Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2026

Problema 1 (2 puntos) **Resuelva todos los apartados del siguiente problema:** Una empresa produce pequeñas cajas con piezas de fruta. Hay tres tipos de cajas, A, B y C. En las cajas de tipo A hay 1 manzana, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo B hay 2 manzanas, 1 pera y 1 naranja. En las cajas de tipo C hay 1 manzana, 2 peras y 1 naranja. Un día prepararon x cajas de tipo A, y cajas de tipo B y z cajas de tipo C, y en total se usaron 400 manzanas, 500 peras y k naranjas.

a) (1 punto) Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas cajas de cada tipo se prepararon.

b) (1 punto) Discuta y resuelva, si se puede, el sistema, dando la solución en términos del parámetro k.

Solución:

a) Sean x cajas de tipo A, y cajas de tipo B y z cajas de tipo C.

	manzanas	peras	naranjas
cajas A	1	1	1
cajas B	2	1	1
cajas C	1	2	1
Total	400	500	k

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+2y+z=400 \\ x+y+2z=500 \\ x+y+z=k \end{cases}$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 400 \\ 1 & 1 & 2 & 500 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado para cualquier valor de $k\in\mathbb{R}$.

Resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 400 & 2 & 1 \\ 500 & 1 & 2 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=3k-900,\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 400 & 1 \\ 1 & 500 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=400-k,\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 400 \\ 1 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}}{|A|}=500-k$$

Problema 2 (2 puntos) Conteste el problema completo.
Calcula los valores posibles de r y t para que $|A|+|B|=4$, sabiendo que

$$A=\begin{pmatrix} t & t & t \\ t & 3+t & -3+t \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ r & r & 3r \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} t & t & t \\ t & 3+t & -3+t \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & 3+t & -3+t \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = t \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & t & t \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \right] =$$

$$t \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} + t \cdot 0 \right] = t \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ r & r & 3r \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} 1+r & r & 3r \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = r \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + r \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right] =$$

$$r \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + r \cdot 0 \right] = r \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4r$$

$|A| + |B| = -4r = 4 \Longrightarrow r = -1$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

Problema 3 (2 puntos) Conteste a uno de los apartados a o b

a) (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado:

$$\begin{cases} (a^2-4)x + (a+2)y + 2z = 4 \\ (4-a^2)x + z = 2 \\ (a^2-4)x + (a+2)y + az = -4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

b) (2 puntos) Dadas las siguientes matrices A y B, calcula $|A \cdot B^{-1}|$ en función del parámetro t. ¿Para qué valores de t no existe $|A \cdot B^{-1}|$?

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ t+1 & t^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ t & 4t & t^2 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a^2-4 & a+2 & 2 & 4 \\ 4-a^2 & 0 & 1 & 2 \\ a^2-4 & a+2 & a & -4 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = (a^2-4)^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2.$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado (teorema de Rouché-Frobenius) (solución única)
- Si $a = -2$ por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones) con dos grados de libertad:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 2 \end{cases} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

☛ Si $a = 2$ por Gauss:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema incompatible (no tiene solución)

b) $|A| = \begin{vmatrix} t+1 & t^2 & 2 \\ t+1 & t^2+t-2 & 2-t \\ t+1 & t^2 & 4 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} 1 & t^2 & 2 \\ 1 & t^2+t-2 & 2-t \\ 1 & t^2 & 4 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] =$
$(t+1)\begin{vmatrix} 1 & t^2 & 2 \\ 0 & t-2 & -t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(t+1)(t-2)$

$|B| = \begin{vmatrix} t & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ t & 4t & t^2 \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} 1 & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ 1 & 4t & t^2 \end{vmatrix} \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = t\begin{vmatrix} 1 & 3t & t^2-1 \\ 0 & t & 2-t \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} = t[t - t(2-t)] = t^2(t-1) = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 1 \Longrightarrow \exists B^{-1}\ \forall t \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Luego $\nexists B^{-1}$ para $t = 0$ o $t = 1$.

$|A \cdot B^{-1}| = |A||B^{-1}| = |A| \cdot \dfrac{1}{|B|} = 2(t+1)(t-2)\dfrac{1}{t^2(t-1)} = \dfrac{2(t+1)(t-2)}{t^2(t-1)}\ \forall t \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Problema 4 (4 puntos)

a) Mediante un proceso de mezclado continuo en tres tanques interconectados, una planta química produce tres compuestos, X, Y, Z, ligados a unos valores reales x, y, z, respectivamente, llamados pseudodensidades. Las pseudodensidades en los tanques deben estar en equilibrio para mantener la concentración deseada de los productos. Los ingenieros del proceso han establecido las siguientes condiciones de equilibrio:

- **Tanque 1:** La suma de la pseudodensidad x, más el triple de la pseudodensidad y, más la pseudodensidad z ha de valer 5.
- **Tanque 2:** La suma de α veces la pseudodensidad x, más el doble de la pseudodensidad z debe anularse, donde α es el factor catalizador.
- **Tanque 3:** La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y.

Se pide:

a.1 (1,25 puntos) Estudiar la existencia y el número de soluciones x, y, z (las posibles configuraciones de equilibrio) en función de los valores del factor catalizador α.

a.2 (1,25 puntos) Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$, el proceso alcanza estados de equilibrio factibles. En este caso, calcular, si existen, los valores x, y, z, en función del valor α.

b) Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

b.1 (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones $Ax = Bx + b$.

b.2 (0,75 puntos) Hallar el valor de $det(A^5(2B)^{-1})$.

b.3 (0,75 puntos) Calcular los valores de α y β, si existen, que satisfacen $\alpha A + \beta B = I$, siendo I la matriz identidad.

Solución:

a) a.1 $\left\{ \begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ \alpha x+2z=0 \\ z=\alpha y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ \alpha x+2z=0 \\ \alpha y-z=0 \end{array} \right.$

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = \alpha(\alpha+1) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ y $\alpha = -1$.

☛ Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (solución única)

☛ Si $\alpha = -1$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) =$

$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (no tiene solución)

☛ Si $\alpha = 0$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$

Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

a.2 Para $\alpha = 0$:

$\left\{ \begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ 2z=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5-3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$

Para $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$ por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{10}{\alpha+1},\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{5}{\alpha+1} \text{ y } z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{vmatrix}}{|A|} == \frac{5\alpha}{\alpha+1}$$

b) b.1 $Ax = Bx + b \Longrightarrow Ax - Bx = b \Longrightarrow (A-B)x = b \xrightarrow{|A-B|=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=7\neq 0}$

$$x = (A-B)^{-1}b = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$$

b.2 $|A^5(2B)^{-1}| = |A^5| \cdot |(2B)^{-1}| = |A|^5 \cdot \frac{1}{|2B|} = \frac{|A|^5}{4|B|} = \frac{3^5}{4 \cdot 19} = \frac{243}{76}$

b.3 $\alpha A + \beta B = I \Longrightarrow \alpha\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+5\beta & -\alpha-2\beta \\ \alpha+2\beta & \alpha+3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 2\alpha+5\beta = 1 \\ -\alpha-2\beta = 0 \\ \alpha+2\beta = 0 \\ \alpha+3\beta = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

www.inusa.it