1 + s, s, 0)$ y $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2} \Longrightarrow |(1 + s, s, 0) - (2, 1, 0)| = |(s - 1, s - 1, 0)| = |s - 1|(1, 1, 0) = |s - 1|\sqrt{2} = \sqrt{2} \Longrightarrow |s - 1| = 1 \Longrightarrow$ $\begin{cases} s - 1 = 1 \Longrightarrow s = 2 \Longrightarrow Q_1(3, 2, 0) \\ s - 1 = -1 \Longrightarrow s = 0 \Longrightarrow Q_2(1, 0, 0) \end{cases}$. Por otra parte sea $\overrightarrow{u_{r_3}} = (a, b, c)$ un vector $\overrightarrow{u_{r_3}} \perp \overrightarrow{u_{r_1}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_{r_3}} \cdot \overrightarrow{u_{r_1}} = (a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = a = 0$ y por estar las tres rectas en el mismo plano $c = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{r_3}} = (0, b, 0) \Longrightarrow \overrightarrow{u_{r_3}} = b(0, 1, 0)$ y podemos coger como vector director de la recta r_3 al vector $\overrightarrow{u_{r_3}} = (0, 1, 0)$:

$r_3 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_3}} = (0, 1, 0) \\ P_{r_3} = Q_1(3, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow r_3 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ o bien} \\ z = 0 \end{cases}$

$r_3 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_3}} = (0, 1, 0) \\ P_{r_3} = Q_2(1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow r_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

b) Sean $P(1,2,1)$ y $\pi : 2x - 2y + z = 1$

b.1. La longitud del lado del cubo es $d(P,\pi) = \dfrac{|2-4+1-1|}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{2}{3}\ u$

El volumen es $V = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}\ u^3$

b.2. Calculamos el vértice Q intersección de una recta $r \perp \pi$ que pase por P con el plano π:

$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,-2,1) \\ P_r = P(1,2,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2-2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Esta recta corta al plano π en uno de los vértices del cubo:

$2(1+2\lambda) - 2(2-2\lambda) + (1+\lambda) = 1 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{2}{9} \Longrightarrow Q\left(\dfrac{13}{9}, \dfrac{14}{9}, \dfrac{11}{9}\right)$

Problema 2 Responda a una de las dos preguntas siguientes a o b:

a) Sean la recta $r \equiv (x,y,z) = (1+t, 1+t, 1+t)\ \ t \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi \equiv x+y+z = 0$.

a.1. Determine la posición relativa de la recta r y el plano π.

a.2. Halle los puntos de la recta r que se encuentran a distancia $\sqrt{3}$ del plano π.

b) Sea la recta $r \equiv (x,y,z) = (t,1,t),\ \ t \in \mathbb{R}$. Se pide:

b.1. Hallar dos planos que se corten en la recta r, que formen entre sí un ángulo de 90° y uno de ellos pase por el punto $(0,0,1)$.

b.2. Justificar que todas las rectas contenidas en los dos planos obtenidos en el apartado anterior que no tienen puntos en común con la recta r son necesariamente paralelas entre sí.

Solución:

a) Tenemos $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$

a.1. Sustituyendo r en π:
$(1+t)+(1+t)+(1+t) = 0 \Longrightarrow t = -3 \Longrightarrow$ la recta r y el plano π se cortan en el punto $P(4,4,4)$.

a.2. Un punto genérico de la recta r puede ser $P_r(1+t, 1+t, 1+t)$ cuya distancia al plano π es:
$d(P_r,\pi) = \dfrac{|(1+t)+(1+t)+(1+t)|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{|3+3t|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Longrightarrow |3+3t| = 3|1+t| = 3 \Longrightarrow |1+t| = 1 \Longrightarrow \begin{cases} 1+t = 1 \Longrightarrow t = 0 \Longrightarrow P_1(1,1,1) \\ 1+t = -1 \Longrightarrow t = -2 \Longrightarrow P_2(-1,-1,-1) \end{cases}$

b) Sea $r:(x,y,z)=(t,1,t) \Longrightarrow r:\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=t \end{cases} \Longrightarrow r:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}$

