Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2026

Problema 1 Un equipo de ingenieros está trabajando en un nuevo modelo de dron para tomar fotografías del estado del tráfico. Elegido un sistema de coordenadas, el dron tiene $A(1,0,2)$ como punto de partida y un cierto tramo de autopista está contenido en el plano $\pi : x+y+2z+1=0$. Las fotografías se deben tomar perpendicularmente al plano π. Se toma el punto $C(0,-3,1)$ de π para calibrar el dron.

a) Determine la distancia del dron en el punto de partida A al plano π y halle una ecuación del plano en el que el dron vuela manteniendo en todo momento la misma distancia al plano π. Este plano recibe el nombre de plano de vuelo.

b) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:

b.1 El dron se mueve en línea recta en el plano de vuelo desde el punto de partida A al punto más cercano a C. Halle una ecuación de la recta que contiene la trayectoria lineal que recorre el dron para fotografiar C.

b.2 La fotografía obtenida de C a esa distancia no tiene buena definición. Se decide acercar el dron desde el punto de partida A descendiendo perpendicularmente al plano π para situarse en A', a la mitad de la distancia original. Calcule el ángulo formado por el plano π y la recta que pasa por C y A'.

Solución:

a) $D(A,\pi) = \dfrac{|1+0+4+1|}{\sqrt{1+1+4}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\ u$

$\pi' \parallel \pi \Longrightarrow \pi' : x+y+2z+K=0 \xrightarrow{A\in\pi'} 1+0+4+K=0 \Longrightarrow K=-5 \Longrightarrow \pi' : x+y+2z-5=0$

b) b.1 Calculamos una recta $r \perp \pi$ tal que $C \in r$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,2) \\ P_r = C(0,-3,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculamos el punto de corte de r con π':

$(\lambda) + (-3+\lambda) + 2(1+2\lambda) - 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow C'(1,-2,3)$

La recta s buscada pasa por A y C':

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{AC'} = (1,-2,3) - (1,0,2) = (0,-2,1) \\ P_s = A(1,0,2) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2\mu \\ z = 2+\mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

b.2 Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $A \in t$:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,2) \\ P_t = A(1,0,2) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculamos el punto de corte de t con π:
$(1+\lambda)+(\lambda)+2(2+2\lambda)+1=0 \Longrightarrow \lambda=-1 \Longrightarrow A''(0,-1,0)$
El punto $A'=\dfrac{A+A''}{2}=\dfrac{(1,0,2)+(0,-1,0)}{2}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)$
Calculamos la recta h que pasa por C y A':

$$h:\begin{cases}\overrightarrow{u_h}=\overrightarrow{A'C}=(0,-3,1)-\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)=-\dfrac{1}{2}(1,5,0)\\ P_h=C(0,-3,1)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$h:\begin{cases}x=\beta\\ y=-3+5\beta \quad \forall\beta\in\mathbb{R}\\ z=1\end{cases}$$

Calculamos el ángulo formado por h y π:

$$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha=\frac{\overrightarrow{u_h}\cdot\overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_h}|\cdot|\overrightarrow{u_\pi}|}=\frac{(1,5,0)\cdot(1,1,2)}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{156}}=\frac{\sqrt{39}}{13}\Longrightarrow$$

$$\alpha=28^\circ 42' 38''$$

Problema 2 Dados el plano $\pi: 2x+2y-z=13$ y la recta

$$r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{4}$$

a) Halle el punto simétrico del punto $P(2,0,0)$ respecto al plano π.

b) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b.1. Halle la distancia entre el plano π y la recta r.

b.2. Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π.

Solución:

a) Seguimos los siguientes pasos:

- Calculamos una recta $t\perp\pi$ tal que $P\in t$:

$$t:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(2,2,-1)\\ P_t=P(2,0,0)\end{cases}\Longrightarrow t:\begin{cases}x=2+2\lambda\\ y=2\lambda\\ z=-\lambda\end{cases}$$

- Calculamos el punto P' de corte de t y π:
$2(2+2\lambda)+2(2\lambda)-(-\lambda)=13\Longrightarrow\lambda=1\Longrightarrow P'(4,2,-1)$
- El punto P' es el punto medio entre P y el punto buscado P'':
$\dfrac{P''+P}{2}=P'\Longrightarrow P''=2P'-P=(8,4,-2)-(2,0,0)\Longrightarrow P''(6,4-2)$

b) b.1 Tenemos $\overrightarrow{u_\pi}=(2,2,-1)$ y $r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,1,4)\\ P_r(2,0,0)\end{cases}$
$\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}=(1,1,4)\cdot(2,2,-1)=2+2-4=0\Longrightarrow r\parallel\pi$ o $r\subset\pi$. Sustituimos P_r

en $\pi \Longrightarrow 4+0-0 \neq 13 \longrightarrow P_r \notin \pi \Longrightarrow r \parallel \pi$

$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \dfrac{|4+0-0-13|}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{9}{3} = 3\ u.$

b.2 El plano buscado es $\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (2,2,-1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,4) \\ P_r(2,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9x - 9y - 18 = 0 \Longrightarrow \pi' : x - y - 2 = 0.$

Problema 3 Sea r la recta que pasa por $A(1,2,-5)$ y $B(2,4,-11)$, sea s la recta dada por la intersección de los planos $x-2y+3z=3$, $x-y=0$, y sea t la recta paralela a s que pasa por $C(1,0,0)$.

a) Determine la posición relativa de r y s.

b) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b.1. Halle la distancia entre s y t.

b.2. Halle el coseno del ángulo que forman r y s.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (1,2,-6) \\ P_r = A(1,2,-5) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = -5-6\lambda \end{cases}$

$s : \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ x-y=0 \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = -3+3\mu \\ y = -3+3\mu \\ z = \mu \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (3,3,1) \\ P_s(-3,-3,0) \end{cases}$

$\overrightarrow{P_rP_s} = (-3,-3,0) - (1,2,-5) = (-4,-5,5)$

Estudiamos la posición relativa de las rectas r y s:

$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} -4 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ y $\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow$

r y s se cortan en un punto.

b) b.1 $t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_s} = (3,3,1) \\ P_t = C(1,0,0) \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_tP_s} = (-3,-3,0) - (1,0,0) = (-4,-3,0)$

Como $s \parallel t \Longrightarrow d(s,t) = d(P_t,s) = \dfrac{|\overrightarrow{P_tP_s} \times \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \dfrac{\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -4 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{9+9+1}} = \dfrac{|(-3,4,-3)|}{\sqrt{19}} = \dfrac{\sqrt{34}}{\sqrt{19}} = \dfrac{\sqrt{646}}{19}\ u$

b.2 $\cos(\widehat{r,s}) = \dfrac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_s}| \cdot |\overrightarrow{u_s}|} = \dfrac{|(1,2,-6)\cdot(3,3,1)|}{|(1,2,-6)| \cdot |(3,3,1)|} = \dfrac{|3+6-6|}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{19}} = \dfrac{3}{\sqrt{779}}$