Examen de Matemáticas II (Selectividad - Modelo 2027)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Pregunta 1 (2 puntos) Dos rectas r y s en un mismo plano π se cortan perpendicularmente en un punto C. La recta r está determinada por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(0,2,4)$ y la recta s está determinada por $A(0,4,2)$ y el punto C.

a) (1 punto) Halle las ecuaciones del plano π y las coordenadas de C.

b) (1 punto) Halle un punto R de la recta s tal que la distancia de R a Q sea igual a la distancia de P a Q.

Solución:

$$r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{PQ}=(0,2,4)-(1,0,2)=(-1,2,2)\\ P_r=P(1,0,2)\end{cases}\implies r:\begin{cases}x=1-t\\ y=2t\\ z=2+2t\end{cases}\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

$$s:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{u_s}\wedge r,s\in\pi\\ P_s=A(0,4,2)\end{cases}$$

a) $$\pi:\begin{cases}\overrightarrow{AP}=(1,0,2)-(0,4,2)=(1,-4,0)\\ \overrightarrow{AQ}=(0,2,4)-(0,4,2)=(0,-2,2)=2(0,-1,1)\\ A(0,4,2)\end{cases}\implies\pi:\begin{vmatrix}x & y-4 & z-2\\ 1 & -4 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\implies$$

$$\pi: 4x+y+z-6=0$$

$$\overrightarrow{u_s}\perp\overrightarrow{u_\pi}\wedge\overrightarrow{u_s}\perp\overrightarrow{u_r}\implies\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_\pi}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -1 & 2 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}=(0,9,-9)=9(0,1,-1)$$

$$s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(0,1,-1)\\ P_s=A(0,4,2)\end{cases}\implies s:\begin{cases}x=0\\ y=4+\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases}\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Cálculo del punto de corte:

$$\begin{cases}x=0=1-t\\ y=4+\lambda=2t\\ z=2-\lambda=2+2t\end{cases}\implies\begin{cases}t=1\\ \lambda=-2\end{cases}\xrightarrow{sustityendo\ t=1\vee\lambda=-2}C(0,2,4)=Q$$

b) Sea $R(0,4+\lambda,2-\lambda)\in s$ y se tiene que cumplir $d(R,Q)=d(P,Q)\implies|\overrightarrow{QR}|=|\overrightarrow{PQ}|\implies$ $|(0,4+\lambda,2-\lambda)-(0,2,4)|=|(-1,2,2)|\implies|(0,2+\lambda,-2-\lambda)|=\sqrt{1+4+4}=3\implies$ $\sqrt{0+(2+\lambda)^2+(-2-\lambda)^2}=3\implies 2\lambda^2+8\lambda-1=0\implies\lambda=-2\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases}\lambda=-2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\implies R_1\left(0,2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2},4-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)\\ \lambda=-2-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\implies R_2\left(0,2-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},4+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

Pregunta 2 (2 puntos) Sea la función: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

a) (1 punto) Halle las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) (1 punto) Halle $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} (f(x) + 1)\, dx$.

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{-1}{1} = -1 \Longrightarrow y = -1$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \Longrightarrow y = 1$

b) $\displaystyle F(x) = \int \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} + 1\right) dx = \int \frac{2e^x}{e^x + 1}\, dx = 2\ln|e^x + 1| + C$

$\displaystyle\int_0^{\ln(3)} (f(x) + 1)\, dx = F(\ln(3)) - F(0) = 2\ln 4 - 2\ln 2 = 2\ln 2$

Nota: $e^{\ln 3} = t \Longrightarrow \ln e^{\ln 3} = \ln t \Longrightarrow \ln 3 \cdot \ln e = \ln t \Longrightarrow \ln 3 = \ln t \Longrightarrow t = e^{\ln 3} = 3$

Pregunta 3 (2 puntos) Para llegar a tiempo a primera hora al instituto, Ana debe coger a las ocho de la mañana una de las tres líneas, $L1$, $L2$ o $L3$, que parten de la estación de autobuses y tienen parada cerca del instituto. Las probabilidades de poder coger los autobuses a las ocho de la mañana en esta estación son de $2/3$ para $L1$, $4/5$ para $L2$ y $3/5$ para $L3$. Estos tres sucesos son independientes. Si Ana está a las 8 de la mañana en la estación de autobuses, se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que Ana llegue a tiempo a primera hora a su instituto.

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b.1 Calcular la probabilidad de que no pueda coger la línea $L2$ sabiendo que solo puede coger una de las otras dos líneas.

b.2 Calcular la probabilidad de que pueda coger exactamente dos de las tres líneas.

Solución:

Sean $L1$ coge autobús de línea $L1$, $L2$ de la línea $L2$, $L3$ de la línea $L3$, $\overline{L1}$ no coge autobús de línea $L1$, $\overline{L2}$ no coge autobús de línea $L2$ y $\overline{L3}$ no coge autobús de línea $L3$. Los sucesos $L1$, $L2$ y $L3$ son independientes.

