Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2026

Problema 1 (5 puntos)

a) El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada T de orden 3. El vector tensión en la dirección de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $u = Tv$. Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Se pide:

a.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m.

a.2 (0,75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$.

a.3 (0,75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

b) Responda a todos los subapartados siguientes:
Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta. Se pide:

b.1 (0,75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

b.2 (0,75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

b.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

Solución:

a) a.1 $\overline{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 0 & 4 \\ m & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow |T| = 4 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = \pm 2.$

- ☛ Si $m \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \Longrightarrow |T| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(T) = 3 =$Rango$(\overline{T}) =$nº de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (solución única)
- ☛ Si $m = -2$:

$$\overline{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible (no tiene solución)

- ☛ Si $m = 2$:

$$\overline{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

a.2 Para $m = -1$:

$$\overline{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Determinado (solución única)

$$\left\{\begin{array}{l} z = -2 \\ 3y = 12 \Longrightarrow y = 4 \\ 2x - 4 + 0 = 4 \Longrightarrow x = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a.3 Para $m = 2$ tenemos $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $T - \alpha I = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$|T - \alpha I| = -\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 4) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0,\ \alpha = 1$ y $\alpha = 4$

b) b.1 Si $A^t = A^{-1} \Longrightarrow A \cdot A^t = I$:

$$AA^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ q.e.d.}$$

b.2 Por la misma razón del apartado anterior $BB^t = I$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1 \\ b^2 = 1 \Longrightarrow b = \pm 1 \end{array}\right. =$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Habría cuatro matrices cumpliendo los requisitos.

b.3 $BX+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\\1&0\end{pmatrix}\Longrightarrow BX=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&-1\end{pmatrix}\Longrightarrow$

$X=B^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&-1\end{pmatrix}=B^t\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&b\\0&1&0\\a&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-b\\0&1\\a&a\end{pmatrix}$

Problema 2 (2,5 puntos) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}a&3\\b&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

a) (1,5 puntos) Determina a y b para que $A^2=4I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) (1 punto) Para $a=-1$ y $b=1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple $A^2X=B^t$.

Solución:

a) $A^2=4I\Longrightarrow\begin{pmatrix}a&3\\b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&3\\b&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+3a&3a+3\\ab+b&3b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\Longrightarrow$

$$\begin{cases}a^2+3a=4\\3a+3=0\\ab+b=0\\3b+1=4\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}.$$

b) $a=-1$ y $b=1\Longrightarrow A=\begin{pmatrix}-1&3\\1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

$A^2X=B^t\Longrightarrow X=(A^2)^{-1}B^t=(4I)^{-1}B^t=\frac{1}{4}B^t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4&-1/4&1/4\\1/4&1/2&1/4\end{pmatrix}$

Problema 3 (2,5 puntos)

Considera el sistema $\begin{pmatrix}5&-2&-3\\2&0&-2\\3&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

a) (1,75 puntos) Determina los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado.

b) (0,25 punto) Resuelve el sistema, si es posible, para $m=2$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5-m & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -m & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -1-m & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, siempre compatible.
Tenemos $|A| = -m^3 + 4m^2 - 4m = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = 2$.
Si $m \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$ =número de incógnitas y el sistema es compatible determinado, y su única solución es la trivial $x = y = z = 0$.
Si $m = 0$ o $m = 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ Rango(A) <número de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

b) Para $m = 2 \Longrightarrow A = \left(\begin{array}{ccc} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{array}\right)$ y eliminamos la última ecuación:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = \lambda & \\ y = 0 & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda & \end{array}\right.$$

www.inusat.net