b.1. Ponemos r como intersección de dos planos:
$\begin{cases} \dfrac{x}{1}=\dfrac{z}{1} \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y-1=0 \end{cases}$
Calculamos un haz de planos que contenga a esta recta en su intersección: $x-z+\lambda(y-1)=0$ y como $(0,0,1)$ pertenece a uno de los planos que buscamos $0-1+\lambda(0-1)=0 \Longrightarrow -1-\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-1$ y sustituyendo en el haz de planos tenemos $\pi_1: x-z-(y-1)=0 \Longrightarrow \pi_1: x-y-z+1=0$.
Para calcular el otro plano $\pi_2 \perp \pi_1$ tenemos:
$\pi_2:\begin{cases} \overrightarrow{u_{\pi_1}}=(1,-1,-1) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,0,1) \\ P_r(0,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2:\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-x-2y+z+2=0$
Luego $r:\begin{cases} x-y-z+1=0 \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$.

b.2. Sea la recta $s \in \pi_1 \Longrightarrow (\overrightarrow{u_s}, P_s)$:
$\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix}=2 \Longrightarrow r$ y s se cortan en un punto de r lo que contradice el enunciado, luego $\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix}=1 \Longrightarrow r \parallel s$ o son coincidentes. Como no pueden tener puntos comunes tiene que ser $r \parallel s$.
Análogo razonamiento para cualquier recta de π_2 y concluimos que todas las rectas de π_1 que no tienen puntos comunes con r son paralelas a las de π_2 que no tienen puntos comunes con r.

Problema 3 Resuelva solo uno de los apartados a o b siguientes:

a) a.1 Sean $\pi_1: mx+y-z=m-2$, $\pi_2: x+y+2z=0$ y $\pi_3: 3x+my+z=m-2$ tres planos. Estudie su posición relativa en función del parámetro m.

a.2 En el caso de que sean secantes en un punto, ¿podrán tener ese punto las dos primeras coordenadas diferentes?

b) b.1 Considera el triángulo de vértices $A(0,0,0)$, $B(2,4,0)$ y $C(5,0,0)$. Utilizando productos vectoriales, calcula su área, y comprueba el resultado mediante otro método.

b.2 Calcule la distancia del punto $P(2,4,2)$ al plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $C(5,0,0)$ y $D(0,0,3)$.

Solución:

a) a.1 $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & m-2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & m & 1 & m-2 \end{array}\right)$, $|A|=8-2m^2=0 \Longrightarrow m=\pm 2$.

- ☛ Si $m \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{nº de}$ incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única) Los tres planos se cortan en un punto.
- ☛ Si $m = 2$:
  $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Se trata de un sistema homogéneo y $|A| = 0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones). Los tres planos se cortan en una recta ya que no hay planos coincidentes.
- ☛ Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + F_1 \\ 2F_3 + 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -20 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -64 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

No tiene solución y los planos se cortan dos a dos formando un prisma triangular.

a.2 Resolvemos el sistema en función de m: (Por Cramer)

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} m-2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ m-2 & m & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{m-2}{m+2}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} m & m-2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & m-2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{m-2}{m+2}$ y $z = \dfrac{\begin{vmatrix} m & 1 & m-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & m-2 \end{vmatrix}}{|A|} = -\dfrac{m-2}{m+2}$. Luego las dos primeras coordenadas son iguales.

b) b.1 $\overrightarrow{AB} = (2, 4, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (5, 0, 0)$.

$$S_t = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(0, 0, -20)| = 10\ u^2$$

Otra forma:

Voy a utilizar la **fórmula de Herón**: Sea el triángulo de lados a, b y c cuyo semiperímetro es $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Entonces el área del triángulo es $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Tenemos $|\overrightarrow{AB}| = |(2, 4, 0)| = 2\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{AC}| = |(5, 0, 0)| = 5$ y $|\overrightarrow{BC}| = |(3, -4, 0)| = 5$.

$p = \dfrac{2\sqrt{5} + 5 + 5}{2} = 5 + \sqrt{5}$

$$S = \sqrt{(5+\sqrt{5})(5+\sqrt{5}-2\sqrt{5})(5+\sqrt{5}-5)(5+\sqrt{5}-5)} =$$
$$\sqrt{(5+\sqrt{5})\cdot(5-\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \sqrt{(25-5)\cdot 5} = 10\ u^2\ q.e.d.$$

;; www.musat.net ;;