Tenemos: $P(L1) = \dfrac{2}{3}$, $P(\overline{L1}) = \dfrac{1}{3}$, $P(L2) = \dfrac{4}{5}$, $P(\overline{L2}) = \dfrac{1}{5}$, $P(L3) = \dfrac{3}{5}$ y $P(\overline{L3}) = \dfrac{2}{5}$.

a) $P(\text{llega a tiempo}) = 1 - P(\text{llega tarde}) = 1 - P(\overline{L1} \cap \overline{L2} \cap \overline{L3}) = 1 - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = 1 - \dfrac{2}{75} = \dfrac{73}{75}$

b) b.1 $\displaystyle P(\overline{L2} | (L1 \cap \overline{L3}) \cup (\overline{L1} \cap L3)) = \frac{P(\overline{L2} \cap ((L1 \cap \overline{L3}) \cup (\overline{L1} \cap L3)))}{P((L1 \cap \overline{L3}) \cup (\overline{L1} \cap L3))} =$

$\displaystyle\frac{P((\overline{L2} \cap L1 \cap \overline{L3}) \cup (\overline{L2} \cap \overline{L1} \cap L3))}{P(L1 \cap \overline{L3}) + P(\overline{L1} \cap L3)} = \frac{P(\overline{L2} \cap L1 \cap \overline{L3}) + P(\overline{L2} \cap \overline{L1} \cap L3)}{P(L1 \cap \overline{L3}) + P(\overline{L1} \cap L3)} =$

$\dfrac{\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}} = \dfrac{\frac{7}{75}}{\frac{7}{15}} = \dfrac{1}{5}$

b.2 $P(\text{coge dos líneas}) = P(L1 \cap L2 \cap \overline{L3}) + P(L1 \cap \overline{L2} \cap L3) + P(\overline{L1} \cap L2 \cap L3) =$
$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{34}{75}$

Pregunta 4 (2 puntos) **Responda a uno de los dos apartados siguientes a) o b)**

a) (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (a+2)x + y + z = a \\ x - ay + 3z = 0 \\ 3x + ay + z = 1 \end{cases}$. Se pide:

a.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a.

a.2 (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

b) (2 puntos) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

donde a es un número real.

b.1 (1 punto) Determine para qué valores de a la matriz A^{2026} es invertible.

b.2 (1 punto) Para $a = 0$, pruebe que $A^3 = 2A$ y calcule la matriz A^9.

Solución:

a) a.1 $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & 1 & 1 & a \\ 1 & -a & 3 & 0 \\ 3 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -4a^2 - 4a + 8 = 0 \Longrightarrow a = -2$ y $a = 1$.

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ número de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $a = -2$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \longleftrightarrow F_2 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) =$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & -8 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 8F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right) \Longrightarrow$
Sistema incompatible (no tiene solución)
- ☛ Si $a = 1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$
Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

a.2 $\left\{\begin{array}{l} 3x + y + z = 1 \\ -4y + 8z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} - \mu \\ y = \frac{1}{4} + 2\mu \\ z = \mu \end{array}\right. \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$

b) b.1 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = a(a^2-2) = 0 \Longrightarrow a = 0 \ \wedge a = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow$

$\exists A^{-1} \ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, \pm\sqrt{2}\}$

Si $|A| \neq 0 \Longrightarrow |A^{2026}| = |A|^{2026} \neq 0 \Longrightarrow \exists (A^{2026})^{-1} \ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, \pm\sqrt{2}\}$

b.2 Si $a = 0$:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A$$

$$A^9 = (A^3)^3 = (2A)^3 = 8A^3 = 16A = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 5 (2 puntos) **Responda a uno de los dos apartados siguientes a) o b)**

a) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ ax^2 + bx & \text{si} \quad x \in (2,5) \\ -(x-5)^2 + 15 & \text{si} \quad x \in [5,7] \end{cases}$$

a.1 (1 punto) Halle los valores de a y b para los que la función $f(x)$ es continua en $[0,7]$.

a.2 (1 punto) La longitud de la gráfica de una función $f(x)$ en un intervalo $[x_0, x_1]$ se calcula con la integral $L = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Utilice la fórmula dada para calcular la longitud de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[0,2]$.

b) Se considera la función $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x-1}$.

b.1 (1 punto) Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b.2 (1 punto) Halle, si existen, los puntos de la gráfica de $f(x)$ cuya recta tangente tenga pendiente 1.

Solución:

a) a.1 Las tres ramas son continuas por ser polinomios. Hay que imponer la continuidad en $x = 2$ y en $x = 5$.

- Continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(2x+2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(ax^2+bx) = 4a+2b \\ f(2) = 4 \end{cases} \xrightarrow{\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2)}$$

$6 = 4a + 2b \Longrightarrow 2a + b = 3.$

- Continuidad en $x = 5$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5}(ax^2+bx) = 25a+5b \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5}[-(x-5)^2+15] = 15 \\ f(5) = 25a+5b \end{cases} \xrightarrow{\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = f(5)}$$

$25a + 5b = 15 \Longrightarrow 5a + b = 3.$

☛ $\left\{\begin{array}{l} 2a+b=3 \\ 5a+b=3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=3 \end{array}\right.$

a.2 En la rama $[0,2] \Longrightarrow f(x)=2x+2 \Longrightarrow f'(x)=2$

$l=\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+2^2}\,dx = \sqrt{5}x\Big]_0^2 = 2\sqrt{5}\ u$

b) b.1 $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x-1} \Longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}>0 \Longrightarrow f$ no tiene extremos y es creciente en todo el dominio de la función: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

b.2 $m=f'(a)=\dfrac{1}{(a-1)^2}=1 \Longrightarrow a^2-2a=0 \Longrightarrow a=0 \wedge a=2$

Los puntos de tangencia son:

☛ Si $a=0 \Longrightarrow f(0)=-1 \Longrightarrow (0,-1)$

☛ Si $a=2 \Longrightarrow f(2)=-3 \Longrightarrow (2,-3)$

;; www.inusat.net ;;