Examen de Matemáticas II (Selectividad - Modelo 2027)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Pregunta 1 (2 puntos) Dos rectas r y s en un mismo plano π se cortan perpendicularmente en un punto C. La recta r está determinada por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(0,2,4)$ y la recta s está determinada por $A(0,4,2)$ y el punto C.

a) (1 punto) Halle las ecuaciones del plano π y las coordenadas de C.

b) (1 punto) Halle un punto R de la recta s tal que la distancia de R a Q sea igual a la distancia de P a Q.

Pregunta 2 (2 puntos) Sea la función: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

a) (1 punto) Halle las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) (1 punto) Halle $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} (f(x) + 1)\, dx$.

Pregunta 3 (2 puntos) Para llegar a tiempo a primera hora al instituto, Ana debe coger a las ocho de la mañana una de las tres líneas, $L1$, $L2$ o $L3$, que parten de la estación de autobuses y tienen parada cerca del instituto. Las probabilidades de poder coger los autobuses a las ocho de la mañana en esta estación son de $2/3$ para $L1$, $4/5$ para $L2$ y $3/5$ para $L3$. Estos tres sucesos son independientes. Si Ana está a las 8 de la mañana en la estación de autobuses, se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que Ana llegue a tiempo a primera hora a su instituto.

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b.1 Calcular la probabilidad de que no pueda coger la línea $L2$ sabiendo que solo puede coger una de las otras dos líneas.

b.2 Calcular la probabilidad de que pueda coger exactamente dos de las tres líneas.

Pregunta 4 (2 puntos) **Responda a uno de los dos apartados siguientes a) o b)**

a) (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (a+2)x + y + z = a \\ x - ay + 3z = 0 \\ 3x + ay + z = 1 \end{cases}$. Se pide:

a.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a.

a.2 (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

b) (2 puntos) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

donde a es un número real.

b.1 (1 punto) Determine para qué valores de a la matriz A^{2026} es invertible.

b.2 (1 punto) Para $a = 0$, pruebe que $A^3 = 2A$ y calcule la matriz A^9.

Pregunta 5 (2 puntos) **Responda a uno de los dos apartados siguientes a) o b)**

a) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x \in [0, 2] \\ ax^2 + bx & \text{si} \quad x \in (2, 5) \\ -(x-5)^2 + 15 & \text{si} \quad x \in [5, 7] \end{cases}$$

a.1 (1 punto) Halle los valores de a y b para los que la función $f(x)$ es continua en $[0, 7]$.

a.2 (1 punto) La longitud de la gráfica de una función $f(x)$ en un intervalo $[x_0, x_1]$ se calcula con la integral $L = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Utilice la fórmula dada para calcular la longitud de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$.

b) Se considera la función $f(x) = \dfrac{-2x + 1}{x - 1}$.

b.1 (1 punto) Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b.2 (1 punto) Halle, si existen, los puntos de la gráfica de $f(x)$ cuya recta tangente tenga pendiente 1.

www.ingenet.es